Cálculo diferencial e integral, Análisis Numérico

Kevin Alexander Orellana Flores, 00151220

The abstract goes here.

***Index Terms*—IEEE, IEEEtran, IEEE Transactions on Magnetics, journal, LaTeX, magnetics, paper, template.**

I. INTRODUCCIÓN

El cálculo de las matemáticas es una de las ciencias más importantes para el desarrollo humano.
Desde el principio de los tiempos han existido diferentes técnicas y métodos que han ayudado a la población humana a poder resolver problemas prácticos en dónde las matemáticas son una parte fundamental del proceso de la solución.

Teóricamente pueden modelarse ciertas funciones para poder ser resueltas con el fin de un enfoque pedagógico y de aprendizaje pero en el ámbito profesional y práctico de la vida real, muchas veces se presentan ciertas funciones que suponen un desafío y una complejidad que no se puede resolver con las soluciones algebraicas que son las que devuelven un valor exacto y preciso de la función.

Es por eso que existen técnicas y métodos que son llamados ''Métodos Numéricos.º también a veces llamado ''Soluciones Numéricas''que permiten resolver problemas que involucran funciones que son demasiado complejas o no tienen una solución exacta por cálculos elementales.

Los métodos numéricos, denominados así porque, usualmente, consisten en realizar una sucesión más o menos larga de operaciones numéricas (normalmente mediante la ayuda de un ordenador), al cabo de las cuales encontramos un valor numérico que, si bien no es la solución exacta del problema, se le parece mucho, es decir, aproxima la solución buscada con una precisión razonablemente buena. [**?**]
En este reporte se abordarán 4 métodos numéricos pertenecientes a la rama del Cálculo diferencial e integral.
Los cuatro métodos numéricos que se abordarán en este reporte son:

- **Método de Romberg**
- **Método de Simpson**
- **Cuadratura Gaussiana**
- **Diferencia media**

Existen ciertas aplicaciones en las que se puedan utilizar estos métodos, pero en las que se enfocará este reporte serán las 4 siguientes:

- **Enésima derivada en un punto particular**
- **Cálculo de áreas**
- **Cálculo de volúmenes**
- **Sólidos de revolución**

II. MÉTODO DE ROMBERG

II-A. *Descripción*

La integración de Romberg es una técnica diseñada para obtener integrales numéricas de funciones de manera eficiente. Se basa en aplicaciones sucesivas de la regla del trapecio. [**?**]
Werner Romberg (1909–2093) concibió este procedimiento para mejorar la precisión de la regla trapezoidal al eliminar términos sucesivos en la expansión asintótica en 1955. [**?**]

Este método requiere del uso de la regla del trapecio de aplicación múltiple, además de 2 estimaciones de la integral para obtener una tercera estimación más exacta.

Deducción: [**?**]
Si partimos del hecho de que se requieren 2 estimaciones y se conoce que la estimación y el error correspondiente a la regla del trapecio

de aplicación múltiple se representa de manera general como:

$$I = I(h) + E(h) \tag{1}$$

Donde I es la estimación de la integral, h es el paso de integración, $I(h)$ es la estimación de la integral con el paso de integración h, y $E(h)$ es el error de truncamiento.

Entonces nuestras 2 estimaciones, usando tamaño de paso h_1 y h_2, se representan de manera general como:

$$I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2) \tag{2}$$

Además el error de la regla trapezoidal múltiple puede representarse en forma aproximada con la ecuación:

$$E \approxeq \frac{b-a}{12} h^2 f'' \tag{3}$$

Vamos a suponer que f'' es constante para cada paso en h, así podemos determinar la razón entre los dos errores, de las dos estimaciones que necesitamos, lo cuál sería:

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \approxeq \frac{h_1}{h_2} \tag{4}$$

Reagrupamos la ecuación 4 para poder sustituirla en la ecuación 2:

$$E(h_1) \approxeq E(h_2) \frac{h_1}{h_2}^2 \tag{5}$$

Al sustituir nos queda:

$$I(h_1) + E(h_2) \frac{h_1}{h_2}^2 \approxeq I(h_2) + E(h_2) \tag{6}$$

Despejando $E(h_2)$:

$$E(h_2) \approxeq \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - (h_1/h_2)^2} \tag{7}$$

A fin de obtener una mejor estimación de la integral, podemos sustituir en la ecuación 1:

$$I \approxeq I(h_2) + \frac{1}{(h_1/h_2)^2 - 1} |I(h_2) - I(h_1)| \tag{8}$$

Al demostrarse el error de esta estimación, da como resultado $O(h^4)$. Es un resultado mayor al del error de estimación al utilizar solo la regla del trapecio ($O(h^2)$). Este resultado se ha logrado al utilizar 2 estimaciones $O(h^2)$.

Si utilizamos un caso donde el paso h_2 es dividido por la mitad de h_1, la ecuación se convierte en:

$$I \approxeq I(h_2) + \frac{1}{2^2 - 1} |I(h_2) - I(h_1)| \tag{9}$$

Al simplificar y agrupar términos de la ecuación, obtenemos:

$$I \approxeq \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1) \tag{10}$$

Este procedimiento es un subconjunto de un método más general para combinar integrales y obtener mejores estimaciones.

Entonces podemos seguir reduciendo el paso h sucesivamente para obtener mejores estimaciones, por ejemplo al dividir nuevamente por la mitad la ecuación anterior obtenemos una exactitud de $O(h^6)$, quedando la siguiente ecuación:

$$I \approxeq \frac{16}{15} I_m - \frac{1}{15} I_l \tag{11}$$

Así podemos ir dividiendo por la mitad el paso h y la exactitud irá mejorando en cada iteración.

Existe una forma general para representar todo este proceso con una ecuación, y es atribuida a Romberg, la cuál se representa de la siguiente manera:

$$I_{j,k} \approxeq \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1} \tag{12}$$

También es llamado Algoritmo de Integración de Romberg.

Dónde:

- $I_{j+1,k-1}$ es la integral más exacta,
- $I_{j,k-1}$ es la menos exacta,
- $I_{j,k}$ es la integral mejorada,
- k significa el nivel de la integración
- j se usa para distinguir entre las dos estimación más y menos exacta.

Esta ecuación es de las más adecuadas para llevar su implemntación a la computadora.

II-B. Demostraciones de convergencia

Al aplicar el método de Romberg, y utilizando el nivel 1 de integración es decir, en el momento que $k = 1$, se obtiene una estimación de la integral de f entre a y b, de manera que el error de la estimación es $O(h^2)$. Es decir que al utilizar $k = 1$, se está utilizando la regla del trapecio para estimar la integral.

