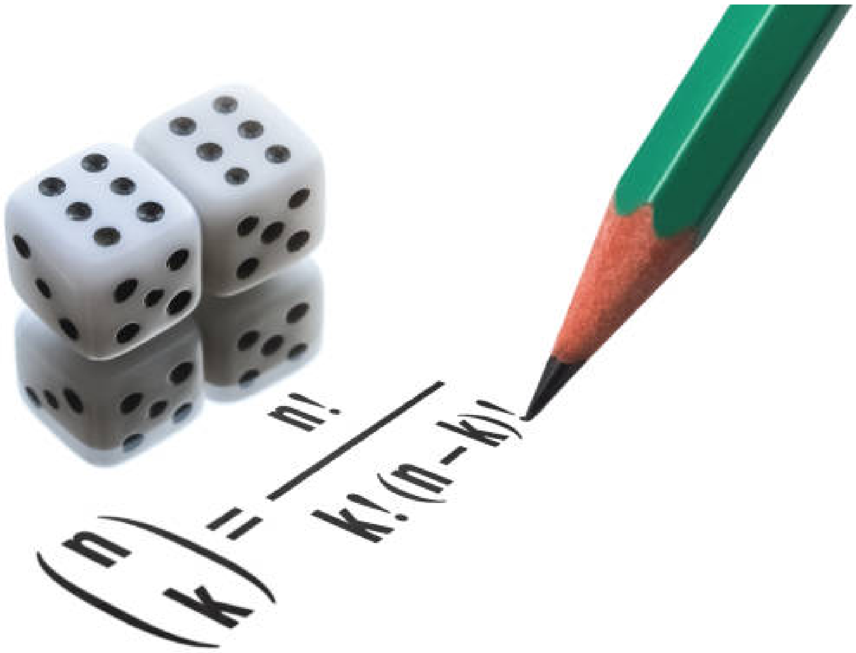
**PEREIRA, Geraldo Henrique Alves**

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais
Campus
Bambuí




# *Caderno Didático de Matemática III*

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – *Campus* Bambuí

2024

| | |
|---|---|
| Reitor | **Rafael Bastos Teixeira** |
| Pró-Reitor de Ensino | **Mário Luiz Viana Alvarenga** |
| Diretor-Geral do *Campus* Bambuí | **Humberto Garcia de Carvalho** |
| Diretora de Ensino | **Samuel de Oliveira** |
| Chefe do Departamento de Ciências e Linguagens | **Regiane Maria Soares Ramos** |
| Responsável pelo Núcleo de Matemática | **Daniel Amaral Prates** |
| Revisão Estrutural e Composicional | **Geraldo Henrique Alves Pereira** |
| Revisão Ortográfica e Gramatical | **Geraldo Henrique Alves Pereira** |
| Diagramação | **Geraldo Henrique Alves Pereira** |

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais
Campus
Bambuí

Um documento
LaTeX




Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil

Pereira, Geraldo Henrique Alves; Pereira, Elton José; Silva, Lorraine Borges; Naves, Fernando Augusto; Melo, Ramon Gustao de; Prates, Daniel Amaral.

Caderno Didático de Matemática III. / Geraldo Henrique Alves Pereira . – Bambuí - MG: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – *Campus* Bambuí, 2024.

Ebook, no formato PDF.

1. Matemática. 2. Ensino médio. 3. Caderno didático. 4. Material instrucional digital.

# Lista de ilustrações

# Lista de tabelas

# Sumário

# Apresentação

Estimado estudante, saudações!

Este material constitui um apoio às aulas da disciplina de **Matemática III** do seu curso técnico integrado ao Ensino Médio. Desse modo, destina-se à complementação de conteúdos, não excluindo a necessidade de estudos adicionais, acesso às videoaulas (se houver) e consulta em outras fontes.

O hábito de resolver atividades correlatas aos conteúdos aqui abordados, retiradas de outros materiais e mídias, o fará aumentar sua visão sobre a disciplina e perceber as várias abordagens possíveis para um mesmo ponto de discussão. Sendo assim, não fique preso somente a este material, ainda que ele possa lhe ser bastante útil.

Bons estudos!

Os autores

CAPÍTULO 1

# Análise Combinatória

CAPÍTULO 2

# Probabilidade

Girolamo Cardano (1501-1576)

O ramo da **Probabilidade**, ou Teoria das Probabilidades, é talvez um dos mais contraintuitivos da Matemática. Vamos perceber isso ao longo de nosso estudo, resolvendo algumas atividades e principalmente analisando seus resultados, alguns dos quais não nos parecerão viáveis quando comparamos aquilo inicialmente imaginado.

Esta área investiga a chance de um determinado resultado ocorrer no futuro, estando este vinculado a um fenômeno aleatório. Por não sabermos o resultado exato é que, estudando o fenômeno, procuramos estabelecer os resultados prováveis, as chances ou, simplesmente, as probabilidades daquele resultado ocorrer.

Blaise Pascal (1623-1662)

Suas origens estão ligadas ao século XV e início do século XVI, na tentativa de responder problemas de jogos de azar, que são aqueles onde a vitória ou a derrota dependem exclusivamente da sorte ou, se não exclusivamente, pelo menos esta é substancialmente mais importante que cálculos, análises e habilidades do jogador.

Girolamo Cardano (1501-1576) talvez tenha sido o primeiro matemático a registrar estes tipos de problema, na obra *De Ludo Aleae*. Diz-se populamente que a Teoria das Probabilidades originou-se do jogo de azar chamado **problema dos pontos**. Niccolo Tartaglia (1500-1557) e Luca Pacioli (1445-1509) também haviam discutido este problema.

Jacques (Jakob) Bernoulli (1654-1705)

Mais tarde, Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665) contribuíram com a Teoria das Probabilidades a partir de cartas trocadas onde, ao que tudo indica, discutiam esse mesmo problema dos pontos. Ambos resolveram-no corretamente, cada qual à sua maneira, porém a estruturação e a fundamentação de Pascal deu origem àquilo que podemos denotar por moderna teoria de probabilidades, mais tarde refinada por Christiaan Huygens (1629-1695).

Acontece que só no século XVIII, em 1713 e já após sua morte, **Jacques Bernoulli** publicou um artigo completo sobre o assunto na obra *Ars Conjectandi*, contendo, inclusive, argumentos de combinatória e aplicações no seguro e na estatística. A partir daí muitos outros matemáticos acrescentariam contribuições à teoria.

Na atualidade, sua aplicação é bastante extensa e substancialmente científica, incluindo desde indicadores econômicos, financeiros e metereológicos até utilidades na medicina, na biologia, nas ciências atuariais, entre outras muitas áreas.

## 2.1 Conceitos iniciais

Para iniciar nossos estudos, precisamos ter mente bem definidos três principais conceitos que envolvem as probabilidades:

**Experimento aleatório**, ou fenômeno casual, é todo experimento que, quando repetido várias vezes e sob as mesmas condições, apresenta, entre as possibilidades, resultados imprevisíveis.

**Espaço amostral** ($S$ ou $\boldsymbol{\Omega}$) de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento.

Ω (Ômega), letra maiúscula grega

**Evento** ($E$) é qualquer subconjunto do espaço amostral do experimento aleatório.

Vejamos algumas situações e, nelas, a identificação desses conceitos iniciais da probabilidade:

1. No lançamento de um dado, podemos estar interessados em estudar a ocorrência de faces pares voltadas para cima. um possível evento é: .

   Nesse caso, o "lançamento de um dado" é o *experimento aleatório*; o *espaço amostral* é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; e o *evento* pode ser exprimido por "o número na face voltada para cima é par" e, em forma de conjunto, da seguinte forma: $E = \{2, 4, 6\}$.

   Ainda, o número de elementos dos dois conjuntos acima é indicado, respectivamente, por $n(S) = 6$ e $n(E) = 3$.

2. Quando se retira uma bola de uma urna contendo 50 bolas numeradas de 1 a 50, podemos estar interessados em verificar a ocorrência de números primos menores que 20.

   Neste caso, o "retirada de uma bola contida em uma urna" é o *experimento aleatório*; o *espaço amostral* desse experimento é $S = \{1, 2, \ldots, 50\}$; e o *evento* pode ser enunciado como "a bola retirada contém um número primo menor que 20", e representado por $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.

   O número de elementos do conjunto S é $n(S) = 50$ e o do conjunto E é $n(E) = 8$.

3. No sorteio de uma carta de um baralho de 52 cartas, um possível evento é o caso de suceder a cartas de copa e com figura.

   Já neste caso, temos que o "sorteio de uma carta de um baralho" é o *fenômeno casual*. O *espaço amostral* desse fenômeno é o conjunto $S = \{$ás de copas, 2 de copas, …, rei de copas, ás de ouros, 2 de ouros, …, rei de ouros, ás de espadas, …, rei de espadas, ás de paus, …, rei de paus$\}$. O *evento* é "a carta sorteada é de copas e com figura" e é representado por $E = \{$valete de copas, dama de copas, rei de copas$\}$.

   Nesse experimento, $n(S) = 52$ e $n(E) = 3$.

Quando um evento é um subconjunto unitário, dizemos que este é um **evento simples** (ou elementar). Quando coincide com o espaço amostral, dizemos ser um **evento certo**. E quando é um conjunto vazio, dizemos ser um **evento impossível**.

Ainda, quando dois eventos $A$ e $B$ não têm interseção entre si, dizemos que estes são **eventos mutuamente excludentes** (ou mutuamente exclusivos), isto é, eles não podem ocorrer simultaneamente.

Ademais, se dois eventos $A$ e $B$ são mutuamente excludentes e, juntos, formam o espaço amostral, dizemos que estes são **eventos complementares**. Ou seja:

$$A \cap B = \varnothing \text{ e } A \cup B = \boldsymbol{\Omega}$$

Neste último caso, podemos escrever que o complementar de $A$ é $\overline{A}$ (leia-se: $A$ barra), e vice-versa.

## 2.2 Cálculo de probabilidades

Veremos que, para o cálculo de probabilidades, torna-se fundamental a identificação e a contagem dos elementos do espaço amostral e, principalmente, do(s) evento(s) que se estão estudando.

Para percebermos a maneira correta de se calcular a probabilidade de ocorrência de determinado evento, vamos utilizar de uma situação introdutória, conforme a seguir:

Suponha que um dado e uma moeda são lançados simultaneamente. Qual é a probabilidade de se obter cara e um número par nas faces voltadas para cima?

Consideremos $K$: cara e $C$: coroa na moeda.

Para responder à questão, determinamos, inicialmente, o espaço amostral $S$ e o evento $E$ "obter cara na moeda e número par no dado":

a) $S = \{(K,1),(K,2),(K,3),(K,4),(K,5),(K,6),(C,1),(C,2),(C,3),(C,4),(C,5),(C,6)\}$
b) $E = \{(K,2),(K,4),(K,6)\}$

Notemos que $n(E) = 3$ e $n(S) = 12$.

Dizemos que a chance de obtenção de face cara e número par é de 3 para 12, ou seja, $\frac{3}{12}$ ou, simplificando, $\frac{1}{4}$ ou $0,25$ ou 25%.

Em situações assim consideramos que existe a mesma chance de ocorrência para cada evento simples. Denominamos, portanto, esse espaço como um **espaço amostral equiprovável**.

**Definição 2.1 : *Cálculo de probabilidade de um evento***

Em um espaço amostral equiprovável $S$, finito e não vazio, a **probabilidade** de ocorrência de um evento $E$, indicada por $P(E)$, é a razão entre o número de elementos do evento $(n(E))$ e o número de elementos do espaço amostral $(n(S))$:

$$P(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{n(E)}{n(S)} \tag{2.1}$$

Da Definição 2.1, podemos formular algumas propriedades envolvendo as probabilidades. Vejamos:

**Propriedades 2.1 : *Probabilidades***

Consideremos $\mathbf{\Omega}$ um espaço amostral obtido de um experimento aleatório. Consideremos ainda, $E$ um evento qualquer deste espaço amostral. Temos:

evento impossível evento certo

$$\varnothing \subset E \subset \mathbf{\Omega}$$

$$n(\varnothing) \subseteq n(E) \subseteq n(\mathbf{\Omega})$$

$$\frac{n(\varnothing)}{n(\mathbf{\Omega})} \subseteq \frac{n(E)}{n(\mathbf{\Omega})} \subseteq \frac{n(\mathbf{\Omega})}{n(\mathbf{\Omega})}$$

Dividindo cada membro da desigualdade por $n(\Omega)$

$$0 \subseteq P(E) \subseteq 1$$

Neste caso, valem as seguintes propriedades (ou consequências da definição):

i) Se é $E$ é um evento impossível, então $P(E) = 0$.

ii) Se é $E$ é um evento certo, então $P(E) = 1$.

iii) Se é $E$ é um evento distinto destes dois anteriores, então $0 \subset P(E) \subset 1$.

iv) Se $\overline{E}$ é o complementar de $E$, então: $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

As propriedades 2.1 valem tanto para espaços amostrais finitos e equiprováveis quanto para não equiprováveis.

Vejamos a seguir alguns exemplos com cálculo de probabilidades simples, envolvendo inclusive eventos complementares e utilizando técnicas de contagem estudadas em Análise Combinatória:

**Exemplo 2.1 : *Cálculo de probabilidades***

No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de a face superior apresentar:

a) O número 3 ($E_1$)?

b) Um número par ($E_2$)?

c) Um número ímpar ($E_3$)?

d) Um número menor que 7 ($E_4$)?

e) Um número menor que 1 ($E_5$)?

f) Um divisor da soma dos pontos de todas as faces do dado ($E_6$)?

**Solução:** Inicialmente é preciso definir o espaço amostral do lançamento do dado. Temos que: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, onde $n(S) = 6$.

a) $P(E_1) = \dfrac{n(E_1)}{n(S)} = \dfrac{1}{6} = 16,67\%$

b) $P(E_2) = \dfrac{n(E_2)}{n(S)} = \dfrac{3}{6} = 50\%$

c) $P(E_3) = \dfrac{n(E_3)}{n(S)} = \dfrac{3}{6} = 50\%$

d) $P(E_4) = \dfrac{n(E_4)}{n(S)} = \dfrac{6}{6} = 100\%$

e) $P(E_5) = \dfrac{n(E_5)}{n(S)} = \dfrac{0}{6} = 0\%$

f) $P(E_6) = \dfrac{n(E_6)}{n(S)} = \dfrac{2}{6} = 33,33\%$

**Exemplo 2.2 : *Cálculo de probabilidades***

No lançamento simultâneo de uma moeda e de um dado, determinar:

a) O espaço amostral.

b) o número de elementos do evento $E_1$: coroa na moeda e face par no dado; e a probabilidade de ocorrência de $E_1$;

c) a probabilidade de ocorrência do evento $E_2$: face 3 no dado.

**Solução:**

a) Considerando K: cara na moeda, C: coroa na moeda e as seis faces do dados, o espaço amostral é dado por:

$$S = \{K1, K2, K3, K4, K5, K6, C1, C2, C3, C4, C5, C6\}$$

b) Observemos que os elementos de $S$ que atendem ao evento $E_1$ são $C2$, $C4$ e $C6$. Assim, $E_1 = \{C2, C4, C6\}$ e $n(E_1) = 3$. Assim, temos:

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 25\%$$

c) Temos que $E_2 = \{K2, C2\}$, assim:

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} = 16,67\%$$

**Exemplo 2.3 : *Cálculo de probabilidades***

Uma equipe de 12 pessoas é formada por 9 homens e 3 mulheres, das quais duas serão sorteadas para compor uma comissão. Indicar a probabilidade de a comissão ser formada por:

a) duas mulheres

b) um homem e uma mulher

**Solução:** Antes de mais nada é importante compreender quem é e quantos elementos tem o nosso espaço amostral. Para tanto, lançaremos mão de ferramentas de análise combinatória. Inicialmente vamos contar quantas comissões de 2 pessoas é possível formar com os 12 membros, sem impedimentos entre seus componentes. Observemos que a ordem dos membros não importa, logo temos um caso de combinação simples:

$$C_{12,2} = \frac{12!}{2!(12-2)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{2 \cdot \cancel{10!}} = \frac{132}{2} = 66$$

São, portanto, 66 comissões possíveis de formar, o que chamamos de $n(S) = 66$. Agora, passemos a responder às questões:

a) Vejamos agora quantas dessas 66 comissões são formadas só por mulheres, evento ao qual identificaremos por $E_1$. Nesse caso, temos:

$$C_{3,2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!} \cdot 1} = 3$$

Ou seja, $n(E_1) = 3$. Assim, a probabilidade se dá por:

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{3}{66} = \frac{1}{22} = 0,04545\ldots = 4,55\%$$

b) Neste caso, precisamos contar quantas são as comissões formadas por um homem e uma mulher exatamente, chamdo de evento $E_2$. Observemos que são 9 homens para uma vaga ($C_{9,1}$) e 3 mulheres para uma vaga ($C_{3,1}$): $C_{9,1} \cdot C_{3,1} = 9 \cdot 3 = 27$. Logo, $n(E_2) = 27$.

