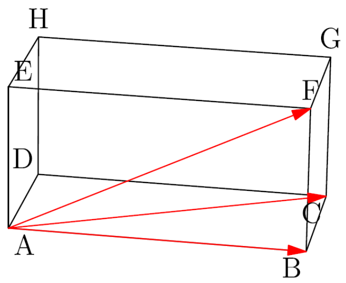
Exercícios Propostos[1]

⚠ *Segmentos orientados e vetores*

1. Sendo $ABCDEFGH$ o paralelogramo abaixo, expresse os seguintes vetores em função de $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ e $\overrightarrow{AF} = \vec{f}$.

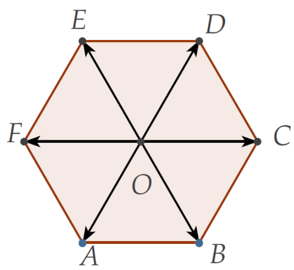


(a) $\overrightarrow{BF}$ (d) $\overrightarrow{BG}$ (g) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HG}$

(b) $\overrightarrow{AG}$ (e) $\overrightarrow{HB}$ (h) $\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{EF}$

(c) $\overrightarrow{AE}$ (f) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$ (i) $2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GH}$

2. Seja $ABCDEF$ um hexágono regular, como na figura abaixo. Expresse os seguintes vetores em função de $\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{DE}$.



(a) $\overrightarrow{DF}$ (c) $\overrightarrow{DB}$ (e) $\overrightarrow{EC}$ (g) $\overrightarrow{OB}$

(b) $\overrightarrow{DA}$ (d) $\overrightarrow{DO}$ (f) $\overrightarrow{EB}$ (h) $\overrightarrow{AF}$

3. Seja $ABCDEF$ um hexágono regular, como no exercício anterior. Expresse os seguintes vetores em função dos vetores $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ e $\overrightarrow{OE} = \vec{e}$.

(a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ (d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$

(b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA}$ (e) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{EF}$

(c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$ (f) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DE}$

4. Dado um triângulo ΔABC, sejam M, N e P os pontos médios dos segmentos AB, BC e CA, respectivamente. Exprima os vetores $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{CM}$ em função dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

[1] Resolva os exercícios sem omitir nenhuma passagem em seus cálculos. Respostas sem resolução e/ou justificativa não serão consideradas. **Data máxima de entrega: 28/05/2025 até 14:00 horas**

5. Considere um quadrilátero $ABCD$, tal que $\overrightarrow{AD} = 5\vec{u}$, $\overrightarrow{BC} = 3\vec{u}$ e tal que $\overrightarrow{AB} = 2\vec{v}$.

(a) Determine o lado $\overrightarrow{CD}$ e as diagonais $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{CA}$ em função de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(b) Prove que $ABCD$ é um trapézio usando vetores.

⚠ *Dependência linear*

6. Considere os vetores $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ e sejam $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\vec{c}$ e $\overrightarrow{BE} = \frac{5}{6}\vec{a}$. Escreva o vetor $\overrightarrow{DE}$ em termos de $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

7. Dados $\vec{a}$, $\vec{b}$ vetores LI, sejam $\overrightarrow{OA} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ e $\overrightarrow{OC} = 5\vec{a} + x\vec{b}$. Determine x de modo que os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$ sejam linearmente dependentes.

8. Sejam B um ponto no lado ON do paralelogramo $AMNO$ e C um ponto na diagonal OM tais que $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{n}\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{1+n}\overrightarrow{OM}$. Prove que os pontos A, B e C são colineares.

9. Mostre que se o conjunto de vetores $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é uma base para o plano, então o conjunto $\{2\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - 2\vec{v}\}$ também é uma base para o plano.

10. Suponha que os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ formam um conjunto LI.

(a) Mostre que os vetores $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ e $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ também são LI.

(b) Seja $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$. Mostre que os vetores $\vec{u} + \vec{t}$, $\vec{v} + \vec{t}$ e $\vec{w} + \vec{t}$ são LI se, e somente se, $a + b + c \neq -1$.

⚠ *Vetores em coordenadas e bases*

11. Dados os pontos $A = (1, 3, 2)$, $B = (1, 0, -1)$ e $C = (1, 1, 0)$, determine as coordenadas:

(a) Dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CA}$.

(b) Do vetor $\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

(c) Do ponto $C + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

(d) Do ponto $A - 2\overrightarrow{BC}$.

12. Determine quais dos conjuntos de vetores abaixo são LI.

(a) $\{(2, 3), (0, 2)\}$

(b) $\{(3, 0), (-2, 0)\}$

(c) $\{(2, 3, 4), (0, 3, 3)\}$

(d) $\{(1, -1, 2), (1, 1, 0), (1, -1, 1)\}$

(e) $\{(1, -1, 1), (-1, 2, 1), (-1, 2, 2)\}$

(f) $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (2, 0, 5)\}$

13. Faça a decomposição do vetor na base indicada.

(a) Exprima o vetor $\vec{w} = (1, 1)$ como combinação linear de $\vec{u} = (2, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1)$.

(b) Encontre as componentes do vetor $\vec{z} = (1, 2, 3)$ na base formada por $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$ e $\vec{c} = (1, 1, 0)$.

14. Determine m, n de modo que os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ sejam linearmente dependentes.

(a) $\vec{u} = (1, m-1, m)$, $\vec{v} = (m, 2n, 4)$

(b) $\vec{u} = (1, m, n+1)$, $\vec{v} = (m, n+1, 8)$

15. Sejam $\vec{u} = (m, -1, m^2+1)$, $\vec{v} = (m^2+1, m, 0)$ e $\vec{w} = (m, 1, 1)$. Mostre que os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formam uma base para o espaço independentemente do valor de m.

16. Considere fixada uma base de vetores $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Sejam $\vec{f}_1 = (1,1,0)_{\mathcal{B}}$, $\vec{f}_2 = (1,0,1)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{f}_3 = (1,1,-1)_{\mathcal{B}}$.

(a) Mostre que $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é uma base de $\mathbf{V}^3$.

(b) Encontre as coordenadas do vetor $\vec{u} = (2,3,7)_{\mathcal{C}}$ na base $\mathcal{B}$.

(c) Encontre as coordenadas do vetor $\vec{v} = (2,3,7)_{\mathcal{B}}$ na base $\mathcal{C}$.