Como este método se basa en dividir por la mitad el paso h en cada iteración, y con la deducción hecha, al utilizar el nivel 2, es decir con $k = 2$, y $j = 1$, se obtiene la ecuación:

$$I_{1,2} \approxeq \frac{4}{3}I_{2,1} - \frac{1}{3}I_{1,1} \tag{13}$$

La cual tiene una convergencia de $O(h^4)$, y así al ir aumentando el nivel de la integración, se va aumentando la exactitud de la estimación en (h^{2n}). Es decir la convergencia será mucho mayor por cada aumento del nivel de integración.

II-C. Análisis del error

El criterio de paro o terminación puede darse mediante una ecuación del error relativo porcentual, para detenerse cuándo se esté satisfecho con los resultados obtenidos. La ecuación con un método útil para calcular el error relativo porcentual es la siguiente:

$$|E_a| = |\frac{I_{1,k} - I_{1,k-1}}{I_{1,k}}|100\,\% \tag{14}$$

II-D. Análisis de la eficiencia del método

Evidentemente al tener una convergencia que aumenta en factor de h^{2n}, el método de Romberg es muy eficiente. Sobretodo al compararlo con otros métodos y obtener las cantidades de iteraciones necesarias para obtener un resultado que satisfaga el criterio de paro, podemos determinar la eficiencia del método.

A continuación se presenta el ejemplo 22.1 de la página 652, obtenido de [**?**]

Teniendo la función $f(x) = 0{,}2+25x-200x^2+675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ y el intervalo $[0, 0{,}8]$. Al evaluarse esa integral, por medio de aplicaciones simples y múltiples de la regla del trapecio, se obtuvieron los siguientes resultados:

Cuadro I
EJEMPLO ANALISIS DE LA EFICIENCIA DEL MÉTODO

Segmentos	h	0.1728	$E_t\,\%$
1	0.8	0.1728	89.5
2	0.4	1.0688	34.9
4	0.2	1.4848	9.5

Se utiliza el metodo de Romberg, para obtener una estimación de la integral, recordamos que con el nivel 1, cuando $k = 1$, se obtiene el mismo resultado que el de la regla de trapecio. Cuándo utilizamos el nivel 2 de integración, es decir cuando $k = 2$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$I_{1,2} \approxeq \frac{4}{3}I_{2,1} - \frac{1}{3}I_{1,1} \tag{15}$$

Obteniendo un resultado de $I_{1,2}$ = 1.367467.

Al trabajar con la siguiente iteración se obtiene un resultado de $I_{1,3}$ = 1.640533

Al trabajar con la iteración de nivel 4, obtenemos exactamente el mismo resultado $I_{1,3}$, por lo que hemos llegado a nuestra condición de paro.

Hemos llegado a la condición de paro en tan solo 3 iteraciones con el método de Romberg, al compararlo con otros métodos cómo por ejemplo la regla de Simpson, se obtiene una eficiencia mucho mejor, ya que realizando el ejemplo por el método de Simpson, este se tardaría 256 segmentos en poder llegar al mismo resultado obtenido con Romberg.

Incluso, al exigir un resultado exacto con 7 cifras significativas, Romberg solo tarda 15 evaluaciones en poder obtener el resultado exacto, demostrando que es muy eficiente y que possee una convergencia mucho más veloz que la regla del trapecio y la regla de Simpson.

II-E. Ventajas y desventajas del método

II-E1. Ventajas

Ventajas del método de Romberg:

- Es un método con una convergencia mucho más rápida que los demás métodos, por ejemplo al compararlo con el método de Simpson y la regla del trapecio
- Su convergencia aumenta a factor de h^{2n} por cada iteración, brindando resultados muy veloces
- La adaptación a la computarización del método por medio de la ecuación de la forma general presentada por Romberg es de una dificultad baja para el que lo implementa, sin importar el lenguaje y/o software utilizado.
- El cálculo del error relativo como condición de paro es muy intuitivo, fácil y rápido

II-F. *Desventajas*

Desventajas del método de Romberg:

- Depende de conocer 2 estimaciones de la integral que se está calculando
- No se puede trabajar con él sin conocer la función de la integral que se está buscando evaluar
- Si se desea trabajar a mano, requiere un arduo trabajo, ya que se necesita calcular el nuevo resultado por la regla del trapecio al aumentar el nivel de integración, es decir se hace un doble trabajo por cada nueva iteración realizada.

II-G. *Seudo-código*

Seudo-código del método de Romberg: [**?**]

ENTRADA: Extremos a, b; entero n > 0
SALIDA: un arreglo R (calcule R por renglones; solo los 2 últimos renglones se guardan en almacenamiento)
PROCESO:

- PASO 1; tomar el valor de $h = (b - a)$;
  $R_{1,1} = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$;
- PASO 2; SALIDA ($R_{1,1}$);
- PASO 3; Para i = 2, ..., n hacer pasos 4-8;
- PASO 4; Tomar $R_{2,1}$ =
  $$[R_{1,1} + h\sum_{k=1}^{2^{i-1}} f(a) + (k - 0{,}5)h]/2;$$
  (Aproximación por la regla del trapecio)
- PASO 5; Para j = 2,...,i;
  Tomar $R_{2,j} = R_{2,j-1} + \frac{R_{2,j-1} - R_{1,j-1}}{4^{j-1}-1}$;
  (Extrapolación)
- PASO 6; SALIDA ($R_{2,j}$ por j= 1,2,...,j);
- PASO 7; Tomar $h = \frac{h}{2}$;
- PASO 8; Para j = 1,2,...,i; Tomar $R_{1,j} = R_{2,j}$;
  (Actualizar el renglón 1 de R)
- PASO 9; PARAR;

Seudo-código más detallado: [**?**]
$FUNCTION\ Romberg(a, b, maxit, es)$
$LOCAL\ I(10, 10)$
$n = 1$
$I_{1,1} = TrapEq(n, a, b)$
$iter = 0$
$DOFOR$
$iter = iter + 1$
$n = 2^iter$
$l_{iter+1,1} = TrapEq(n, a, b)$
$DOFOR\ k = 2, iter + 1$
$j = 2 + iter – k$
$I_{j,k} = (4^{k–1} * I_{j+1,k–1} – I_{j,k–1})/(4^{k–1} – 1)$
$END\ DO$
$ea = ABS((I_{1,iter+1} – I_{2,iter})/I_{1,iter+1}) * 100$
$IF\ (iter \geq maxit$ OR $ea \leq es)\ EXIT$
$END\ DO$
$Romberg = I_{1,iter+1}$
$END\ Romberg$

II-H. *Ejemplos*

Ejemplos del método de Romberg: [**?**]