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{27}{66} = 0,409090\ldots = 40,9\%$$

**Exemplo 2.4 : *Cálculo de probabilidade de eventos complementares***

Em uma urna, há 10 bolas coloridas, sendo 5 vermelhas, 3 brancas, 1 azul e 1 preta. Qual a probabilidade de sortear uma bola e ela não ser azul?

**Solução:** Podemos descrever o espaço amostral como: $S = \{v, v, v, v, v, b, b, b, a, p\}$, com $n(S) = 10$.

Podemos identificar o evento $A$ como "sortear bola azul": $A = \{a\}$, com $n(A) = 1$. O que queremos, portanto, é o evento $\overline{A}$ "não sortear bola azul". Logo:

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - \frac{1}{10} \\ &= \frac{9}{10} \end{aligned}$$

Assim, a probabilidade de não ser sorteada uma bola azul é de 90%.

### 2.2.1 União e Interseção de eventos

Vamos encontrar agora uma expressão para o cálculo da probabilidade da ocorrência de quaisquer dois eventos de um mesmo espaço amostral, ou seja, da **união** de dois eventos. Em outras palavras siginifica dizer que, considerando dois eventos, um ou outro pode ocorrer.

Ainda, esta mesma expressão nos servirá para o cálculo da probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos quaisquer de um mesmo espaço amostral, ou seja, da **interseção** de dois eventos. Significa dizer agora que, tendo dois eventos, um e outro devem ocorrer.

É importante, portanto, repararmos que uma só expressão reunirá tanto a união quanto a intersão das probabilidades. Veremos que nos importa, antes de mais nada, analisarmos se os eventos considerados são mutuamente exclusivos ou não.

Consideremos, para tanto, uma situação hipotética como a abaixo:

No lançamento de um dado não viciado de seis faces, podemos definir, entre vários outros, os eventos a seguir:

- C: "ocorrência de número par" $\rightarrow C = \{2, 4, 6\}$.
- D: "ocorrência de múltiplo de 3" $\rightarrow D = \{3, 6\}$.

Vamos então definir agora a união e a interseção desses eventos:

- E: "ocorrência de número par **ou** múltiplo de 3" $\rightarrow E = C \cup D = \{2, 4, 6\} \cup \{3, 6\} = \{2, 3, 4, 6\}$ (união de eventos).
- F: "ocorrência de número par **e** múltiplo de 3" $\rightarrow F = C \cap D = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 6\} = \{6\}$ (interseção de eventos).

É possível representar essa situação de forma gráfica, utilizando da representação de diagramas. Observemos:

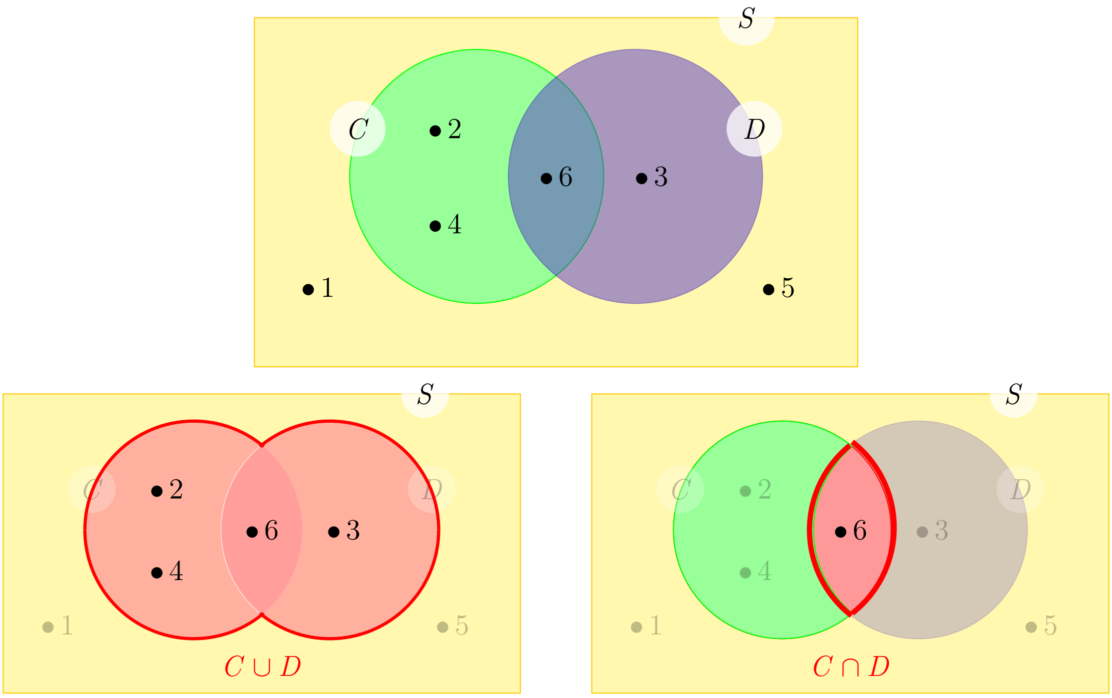



Figura 1 – Representação gráfica da união e da interseção de eventos

Importante é observar a correspondência entre os conjuntos enumerados e a representação gráfica feita na Figura 1. Desta, é fácil perceber que:

- $P(E) = P(C \cup D) = \dfrac{n(C \cup D)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{6} = 66,67\%$
- $P(F) = P(C \cap D) = \dfrac{n(C \cap D)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{6} = 16,67\%$

Genericamente, as probabilidades da união e interseção podem ser calculadas a partir da Teoria de Conjuntos. Partimos dela então, dividindo nossa situação em dois casos:

i) $A \cap B = \varnothing$, isto é, $A$ e $B$ são mutuamente exclusivos.

$$\begin{aligned} A \cup B &= A + B \\ n(A \cup B) &= n(A) + n(B) \\ \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} &= \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \end{aligned}$$

Como $n(\Omega) \neq 0$ podemos escrever:

Logo, podemos escrever que:

ii) $A \cap B \neq \emptyset$, isto é, $A$ e $B$ não são mutuamente exclusivos.

$$\begin{aligned} A \cup B &= A + B - (A \cap B) \\ n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} &= \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Igualmente, dividindo por $n(\Omega) \neq 0$

Daí, podemos escrever que:

A partir disso, podemos fazer a seguinte definição:

**Definição 2.2 : *União de dois eventos***

Sejam $A$ e $B$ dois eventos de um espaço amostral, a probabilidade do evento $A$ ou o evento $B$, isto é, a união dos dois eventos, é igual à probabilidade de ocorrer o evento $A$ mais a probabilidade de ocorrer o evento $B$ subtraída da probabilidade de ocorrer ambos simultaneamente:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{2.2}$$

Como consequência, se $A$ e $B$ são mutuamente exclusivos, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{2.3}$$

Vejamos alguns exemplos envolvendo probabilidade da união e da interseção de eventos.

**Exemplo 2.5 : *Probabilidade da união de eventos***

Um jogo consiste em somar pontos com o lançamento simultâneo de dois dados, um amarelo e um vermelho. Desse modo:

a) qual é a chance de jogador obter soma par ou soma múltipla de 5?

b) qual é a probabilidade de um jogador obter soma par e soma múltipla de 5?

**Solução:** Antes de mais nada, vamos definir o espaço amostral. Reparemos que este não é a soma das faces, mas sim a junção entre elas, descritas de todas as maneiras possíveis:

S= {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

Onde $n(S) = 36$.

Ao evento "sair soma par", chamaremos de $E$; e ao evento "sair soma múltipla de cinco", de $F$:

- $E = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6)\}$, onde $n(E) = 18$
- $F = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(4,6)(5,1),(6,4)\}$, onde $n(F) = 7$

- $E \cup F = \{(1,1),(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,3),(2,4),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,5),(4,1),(4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6)\}$, onde $n(E \cup F) = 22$.
- $E \cap F : \{(4,6)(5,1),(6,4)\}$, onde $n(E \cap F) = 3$

Daí, o cálculo das probabilidades fica assim definido:

a) $P(E \cup F) = \dfrac{n(E \cup F)}{n(S)} = \dfrac{22}{36} = 0,61\ldots$

b) $P(E \cap F) = \dfrac{n(E \cap F)}{n(S)} = \dfrac{3}{36} = 0,083\ldots$

Observemos que este último item poderia ser resolvido também utilizando a expressão 2.2. Vejamos:

$$\begin{aligned}
P(E \cup F) &= P(E) + P(F) - P(E \cap F) \\
\frac{22}{36} &= \frac{18}{36} + \frac{7}{36} - P(E \cap F) \\
P(E \cap F) &= \frac{18}{36} + \frac{7}{36} - \frac{22}{36} \\
P(E \cap F) &= \frac{3}{36} \\
P(E \cap F) &= 0,083\ldots
\end{aligned}$$

**Exemplo 2.6 : *Probabilidade da união de eventos***

Num baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de, ao se retirar uma carta aleatoriamente, esta ser vermelha ou um rei?

**Solução:** Considerando a retirada da carta um evento equiprovável, e sabendo que um baralho convencional tem 13 cartas com quatro naipes distintos (ouro, copas, paus e espadas, sendo os dois primeiros vermelhos e os dois últimos pretos), temos:

- evento $V$: "carta vermelha"
- evento $K$: "carta rei"
- evento $V \cup K$: "carta vermelha ou rei"
- evento $V \cap K$: "carta vermelha e rei"

Como num baralho há metade das cartas vermelhas e a outra metade preta e, ainda, 4 reis, dos quais 2 são vermelhos, temos:

- $P(V) = \dfrac{26}{52}$
- $P(K) = \dfrac{4}{52}$
- $P(V \cup K) = \dfrac{2}{52}$

Logo:

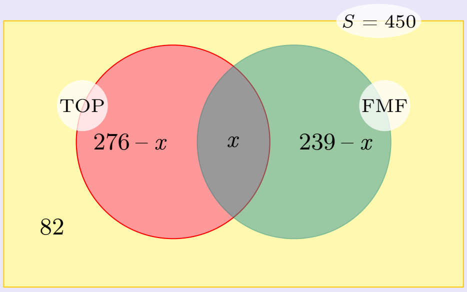
$$\begin{aligned}
P(V \cup K) &= P(V) + P(K) - P(V \cap K) \\
&= \frac{26}{52} + \frac{4}{52} - \frac{2}{52} \\
&= \frac{26 + 4 - 2}{52} \\
&= \frac{14}{52} \\
&= 53,84\%
\end{aligned}$$

Assim, é de aproximadamente 53,84% a probabilidade de que a carta sorteada ser vermelha ou um rei.

**Exemplo 2.7 : *Probabilidade da intersecção de eventos***

Numa cidade do interior, uma pesquisa foi realizada para saber qual a preferência dos moradores entre duas redes de supermercados recém instaladas na cidade. Os 450 entrevistados podiam responder se frequentam uma delas, as duas ou nenhuma. Os resultados da pesquisa indicaram que 276 frequentam a rede "TOP", enquanto que 239 a rede "FMF", e 82 não frequentam nenhuma delas. Nessas condições, caso uma morador da cidade seja selecionado ao acaso, qual a chance de ele frequentar ambas as redes? E qual a chance de ele frequentar pelo menos uma das duas redes?

**Solução:** Reparemos que a primeira pergunta trata da interseção de dois eventos e a segunda, da união. Vamos iniciar nossa resolução esquematizando-a com a ajuda de um diagrama:




Como não sabemos o número de pessoas que frequentam ambas as rede, chamamo-no de $x$. Do diagrama, temos que: $(276 - x) + x + (239 - x) + 82 = 450 \Rightarrow x = 147$.

Portanto, 147 pessoas frequentam ambas as redes. Então, a chance se dá por:

$$P(TOP \cap FMF) = \frac{147}{450} \simeq 32,67\%$$

Por fim, a chance de um sorteado frequentar pelo menos uma das duas redes pode ser calculada pela expressão 2.2. Logo:

$$\begin{aligned} P(TOP \cup FMF) &= P(TOP) + P(FMF) - P(TOP \cap FMF) \qquad (2.4) \\ &= \frac{276}{450} + \frac{239}{450} - \frac{147}{450} \\ &= \frac{368}{450} \end{aligned}$$

Dessa forma, 32,67% aproximadamente é a chance de ser selecionado um morador que frequenta as duas redes de supermercados e 81,78% é a chance de que este frequente uma ou outra.

## 2.3 Probabilidade condicional

A probabilidade condicional prescinde da existência de, pelo menos, dois acontecimentos em sequência, dos quais um depende do outro de alguma maneira.

Para introduzirmos o assunto, vejamos uma situação por exemplo:

Uma pesquisa de preferência à prática de alguns esportes foi realizada em uma escola. 542 estudantes responderam a pesquisa, dos quais 298 praticam esportes aquáticos, 255 praticam esportes coletivos em quadra, 136 praticam os dois tipos de esportes e 125 não praticam esportes ou praticam outros tipos.

A partir dessas informações, vamos analisar três situações:

i) A probabilidade de que, sorteando um estudante ao acaso, este pratique os dois tipos de esportes ($A$ e $Q$).

ii) A probabilidade de que, sorteando um estudante que pratica esporte aquático ($A$), ele também pratique esporte coletivos em quadra ($Q$).

iii) A probabilidade de que, sorteando um estudante que pratica esporte coletivo em quadra ($Q$), ele também pratique esporte aquático ($A$).

É importante observar que, em especial, as duas últimas situações, ainda que parecidas, são diferentes. Veremos que suas probabilidades também serão.

Novamente, vamos utilizar da representação gráfica para nos ajudar na análise, resolução e compreensão do cálculo das probabilidades.

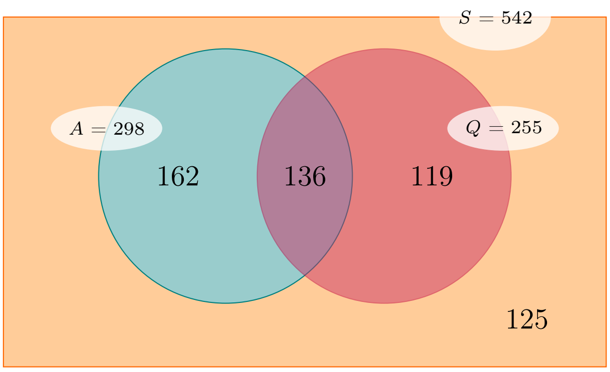
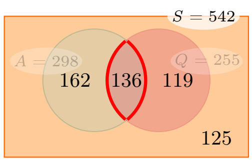



Figura 2 – Estudo da probabilidade condicional



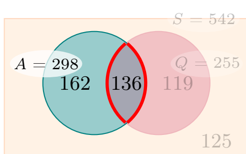

i) Na primeira situação, temos que: $P(A \cap Q) = \dfrac{n(A \cap Q)}{n(S)} = \dfrac{136}{542}$

Observemos que, nesta situação, o espaço amostral é composto pelos 542 estudantes.

ii) Já na segunda situação, temos: $\dfrac{n(A \cap Q)}{n(A)} = \dfrac{136}{298}$

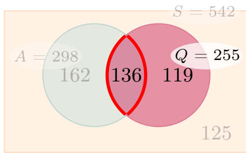
Notemos que, agora, o espaço amostral é o evento $A$, uma vez que será dentre os estudantes que praticam esportes aquáticos que será sorteado um que também pratica esportes coletivos em quadra ($Q$).

Denominamos a razão $\dfrac{n(A \cap Q)}{n(A)}$ de **probabilidade condicional de Q em relação a A** e indicamos por $P(Q \mid A)$. Escrevemos, portanto:




$$P(Q \mid A) = \frac{n(A \cap Q)}{n(A)}$$

iii) Por fim, na última situação temos que: $\dfrac{n(A \cap Q)}{n(Q)} = \dfrac{136}{255}$




Notemos que, nesta outra situação, o espaço amostral é o evento $Q$, uma vez que será dentre os estudantes que praticam esportes coletivos em quadra que será sorteado um que também pratica esportes aquático $(A)$.

Denominamos a razão $\dfrac{n(A \cap Q)}{n(Q)}$ de **probabilidade condicional de A em relação a Q** e indicamos por $P(A \,|\, Q)$. Escrevemos, portanto:

$$P(A \,|\, Q) = \frac{n(A \cap Q)}{n(Q)}$$

Podemos fazer então a seguinte definição:

**Definição 2.3 : *Probabilidade condicional***

Sejam $A$ e $B$ eventos não vazios de um espaço amostral $S$. Denominamos de probabilidade condicional de $A$ em relação a $B$, e indicamos por $P(A \,|\, B)$, a probabilidade de ocorrer o evento $A$, já tendo ocorrido o evento $B$.

$$P(A \,|\, B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \tag{2.5}$$

Em geral, a equação anterior pode ser reescrita para que se apresente em função das probabilidades. Para isso, basta que dividamos o numerador e o denominador por $n(S)$:

$$P(A \,|\, B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}$$

$$P(A \,|\, B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{2.6}$$

Dessa última equação (2.6), é comum reescrevê-la da seguinte forma:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \,|\, B) \tag{2.7}$$

$P(A \,|\, B)$ lê-se como "probabilidade de $A$, dado $B$".

A expressão 2.6 tem importância mais teórica do que prática. Em geral, é mais conveniente adotar um raciocício onde o espaço amostral é reduzido e, nele, calculam-se as probabilidades.

Observemos que, na expressão 2.7, apenas transformamos uma divisão em uma multiplicação. Por vezes, esta forma nos será mais útil para analisarmos uma probabilidade condicional.

### 2.3.1 Eventos sucessivos dependentes e independentes

Como mencionado, a expressão 2.6 carrega consigo uma importância muito mais teórica do que prática. Assim, neste momento, veremos como ela nos ajudará a desenvolver um método para calcular probabilidades quando da ocorrência de **eventos sucessivos**, possuindo ou não relação entre si.

Partimos, assim, da expressão 2.7:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \,|\, B),$$

para a qual podemos depreender que, para se calcular a probabilidade de ocorrência da interseção de dois eventos $A$ e $B$, isto é, ocorrência simultânea de dois eventos, é necessário multiplicar a probabilidade de ocorrência de um deles pela probabilidade de ocorrência do outro, quando o primeiro já tenha ocorrido.

Vejamos isso num exemplo resolvido:

> Em uma urna há doze bolinhas idênticas numeradas de 1 a 12. Retirando-se ao acaso duas dessas bolinhas, qual é a probabilidade de que ambas sejam múltiplas de 4?

Para resolver este tipo de problema é preciso perceber que o "retirar duas bolas da urna" gera, na verdade, dois eventos distintos ($E_1$ e $E_2$). Isso porque, ainda que você o faça de uma vez só, é natural entender que ao escolher uma das bolinhas dentro da urna a outra só pode ser escolhida dentre as demais. Portanto, os eventos são **dependentes**.

Assim, para a primeira retirada temos $P(E_1) = \frac{3}{12}$.

Já a segunda retirada está condicionada à retirada da primeira, que já ocorreu. O espaço amostral agora tem apenas 11 elementos, dos quais 2 são múltiplos de 4 e os outros 9 não; então $P(E_2 \mid E_1) = \frac{2}{11}$.

Desse modo, formalizamos a probabilidade de eventos sucessivos dependentes desta situação da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2) &= P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1) \\ &= \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \\ &= \frac{1}{22} \end{aligned}$$

É importante observar que os eventos $E_1$ e $E_2$ poderiam ser enunciados da mesma maneira, "sair múltiplo de 4", por exemplo. Entretanto, por estar cada um vinculado a espaços amostrais diferentes (o primeiro tinha um espaço amostral com doze elementos e o segundo, onze), devem eles ser considerados eventos distintos.

Por outro lado, podemos ter situações em que os eventos do tipo $E_1$ e $E_2$ estão vinculados ao mesmo espaço amostral, ou seja, a ocorrência do primeiro não influencia na ocorrência do segundo. Dizemos que os eventos são **independentes**.

Isso acontece quando $P(E_1 \mid E_2) = P(E_1)$ ou $P(E_2 \mid E_1) = P(E_2)$. Logo, a expressão 2.7 pode ser adaptada para:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2) &= P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1) \\ &= P(E_1) \cdot P(E_2) \end{aligned}$$

Um exemplo de aplicação deste caso, poderia partir da situação enunciada anteriormente, porém agora com uma adaptação na probabilidade requerida. Vejamos:

> Em uma urna há doze bolinhas idênticas numeradas de 1 a 12. Retirando-se ao acaso duas dessas bolinhas, com reposição, qual é a probabilidade de que ambas sejam múltiplas de 4?

Observemos que a expressão "com reposição" muda nossa forma de analisar a situação. Se antes a segunda retirada dependia da primeira, agora não mais, visto que na segunda retirada, as mesmas doze bolinhas estarão na urna, assim como na primeira.

Assim, para a primeira retirada temos $P(E_1) = \frac{3}{12}$, tal como para a segunda, $P(E_2) = \frac{3}{12}$.

Portanto, formalizamos a probabilidade de eventos sucessivos independentes desta situação da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2) &= P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1) \\ &= \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

A partir disso, podemos fazer a seguinte definição:

**Definição 2.4 : *Eventos sucessivos e independentes***

A probabilidade de ocorrência simultânea de dois eventos $A$ e $B$, sucessivos e **dependentes**, é dada por:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) \tag{2.8}$$

Se, porém, $A$ e $B$ forem **independentes**, a probabilidade da ocorrência simultânea será dada pela simples multiplicação das probabilidades individuais:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{2.9}$$

Segue imediatamente que dois eventos dependentes tem $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$.

Não confunda *eventos independentes* com *eventos mutuamente exclusivos*.

A seguir, temos alguns exemplos adicionais para ilustrar situações assim:

**Exemplo 2.8 : *Eventos sucessivos***

Retira-se 2 cartas de um baralho de 52 cartas, uma após a outra e **com reposição**. Qual a probabilidade de saírem uma dama e um 10, se:

a) houve reposição entre uma retirada e outra?

b) não houve reposição entre uma retirada e outra?

**Solução:** Chamando $E_1$ de "sair uma dama" e $E_2$ de "sair um 10", teremos:

a) Neste caso, como houve reposição entre uma retirada e outra, devemos considerar os eventos independentes entre si. Temos, portanto:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{1}{169} \simeq 0,592\%$$

b) Já neste caso, como não houve reposição entre uma retirada e outra, consideramos os eventos dependentes. Assim:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{4}{663} \simeq 0,603\%$$

**Exemplo 2.9 : *Eventos sucessivos***

Qual a probabilidade de uma mulher ter 10 filhos, todos de apenas 1 sexo?

**Solução:** Temos um caso clássico de eventos independentes, uma vez que o sexo de um filho já nascido em nada interfere no de outros a nascer. Assim:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{10}) &= P(P_1) \cdot P(E_2) \ldots P(E_{10}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^{10} \\ &= \frac{1}{1024} \\ &= 0,098\% \end{aligned} \tag{2.10}$$

A probabilidade é mínima, mas exite obviamente, e é de $0,098\%$, aproximadamente.

## 2.4 Experimentos binomiais

Vamos estudar agora uma maneira de formalizar probabilidades utilizando experimentos onde os eventos, independentes entre si, podem ser resumidos exclusivamente entre duas categorias: favoráveis e não favoráveis.

Para tanto, consideremos um experimento aleatório submetido à repetição por $n$ vezes, sob as mesmas condições, de tal modo que as repetições sejam independentes umas das outras.

É comum também utilizarmos as dicotomias sucesso/insucesso ou sucesso/fracasso.

Para calcular a probabilidade de um específico evento ocorrer zero vezes, ou uma vez, ou duas vezes, ..., ou em todas as vezes em que o experimento se repetir, utilizamos da **Lei Binomial das Probabilidades**.

Para introduzirmos esse assunto, façamos como antes, a partir de um exemplo a ser resolvido. Vejamos:

Num certo exame Vestibular, a nota mínima para aprovação é de 70%. Percebendo que faltaria tempo para preencher o gabarito, Lucas resolver *chutar* todas as 10 questões de Matemática que havia por fazer, cada uma com quatro alternativas, sendo apenas uma a correta. Ele assim procedeu porque, além do curto tempo restante, julgava que em todas as questões anteriores já feitas, de todas as outras áreas, já havia conseguido o percentual mínimo exigido e, portanto, chutar essas 10 poderia levá-lo a manter o mesmo percentual. Qual a probabilidade de Lucas acertar 70% naquelas dez questões *chutadas* e, portanto, lograr o percentual mínimo para aprovação?

Vejamos que cada repetição desse experimento é um evento que pode ser enunciado como "Lucas acertar a questão", denotado por $E$. Sua probabilidade é: $P(E) = \frac{1}{4}$.

O evento complementar, isto é, $\overline{E}$, pode ser enunciado como "Lucas errar a questão" e tem probabilidade de $P(\overline{E}) = \frac{3}{4}$.

Inicialmente, vamos calcular a probabilidade do ocorrer 7 acertos e 3 erros (o que significa os 70% que Lucas precisa manter), numa ordem específica. Uma delas, e a mais imediata, é a ordem $EEEEEEE\overline{EEE}$.

Desse modo, temos:

$$P(EEEEEEE\overline{EEE}) = \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}_{\text{acertar as sete primeiras questões}} \cdot \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}_{\text{errar as três últimas questões}} = \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{4^{10}} = 0,00257\%$$

Acontece que essas respostas podem ocorrer em várias outras ordens. No entanto, independentemente da ordem em que elas ocorrerem o resultado $\frac{27}{4^{10}}$ vai permanecer inalterado, uma vez que apenas a ordem da multiplicação das frações mudará.

O que precisamos conhecer, portanto, é a quantidade vezes em que essas mesmas respostas podem ocorrer, ou seja, a quantidade de sequências em que 7 acertos e 3 erros podem aparecer de formas distintas. Isso deve nos fazer lembrar de Análise Combinatória e do **??**.

Sendo asssim, procurar todas as maneiras em que 7 acertos e 3 erros podem aparecer numa sequência de dez questões, é o mesmo que permutar 10 elementos, repetidos 7 e 3 vezes, respectivamente. Assim:

$$P_{10}^{7,3} = \binom{10}{7} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120$$

Por fim, ao *chutar* as dez questões, Lucas terá a seguinte probabilidade de acertar 70%, a qual chamaremos de $(E^7\overline{E}^3)$:

$$P(E^7\overline{E}^3) = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0,31\%$$

Como vemos, podemos inferir que foi uma péssima escolha a do Lucas. Planejamento numa prova também faz parte de sua resolução!

A partir dessa situação, podemos fazer a seguinte definição:

**Definição 2.5 : *Experimentos binomiais***

Se um determinado evento $E$ admite somente duas possibilidades de resultado, sucesso ou fracasso, cujas probabilidades são $p$ e $1-p$, respectivamente, temos que a probabilidade de sua ocorrência $k$ vezes em um experimento aleatório repetido $n$ vezes em condições idênticas e repetições independentes entre si é:

$$P(E) \quad = \quad \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^(n-k) \qquad (2.11)$$

A seguir, registramos alguns outros exemplos sobre esta maneira de se calcular probabilidades. Vejamos:

**Exemplo 2.10 : *Experimentos binomiais***

Um casal planeja ter cinco filhos, e gostaria muito que fossem duas meninas e três meninos. Qual a probabilidade de que isso aconteça?

**Solução:** Sabemos que probabilidade de nascer menino ou menina é a mesma, $\frac{1}{2}$. Logo, $P(Mo) = P(Ma) = \frac{1}{2} = 0,5$.

Organizaremos a expressão tomando como referências os meninos: Assim, temos:

$$\begin{aligned} P(\text{3Mo2Ma}) &= \binom{5}{3} \cdot (0,5)^3 \cdot (0,5)^2 \\ &= 10 \cdot 0,125 \cdot 0,25 \\ &= 0,3125 \end{aligned}$$

Portanto, a chance desse acontecimento é de $31,25\%$, aproximadamente.

**Exemplo 2.11 : *Experimentos binomiais***

Stephen Curry é um esportista estadunidense, atleta de basquete da National Basketball Association (NBA), liga norte americana deste esporte e a maior do mundo. Curry é recordista de acertos em bolas de três pontos, que são aquelas feitas da maior distância marcada para os arremessos. Ele possui média de acertos de $40\%$ nesse tipo de arremesso. Numa partida comum, ele tenta, ao menos, 12 destes arremessos. Qual a probabilidade de que ele acerte pelo menos 8?

**Solução:** A probabilidade do acerto será denotada por $P(A) = 0,4$, logo a probabilidado do erro será $P(E) = 0,6$. Reparemos que a expressão "pelo menos" indica que ele pode acertar 8 ou 9 ou 10 ou 11 ou 12. Assim, precisamos calcular cada uma das probabilidades e somá-las:

- 8 acertos ($8A$): $P(8A) = \binom{12}{8} \cdot (0,4)^8 \cdot (0,6)^4 \simeq 0,042$
- 9 acertos ($9A$): $P(9A) = \binom{12}{9} \cdot (0,4)^9 \cdot (0,6)^3 \simeq 0,0125$
- 10 acertos ($10A$): $P(10A) = \binom{12}{10} \cdot (0,4)^{10} \cdot (0,6)^2 \simeq 0,0025$
- 11 acertos ($11A$): $P(11A) = \binom{12}{11} \cdot (0,4)^{11} \cdot (0,6)^1 \simeq 0,0003$
- 12 acertos ($12A$): $P(12A) = \binom{12}{12} \cdot (0,4)^{12} \cdot (0,6)^0 \simeq 0,000016$

Dessa forma, somando todas as probabilidades, a chance de Stephen Curry acertar pelo menos 8 arremessos de três pontos, em 12 tentados, é de $5,73\%$, aproximadamente.

## 2.5 Atividades propostas

*Respostas na pág. 195.*

1. Em uma urna existem bolas numeradas de 1 a 17. Qualquer uma delas tem a mesma probabilidade de ser retirada. Qual é a probabilidade de retirar uma bola cujo número seja:

   a) par?
   b) primo?
   c) par ou primo?
   d) par e primo?
   e) nem par, nem primo?
   f) par, mas não primo?
   g) primo, mas não par?
   h) 20?

2. Antônio, Bento e Carlos estão em um baile. Na mesa ao lado, Lourdes, Maria, Neuza e Olinda aguardam um convite para dançar. Determine o espaço amostral que representa todas as possibilidades de formar casais para a próxima dança. (SOUZA, 2013a, p. 248)

3. O time de futebol de certa escola disputará um campeonato escolar. Para isso, foram convocados, dentre outros, 4 alunos que jogam na posição de atacante. Determine o espaço amostral das duplas de ataque que podem ser formadas com esses alunos. (SOUZA, 2013a, p. 249)

4. A apresentação de um trabalho sobre o matemático Girolamo Cardano foi preparada pelos alunos Douglas, Emerson, Flávia, Graciele e Helen. Para ter certeza de que todos os integrantes do grupo participaram da preparação do trabalho, o professor decidiu sortear três integrantes para realizar a apresentação. Determine o conjunto que representa cada um dos eventos seguintes: (SOUZA, 2013a, p. 249)

   a) $E_1$: Emerson ser sorteado
   b) $E_2$: Flávia e Helen serem sorteados
   c) $E_3$: Douglas não ser sorteado
   d) $E_4$: os três sorteados não serem do sexo feminino

5. Considerando o exercício anterior, calcule:

   a) $P(E_1)$
   b) $P(E_2)$
   c) $P(E_3)$
   d) $P(E_4)$

6. Em geral, os baralhos possuem 52 cartas, divididas igualmente em quatro naipes (ouro, copas, espadas e paus). Esses naipes se originaram da fusão entre baralhos espanhóis e franceses, sendo que os nomes vieram dos espanhóis e os símbolos que os representam, dos franceses. (SOUZA, 2013a, p. 249)

   Utilizando as iniciais de cada naipe, escreva os eventos considerando a retirada aleatória de duas cartas de um baralho completo:

   a) A: as duas cartas serem do mesmo naipe
   b) B: pelo menos uma carta ser de ouros
   c) C: nenhuma carta ter naipe de copas

7. Considerando o exercício anterior, calcule:

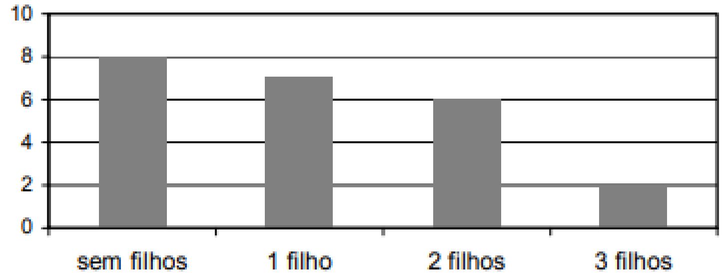
   a) $P(A)$
   b) $P(B)$
   c) $P(C)$

8. Considere o lançamento de dois dados comuns, distintos e não viciados. Indique a probabilidade de ocorrência dos seguintes eventos: (SOUZA, 2013a, p. 250)

   a) A: duas faces ímpares voltadas para cima

b) B: faces iguais voltadas para cima
c) C: soma das faces voltadas para baixo ser igual a 7
d) D: soma das faces voltadas para cima ser maior que 11
e) E: produto das fazes voltadas para cima ser maior que 16

9. As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres de acordo com a quantidade de filhos é mostrada no gráfico abaixo: (Enem 2005, adaptada)




Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. Qual a probabilidade de que a criança premiada tenha sido:

a) um filho único?
b) um filho que tenha exatamente um(a) irmão(ã)?