II-I. *Ejemplo 1*

Evaluar con el método de Romberg, con un error máximo de 5 cifras significativas

$$\int_1^2 f(x) = \frac{1}{x}dx \tag{16}$$

1. Supongamos que $T_{N,1}$ es la aproximación de la integral de $f(x)$ en el intervalo $[1, 2]$ beginalign* por medio de la regla

trapezoidal con $n = 2^N$ subintervalos. Se tendrá la siguiente relación de recurrencia que permite calcular dicha aproximación:

$$T_{n,1} = \frac{1}{2}[T_{N-1,1} + \frac{b-a}{2^{N-1}} \sum_{i=1 \triangle i=2}^{2^N-1} f(a+(\frac{b-a}{2^N}i))] \tag{17}$$

2. Los restantes términos de las distintas sucesiones se calculan mediante la fórmula general de extrapolación de Romberg:

$$T_{n,j} = \frac{4^{j-1}T_{N+1,j-1} - T_{N,j-1}}{4^{j-1}-1} \tag{18}$$

3. A continuación se presenta la tabla con los valores calculados para los TN, j mediante (17) y (18):

Cuadro II
EJEMPLO 1

N	J=1	2	3	4
0	0.750000	0.694445	0.693175	0.693148
1	0.708334	0.693254	0.693148	
2	0.697024	0.693155	0.693146	
3	0.694122	0.693147		
3	0.693391			

4. Teniendo en cuenta que el valor exacto de la integral es Ln(2)=0.693147, las aproximaciones conseguidas se pueden considerar como buenas. Las pequeñas diferencias entres sucesiones son debidas al error de redondeo.

II-J. Ejemplo 2

Usar el algoritmo de Romberg para calcular el valor de la integral de $f(x)$ usando segmentos de 1, 0.5 y 0.25

$$\int_0^1 f(x) = e^{x^2} dx \tag{19}$$

1. Se hace la integración de nivel 1, usando la regla del trapecio
   - $(h_1 = 1)$:
   $$I(h_1) = \frac{1-0}{2}[e^{0^2} + e^{1^2}] = 1{,}859140914 \tag{20}$$
   - $(h_2 = 0{,}5)$:
   $$I(h_2) = \frac{1-0}{4}[e^{0^2} + 2e^{(\frac{1}{2})^2} + e^{1^2}] = 1{,}571583165 \tag{21}$$
   - $(h_3 = 0{,}25)$:
   $$I(h_3) = \frac{1-0}{8}[e^{0^2} + 2[e^{(\frac{1}{4})^2} + e^{(\frac{2}{4})^2} + e^{(\frac{3}{4})^2}] + e^{1^2}] = 1{,}490678 \tag{22}$$
2. Ahora se pasa al segundo nivel de aproximación donde se usa la fórmula que se dedujo anteriormente:
   $$\frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1) \tag{23}$$
   Donde $I(h_1)$ es la integral menos exacta (la que usa menos subintervalos) e $I(h_2)$ es la más exacta (la que usa el doble de subintervalos).
3. Utilizando $h1 = h1$ (calculado anteriormente) y $h2 = h2$ (calculado anteriormente) se obtiene:
   $$\frac{4}{3}(1{,}571583165) - \frac{1}{3}(1{,}859140914) = 1{,}475730582 \tag{24}$$
   Utilizando $h1 = h2$ (calculado anteriormente) y $h2 = h3$ (calculado anteriormente) se obtiene:
   $$\frac{4}{3}(1{,}490678862) - \frac{1}{3}(1{,}571583165) = 1{,}463710761 \tag{25}$$
4. Se continua con la integración de nivel 3, usando la ecuación:
   $$\frac{16}{15}I_m - \frac{1}{15}I_l \tag{26}$$
   Donde: I_l es la integral menos exacta (la que usa menos subintervalos) e I_m es la más exacta (la que usa el doble de subintervalos).
5. Se obtiene como resultado de la integración de nivel 3:

$$\frac{16}{15}(1{,}46...) - \frac{1}{15}(1{,}47...) = 1{,}46290944 \tag{27}$$

Siendo un resultado bastante aproximado y preciso, si se desea obtener un resultado más exacto, se puede seguir subiendo el nivel de la integración.
Por ejemplo para el nivel 4 de integración se utilizará la ecuación:

$$\frac{64}{63}I_m - \frac{1}{63}I_l \tag{28}$$

Donde: I_l es la integral menos exacta (la que usa menos subintervalos) e I_m es la más exacta (la que usa el doble de subintervalos).

III. MÉTODO DE SIMPSON

III-A. *Descripción*

Teorema de Simpson o Regla de Simpson, llamada así en honor a Thomas Simpson (1710-1761) y en ocasiones llamada Regla de Kepler.

Gracias al uso de polinomios interpolantes de segundo grado, Simpson es una mejora de la regla del trapecio, y pertenece junto con este ultimo a las llamadas Formulas de integracion de "Newton-Cotes".

Deducción: [?]
Partimos utilizando la fórmula de Newton-Cotes utilizando un polinomio interpolante de segundo grado:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_2(x) \tag{29}$$

Si se designa a y b como x_0 y x_2 respectivamente y $f_2(x)$ se representa por un polinomio de Lagrange de segundo grado, la integral se transforma en:

$$\begin{aligned} I = \int_{x_0}^{x_2} [&\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+ \\ &\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+ \\ &\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)]dx \end{aligned} \tag{30}$$

Luego de la debida integración y manipulación algebraica, obtenemos la siguiente fórmula:

$$I \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \tag{31}$$

donde en este caso, $h = \frac{(b-a)}{2}$. Esta ecuación es conocida como **Regla de Simpson 1/3** debido a que h esta dividida entre 3.

Tambien cabe resaltar que la regla de Simpson $1/3$ tambien puede ser representada de la siguiente forma:

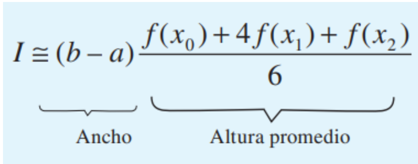

Figura 1. Fórmula de Simpson $1/3$ representada de la misma forma que el area de un trapecio

Aplicando la misma secuencia logica vista anteriormente para un polinomio de Lagrange de tercer grado a cuatro puntos obtenemos:

$$I \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \tag{32}$$

Donde $h = \frac{(b-a)}{3}$, además de esto a la fórmula anterior se le conoce como **Regla de Simpson 3/8** debido a que h se multiplica por $\frac{3}{8}$.

III-B. *Demostraciones de convergencia*

Dado que Simpson pertenece a la familia de las formulas de integración de Newton-Cotes, podemos ver un patron de convergencia. La Regla del Extremo Izquierdo [?] integra exactamente funciones constantes. Tiene una convergencia de $O(h)$.

A su vez la Regla del Trapecio integra exactamente funciones lineales. Tiene un convergencia de $O(h^2)$.

El orden n-esimo de la formula de Newton-Cote integra exactamente polinomios hasta el orden "n" converge a $O(h^n + 1)$.

Por lo que siendo la Regla de Simpson el segundo orden de la formula de Newton-Cote. Podemos concluir que Simpson converge a $O(h^3)$.

III-C. *Análisis del error*

Al igual que la regla del trapecio, Simpson $1/3$ se obtiene al integrar el polinomio de interpolacion de Newton-Gregory hacia adelante:

$$\begin{aligned}I = \int_{x_0}^{x_2} [f(x_0) + \Delta f(x_0)\alpha + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2}\alpha(\alpha-1) \\ +\frac{\Delta^3 f(x_0)}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \\ +\frac{f^4(\xi)}{24}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)h^4]dx\end{aligned}$$

Vemos que los limites de integracion van de x_0 a x_2. Por lo tanto, cuando se realizan las sustituciones para simplificar, la integral es de $\alpha = 0$ a 2:

$$\begin{aligned}I = h\int_{0}^{2} [f(x_0) + \Delta f(x_0)\alpha + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2}\alpha(\alpha-1) \\ +\frac{\Delta^3 f(x_0)}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \\ +\frac{f^4(\xi)}{24}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)h^4]d\alpha\end{aligned}$$

Al integrarse se tiene:

$$\begin{aligned}I = h[\alpha f(x_0) + \frac{\alpha^2}{2}\Delta f(x_0) + (\frac{\alpha^2}{6} - \frac{\alpha^2}{4})\Delta^2 f(x_0) \\ +(\frac{\alpha^4}{24} - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^2}{6})\Delta^3 f(x_0) \\ +(\frac{\alpha^5}{120} - \frac{\alpha^4}{16} + \frac{11\alpha^3}{72} - \frac{\alpha^2}{8})f^4(\xi)h^4]_0^2\end{aligned}$$

Y evaluando los límites se obtiene:

$$\begin{aligned}I = h[2f(x_0) + 2\Delta f(x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{3} \\ +(0)\Delta^3 f(x_0) - \frac{1}{90}f^4(\xi)h^4]\end{aligned}$$

Podemos observar que el coeficiente de la tercera diferencia dividida es cero. Debido a que $\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$ y $\Delta^2 f(x_0) = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)$, la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$I = \underbrace{\frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]}_{\text{Regla de Simpson 1/3}} - \underbrace{\frac{1}{90}f^{(4)}(\xi)h^5}_{\text{Error de truncamiento}}$$

Figura 2. Fórmula de Simpson $1/3$ junto al error de truncamiento

Así, el primer término es la regla de Simpson 1/3 y el segundo es el error de truncamiento. Puesto que se suprime la tercera diferencia dividida, se obtiene el resultado significativo de que la fórmula tiene una precisión de tercer orden.

Por otro lado, la regla de Simpson $3/8$ tiene un error de:

$$E_t = -\frac{3}{80}h^5 f^4(\xi) \tag{33}$$

Como podemos observar, en Simpson $3/8$ el denominador es mayor al visto en $1/3$ por lo que podemos decir con seguridad que la Regla de Simpson $3/8$ es más exacta que la Regla de Simpson $1/3$.

III-D. *Análisis de la eficiencia del método*

Para evidenciar la eficiencia del método se realizara un ejercicio por ambos métodos, obtenido de [**?**].

Con la siguiente ecuacion integrar numericamente: $f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ con el intervalo $[0, 0{,}8]$. El valor exacto de la integral es $1{,}640533$

Haciendo uso de la Regla del Trapecio. Al evaluar los limites tenemos:

$$f(0) = 0{,}2$$
$$f(0{,}8) = 0{,}232$$

Sustituyendo:

$$I \cong 0{,}8\frac{0{,}2 + 0{,}232}{2} = 0{,}1728$$

La cual representa un error de:

$$E_t = 1{,}640533 - 0{,}1728 = 1{,}467733$$

Ahora utilizando la Regla de Simpson $1/3$:
Evaluando los limites y el punto medio:

$$f(0) = 0{,}2$$
$$f(0{,}4) = 2{,}456$$
$$f(0{,}8) = 0{,}232$$

Utilizando figura 1:

$$I \cong 0{,}8\frac{0{,}2 + 4(2{,}456) + 0{,}232}{6} = 1{,}367467$$

Que representa un error exacto de:

$$E_t = 1{,}640533 - 1{,}367467 = 0{,}2730667$$
$$\varepsilon_t = 16{,}6\,\%$$

Que es aproximadamente 5 veces más precisa que una sola aplicación de la Regla del Trapecio.

III-E. *Ventajas y desventajas del método*

III-E1. *Ventajas*

Ventajas de la Regla de Simpson:

- Se obtienen resultados precisos para polinomios cuadraticos y cubicos.
- Es un método con una convergencia más rápida que la regla del trapecio
- La Regla de Simpson $1/3$ alcanza una precision de tercer orden aun cuando se base en solo tres puntos, por lo que da resultados exactos para polinomios cubicos aun cuando se obtenga de una parabola.

III-F. *Desventajas*

Desventajas de la Regla de Simpson:

- La Regla de Simpson $1/3$ es solamente utilizada cuando el numero de segmentos es par.
- Por otro lado la Regla de Simpson $3/8$ es utilizada cuando el numero de segmentos es impar.
- Lo que nos lleva a que en ciertas situaciones sera necesario utilizar tanto la regla $1/3$ como $3/8$ para obtener un resultado preciso.

III-G. *Pseudo-código*

Seudo-código de la Regla de Simpson $1/3$:

$Start$

$Define\ Function\ f(x)$

$Input\ lowerLimit,\ \ upperLimit,\ \ subInterval$

$Calculate\ :\ stepSize\ =\ (lowerLimit - upperLimit)/subInterval$

$Calculate\ Integration\ =\ f(lowerLimit) + f(upperLimit)$

$Set : i = 1$

$Loop$

$k = lowerLimit + i * stepSize$

$If(i\ \ mod\ \ 3 = 0)$

$Integration = Integration + 2 * f(k)$

$Else$

$Integration = Integration + 4 * f(k)$

$End\ If$

$i = i + 1$

$While\ i <= subInterval$

$Integration = Integration * stepSize/3$

$PrintIntegrationasResult$

$Stop$

Seudo-código de la Regla de Simpson $3/8$:

$Start$
$Define\ Function\ f(x)$

$Input\ lowerLimit,\ \ upperLimit,\ \ subInterval$

$Calculate\ :\ stepSize = (lowerLimit - upperLimit)/subInterval$

$Calculate\ Integration = f(lowerLimit) + f(upperLimit)$

$Set : i = 1$

$Loop$

$k = lowerLimit + i * stepSize$

$If(i \mod 3 = 0)$

$Integration = Integration + 2 * f(k)$

$Else$

$Integration = Integration + 3 * f(k)$

$End\ If$

$i = i + 1$

$While\ i <= subInterval$

$Integration = Integration * stepSize * 3/8$

$PrintIntegrationasResult$

$Stop$

III-H. Ejemplos

Ejemplos del método de Romberg: [?]