10. Marcela investigou a preferência de seus colegas de classe em relação aos gêneros musicais MPB, Rock e Sertanejo. Dos 38 entrevistados, 18 gostam de MPB; 19 gostam de Rock; 14 gostam de Sertanejo; 7 gostam de MPB e Rock; 5 gostam de Rock e Sertanejo; 3 gostam de MPB e Sertanejo; e 2 gostam dos três gêneros. Ao sortear um desses entrevistados, qual é a probabilidade de que ele: (SOUZA, 2013a, p. 253)

a) goste somente de Sertanejo?
b) não goste de MPB?

11. De um total de 500 estudantes da área de exatas, 200 estudam Cálculo Diferencial e 180 estudam Álgebra Linear. Esses dados incluem 130 estudantes que estudam ambas as disciplinas. Qual a probabilidade de que um estudante escolhido aleatoriamente esteja estudando Cálculo Diferencial ou Álgebra Linear? (UEL)

12. De um grupo de 48 pessoas, 36 possuem cachorro como animal de estimação, 20 possuem gato, 12 possuem as duas espécies e os demais não possuem animal ou possuem outra espécie de animal de estimação. Escolhendo aleatoriamente uma pessoa desse grupo, qual é a probabilidade de ela possuir: (SOUZA, 2013a, p. 261)

a) cachorro de estimação?
b) cachorro ou gato de estimação?
c) apenas gato de estimação?

13. Um baralho de 52 cartas é dividido em quatro naipes, conforme descritos no exercício 6. Cada naipe possui 13 cartas identificadas assim: (SOUZA, 2013a, p. 261), adaptada

i) A (Ás)
ii) 2 ao 10
iii) Figuras: Valete (**J**ack), Dama (**Q**ueen, *rainha*) e Rei (**K**ing).

Ao se retirar uma carta aleatoriamente de um desses baralhos, qual é a probabilidade de essa carta ser:

a) um rei de paus?
b) uma carta com o número 8?
c) um valete ou uma carta de ouros?
d) uma dama ou uma carta com o número 3?
e) uma carta de copas, que não seja figura?

14. Certa professora de Matemática propôs 20 problemas para que os alunos resolvessem em casa. O aluno Augusto resolveu 17 deles e o aluno Bernardo, 14. Sabendo que é de 95% a probabilidade de, ao ser sorteado um dos problemas, ele ter sido resolvido por qualquer um desses dois alunos, calcule a probabilidade de ser sorteado um problema que foi resolvido por ambos. (SOUZA, 2013a, p. 262)

15. Uma caixa contém vinte fichas numeradas de 1 a 20. Uma ficha é retirada ao acaso. Qual é a probabilidade de a ficha sorteada apresentar um número divisível por 3 ou divisível por 5? (LEONARDO, 2013a, p. 285)

16. Três moedas são lançadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de que ocorra três caras ou três coroas? (LEONARDO, 2013a, p. 285)

17. Em uma bolsa há 2 cubos vermelhos e 4 cubos azuis. Se dois cubos são selecionados ao acaso, um de cada vez, e o primeiro cubo retirado não é reposto na bolsa, calcule a probabilidade de ambos os cubos serem vermelhos. (LEONARDO, 2013a, p. 286)

18. De um baralho comum são retiradas 2 cartas, uma a uma e sem reposição. Qual é a probabilidade de que as duas cartas sejam de copas? (LEONARDO, 2013a, p. 286)

19. Uma moeda é lançada três vezes. Qual é a probabilidade de, nas três vezes, sair coroa na face voltada para cima? (LEONARDO, 2013a, p. 288)

20. Uma urna contém 5 bolas verdes e 7 bolas brancas. Retiramos duas bolas em seguida, com reposição. (LEONARDO, 2013a, p. 288)

a) Qual a probabilidade de a primeira bola ser branca e a segunda verde?
b) Qual a probabilidade de as duas bolas serem brancas?

**Curiosidades *Probabilísticas* Aleatórias**

- Sabendo que um adulto tem entre 100 mil e 150 mil fios de cabelo, o “Princípio da Casa dos Pombos” (pesquise esse pricípio matemático) nos garante que, em uma cidade com mais de 150 mil habitantes, é certo que há pelo menos duas pessoas com EXATAMENTE a mesma quantidade de fios.
- O Teorema de Banach-Tarski, também conhecido como “Paradoxo de Banach-Tarski”, é um resultado matemático que garante que é possível dividir uma esfera sólida em um número finito de pedaços e, com esses pedaços, construir duas esferas IDÊNTICAS à original!
- Pesquisem sobre o interessante Paradoxo de Monty Hall.
- A probabilidade de um evento depende da informação disponível

## 2.6 Atividades Complementares

*Respostas na pág. 196.*

1. O time de futebol de certa escola disputará um campeonato escolar. Para isso, foram convocados, dentre outros, 4 alunos que jogam na posição de atacante (alunos A, B, C e D). Considerando que a dupla de ataque seja formada por meio de um sorteio, determine o espaço amostral das duplas de ataque que podem ser formadas com esses alunos.

2. No bolso da calça de um menino estão quatro bolinhas de gude diferenciadas apenas pela cor, sendo que duas delas são verdes (V) e duas são azuis (A). Considerando que ele vai retirar aleatoriamente 3 bolinhas sucessivamente, determine:

   a) o espaço amostral $\Omega$, considerando a ordem em que elas serão retiradas.

   b) o evento E em que todas as bolinhas de gude retiradas são da mesma cor.

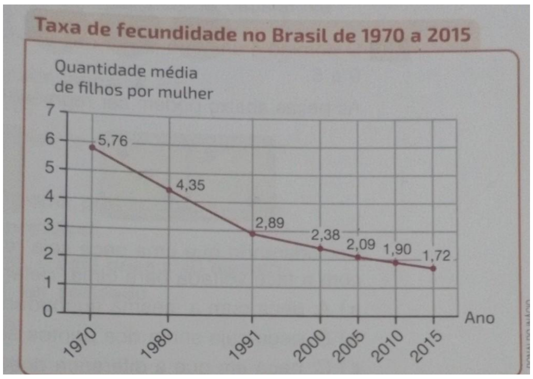
3. Em geral, os baralhos atuais possuem 52 cartas, divididas igualmente em 4 naipes: copas, espadas, ouros e paus. Esses naipes se originaram da fusão entre os baralhos espanhóis e franceses, sendo que os nomes vieram dos espanhóis, e os símbolos que os representam, dos franceses. Utilizando as iniciais de cada naipe, escreva os eventos considerando a retirada aleatória de duas cartas de um baralho completo.

   a) A: duas cartas serem do mesmo naipe

   b) B: pelo menos uma carta ser de ouros

   c) C: nenhuma carta ter naipe de copas

4. A partir de 1970 as mulheres passaram a ter uma quantidade menor de filhos, acarretando a queda da taxa de fecundidade, que é um dos fatores que mais influenciam a taxa de crescimento populacional.




   Aproxime ao inteiro mais próximo a quantidade média de filhos que uma mulher tinha em 1991 e, a partir do resultado obtido, resolva as questões.

   a) Construa um diagrama para representar todas as possibilidades de filhos por mulher, em relação ao sexo masculino (M) e feminino (F).

   b) Escreva os conjuntos que representam os eventos:
      - A: todos os filhos terem o mesmo sexo.
      - B: exatamente 2 filhos do sexo masculino.
      - C: pelo menos um filho do sexo feminino.

5. Na lista de chamada de uma turma, os 30 alunos são numerados de 1 a 30. Em certo dia, quando faltaram os alunos de números 11 e 26, o professor sorteou, dentre os presentes, um aluno para resolver uma tarefa na lousa. Qual é a probabilidade de o número do aluno que vai à lousa ser:

a) par?
b) menor do que 9?
c) múltiplo de 4?
d) primo?
e) maior do que 12 e menor do que 25?

6. Considere todos os números de 3 dígitos distintos formados a partir dos algarismos 6, 7 e 8. Se escolhermos um desses números ao acaso, qual é a probabilidade de ele ser:

a) ímpar?
b) par?
c) múltiplo de 3?
d) maior do que 770?
e) múltiplo de 5?

7. Em um congresso compareceram oftalmologistas, ortopedistas e odontologistas, conforme apresentado abaixo.

| | Homem | Mulher | Total |
|---|---|---|---|
| Oftalmologistas | 17 | 14 | 31 |
| Ortopedistas | 12 | 18 | 30 |
| Odontologistas | 13 | 11 | 24 |
| Total | 42 | 43 | 85 |

Ao final do congresso, houve o sorteio de um prêmio entre os participantes. Calcule a probabilidade de o profissional sorteado ser:

a) um homem
b) um ortopedista
c) uma mulher oftalmologista

8. Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20? (Enem 2015)

a) $\frac{1}{100}$ b) $\frac{19}{100}$ c) $\frac{20}{100}$ d) $\frac{21}{100}$ e) $\frac{80}{100}$

9. Em uma reserva florestal existem 263 espécies de peixes, 122 espécies de mamíferos, 93 espécies de répteis, 1 132 espécies de borboletas e 656 espécies de aves. Se uma espécie animal for capturada ao acaso, qual a probabilidade de ser uma borboleta? (Enem 2010, 2ª apl.)

a) $63,31\%$ b) $60,18\%$ c) $56,52\%$ d) $49,96\%$ e) $43,27\%$

10. Numa escola com 1 200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol? (Enem 2013)

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{5}{14}$

11. A queima de cana aumenta a concentração de dióxido de carbono e de material particulado na atmosfera, causa alteração do clima e contribui para o aumento de doenças respiratórias. A tabela abaixo apresenta números relativos a pacientes internados em um hospital no período da queima da cana. (Enem 2007)

| pacientes | problemas respiratórios causados pelas queimadas | problemas respiratórios resultantes de outras causas | outras doenças | total |
|---|---|---|---|---|
| idosos | 50 | 150 | 60 | **260** |
| crianças | 150 | 210 | 90 | **450** |

Escolhendo-se aleatoriamente um paciente internado nesse hospital por problemas respiratórios causados pelas queimadas, a probabilidade de que ele seja uma criança é igual a

a) $0,26$, o que sugere a necessidade de implementação de medidas que reforcem a atenção ao idoso internado com problemas respiratórios
b) $0,50$, o que comprova ser de grau médio a gravidade dos problemas respiratórios que atingem a população nas regiões das queimadas.
c) $0,63$, o que mostra que nenhum aspecto relativo à saúde infantil pode ser negligenciado.
d) $0,67$, o que indica a necessidade de campanhas de conscientização que objetivem a eliminação das queimadas.
e) $0,75$, o que sugere a necessidade de que, em áreas atingidas pelos efeitos das queimadas, o atendimento hospitalar no setor de pediatria seja reforçado.

12. Os baralhos comuns com 52 cartas são divididos em quatro naipes distintos - copas, espadas ouros e paus. Cada naipe possui 13 cartas: A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q e K . Ao se retirar uma carta aleatoriamente de um desses baralhos, qual e a probabilidade de essa carta ser :

a) um rei de paus?
b) uma carta com número 8?
c) um valeta ou uma carta de ouros?
d) uma dama ou uma carta com número 3?
e) uma carta de copas, que não seja um figura?

13. Dos 120 alunos matriculados em certa academia, 62 praticam musculação, 48 participam das aulas de ginastica aeróbica e 20 praticam as duas modalidades de exercício físico. Ao ser sorteado um brinde entre os alunos dessa academia, qual é a probabilidade de esse aluno praticar musculação ou ginastica aeróbica?

14. Para a retirada da primeira Carteira Nacional de Habilitação (CNH), os candidatos devem ser considerados aptos nos exames médicos, psicológicos, de legislação de trânsito e de direção. A primeira CNH somente pode ser solicitada nas categorias A, para condução de motocicletas de duas ou três rodas, B para condução de veículos que não contenham mais de 8 lugares (excluído o do motorista) e que não ultrapassem 3,5 t, ou AB, para condução de veículos das categorias A e B.

Em certo município, em uma semana, dos 120 candidatos que realizaram os exames médicos e psicológicos, 112 foram aprovados no exame médico, 104 foram considerados aptos no exame psicológico e apenas 6 não foram aprovados em nenhum desses exames.

Qual é a probabilidade de, ao se escolher ao acaso uma das 120 pessoas, ela ter sido aprovada:

a) no exame médico ou no psicológico?

b) em ambos os exames?

c) apenas no exame psicológico?

15. Em um congresso de ciências, os participantes foram classificados da seguinte maneira.

| | Físicos | Químicos | Biólogos |
|---|---|---|---|
| Homens | 35 | 30 | 45 |
| Mulheres | 20 | 40 | 40 |

Considere o evento em que é escolhida ao acaso uma dessas pessoas e calcule as probabilidades. (Considere as iniciais das palavras)

a) $P(H|F)$ b) $P(Q|M)$ c) $P(M|B)$

16. O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. (Enem 2010) Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

| Tamanho do calçado | Nº de funcionárias |
|---|---|
| 39,0 | 1 |
| 38,0 | 10 |
| 37,00 | 3 |
| 36,00 | 5 |
| 35,00 | 6 |

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0 a probabilidade de ela calçar 38,0 é

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{5}{7}$ e) $\frac{5}{14}$

17. Uma confecção de roupas produziu um lote com um total de 150 camisetas, distribuídas entre os tamanhos P e M, sendo 59 lisas e as demais estampadas. Nesse lote, havia 100 camisetas tamanho P, das quais 67 eram estampadas. (Famema 2020)

Retirando-se, ao acaso, uma camiseta desse lote e sabendo que seu tamanho é M, a probabilidade de que seja uma peça estampada é igual a

a) 36% b) 24% c) 48% d) 60% e) 72%

18. Um grupo de 1.000 pessoas apresenta, conforme sexo e qualificação profissional, a composição: (LEONARDO, 2013a, p. 288)

| Qualificação profissional do grupo | | |
|---|---|---|
| | Especializados | Não especializados |
| Homens | 210 | 390 |
| Mulheres | 140 | 260 |

Escolhendo uma dessas pessoas ao acaso:

a) qual a probabilidade de ser homem?

b) qual a chance de ser mulher não especializada?

c) qual a porcentagem de não especializados?

d) qual a porcentagem de homens especializados?

e) se for especializado, qual a chance de ser mulher?

19. Seis cartas (2, 3, 4 de copas; 2 e 4 de paus; e 4 de espadas) são embaralhadas e colocadas com a face para baixo sobre uma mesa. Sabendo que uma dessas cartas é escolhida, responda às questões, justificando suas respostas. (LEONARDO, 2013a, p. 288)

    a) Os eventos "escolher um 4" e "escolher uma carta de copas" são independentes?
    b) E os eventos "escolher um 4" e "escolher uma carta de paus".

20. Em uma escola estudam alunos de dois segmentos: no ensino médio são 400 meninos e 200 meninas, e no ensino fundamental são 400 meninas e 300 meninos. Ao sortear um aluno dessa escola, calcule a probabilidade de ser: (LEONARDO, 2013a, p. 288)

    a) menino, sabendo que é aluno do ensino médio.
    b) aluno do ensino médio, sabendo que é menino.

21. Uma urna contém 3 bolas: 1 verde, 1 azul e 1 branca. Tira-se 1 bola ao acaso, registra-se sua cor e coloca-a de volta na urna. Repete-se a experiência duas outras vezes. Qual a probabilidade de serem registradas 3 cores distintas? (LEONARDO, 2013a, p. 288)

22. Qual é probabilidade de sair coroa três vezes em sete lançamentos de uma moeda não viciada? (LEONARDO, 2013a, p. 290)

23. Uma empresa que empacota farinha deixa passar $0,1\%$ do produto embalado com peso abaixo do limite legal. Qual é a probabilidade aproximada de um consumidor comprar 3 pacotes e nenhum ter peso abaixo do limite? (LEONARDO, 2013a, p. 290)

24. Um casal planeja ter quatro filhos. Calcule a probabilidade de terem: (LEONARDO, 2013a, p. 290)

    a) quatro meninos.
    b) duas meninas e dois meninos
    c) um menino e duas meninas

25. Um banco atribui, por um processo randômico[1], a senha das contas de seus clientes. A senha é formada por seis caracteres alfanuméricos, isto é, os caracteres podem ser escolhidos entre as 26 letras do alfabeto e entre os 10 algarismos numéricos. Calcule a probabilidade aproximada de uma senha ter: (LEONARDO, 2013a, p. 290)

    a) apenas letras.
    b) apenas números.
    c) 4 letras e 2 números.
    d) 2 letras e 4 números.
    e) pelo menos uma letra.
    f) pelo menos um número.

26. Em cobaias de um experimento, o pelo preto é dominante sobre o branco. Os paisde uma ninhada de 5 filhotes são heterozigotos pretos, de modo que, para cada filhote, a probabilidade de ser preto é de $\frac{3}{4}$. Determine a probabilidade de os filhotes serem: (LEONARDO, 2013a, p. 290)

    a) 3 brancos e 2 pretos.
    b) 2 brancos e 3 pretos.
    c) 1 branco e 4 pretos.
    d) todos pretos.

27. Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região. (Enem 2017)

    Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

    a) $0,075$ b) $0,150$ c) $0,325$ d) $0,600$ e) $0,800$

28. Uma aluna estuda numa turma de 40 alunos. Em um dia, essa turma foi dividida em três salas, A, B e C, de acordo com a capacidade das salas. Na sala A ficaram 10 alunos, na B, outros 12 alunos e na C, 18 alunos. Será feito um sorteio no qual, primeiro, será sorteada uma sala e, posteriormente, será sorteado um aluno dessa sala. (Enem 2017)

    Qual é a probabilidade de aquela aluna específica ser sorteada, sabendo que ela está na sala C?

    a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{18}$ c) $\frac{1}{40}$ d) $\frac{1}{54}$ e) $\frac{7}{18}$

29. Uma casa lotérica oferece cinco opções de jogos. Em cada opção, o apostador escolhe um grupo de K números distintos em um cartão que contém um total de N números disponíveis, gerando, dessa forma, um total de C combinações possíveis para se fazer a marcação do cartão. Ganha o prêmio o cartão que apresentar os K números sorteados. Os valores desses jogos variam de R$ 1,00 a R$ 2,00, conforme descrito no quadro. (Enem Digital 2020)

| Jogo | Valor do jogo (R$) | Números a serem escolhidos (*K*) | Números disponíveis (*N*) | Combinações possíveis (*C*) |
|---|---|---|---|---|
| I | 1,50 | 6 | 45 | 8 145 060 |
| II | 1,00 | 6 | 50 | 15 890 700 |
| III | 2,00 | 5 | 60 | 5 461 512 |
| IV | 1,00 | 6 | 60 | 50 063 860 |
| V | 2,00 | 5 | 50 | 2 118 760 |

    Um apostador dispõe de R$ 2,00 para gastar em uma das cinco opções de jogos disponíveis.

    Segundo o valor disponível para ser gasto, o jogo que oferece ao apostador maior probabilidade de ganhar prêmio é o

    a) I b) II c) III d) IV e) V

30. Um apostador deve escolher uma entre cinco moedas ao acaso e lançá-la sobre uma mesa, tentando acertar qual resultado (cara ou coroa) sairá na face superior da moeda. (Enem Digital 2020)

    Suponha que as cinco moedas que ele pode escolher sejam diferentes:

    - duas delas têm "cara" nas duas faces;
    - uma delas tem "coroa" nas duas faces;
    - duas delas são normais (cara em uma face e coroa na outra).

    Nesse jogo, qual é a probabilidade de o apostador obter uma face "cara" no lado superior da moeda lançada por ele?

[1] aleatório

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{4}{5}$

31. O dono de um restaurante situado às margens de uma rodovia percebeu que, ao colocar uma placa de propaganda de seu restaurante ao longo da rodovia, as vendas aumentaram. Pesquisou junto aos seus clientes e concluiu que a probabilidade de um motorista perceber uma placa de anúncio é 1/2. Com isso, após autorização do órgão competente, decidiu instalar novas placas com anúncios de seu restaurante ao longo dessa rodovia, de maneira que a probabilidade de um motorista perceber pelo menos uma das placas instaladas fosse superior a 99/100. (Enem 2019)

A quantidade mínima de novas placas de propaganda a serem instaladas é

a) 99 b) 51 c) 50 d) 6 e) 1

32. O organizador de uma competição de lançamento de dardos pretende tornar o campeonato mais competitivo. Pelas regras atuais da competição, numa rodada, o jogador lança 3 dardos e pontua caso acerte pelo menos um deles no alvo. O organizador considera que, em média, os jogadores têm, em cada lançamento, 1/2 de probabilidade de acertar um dardo no alvo. (Enem 2021)

A fim de tornar o jogo mais atrativo, planeja modificar as regras de modo que a probabilidade de um jogador pontuar em uma rodada seja igual ou superior a 9/10. Para isso, decide aumentar a quantidade de dardos a serem lançados em cada rodada.

Com base nos valores considerados pelo organizados da competição, a quantidade mínima de dardos que devem ser disponibilizados em uma rodada para tornar o jogo mais atrativo é

a) 2 b) 4 c) 6 d) 9 e) 10

33. Para ganhar um prêmio, uma pessoa deverá retirar, sucessivamente e sem reposição, duas bolas pretas de uma mesma urna. (Enem 2018)

Inicialmente, as quantidades e cores das bolas são como descritas a seguir;

Urna A – Possui três bolas brancas, duas bolas pretas e uma bola verde;
Urna B – Possui seis bolas brancas, três bolas pretas e uma bola verde;
Urna C – Possui duas bolas pretas e duas verdes;
Urna D – – Possui três bolas brancas e três bolas pretas;

A pessoa deve escolher uma entre as cinco opções apresentadas:

Opção 1 – Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;
Opção 2 – Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna B;
Opção 3 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna A; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A
Opção 4 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna D para a urna C; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna C;
Opção 5 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna D; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna D.

Com o objetivo de obter a maior probabilidade possível de ganhar o prêmio, a pessoa deve escolher a opção

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

34. Amigo secreto é uma brincadeira tradicional nas festas de fim de ano. Um grupo de amigos se reúne e cada um deles sorteia o nome da pessoa que irá presentear. No dia da troca de presentes, uma primeira pessoa presenteia seu amigo secreto. Em seguida, o presenteado revela seu amigo secreto e o presenteia. A brincadeira continua até que (Enem 2020)

todos sejam presenteados, mesmo no caso em que o ciclo se fecha. Dez funcionários de uma empresa, entre eles um casal, participarão de um amigo secreto. A primeira pessoa a revelar será definida por sorteio.

Qual é a probabilidade de que a primeira pessoa a revelar o seu amigo secreto e a última presenteada sejam as duas pessoas do casal?

a) $\frac{1}{15}$ b) $\frac{1}{45}$ c) $\frac{1}{50}$ d) $\frac{1}{90}$ e) $\frac{1}{100}$

CAPÍTULO 3

# Estatística e Análise de dados

## 3.1 Conceitos preliminares de Estatística

O princípio orientador da Estatística está na ciência da indução lógica, das generalizações de características observadas em uma parte retirada do todo que se procura estudar e conhecer. A Teoria das Probabilidades é a base, portanto, dessa área de conhecimento, impulsionando técnicas e métodos de pesquisa que engloba, especialmente, o planejamento experimental, a coleta e a organização de dados, a apresentação das informações, a análise e a tomada de decisões. Este tipo de manuseio da Estatístico pode ser chamado de *estatística descritiva*.

O processo experimental estatístico consitui o principal e mais confiável método científico quantitativo em pesquisas científicas. Sua utilização é amplamente utilizada no mundo e nos centros de pesquisa e constitui, por si só, uma área acadêmica bastante ampla.

A Estatística é largamente utilizada nos meios de comunicação. Deparamo-nos com ela quando ouvidos previsões do tempo, pesquisas de intenção de votos, índices de desenvolvimento humano, taxas de desemprego, eficácia de uma vacina, previsão de inflação anual de um país, entre outros.

**População** (ou universo estatístico $U$) é o conjunto de elementos com pelo menos uma característica em comum que possam oferecer dados relativos ao assunto em estudo, e **amostra** $(A)$ é um subconjunto não vazio da população com menor quantidade de elementos, com representatividade suficiente para explicar a população a partir de suas características essenciais, sem apresentar tendências distintas desta, logo $A \subset U$.

Indivíduo (ou objeto) de um estudo estatístico é cada um dos elementos que constitui a população ou amostra, fornecendo, obrigatoriamente, pelo menos uma informação para o experimento.

O processo de se apurar uma amostra é chamado de **amostragem** e, por se constituir uma ramo, bastante específico da Estatística, não vamos estudá-lo a fundo neste tópico.

**Variáveis estatísticas** são características ou atributos ou preferências, numéricos ou não, pesquisados em cada elemento de uma amostra/população.

a) **Variáveis qualitativas**: variáveis que apresentam como valores uma qualidade ou uma característica. Quando é possível extrair uma ordem dos seus padrões, estas são chamadas de *ordinais* (por exemplo: grau de instrução, satisfação com determinado produto, classe social etc.); quando não é possível, são chamadas de *nominais* (por exemplo: sexo, cor dos olhos, preferências de lazer etc.).

b) **Variáveis quantitativas** (discreta ou contínua): variáveis que apresentam valores numéricos resultantes de algum tipo de contagem ou mensuração. Se forem obtidas a partir de contagem (números inteiros), são chamadas de *discretas* (por exemplo: número de indivíduos na família, quantidade de vezes em que se utiliza determinado serviço etc.); se de mensurações/medidas, são chamadas de *contínuas* (por exemplo: altura, peso etc.).

$$\text{Variáveis}\begin{cases}\text{Qualitativas}\begin{cases}\text{Ordinais}\\ \text{Nominais}\end{cases}\\ \\ \text{Quantitativas}\begin{cases}\text{Discretas}\\ \text{Contínuas}\end{cases}\end{cases}$$

## 3.2 Distribuição de frequências

Uma das formas de análise de dados estatísticos utiliza o que chamamos de distribuição de frequências, associando tabelas e gráficos para exprimir sinteticamente um conjunto robusto e, por vezes, complexo de informações. Desta forma, a apresentação de informações em tabelas e gráficos, organizadas em classes (subconjuntos disjuntos da amostra), configura-se como estratégia de comunicação mais rápida e direta, sem perder em fidedignidade.

A esse tipo de organização dos dados numéricos vamos chamar de **análise de dados agrupados**.

Para exemplificarmos a forma como podemos organizar dados brutos em tabelas e gráficos de distribuição de frequência, vamos utilizar dois casos hipotéticos específicos:

Suponhamos que uma empresa pretenda estudar a origem de seus clientes, distribuídos pelos bairros da cidade onde se situa. Para disso, diariamente busca com cada cliente essa informação após a compra. Num determinado dia, a informações colhidas pela empresa foram as seguintes:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Alvorada | JK | Planalto | Planalto | Alvorada | Planalto |
| Laguna | JK | Estoril | Laguna | Alvorada | Planalto |
| Planalto | Estoril | Laguna | Planalto | Laguna | Planalto |
| Laguna | Estoril | Alvorada | Planalto | Planalto | Laguna |
| Estoril | Estoril | Laguna | Estoril | Laguna | Planalto |

Neste dia, 30 vendas foram realizadas e, portanto, foram obtidos 30 dados referentes à origem dos clientes.

Podemos resumir as informações a respeito desses clientes organizando-as a partir de valores atribuídos à variável “origem dos clientes” por meio do registro de frequências em uma **tabela de frequências** ou **distribuição de frequências**.

A quantidade de vezes que cada valor é observado chama-se **frequência absoluta** ou, simplesmente, **frequência** ($f_i$).

A razão entre a frequência absoluta e o total de indivíduos/objetos é chamada de **frequência relativa** ($f_r$). Ela pode ser expressa em decimais, mas geralmente utiliza-se percentuais para facilitar a compreensão.

**Frequência absoluta acumulada** ($F_i$) é a soma de cada frequência absoluta com as frequências absolutas de todas as classes anteriores.

De maneira análoga, a **frequência relativa acumulada** ($F_r$) é a soma de cada frequência relativa com as frequências relativas anteriores.

Assim sendo, vamos agrupar os dados brutos em **classes unitárias** que representam, cada uma, os bairros de ocorrência na pesquisa:

| Bairro (classes) | Frequência absoluta ($f_i$) | Frequência relativa ($f_r$) | Frequência absoluta acumulada ($F_i$) | Frequência relativa acumulada ($F_R$) |
|---|---|---|---|---|
| Planalto | 10 | $\frac{10}{30} = 0,\overline{3} = 33,33\%$ | $10$ | $33,33\%$ |
| Laguna | 8 | $\frac{8}{30} = 0,2\overline{6} = 26,66\%$ | $10+8=18$ | $33,33+26,66=60\%$ |
| Estoril | 6 | $\frac{6}{30} = 0,2 = 20\%$ | $10+8+6=24$ | $33,33+26,66+20=80\%$ |
| JK | 2 | $\frac{2}{30} = 0,0\overline{6} = 6,66\%$ | $10+8+6+2=26$ | $33,33+26,66+20+6,66=86,66\%$ |
| Alvorada | 4 | $\frac{4}{30} = 0,1\overline{3} = 13,33\%$ | $10+8+6+2+4=30$ | $33,33+26,66+20+6,66+13,33=100\%$ |
| **Total** | 30 | 100% | – | – |

A tabela anterior, em uma versão final, mais "limpa", deverá ficar assim:

| Bairro (classes) | Frequência absoluta ($f_i$) | Frequência relativa ($f_r$) | Frequência absoluta acumulada ($F_i$) | Frequência relativa acumulada ($F_R$) |
|---|---|---|---|---|
| Planalto | 10 | $33,33\%$ | 10 | $33,33\%$ |
| Laguna | 8 | $26,66\%$ | 18 | $60\%$ |
| Estoril | 6 | $20\%$ | 24 | $80\%$ |
| JK | 2 | $6,66\%$ | 26 | $86,66\%$ |
| Alvorada | 4 | $13,33\%$ | 30 | $100\%$ |
| **Total** | 30 | $100\%$ | – | – |

Suponhamos, agora, que essa mesma empresa queira, como parte do estudo que está realizando, entender também as faixas de renda dos seus clientes. Para tanto, na pesquisa que realizou, além da origem de seus clientes nos bairros da cidade, perguntou-lhes também sobre sua renda mensal.

Os dados brutos com as trinta informações (em R$) são as seguintes:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.580,00 | 1.800,00 | 4.500,00 | 2.570,00 | 5.800,00 | 3.580,00 |
| 1.220,00 | 1.650,00 | 7.600,00 | 3.600,00 | 1.280,00 | 4.280,00 |
| 2.000,00 | 1.712,00 | 2.250,00 | 3.772,00 | 1.350,00 | 2.650,00 |
| 6.320,00 | 3.260,00 | 1.500,00 | 6.800,00 | 1.800,00 | 4.400,00 |
| 5.000,00 | 3.600,00 | 4.450,00 | 4.900,00 | 1.500,00 | 5.800,00 |

As informações a respeito desses clientes também podem ser organizadas a partir de valores atribuídos à variável "renda dos clientes" por meio do registro das frequências em uma **distribuição de frequências**.

Todavia, agora, não é conveniente que utilizemos classes unitárias, como no exemplo anterior. Isso porque a variabilidade dos valores apurados é alta e, se assim fosse, teríamos contagens de frequência absoluta quase todas unitárias; o que estatisticamente não mudaria muito em relação aos dados brutos que já colhemos.

Diante disso, é conveniente que a organização dos dados seja feita em **intervalos de classes**. Para tanto, temos que, antes de mais nada, ordenar os dados:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1.220,00$ | $1.280,00$ | $1.350,00$ | $1.500,00$ | $1.500,00$ | $1.580,00$ |
| $1.650,00$ | $1.712,00$ | $1.800,00$ | $1.800,00$ | $2.000,00$ | $2.250,00$ |
| $2.570,00$ | $2.650,00$ | $3.260,00$ | $3.580,00$ | $3.600,00$ | $3.600,00$ |
| $3.772,00$ | $4.280,00$ | $4.400,00$ | $4.450,00$ | $4.500,00$ | $4.900,00$ |
| $5.000,00$ | $5.800,00$ | $5.800,00$ | $6.320,00$ | $6.800,00$ | $7.600,00$ |

Em seguida, precisando verificar a **amplitude** $(A)$ dos dados, ou seja, o intervalo numérico que compreende todos os dados. Para isso, basta que façamos a subtração da *cota superior* (o maior dos dados) pela *cota inferior* (o menor dos dados):

$$A = 7600 - 1220 = 6380$$

Para construir a tabela de frequências, é preciso decidir em quantas classes $(n)$ os dados serão organizados. Esta decisão sempre estará associada à natureza dos dados, ao objetivo da pesquisa e à uma percepção particular do(s) pesquisador(es) e deverá sempre estar vinculada à tentativa de se representar da maneira mais eficiente possível aquilo que se quer descrever e analisar.