III-I. Ejemplo 1

Con Simpson $3/8$ integrar en 5 segmentos:

$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ con el intervalo $[0, 0{,}8]$

- Debemos hacer uso de $1/3$ y $3/8$ a la vez.

Los datos necesarios para una aplicación con cinco segmentos ($h = 0{,}16$) son:

$$f(0) = 0{,}2 f(0{,}16) = 1{,}296919$$
$$f(0{,}32) = 1{,}743393 f(0{,}48) = 3{,}186015$$
$$f(0{,}64) = 3{,}181929 f(0{,}80) = 0{,}232$$

La integral para los dos primeros segmentos se obtiene usando la regla de Simpson $1/3$:

$$I \cong 0{,}32\frac{0{,}2 + 4(1{,}296919) + 1{,}743393}{6} = 0{,}3803237$$

Para los últimos tres segmentos, la regla $3/8$ se utiliza para obtener:

$$I \cong 0{,}48\frac{1{,}743393 + 3(3{,}186015 + 3{,}181929) + 0{,}232}{8} = 1{,}264754$$

La integral total se calcula sumando los dos resultados:

$$I = 0{,}3803237 + 1{,}264754 = 1{,}645077$$

III-J. Ejemplo 2

Aproxmiar la integral: $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ con $n = 2$ subintervalos:

- Hacemos uso de la Regla $1/3$

$$I \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

El ancho del subintervalo es:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

Calculando los limites y el valor medio:

$$f(x_0) = 1$$
$$f(x_1) = \frac{2}{3}$$
$$f(x_2) = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo:

$$I \cong \frac{0{,}5}{3}[1 + 4(\frac{2}{3}) + \frac{1}{2}]$$

Teniendo finalmente como resultado:

$$I = \frac{25}{36} \approx 0{,}694444$$

IV. CUADRATURA GAUSSIANA

IV-A. *Descripción*

Gauss plantea tomar puntos de la función que estén ubicados en partes distintas del intervalo para optimizar el cálculo del área o la integral de la manera mas exacta y precisa posible, con Gauss eliminamos la restricción de los puntos fijos sin la necesidad de que estén igualmente espaciados. Se plantea de la siguiente manera:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i) = \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2) + \cdots + \omega_n f(x_n)$$

Figura 3. Forma general de la cuadratura de Gauss

Consiste en remplazar la integral definida de la función por una sumatoria de coeficientes c_1, c_2 $\ldots c_n$ multiplicado por los valores evaluados en la función x_1, x_2 $\ldots x_n$. Entre mas coeficientes de c y x apliquemos, mejor será la precisión y menor será el error de este método. Para obtener los valores para poder realizar el método en dos puntos de integración.

$$F(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

Debemos utilizar el siguiente polinomio de tercer grado de Gauss que nos garantiza una integral exacta.

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 = C_0 + C_1$$

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0 = C_0X_0 + C_1X_1$$

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} = C_0X_0^2 + C_1X_1^2$$

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 = C_0X_0^3 + C_1X_1^3$$

Mediante un sistema de ecuaciones, encontramos las incógnitas faltantes para así poder realizar el método en dos puntos.Así con estos datos podemos encontrar la integral de Gauss para dos puntos, pero realmente podemos utilizar a Gauss para más puntos dependiendo del grado del polinomio y también así aumentando lo máximo posible su precisión.

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5773503$$

$$x_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -0{,}5773503$$

$$c_0 = c_1 = 1$$

Asi, con los polinomios de Legendre podemos obtener tanto los puntos de integracion x y los coeficientes c para n puntos distintos, en la siguiente tabla se muestran los valores hasta para 5 puntos:

Cuadro III
VALORES DE x Y c HASTA 5 PUNTOS

Puntos	Pesos	Valores de la funcion
2	c_0 = 1 c_1 = 1	x_0 = –0.577350269 x_1 = 0.577350269
3	c_0 = 0.5555556 c_1 = 0.8888889 c_2 = 0.5555556	x_0 = –0.774596669 x_1 = 0 x_2 = 0.774596669
4	c_0 = 0.3478548 c_1 = 0.6521452 c_2 = 0.6521452 c_3 = 0.3478548	x_0 = –0.861136312 x_1 = –0.339981044 x_2 = 0.339981044 x_3 = 0.861136312
5	c_0 = 0.2369269 c_1 = 0.4786287 c_2 = 0.5688889 c_3 = 0.4786287 c_4 = 0.2369269	x_0 = –0.906179846 x_1 = –0.538469310 x_2 = 0 x_3 = 0.538469310 x_4 = 0.906179846

Los limites de integracion fueron especificados de -1 a 1 para poder hacer el metodo mas simple y general posible, pero la mayoria de las funciones no cumpliran estos limites, es por eso que se necesita realizar una transformacion de los intervalos de integracion.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-1}^{1} g(t)dt$$

Siendo a nuestro limite inferior y b nuestro limite superior podemos hacer lo siguiente:

$$x = \frac{(b+a)+(b-a)x_d}{2}, dx = \frac{(b-a)}{2}dx_d$$

una vez tenemos x y dx podemos remplazarla en nuestra integral original, y asi obtener nuestra nueva funcion $g(x)$ transformada a sus nuevos limites de -1 a 1.

IV-B. Demostraciones de convergencia

Las aplicaciones de la cuadratura Gaussiana son de una gran sustento matematico para las integrales, el calculo de areas bajo la curva e interpolacion de polinomios, Dada su naturaleza creciente de valores de n, esto hace que su aceleracion de convergencia sea mayor conforme mas nodos o mas grados tenga el polinomio, en el siguiente grafico se muestra la convergencia, en función del grado n de Legendre:

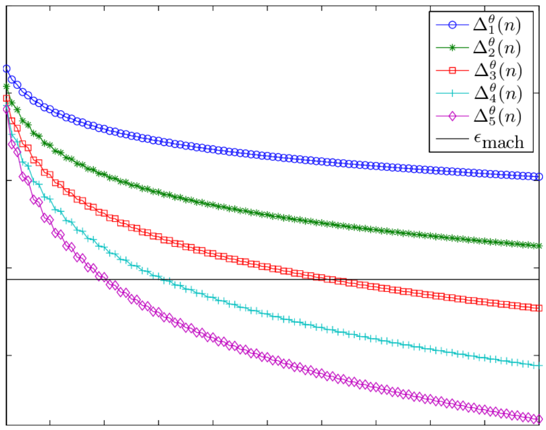

Figura 4. Convergencia de Gauss - Legendre

Esto implica una complejidad O(n) para n puntos, donde los polinomios de lagrenge van obteniendo una mayor precision mientras aumentan los nodos.

$$I_1 = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$
$$I_2 = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$I_n = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_n + f(x_n)$$

IV-C. Análisis del error

Para el analisis del error necesitamos una tolerancia que este alojada entre los limites arbitrarios desde -1 a 1 donde n es el numero de nodos menos 1, aunque sea la formula de integracion de Gauss mas utilizada, este metodo presenta un error mas grande o pequeño dependiendo sobre todo del numero de nodos que se use, la formula para el analisis del error es la siguiente:

$$E_t = \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3} f^{(2n+2)}(\xi)$$

Figura 5. Formula del error de Cuadratura Gaussiana

IV-D. Análisis de la eficiencia del método

Las diferentes aplicaciones de Cuadratura suelen necesitar un numero pequeño de nodos para funcionar pero muchas veces la cuadratica gaussiana necesita mas nodos de lo habitual haciendo otros metodos de cuadratura mas calificados.

a continuacion las tabla con los distintos tipos de errores que presentan los distintos metodos de cuadratura y su efeciencia en nodos y pesos:

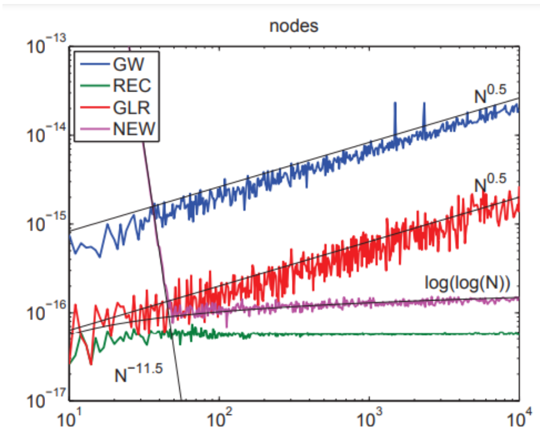

Figura 6. Grafica comparativa de eficiencia en los nodos

Como se puede ver en las tablas, la complejidad y eficiencia de la cuadratura Gaussiana empeora conforme n va en aumento, mientras que nuevos metodos basados en el metodo de newton son muy efectivos en los casos donde la n es un numero bastante mas grande.

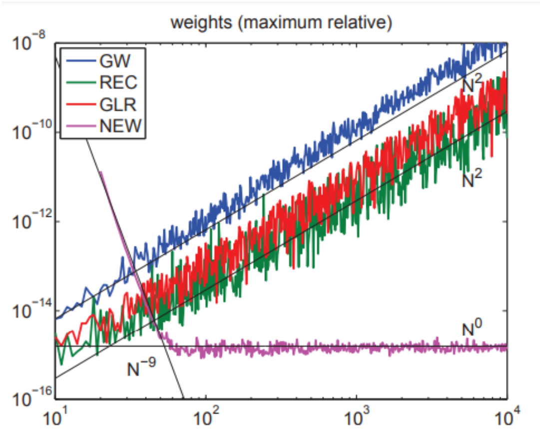

Figura 7. Grafica comparativa de eficiencia en los pesos

Cuadro IV
TABLA COMPARATIVA DE ERROR Y RAPIDEZ

Metodo	E_{abs} $\{x_k\}$	E_{rm} $\{w_k\}$	Rapidez
GW	$O(\sqrt{n})$	$O(n^{3/2})$	$O(n^2)$
REC	$O(1)$	$O(n)$	$O(n^{1,7})$
GLR	$O(\sqrt{n})$	$O(n)$	$O(n)$
NEW	O(log(log(n)))	O(log(log(n)))	$O(n)$

IV-E. *Ventajas y desventajas del método*

IV-E1. *Ventajas*

- Es una de los metodos mas rapidos de todos a pesar de tener que aumentar su numero de nodos y evaluaciones.
- No necesita puntos de evaluacion que este igualmente separados entre si ya que los selecciona de la manera mas optima.
- tanto los pesos como los valores de evaluacion ya estan arbitrareamente dados, solo dependera de cuantos nodos tiene o el grado del polinomio

IV-E2. *Desventajas*

- Entre mas rigurosa sea la tolerancia habra que aumentar el numero de nodos teniendo asi que hacer mas evaluaciones.
- Al estar limitada solo entre los intervalos [-1,1], puede que algunas funciones presenten singularidades
- Los puntos de evaluacion van cambiando conforme con los anteriores

IV-F. *Pseudo-código*

Seudo-código del la Cuadratura Gaussiana: [?]

ENTRADA: Limites de integracion a, b, F funcion a evaluar y m numero de nodos
SALIDA: Integral calculada (se guardan en almacenamiento)
PROCESO:

- PASO 1; Se opera $c_1 = (b+a)/2$ y $c_1 = (b-a)/2$.
- PASO 2; El FOR desarrollla la sumatoria y evalua en la funcion a partir de los valores anteriores.
- PASO 3; Por ultimo se calcula la integral sustituyendo el resultado de la sumatoria en la ecuacion general de la cuadratura Gaussiana.
- PASO 4; se imprime el resultado.

Pseudo-código más detallado: [?]
$FUNCTION\ gaussQuad(f, a, b, m,)$
$c_1 = (b+a)/2$
$c_2 = (b-a)/2$
$x, A = gaussNodes(m)$
$sum = 0{,}0$
$DOFOR\ K = X$
$ITER = ITER + 1$
$sum = sum + A[ITER] * f(c1 + c2 * x[ITER])$
$ENDDO$
$return\ c2 * sum$
$END\ gaussQuad$

IV-G. *Ejemplos*

Aplicaremos la cuadratura gaussiana para encontrar el area bajo la curva de la siguiente integral:

$$\int_0^3 f(x) = \frac{e^x sen(x)}{1+x^2} dx \tag{21}$$

1. Primero necesitaremos hacer el cambio de limites de [0,3] a [-1,1] a traves de las formulas ya vistas:

$$x = \frac{(b+a)+(b-a)x_d}{2}, dx = \frac{(b-a)}{2} dx_d$$

2. Evaluamos las variables [0,3] en a y b:

$$x = \frac{(3+0)+(3-0)x}{2} = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$dx = \frac{(3-0)}{2}dx = \frac{3}{2}dx$$

3. Ahora remplazamos x y dx en nuestra funcion:

$$f(\frac{3}{2}x_n + \frac{3}{2}) = \frac{e^{\frac{3}{2}x_n+\frac{3}{2}} sen(\frac{3}{2}x_n + \frac{3}{2})}{1+(\frac{3}{2}x_n+\frac{3}{2})^2}$$