Neste nosso caso, vamos optar por construir 5 classes. Logo, a amplitude total deverá ser dividida por esta quantidade de classes, chegando a um quociente que podemos chamar de *amplitude de classe* $(a)$:

Caso o resultado da divisão para encontrar a *amplitude de classe* não for exato, ele deverá ser arrendondado para cima. Esse valor arrendondado deve ser dividido entre o valor imediatamente antes da cota inferior da primeira classe e o valor imediatamente após a cota superior da última classe.

$$a = \frac{A}{n} = \frac{6380}{5} = 1276$$

O valor de cada intervalo de classe é, portanto, 1276. Como nossa cota inferior é 1220, para a construção da primeira classe, basta que somemos o valor de $n$ à 1220; as demais classes serão obtidas por procedimento análogo, somando $n$ ao resultado obtido como extremo superior da primeira classe. Dessa forma:

| Ordem da classe | Formação da classe | Representação da classe |
|---|---|---|
| 1ª | $1220 + 1276 = 2496$ | $1220 \vdash 2496$ |
| 2ª | $2496 + 1276 = 3772$ | $2496 \vdash 3772$ |
| 3ª | $3772 + 1276 = 5048$ | $3772 \vdash 5048$ |
| 4ª | $5048 + 1276 = 6324$ | $5048 \vdash 6324$ |
| 5ª | $6324 + 1276 = 7600$ | $6324 \vdash\!\dashv 7600$ |

Tendo construído as classes da tabela de frequência, os procedimentos seguintes para organização dos dados é a apuração da **frequência absoluta** $(f_i)$, da **frequência relativa** $(f_r)$, da **frequência absoluta acumulada** $(F_i)$ e da **frequência relativa acumulada** $(F_r)$. Teremos, portanto, conforme Tabela 1:

Tabela 1 – Distribuição de frequências relativas à renda dos clientes da empresa

| Renda dos clientes (em R$) | $f_i$ | $f_r$ | $F_i$ | $F_r$ |
|---|---|---|---|---|
| $1220 \vdash 2496$ | 12 | 40% | 12 | 40% |
| $2496 \vdash 3772$ | 6 | 20% | 18 | 60% |
| $3772 \vdash 5048$ | 7 | $23,33\%$ | 25 | $83,33\%$ |
| $5048 \vdash 6324$ | 3 | 10% | 28 | $93,33\%$ |
| $6324 \vdash\dashv 7.600$ | 2 | $6,66\%$ | 30 | 100% |
| **Total** | 30 | 100% | – | – |

É importante destacar que o símbolo $\vdash$ entre os extremos de cada classe indica que aquele valor que está próximo do traço vertical compõe a classe, enquanto que o outro da direita, não. Por exemplo, comparando a segunda ($2496 \vdash 3772$) e a terceira ($3772 \vdash 5048$) classes, o valor de renda $R\$3772,00$ foi incluído na terceira classe e não na segunda.

Esse tipo de observação utilizando o símbolo $\vdash$ tem definição próxima à de conjuntos reais. Tanto que outra maneira correta de se representar classes de intervalos é por meio da notação de intervalos. Por exemplo: [2496 , 3772[.

Com base na Tabela 1, podemos concluir, entre outras várias coisas, que:

- 20% dos clientes têm renda entre 2496 e 3772;
- $83,33\%$ dos clientes têm renda entre 1220 e 5048;
- 28 dos 30 clientes têm renda até 6324;
- a maioria dos clientes têm renda até 3772.

Podemos extrair desses últimos itens uma pequena parcela do grande conjunto de análises que podemos fazer a partir dos dados agrupados, organizados em tabelas distribuição de frequências. Se fôssemos tentar empreender uma análise a partir dos dados brutos, com pouco ou nenhum tratamento, certamente teríamos grandes dificuldades, sem dizer da possibilidade de não conseguirmos extrair tudo que pretendíamos ou até extrair informações equivocadas.

### 3.2.1 Representações gráficas

A partir da representação em tabelas de frequências, é possível que associemos aos dados agrupados representações gráficas diversas. São várias as formas gráficas conhecidas. Algumas mais usuais serão exemplificadas na sequência, tomando como base os dados agrupados da Tabela 1.

#### Histograma e polígono de frequência

O **histograma** é um tipo de representação gráfica parecida com o gráfico de barras verticais. Nele:

- as frequências são indicadas no eixo coordenado vertical e as classes no eixo coordenado horizontal;
- as bases dos retângulos coincidem com os intervalos representantes das respectivas classes;
- as alturas dos retângulos representam as frequências das respectivas classes.

O histograma é normalmente associado a distribuições de frequências em que as classes são intervalos reais, para *variáveis quantitativas*. No caso de distribuições de frequência com classes unitárias, os gráficos de linha, de barras ou de setores são mais indicados.

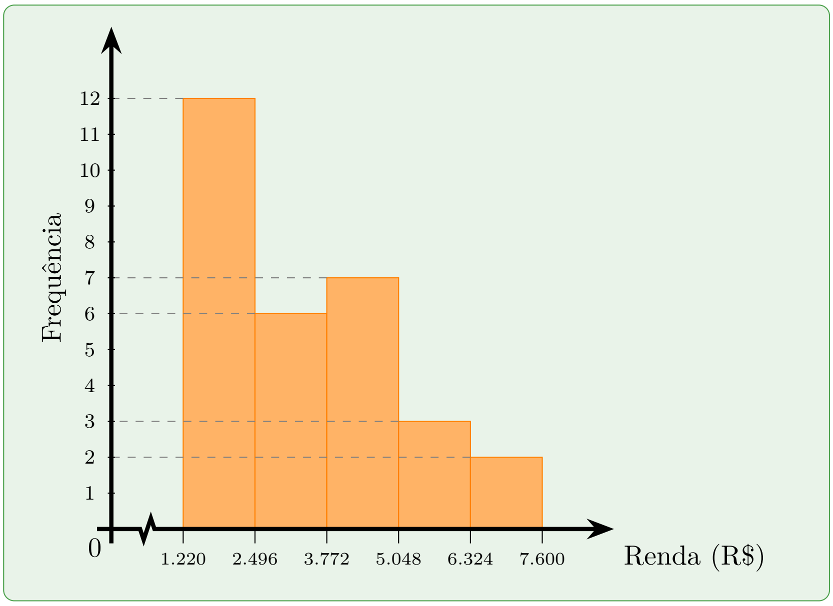



Figura 3 – Histograma da Tabela 1

A partir do histograma podemos também associar um gráfico parecido chamado de **polígono de frequência**. Nele, em vez de barras verticais, representamos a distribuição de frequências a partir de pontos expressos em coordenadas (Renda × frequência, como neste exemplo) que, no plano cartesiano, se ligam por segmentos de reta com extremidades nos pontos médios das classes (repare que o inicio e da linha devem estar sobre o eixo horizontal):

A representação  no eixo horizontal do gráfico da Figura 3 indica que não há ocorrência de dados naquela região de valores, podendo ser este então comprimido.

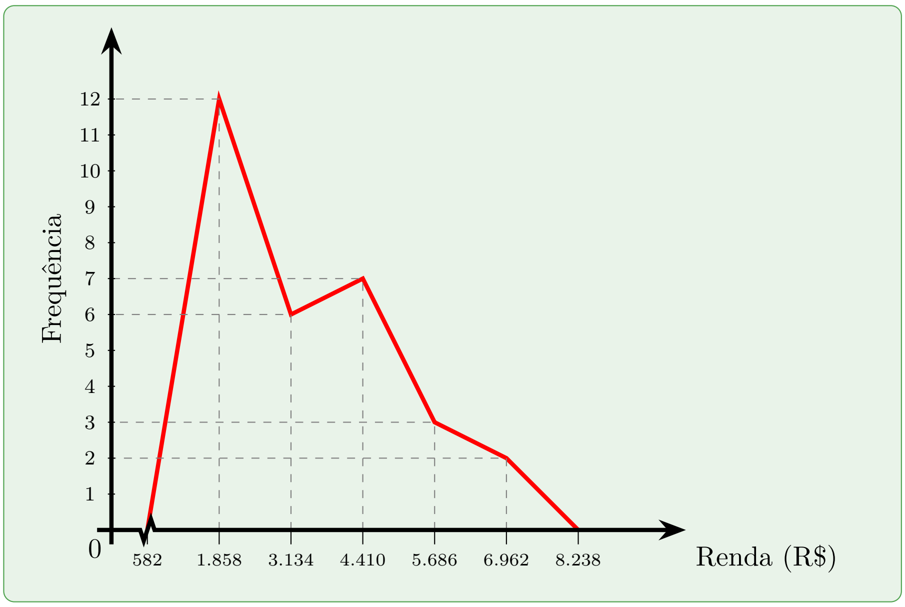



Figura 4 – Polígono de Frequência da Tabela 1

Se compararmos o histograma com o polígono de frequência, podemos ter, individualmente, nossas preferências por uma ou por outra representação. O fato é que, em linhas gerais, cada um consegue exprimir com mais completude algumas informações que temos nos dados brutos.

Por exemplo, quando olhamos para o histograma temos condições de avaliar melhor a totalidade dos dados, já que suas barras preenchidas uma imediatamente ao lado da outra denotam um movimento de construção do universo de estudo. Já o polígono de frequência nos remete à ideia de evolução dos dados, pois demonstra o *some-e-desce* das respectivas frequências; assim, é possível entender como os dados se comportam ao longo e nos extremos das classes.

Dito isso, é comum que pesquisadores associem as duas representações, de modo a ter uma visão ainda mais ampla das informações:


Figura 5 – Histograma e polígono de frequências da Tabela 1

A representação gráfica tem um propósito principal: tornar a comunicação mais direta e concisa.

Com um gráfico, o professor, o pesquisador, o jornalista, o engenheiro, o palestrante, enfim, qualquer profissional que queira comunicar uma análise busca condensar, numa única imagem, um conjunto de dados que, em estado bruto, podem representar uma infinidade de informações.

Diante disso, é comum vermos em livros, nos noticiários da televisão e da Internet a associação de uma notícia à uma representação gráfica. São vários os tipos de gráficos possíveis; exemplificaremos na sequência mais alguns.

### Gráfico de setores, de barras e de segmentos (ou de linhas)

Os exemplos apresentados a seguir são retirados de outros estudos e não guardam nenhuma relação com as situações hipotéticas que exploramos no início desse capítulo.

Vejamos um exemplo para cada um desses tipos de gráfico:

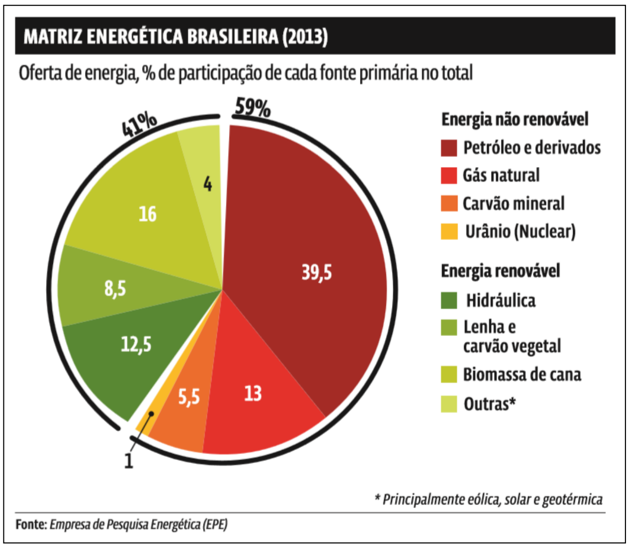



Figura 6 – Exemplo de um gráfico de Setores
Disponível em: https://x.gd/hvFW2

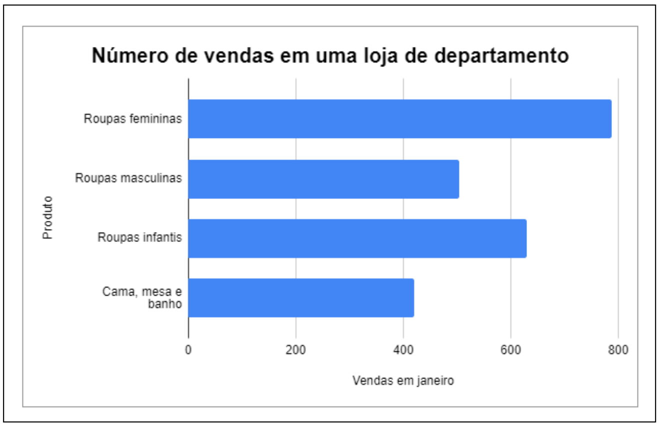



Figura 7 – Exemplo de um gráfico de Barras horizontais
Disponível em: https://escolaeducacao.com.br/como-usar-graficos/

É possível que um gráfico de barras possua barras múltiplas para representar mais de uma característica da amostra.

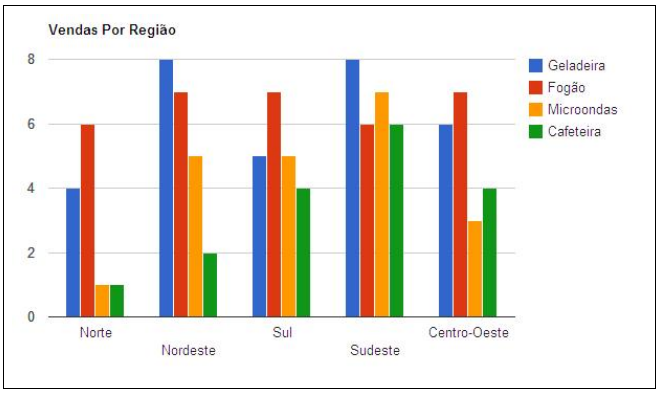



Figura 8 – Exemplo de um gráfico de Barras verticais (ou Colunas)
Disponível em: https://x.gd/zZITF

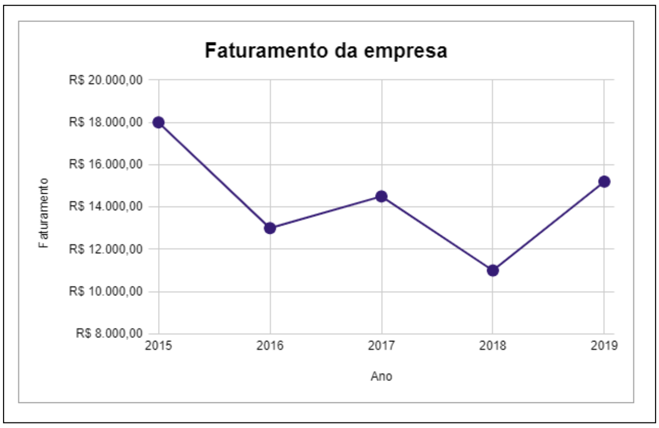



Figura 9 – Exemplo de um gráfico de Segmentos (ou de Linhas)
Disponível em: https://escolaeducacao.com.br/como-usar-graficos/grafico-linhas/

### 3.2.2 Atividades propostas

*Respostas na pág. 197.*

1. A fim de ter um perfil de seu "público" nos finais de semana, o proprietário de um cinema contratou dois pesquisadores para coletar dados referentes à sua clientela. Os pesquisadores escolheram seis objetos de estudo: sexo, idade, nível de escolaridade, estado civil, renda mensal e meio de transporte utilizado para chegar ao cinema. Num final de semana, foram entrevistados vinte frequentadores desse cinema. Os resultados estão apresentados na tabela seguinte:

| Sexo | Idade | Nível de escolaridade | Estado Civil | Transporte utilizado | Renda Mensal (em salários mínimos) |
|---|---|---|---|---|---|
| M | 28 | Médio | Casado | Carro | 4,2 |
| M | 38 | Médio | Casado | Carro | 3,9 |
| F | 24 | Superior | Solteiro | Carro | 2,4 |
| M | 43 | Médio | Casado | Carro | 9,5 |
| F | 32 | Superior | Divorciado | Ônibus | 2,0 |
| F | 19 | Médio | Solteiro | A pé | 2,5 |
| M | 22 | Superior | Solteiro | Ônibus | 3,9 |
| M | 25 | Médio | Solteiro | Ônibus | 4,7 |
| M | 41 | Superior | Casado | A pé | 6,6 |
| F | 40 | Fundamental | Solteiro | Carro | 5,3 |
| F | 35 | Superior | Solteiro | Carro | 5,6 |
| M | 29 | Fundamental | Casado | Carro | 4,2 |
| M | 31 | Fundamental | Divorciado | Carro | 6,0 |
| F | 36 | Superior | Solteiro | Carro | 8,8 |
| F | 48 | Médio | Casado | Carro | 5,4 |
| F | 23 | Médio | Casado | A pé | 5,7 |
| M | 27 | Superior | Solteiro | A pé | 3,2 |
| M | 26 | Superior | Solteiro | Ônibus | 5,2 |
| M | 29 | Superior | Divorciado | Ônibus | 6,2 |
| M | 30 | Fundamental | Casado | Carro | 3,6 |

Responda os itens a seguir de acordo com as informações da tabela anterior:

a) Qual é a população dessa pesquisa?
b) Quais são as variáveis qualitativas? E quais são as variáveis quantitativas?
c) Qual é o tamanho da amostra?

2. Utilizando os dados da tabela anterior, construa tabelas de distribuição de frequências das variáveis *estado civil* e *transporte utilizado* (uma tabela para cada uma) e responda às questões abaixo:

   a) Qual a porcentagem de frequentadores que são *solteiros*?
   b) Qual a porcentagem de frequentadores que usa como meio de transporte o *ônibus*?
   c) Qual a porcentagem de frequentadores que são *casados* e usam como meio de transporte o *carro*?
   d) Qual a porcentagem de frequentadores que são *divorciados* ou usam como meio de transporte o *ônibus*?

3. Construa uma tabela de distribuição de frequências da variável *renda mensal* do exercício 1 antecedente, com 5 intervalos ou classe, e responda às questões abaixo:

   a) Qual é a amplitude dos dados?
   b) Qual a porcentagem dos frequentadores que têm renda de, no mínimo, 5 salários mínimos?
   c) Construa um gráfico de setores com os dados da tabela.
   d) Construa um gráfico de barras com os dados da tabela.