4. Evaluamos x_n con los coeficientes de la cuadratura gaussiana para 2 puntos:

$$f(\frac{3}{2}x_0 + \frac{3}{2}) =$$

$$\frac{e^{\frac{3}{2}(-0{,}5773502)+\frac{3}{2}} sen(\frac{3}{2}(-0{,}5773502) + \frac{3}{2})}{1+(\frac{3}{2}(-0{,}5773502)+\frac{3}{2})^2} = 0{,}796501031$$

$$f(\frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}) =$$

$$\frac{e^{\frac{3}{2}(0{,}5773502)+\frac{3}{2}} sen(\frac{3}{2}(0{,}5773502) + \frac{3}{2})}{1+(\frac{3}{2}(0{,}5773502)+\frac{3}{2})^2} = 1{,}130596636$$

5. Una vez contamos con todos los datos solo debemos realizar la sumatoria:

$$I = \frac{3}{2}[w_0 f(\frac{3}{2}x_0 + \frac{3}{2}) + w_1 f(\frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2})]$$

$$I = \frac{3}{2}[(1)(0{,}796501031)+(1)(1{,}130596636)]$$

6. Dandonos como respuesta final:

$$I = 2{,}890646501$$

En este caso tenemos un error algo elevado ya que el valor teorico de la integral es de 2,88163, por lo que si quisieramos obtener una valor mas exacto deberiamos aumentar el numero de nodos.

V. Diferencia Media

V-A. *Descripción*

Para comenzar, se desarrollan las fórmulas de diferencias finitas para aproximar derivadas. El metódo de diferencias finitas está basado en aproximaciones que permiten reemplazar ecuaciones diferenciales por ecuaciones de diferencia. Estas aproximaciones de diferencia finita son de forma algebraica; relacionan el valor de la variable dependiente, en un punto dentro de la region de solución, con sus valores en algunos puntos vecinos. Generalmente se representa como:

$$f'(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + O(x_{i+1} - x_i) \quad (21)$$

o

$$f'(x) = \frac{\Delta f_i}{h} + O(h) \quad (21)$$

donde a Δf_i se le conoce como la *primera diferencia hacia adelante* y a h se le llama el tamaño del paso o incremento; esto es, la longitud del intervalo sobre el cual se realiza la aproximación. $O(h)$ **es el error de truncamiento** que posee esta.

Se le llama diferencia "hacia adelante", porque usa los datos en *i* e *i + 1* para estimar la derivada. Al término completo $\Delta f/h$ se le conoce como primera diferencia finita dividida. Esta diferencia dividida hacia adelante es sólo una de tantas que pueden desarrollarse a partir de la serie de Taylor para la aproximación de derivadas numéricas. Por ejemplo, las aproximaciones de la *primera derivada utilizando diferencias hacia atrás o diferencias centradas*. Las primeras usan valores en x_{i-1} y x_i; mientras que las segundas utilizan valores igualmente espaciados alrededor del punto donde la derivada está estimada. Es posible desarrollar aproximaciones más exactas de la primera derivada incluyendo términos de orden más alto de la serie de Taylor.

Formulas de diferencias centradas

Si la funcion $f(x)$ puede evaluarse en puntos que estan a ambos lados de x, entonces la mejor formula que involucra dos puntos es la que utiliza abscisas situadas simetricamente a izquierda y derecha de x.

Las Formulas de Diferencias Centradas de orden $O(h^2)$ son:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{22}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \tag{23}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3} \tag{24}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4} \tag{25}$$

Cuando hacemos los cálculos con un computador, no es aconsejable elegir un h demasiado pequeño; por eso sería útil disponer de una fórmula que aproxime $f'(x)$ y que tenga un error de truncamiento de orden $O(h^4)$. Si se toman más puntos y más términos de la expansión de la serie de Taylor, podemos obtener las formulas de Diferencias Centradas con error de aproximación de orden $O(h^4)$, en consecuencia, es más exacta.

Las Formulas de Diferencias Centradas de orden $O(h^4)$ son:

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h} \tag{26}$$

$$f''(x) = \frac{-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)}{12h^2} \tag{27}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{-f(x+3h) + 8f(x+2h) - 13f(x+h) + 13f(x-h) - 8f(x-2h) + f(x-3h)}{8h^3} \tag{28}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-f(x+3h) + 12f(x+2h) - 39f(x+h) + 56f(x) - 39f(x-h) + 12f(x-2h) - f(x-3h)}{6h^4} \tag{29}$$

Deducción del método:

Para encontrar las formulas del metodo de *diferencia media o diferencias centrales* utilizamos la serie de Taylor de $f(x)$, alrededor de x, para $f(x+h)$ y $f(x-h)$:

$$f(x+h) = f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\frac{f^{(3)}(x)}{3!}h^3+\dots \tag{29}$$

y

$$f(x-h) = f(x)-f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2-\frac{f^{(3)}(x)}{3!}h^3+\dots \tag{29}$$

Para encontrar la Primera derivada de las diferencias centradas:
Restamos la expansion de $f(x-h)$ de $f(x+h)$ y obtenemos:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + 2\frac{f^{(3)}}{6}h^3 + \dots \tag{29}$$

Despejamos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{f^{(3)}(x)}{6}h^2 - \dots \tag{29}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}} \tag{29}$$

Esta es la primera derivada con un **error de truncamiento de orden de** $O(h^2)$

V-B. Demostraciones de convergencia

Cuando analizamos la $f'(x)$ de orden $O(h^2)$ observamos que si los valores de la tercera derivada $f^{(3)}(x)$ no cambia muy rápidamente, entonces el error de tuncamiento que aparece en

$f'(x)$ tiende a cero a la misma velocidad que h^2, lo que expresamos mediante la notación $O(h^2)$.

Ahora suponiendo que $f^{(5)}(x)$ está acotada cuando x recorre $[a, b]$, entonces el error de truncamiento de la expresión de la $f'(x)$ de orden $O(h^4)$ converge a cero a la misma velocidad que h^4, lo que se expresa mediante la notación $O(h^4)$.

Cuando comparamos ambas fórmulas suponiendo que $f(x)$ admite cinco derivadas continuas y que $f^{(3)}(x)$ y $f^{(5)}(x)$ valen más o menos lo mismo, entonces el error de truncamiento de la fórmula (26) es de orden $O(h^4)$ y convergera a cero más rápidamente que el error de truncamiento, que es de orden $O(h^2)$, de la fórmula (22); esto permite usar un incremento mayor para lograr la misma precisión.