4. A tabela seguinte refere-se a uma pesquisa realizada com 180 alunos de uma escola, a respeito da carreira universitária pretendida:

| Área | Frequência absoluta | Frequência relativa |
|---|---|---|
| Exatas | 45 | $a$ |
| Biológicas | $b$ | 35% |
| Humanas | $c$ | $d$ |

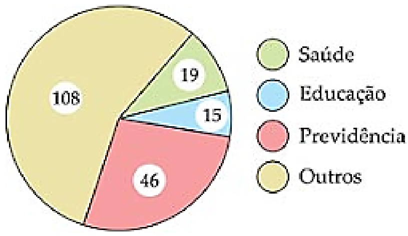
   Quais são os valores de $a$, $b$, $c$ e $d$?

5. Os gastos totais (em R$) em petiscos e bebidas consumidas por 20 famílias em um domingo de sol num bar à beira mar estão listados abaixo:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 88,00 | 124,00 | 110,00 | 120,00 | 148,00 | 96,00 | 70,00 | 134,00 | 102,00 | 160,00 |
| 135,00 | 120,00 | 155,00 | 100,00 | 92,00 | 74,00 | 82,00 | 103,00 | 114,00 | 92,00 |

   a) Agrupe os dados em classe de amplitude igual a 20 e construa uma tabela de frequência.
   b) Qual a porcentagem de famílias que consumiram menos de R$ 110? É possível tomar essa conclusão com base na tabela construída no item anterior? Justifique.
   c) Qual a porcentagem que consumiram no mínimo R$ 85 e menos que R$ 145? É possível tomar essa conclusão com base na tabela construída no item anterior? Justifique.

6. O gráfico publicado pela revista Veja, de 28/7/1999, mostra como são divididos os R$ 188 bilhões do orçamento da União entre os setores de Saúde, Educação, Previdência e outros.




Se os R$ 46 bilhões gastos com a Previdência fossem totalmente repassados aos demais setores de modo que 50% fossem destinados à Saúde, 40% à Educação e os 10% restantes aos outros setores, determine o aumento que o setor de Saúde teria:

a) em reais;

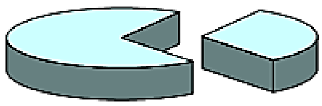
b) em porcentagem, em relação à sua dotação inicial, aproximadamente.

7. (Fuvest-SP) Considere os seguintes dados, obtidos em 1996 pelo censo do IBGE:

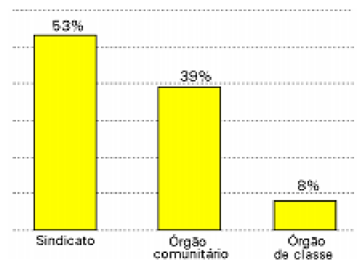
i) A distribuição da população, por grupos de idade, é:

| idade | número de pessoas |
|---|---|
| de 4 a 14 anos | 37.049.723 |
| de 15 a 17 anos | 10.368.618 |
| de 18 a 49 anos | 73.644.508 |
| 50 anos ou mais | 23.110.079 |

ii) As porcentagens de pessoas, maiores de 18 anos, filiadas, ou não, a sindicatos, órgãos comunitários, órgãos de classe, são:



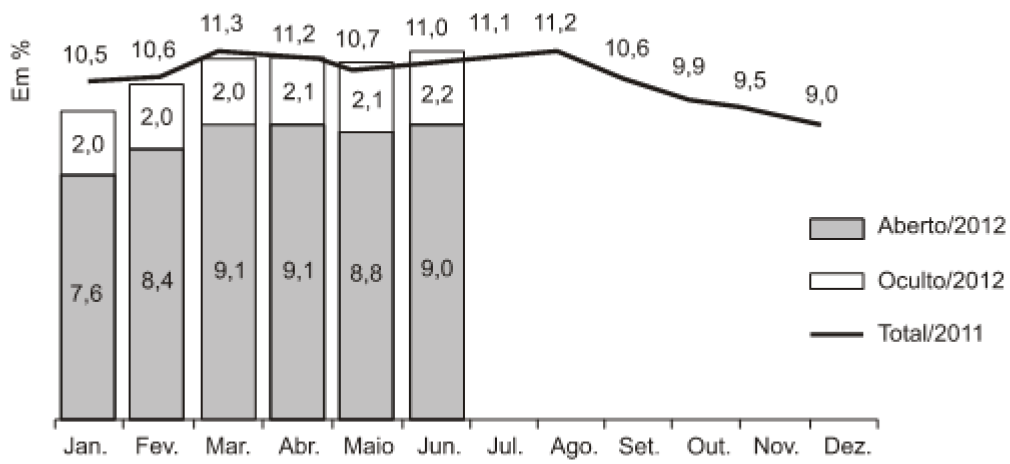

iii) As porcentagens de pessoas, maiores de 18 anos, filiadas a sindicatos, órgãos comunitários e órgãos de classe são:




A partir dos dados acima, pode-se afirmar que o número de pessoas, maiores de 18 anos, filiadas a órgãos comunitários é de, aproximadamente, em milhões:

a) 2 b) 6 c) 12 d) 21 e) 31

8. (Enem 2014) O gráfico abaixo apresenta as taxas de desemprego durante o ano de 2011 e o primeiro semestre de 2012 na região metropolitana de São Paulo. A taxa de desemprego total é a soma das taxas de desemprego aberto e oculto.




Suponha que a taxa de desemprego oculto do mês de dezembro de 2012 tenha sido a metade da mesma taxa em junho de 2012 e que a taxa de desemprego total em dezembro de 2012 seja igual a essa taxa em dezembro de 2011.

*Disponível em: www.dieese.org.br. Acesso em: 1 ago. 2012 (fragmento)*

Nesse caso, a taxa de desemprego aberto de dezembro de 2012 teria sido, em termos percentuais, de:

a) 1,1 b) 3,5 c) 4,5 d) 6,8 e) 7,9

9. Durante o mês de abril de 2017 foram registrados as seguintes temperaturas máximas diárias em uma cidade[2].

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 26 °C | 30 °C | 29,5 °C | 28 °C | 29 °C | 26 °C |
| 25,5 °C | 26 °C | 24 °C | 26 °C | 27 °C | 26 °C |
| 27 °C | 28 °C | 33 °C | 29 °C | 31 °C | 32 °C |
| 32,5 °C | 34,5 °C | 31 °C | 30 °C | 29 °C | 28,5 °C |
| 25 °C | 26 °C | 26 °C | 27 °C | 28,5 °C | 27 °C |

Construa um histograma de seis intervalos com relação à frequência, utilizando os valores da variável *temperatura*.

10. Uma pesquisa buscava investigar o consumo doméstico de água tratada. Por isso, apurou informações sobre o tempo (em minutos) que usuários gastam no banho em diferentes regiões de um município. As informações de 50 deles estão dispostos na tabela abaixo:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 15 | 10 | 10 | 15 | 14 | 18 | 5 | 22 | 15 |
| 12 | 18 | 25 | 12 | 10 | 5 | 20 | 8 | 25 | 14 |
| 15 | 10 | 20 | 18 | 10 | 15 | 20 | 10 | 25 | 20 |
| 25 | 12 | 15 | 20 | 18 | 10 | 10 | 12 | 12 | 10 |
| 22 | 16 | 10 | 20 | 16 | 20 | 12 | 16 | 10 | 22 |

Construa uma distribuição de frequência com cinco intervalos e, com base nela, determine o seguinte:

a) A porcentagem de pessoas que gastam 9 minutos ou mais no banho.

b) A porcentagem de pessoas que gastam 13 minutos ou mais no banho.

c) A porcentagem de pessoas que gastam entre 9 e 21 minutos no banho, incluindo o primeiro limite e excluindo o segundo.

d) Considerando duas classes consecutivas, qual a faixa de tempo de banho da maioria dos entrevistados?

e) Em torno de 10 litros de água são gastos a cada minuto de banho. Assim, quantos litros de água são utilizados por dia? (considere um banho por dia para cada pessoa entrevistada)

f) Quantos litros de água seriam gastos se um banho diário de 6 minutos fosse o padrão para todos? Quantos litros, nessa situação, seriam economizados?

g) Sabendo que, segundo a Organização das Nacões Unidas, uma pessoa precisa de 110 litros diários de água por dia para sobreviver, quantas pessas poderiam ser atendidas pela água economizada na situação do item anterior?

11. (UFLA-MG) Uma prefeitura fez uma pesquisa na comunidade sobre qual deveria ser a ordem de prioridade do governo com relação à educação, à saúde e à segurança. As opções, para a ordem de prioridade, eram:

(A) Educação - Saúde - Segurança

(B) Segurança - Saúde - Educação

(C) Saúde - Segurança - Educação

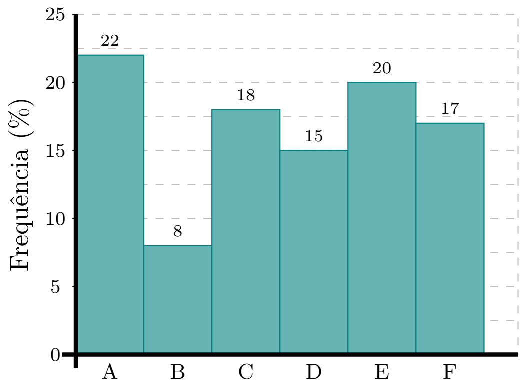
(D) Educação - Segurança - Saúde

(E) Saúde - Educação - Segurança

(F) Segurança - Educação - Saúde

[2] Chavante e Prestes (2016b).

O resultado da pesquisa foi descrito pelo gráfico seguinte, em que, para cada opção, uma barra vertical indica a porcentagem de pessoas que optaram por ela. A partir da análise dos dados enunciados e do gráfico, determine a alternativa incorreta:



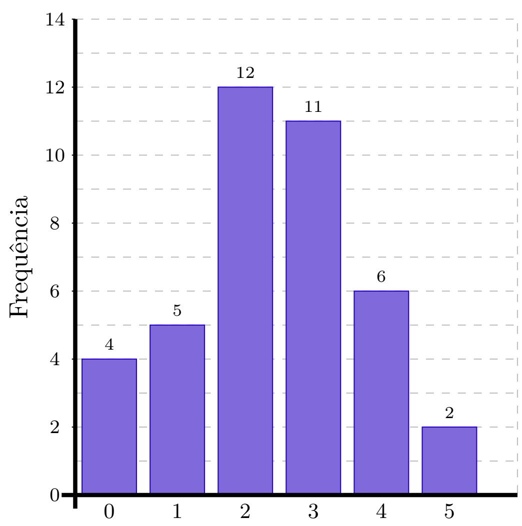

a) A maioria das pessoas entrevistadas priorizou Educação em detrimento da Segurança.

b) A maioria das pessoas entrevistadas priorizou Educação e Segurança em detrimento da Saúde.

c) 42% das pessoas entrevistadas priorizam Educação e Saúde em detrimento da Segurança.

d) 25% das pessoas entrevistadas consideram que a Segurança deveria ser a maior prioridade do governo municipal.

12. O gráfico abaixo apresenta informações obtidas em um condomínio residencial para verificar o número de moradores por apartamento[3].




Este tipo de histograma com barras não justapostas só é aceitável para variáveis discretas, especialmente cada as classes são unitárias. Do contrário, o recomendável é o uso de barras contíguas, ou seja, uma justaposta à seguinte.

a) Quantos apartamentos tem esse condomínio? Desses, quantos têm exatamente 4 moradores?

b) A partir das informações do gráfico, construa uma tabela de distribuição de frequências para a variável *número de moradores*, contendo $f_i$, $f_r$, $F_i$ e $F_r$.

c) Que porcentagem dos apartamentos tem exatamente 3 moradores?

d) Quantos apartamentos têm 2 moradores ou menos? Que porcentagem dos apartamentos essa quantidade representa?

[3] Souza (2013b).

13. Os dados em rol seguintes se referem aos valores gastos (em $R\$$) pelos primeiros clientes que entraram em um supermercado no dia 1º de fevereiro de 2015.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8,88 | 24,47 | 9,26 | 28,08 | 10,81 | 15,23 | 12,69 | 13,78 | 17,00 | 18,36 |
| 52,75 | 18,43 | 86,37 | 19,27 | 19,50 | 17,39 | 19,54 | 20,16 | 20,59 | 22,22 |
| 23,04 | 24,58 | 25,13 | 93,34 | 26,24 | 26,26 | 48,65 | 27,65 | 28,06 | 23,38 |
| 32,03 | 36,37 | 38,98 | 38,64 | 70,32 | 39,16 | 41,02 | 42,97 | 44,08 | 44,67 |
| 45,40 | 15,62 | 46,69 | 50,39 | 54,80 | 3,11 | 59,07 | 15,23 | 61,22 | 82,70 |

Estes dados servirão para a gerência do supermercado estudar os tipos de gastos que cada cliente possui nas diferentes horas do dia. Então, as informações devem ser organizadas para que possam ser estudadas. Ajude, portanto, a gerência do supermercado respondendo o que se pede na sequência:

a) Quantas serão as pessoas estudadas nesse caso?
b) Que tipo de variável quantitativa será trabalhada nesse caso? Explique.
c) Faça a distribuição de frequência dos dados apresentados. *(Utilize 5 classes com amplitude arrendondada para até 2 casas decimais. Acrescente uma coluna de valor médio da classe (vm) na tabela.)*
d) Faça o histograma dos dados a partir da distribuição de frequência construída.
e) Faça o polígono de frequência a partir da distribuição de frequência construída.

## 3.3 Medidas estatísticas

No trato estatístico de um conjunto de dados brutos, eventualmente nos é importante que apresentar uma medida que busque representar aquele volume de informações ou, no mínimo, procure mostrar como elas se comportam.

Dito isso, veremos a partir daqui que as medidas estatísticas podem ser de dois tipos: as **medidas de tendência central** e as **medidas de dispersão**.

### 3.3.1 Medidas de tendência central

Medidas de centralidade (ou de tendência central ou de posição) são números reais utilizados para representar, de forma unitária, listas inteiras de dados.

Em outras palavras, ao analisar uma grandeza, podemos colher dados numéricos a respeito dela e colocar em uma lista. Por motivos diversos, pode ser necessário representar toda essa lista com um valor único; justamente uma medida de centralidade.

**Exemplo 3.1** ***: Significado de uma medida estatística de tendência central***

Em uma pesquisa são anotados dados de 100 mil brasileiros e, a partir das informações obtidas nela, chega-se à conclusão de que a expectativa de vida do brasileiro é de $73,6$ anos. O que isso significa?

**Análise:** Isso não significa que todo brasileiro vive pouco mais de 73 anos, mas sim que, em média, esse é o tempo de vida do brasileiro. Se formos buscar os dados completos da pesquisa, perceberemos que alguns brasileiros morrem ao nascer e outros ultrapassam os 100 anos de idade.

Ora, por que não observar apenas as pesquisas completas? Aproximadamente meio século atrás a expectativa de vida do brasileiro era de apenas 55 anos. Isso indica que houve avanços significativos na qualidade de vida, na Medicina e nos cuidados com os idosos desde então. Portanto, muitos dados podem ser extraídos de uma medida de centralidade sem que seja necessário analisar todas as informações de 100 mil pessoas uma a uma.

As medidas de centralidade mais importantes para este nível de estudo que estamos são as apresentadas a seguir.

#### 3.3.1.1 Moda

Chamamos de **moda** $(Mo)$ o valor que mais se repete dentro de um conjunto quantitativo de variáveis. Com isso, para identificá-la é necessário encontrar a frequência de determinados dados.

Entre as medidas de centralidade, apenas a moda pode ser aplicada em variáveis qualitativas. Para tanto, basta identificar o termo de maior presença.

**Exemplo 3.2 : *Cálculo da Moda***

Supondo que os dados seguintes são as idades dos jogadores de um time de futebol, indique a medida estatística que simboliza a idade mais comum dentros os atletas.

$$\{18, 19, 19, 20, 21, 21, 21, 23, 25, 26, 27\}$$

**Solução:** Falar em idade mais comum é o mesmo que falar na moda dos dados. Logo, como a sequência acima já se apresenta em formato crescente, o próximo passo é identificar a idade de maior frequência: dois jogadores têm 19 anos, outros dois têm 23 anos e três deles apresentam 21 anos.

Portanto, a moda do time de futebol é 21 anos $(Mo = 21)$.

Se um agrupamento de dados não têm nenhuma repetição, ou se todos têm a mesma frequência, dizemos que que há moda ou que o rol de dados é **amodal**. Quanto há duas ou mais modas, principalmente em estudos maiores, é comum dizermos que o conjunto de dados é **bimodal** ou **multimodal**, respectivamente.

#### 3.3.1.2 Mediana

A **mediana** $(Md)$ significa a medida central de um conjunto de dados. O seu cálculo depende de certas regras. Confira:

- Os valores quantitativos devem ser organizados em ordem crescente;
- quando a quantidade de elementos do conjunto de dados é par, a mediana é a metade da soma das duas medidas centrais, isto, é: $\dfrac{x_m + x_n}{2}$.
- quando a quantidade de elementos do conjunto de dados é ímpar, a mediana é o valor que separa os lados maiores e menores do próprio conjunto, ou seja, o termo central da fila.