V-C. *Análisis del error*

El error del uso de las formulas puede ser tomado del uso de la formula del error relativo porcentual, el cual nos dice la proporcion del error con respecto al valor exacto de la medicion.

$$E_{relativo} = \frac{Valor\ real - Valor\ aproximado}{Valor\ exacto} * 100 \tag{29}$$

Aplicandolo a nuestra formula de diferencias divididas seria:

$$E_{relativo} = \frac{f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}}{f'(x)} * 100 \tag{29}$$

Un aspecto importante a tomar en cuenta al hacer uso de estas formulas es los errores de redondeo cuando los calculos los realizamos en un computador. Podemos verlo de la siguiente manera, supongamos que usamos un computador para hacer los calculos de manera que escribimos:

$$f(x-h) = (y_{-1}) + e_{-1} \tag{29}$$

y

$$f(x+h) = y_1 + e_1 \tag{29}$$

donde se ha aproximado $f(x-h)$ y $f(x+h)$, y se obtienen los resultados en el computador de y_{-1} e y_1, teniendo errores de redondeo de e_{-1} y e_1

Entonces el error en una formula viene dado de la siguiente manera:

$$f'(x) = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + E(f, h) \tag{29}$$

donde

$$E(f, h) = E_{redondeo}(f, h) + E_{truncamiento}(f, h) \tag{29}$$

$$= \frac{e_1 - e_{-1}}{2h} - \frac{h^2 f^3(x)}{6} \tag{29}$$

o sea, el **termino del error total** $E(f, h)$ consta de una parte debida a los errores de redondeo mas otra debido al error de truncamiento.

V-D. *Análisis de la eficiencia del método*

Al comparar las formulas para la primera derivada de diferencia hacia delante, hacia atras y centrada, se puede apreciar que cada una de ellas requiere la misma cantidad de puntos de la malla para aproximar la derivada en un punto (en este caso dos puntos), la diferencia importante consiste en que la formula de diferencia centrada tiene un error de $O(h^2)$ mientras que las de diferencia hacia adelante y hacia atras tienen un error de $O(h)$

$$O(h^2) < O(h) \tag{29}$$

De lo anterior, se puede concluir que la exactitud de la aproximacion puede incrementarse basicamente de 2 formas:

(1) Incrementando el numero de puntos tomados en la construccion de la formula. Se obtiene una formula que involucre un mayor numero de puntos de la malla y con esto incremente su exactitud. Esto se logra al desarrollar y combinar cierto numero de series de Taylor tomando en cuenta un numero mayor de puntos, por ejemplo $F(x+2h)$, $F(x+3h)$, etc.

(2) Incrementando el numero de puntos en la malla. Dada una formula para cualquiera de las aproximaciones, entre mayor sea el numero de puntos en la malla, menor sera el valor del error. Entre mayor sea el numero de puntos que utilice una ecuacion para aproximar la solucion, y en los que este discretizada la region de solucion, mayor sera el trabajo computacional requerido. Por esta razon, es importante que el grado de exactitud de la solucion minimo requerido sea conocido, para evitar asÌ calculos innecesarios.

V-E. *Ventajas y desventajas del método*

Ventaja:
Comparando las formulas de diferencias centrales contra las diferencias hacia delante y atras se puede observar que el error de truncamiento es del orden de h^2 en contraste con las aproximaciones hacia adelante y hacia atrás, que son del orden de h. Por lo tanto, el análisis de la serie de Taylor ofrece la información práctica de que las diferencias centradas son una representación más exacta de la derivada.

Por ejemplo, si disminuimos el tamaño del incremento a la mitad, usando diferencias hacia atrás o hacia adelante, el error de truncamiento se reducirá aproximadamente a la mitad; mientras que con diferencias centradas el error se reduciría a la cuarta parte.

Desventaja:
Si sólo se puede evaluar la función en abcisas que están en un lado de x_0, entonces la Fórmulas de Diferencias Centradas no pueden usarse.

V-F. *Pseudo-código*

Este es el pseudo-codigo para la primera derivada de diferencia central el cual calcula la aproximacion a esta en comparacion al valor verdadero, ademas este disminuye el paso h de manera que se puede apreciar en una matriz los diferentes valores de h evaluados en la formula, y el error que este presenta, con la finalidad de observar como los diferentes valores de h se acercan o alejan al valor verdadero

ENTRADA: $func$ (es la funcion),$dfunc$ (derivada de la funcion en el orden que se busca calcular),x (valor en el que se deriva), n (numero de iteraciones), $paso$(distancia entre x y los puntos a los lados),div (divisor para el paso), $dftrue$ es la derivada evaluada en el valor de x
$H(i)$ es el valor actual de paso
$D(i)$ es la derivada actual evluada en $x+h$
$E(i)$ es el valor del error relativo porcentual actual

PASO 1; Sea $i=1$;
$h=paso$,
$dftrue=dfunc(x)$ $H(1)=h$
$D(1)=\frac{(func(x+h)-func(x-h)}{2h}$
$E(1)=abs(dftrue-D(1))$
PASO 2; Mientras $i\leq n$ hacer los pasos;
PASO 3; Calcular:
$H(i)=h$;
$D(i)=\frac{(func(x+H)-func(x-H)}{2h}$;
$E(i)=\frac{(dftrue-D(i))}{dftrue}*100$;
$h=h/div$
$L=[H,D,E]$
PASO 4; SALIDA "L" (El programa devuelve una matriz con los valores de paso, la primera derivada central evaluada en x y el error relativo porcentual que se obtiene)
PARE

V-G. *Ejemplos*

Use aproximaciones con diferencias centradas de $O(h^2)$ para estimar la primera derivada de

$$f(x)=0{,}1x^4-0{,}15x^3-0{,}5x^2-0{,}25x+1{,}25$$

en $x = 0{,}5$ utilizando un incremento de $h=0{,}5$. Repita el calculo con $h=0{,}25$. Observe que la derivada se calcula directamente como

$$f'(x)=-0{,}4x^3-0{,}45x^2-1{,}0x-0{,}25$$

y se puede utilizar para calcular el valor verdadero como $f'(0{,}5)=-0{,}9125$

SOLUCION Para $h = 0{,}5$, la funcion se emplea para determinar

$x-h=0$ $\quad f(x-h)=1{,}2$
$x=0{,}5$ $\quad f(x)=0{,}925$
$x+h=1{,}0$ $\quad f(x+h)=0{,}2$

y la deferencia dividida centrada es:

$$f'(0{,}5)=\frac{0{,}2-1{,}2}{1{,}0}=-0{,}1 \qquad |E_r|=9{,}6\,\%$$

Para $h = 25$,

$x - h = 0{,}25 \qquad f(x-h) = 1{,}10351563$
$x = 0{,}5 \qquad f(x) = 0{,}925$
$x + h = 0{,}75 \qquad f(x+h) = 0{,}6363813$

y la deferencia dividida centrada es:

$f'(0{,}5) = \frac{0{,}63632813 - 1{,}10351563}{0{,}5} = -0{,}934$
$|E_r| = 2{,}4\,\%$

VI. BIBLIOGRAFÍA