**Exemplo 3.3 : *Cálculo da Mediana***

Dados os conjuntos $T = \{10, 1, 4, 12, 15, 6, 8\}$ e $C = \{5, 11, 2, 17, 14, 20\}$, calcular a mediana de cada um.

**Solução:** Primeiramente, coloquemos os valores em ordem crescente:

$$T = \{1, 4, 6, 8, 10, 12, 15\}, \quad C = \{2, 5, 11, 14, 17, 20\}$$

Observa-se que o conjunto $T$ é formado por 7 elementos, ou seja, uma quantidade ímpar. Com isso, a mediana será o quarto elemento, uma vez que este separa o conjunto em duas partes com igual número de elementos. Logo, $Md_T = 8$.

Já o conjunto $C$ apresenta 6 elementos, ou seja, uma quantidade par. Assim, a mediana será o ponto central entre as duas medidas centrais (terceiro e quarto elementos):

$$Md_C = \frac{11 + 14}{2} = \frac{25}{2} = 12,5$$

#### 3.3.1.3 Médias

Neste material, listaremos quatro tipos de média, cada qual com sua finalidade. No entanto, para nosso estudo nos é mais essencial os estudo das médias aritméticas.

Uma média aritmética pode ser utilizada em duas principais situações:

i) Na primeira delas, temos o caso em que o rol numérico não possui elementos repetidos ou a incidência deles é pouco preponderante; nessa situação, nomeamos essa medida de posição como **média aritmética simples**.

ii) Nos casos em que o rol numérico apresenta elementos repetidos, ou onde a cada elemento é atribuído um peso (um parâmetro que associa grau de importância ao dado), nomeamos essa medida como **média aritmética ponderada**.

#### Média aritmética simples

Para calcular o valor da média aritmética simples ($\overline{x}$) devemos realizar o somatório de todos os elementos do rol numérico e dividi-lo pela quantidade de elementos ($n$).

**Definição 3.1 : *Média Aritmética Simples***

Considere o rol composto pelas variáveis quantitativas $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$. A média aritmética simples é representada, portanto, por:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

**Exemplo 3.4**

Em um grupo de seis amigos, foram computadas suas idades: $\{12, 13, 14, 16, 18, 20\}$. Determinar qual a idade média desse grupo.

**Solução:** Para determinar a média de idades desse grupo, devemos somar todos os números e dividir essa soma pela quantidade de elementos do rol, assim:

$$\overline{x} = \frac{12 + 13 + 14 + 16 + 18 + 20}{6} = \frac{93}{6} = 15,5$$

Observe que, quando se calcula a média de uma sequência numérica, alguns valores dessa sequência ficam abaixo da média e outros ficam acima dela. São aquilo que chamamos de desvios em relação à média.

Neste caso, o valor 14 está abaixo da média e tem um desvio $-1,5$.

O conceito de desvios utilizado no Exemplo 3.4 será útil para discutirmos as medidas de dispersão logo adiante.

**Exemplo 3.5**

Em duas turmas do 7° ano do Ensino Fundamental, a média da turma A, que possui 23 alunos, foi $7,3$. No total, a escola possui 52 alunos matriculados no 7° ano. A média geral dos alunos destas turmas foi de $7,5$. Qual das duas turmas teve a maior média?

**Solução:** Vamos encontrar, inicialmente, a média aritmética simples da turma A. Chamando de $X$ a soma das notas dos alunos da turma A, temos:

$$\overline{x}_A = \frac{X}{n} \Rightarrow 7,3 = \frac{X}{23} \Rightarrow X = 7,3 \cdot 23 = 167,9$$

Calculemos agora, a média das duas turmas. A média é a soma das notas da turma A, que chamamos de $X$, com a soma das notas da turma B, que chamaremos de $Y$, dividido pelo total de alunos nas duas turmas, que é 52. Logo:

$$\begin{aligned} 7,5 &= \frac{X+Y}{52} \\ 7,5 &= \frac{167,9 + Y}{52} \\ 167,9 + Y &= 52 \cdot 7,5 \\ 167,9 + Y &= 390 \\ Y &= 390 - 167,9 \\ Y &= 222,1 \end{aligned}$$

O número de alunos na turma B é dado por $52 - 23 = 29$. E a média da turma B será o total de suas notas $(Y)$ dividido pelo total de alunos da turma:

$$\overline{x}_B = \frac{222,1}{29} \simeq 7,66$$

Sendo assim, a média da turma B é, aproximadamente, $7,66$. Portanto, a turma B teve a maior média.

### Média aritmética ponderada

A **média aritmética ponderada** $(\overline{x_p})$ é mais recomendada em casos onde o rol numérico apresenta destacadas repetições. Seu uso nestes casos é recomendado, portanto, em virtude de uma simplificação no cálculo, não caracterizando-se uma regra; uma exigência matemática. Já nos casos em que a cada variável é atribuído um peso, a utilização desse tipo de média torna-se uma exigência, pois a média simples não é suficiente para exprimir corretamente uma medida de posição para os dados.

**Definição 3.2 : *Média Aritmética Ponderada***

A média aritmética ponderada é calculada multiplicando cada valor do conjunto de dados pelo seu peso (ou frequência de cada elemento do rol). Depois, encontra-se a soma desses valores que será dividida pela soma dos pesos.

$$\overline{x_p} = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \cdots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n} \tag{3.1}$$

Onde:
$p_1, p_2, \ldots, p_n$: pesos
$x_1, x_2, \ldots, x_n$: valores dos dados

Vejamos alguns exemplos envolvendo situações com resolução utilizando de médias:

**Exemplo 3.6**

Para construir uma parede numa obra, foram comprados 150 blocos na loja A – o que representava todo o estoque da loja – pelo preço de $R\$11,00$ a unidade. Como eram necessários 250 blocos para construir a parede, outros 100 blocos foram comprados na loja B por $R\$13,00$ a unidade. Qual a média do preço de cada bloco?

**Solução:** Como queremos determinar a média do preço por unidade de bloco, consideraremos a valor unitário como sendo os elementos do conjunto de dados e as suas quantidades, os pesos:

$$\begin{aligned} \overline{x_p} &= \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \cdots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n} \\ &= \frac{11 \cdot 150 + 13 \cdot 100}{150 + 100} \\ &= \frac{2950}{250} = 11,80 \end{aligned}$$

Portanto, a média do preço foi de $R\$11,80$.

**Exemplo 3.7**

Um grupo de pessoas com idades diferentes foram entrevistadas e, suas idades, anotadas numa tabela. Determine a média das idades.

| Quantidade de pessoas | Idade |
|---|---|
| 5 | 26 |
| 8 | 33 |
| 9 | 36 |
| 12 | 43 |

**Solução:** Como queremos a média das idades, estas são os elementos; a quantidade de pessoas serão os pesos.

Teremos, portanto:

$$\begin{aligned}\overline{x_p} &= \frac{26.5 + 33.8 + 36.9 + 43.12}{5 + 8 + 9 + 12} \\ &= \frac{130 + 264 + 324 + 516}{34} \\ &= \frac{1234}{34} \\ &= 36,3\end{aligned}$$

A média das idades, obtida pela média aritmética ponderada, é de, aproximadamente, $36,3$ anos.

**Exemplo 3.8**

Uma sequência de 50 números vai do número 15 ao número 37. Pergunta-se:

a) É possível ter 50 valores entre 15 e 37 (incluindo o 15 e o 37)?

*Sim, pois podem existir valores repetidos, ou nem todos precisam ser inteiros.*

b) A média dessa sequência pode ser o número 40 ou o 10? Por quê?

*Não, pois uma média deve estar entre o menor e o maior valor – incluindo estes – do conjunto de variáveis que o originou.*

c) A média dessa sequência pode ser o número 15 ou o 30? Por quê?

*Sim, pois esse valor está entre os dois extremos de dados.*

d) É possível ter apenas 3 valores diferentes entre 15 e 37 (incluindo o 15 e o 37)? Nesse caso a média será menor do que 15 ou maior do que 15?

*Sim, pois os valores podem se repetir no rol. Como são três valores diferentes, obrigatoriamente pelo menos dois devem se maiores do que 15, logo a média tem de se maior que 15.*

É importante dizer que as médias aritméticas são usadas para buscar uma medida de tendência central que mostre-se adequada para um determinado conjunto de dados. No entanto, em algumas situações isso pode não acontecer.

Em conjuntos de dados onde haja a presença de um valor muito maior ou muito menor que os demais, o cálculo da média fica prejudicada, fazendo com que o perfil correto do rol numérico não seja traçado adequadamente. Nestes casos, a moda ou a mediana podem se mostrar mais indicadas.

Pense nisso: uma média representará melhor um conjunto de dados quando este tiver muitos elementos ou quando tiver poucos elementos? A quantidade de elementos seria a única condição para avaliarmos a significância de uma média?

### Média geométrica

Esse tipo de média, a **média geométrica** ($\overline{x_g}$), como o próprio nome diz, é mais utilizada quando se está tratando de informações obtidas de objetos e formas geométricas, com variáveis quantitativas extraídas de medições de distâncias, alturas, áreas, volumes, por exemplo.

Ainda, em casos onde há a presença de dados negativos e busca-se evitar que o produto entre eles resulte também em um valor negativo, este tipo de média é recomendada. Seu cálculo se dá por:

**Definição 3.3 : *Média Geométrica***

A **média geométrica** é calculado por:

$$\overline{x_g} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_n} \tag{3.2}$$

**Exemplo 3.9**

Numa propriedade rural, há 8 caixas d'água para garantir o abastecimento dos animais que são criados ali. Dispostas em pontos estratégicos da propriedades, para os quais são levados em consideração aspectos como altitude, distâncisa entre as áreas de pastagens a serem abastecidas, número potencial de animais nas áreas e quantidade média de consumo de água por cada animal, os reservatórios têm diferentes capacidades, em litros ($L$). Duas delas possuem 10000 $L$ de capacidade e outras três, 3200 $L$. As demais têm igualmente a média desses valores. Qual a média geral de litros por reservatório?

**Solução:** Vamos obter a média através de duas maneiras; primeiro pela média aritmética e depois pela geométrica.

Se duas caixas d'água têm 10000 $L$ e outras três, 32000 $L$, podemos afirmar que as três restantes têm, cada uma, 21000 $L$ de capacidade, pois

$$\overline{x_3} = \frac{10000 + 32000}{2} = 21000$$

Desse modo, teremos como média geral:

$$\overline{x} = \frac{10000 \cdot 2 + 21000 \cdot 3 + 32000 \cdot 3}{2 + 3 + 3} = \frac{179000}{8} = 22375$$

Vamos agora utilizar a média geométrica. Temos inicialmente que as três últimas caixas d'água terão a seguinte capacidade:

$$\overline{x_g} = \sqrt[2]{10000 \cdot 32000} \simeq 17888,54$$

Portanto, a média entre os oito reservatórios será de:

$$\overline{x_g} = \sqrt[8]{10000^2 \cdot 17888,54^3 \cdot 32000^3} \simeq 19237,42$$

Observemos que há uma diferença considerável entre os valores da média aritmética e geométrica. Em geral, cabe ao responsável por determinado estudo analisar qual delas representa melhor o conjunto numérico.

A indicação $\overline{x_3}$ no Exemplo 3.9 representa apenas que a média aritmética calculada é das outras 3 caixas d'água.

### Média harmônica

Já a **média harmônica** ($\overline{x_h}$) tem aplicações em diferentes áreas das ciências, incluindo Economia e Finanças, mas habitualmente sua utilização está associada a situações que envolvem variáveis quantitativas oriundas de grandezas inversamente proporcionais.

Como exemplo, temos velocidade (inversamente proporcional ao tempo), vazão de um líguido (inversamente proporcional ao tempo), densidade de um corpo (inversamente proporcional ao volume), aceleração de um corpo (inversamente proporcial à massa), entre outras. Seu cálculo se dá por:

**Definição 3.4 : *Média Harmônica***

A **média harmônica** é calculada por:

$$\overline{x_h} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \tag{3.3}$$

**Exemplo 3.10**

Uma piscina para ser enchida dispõe de duas opções de registros. Um dos registros leva 18 horas para encher totalmente a piscina e o outro, 14. Suponhamos que num dia qualquer, houve uma urgência e a piscina precisaria ser enchida mais rapidamente; em menos de 4 horas. Para tanto, uma mangueira acoplada numa torneira foi colocada para também encher a piscina, sabia-se que esta torneira conseguia encher a piscina em 10 horas. Caso os dois registros e a torneira fossem abertos ao mesmo tempo, é possível afirmar que a piscina estará cheia no prazo desejado?

**Solução:** Como se trata de uma medida que envolve tempo e vazão d'água, vamos utilizar a média harmônica para encontrar a solução do problema. Vejamos:

$$\overline{x_h} = \frac{3}{\frac{1}{18} + \frac{1}{14} + \frac{1}{10}} = \frac{3}{\frac{143}{630}} = \frac{1890}{143} = 13,22$$

Assim, o tempo médio dos três dispositivos é $13,22$ horas, que, dividido entre os três, resultará em $4,41$ horas.

Desse modo, podemos afirmar que a piscina não estará totalmente cheia em 4 horas.

### 3.3.2 Medidas de tendência central para dados agrupados

Estudamos nas últimas seções como calcular medidas de tendência central tendo acesso e conhecendo a totalidade dos dados, ou seja, os dados brutos. Porém, como estudamos no início desse capítulo, uma forma bastante útil de tratar inicialmente um conjunto de dados brutos é a organização deles em distribuição de frequências, os chamados dados agrupados.

Veremos agora como estimar a média aritmética, a moda e a mediana a partir dos dados agrupados, independentemente de conhecermos ou não os dados brutos. Para tanto, consideremos a seguinte tabela de distribuição de frequências absolutas que organizou as informações de 30 usuários de uma academia:

Utiliza-se a palavra *estimar* porque, em tese, a verdadeira medida de centralidade é obtida dos dados brutos.

| Massa corporal (Kg) | Frequência absoluta ($f_i$) |
|---|---|
| 40 ⊢ 50 | 4 |
| 50 ⊢ 60 | 9 |
| 60 ⊢ 70 | 10 |
| 70 ⊢ 80 | 5 |
| 80 ⊢ 90 | 2 |
| **Total** | 30 |

O primeiro passo para calcular as medidas de tendência central neste dados agrupados é obter o valor médio ($vm$) em cada intervalo de classe:

O $vm$ nada mais é do que a média aritmética simples de dois valores. No

| Massa corporal (Kg) | $f_i$ | Valor médio ($vm$) |
|---|---|---|
| 40 $\vdash$ 50 | 4 | 45 |
| 50 $\vdash$ 60 | 9 | 55 |
| 60 $\vdash$ 70 | 10 | 65 |
| 70 $\vdash$ 80 | 5 | 75 |
| 80 $\vdash$ 90 | 2 | 85 |
| **Total** | 30 | – |

O cálculo da estimativa da **média aritmética** desses dados agrupados é feito da seguinte forma:

a) Somamos os produtos do $vm$ de cada classe pela sua frequência absoluta ($f_i$) correspondente; e

b) após, dividimos pelo número total de dados.

Ou seja:

$$\overline{x} = \frac{4 \cdot 45 + 9 \cdot 55 + 10 \cdot 65 + 5 \cdot 75 + 2 \cdot 85}{30} = \frac{1870}{30} \simeq 62,33$$

Temos, portanto, uma média de $62,33$ Kg entre os usuários da academia.

Já para o cálculo da **moda** estimada, a partir dos dados agrupados, é simples. A medida é considerada como o $vm$ da classe de maior frequência absoluta (chamada de *classe modal*). Neste nosso exemplo, a $Mo$ será 65, portanto.

Para o cálculo da estimativa da **mediana** dos dados agrupados devemos levar em consideração os seguintes aspectos:

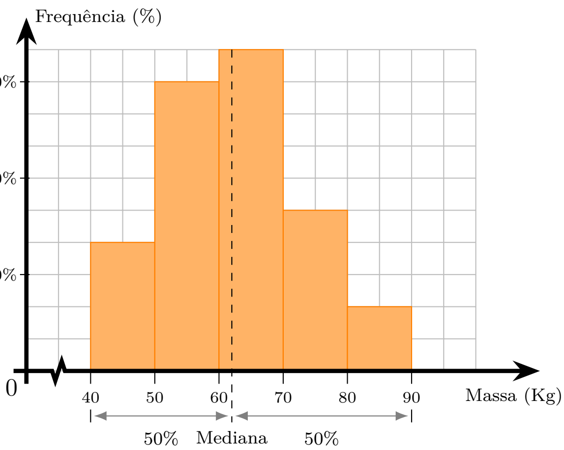
a) A classe onde há a incidência de metade dos dados (*classe mediana*);

b) A frequência relativa dessa classe mediana;

c) A frequência relativa acumulada até a classe anterior à classe mediana.

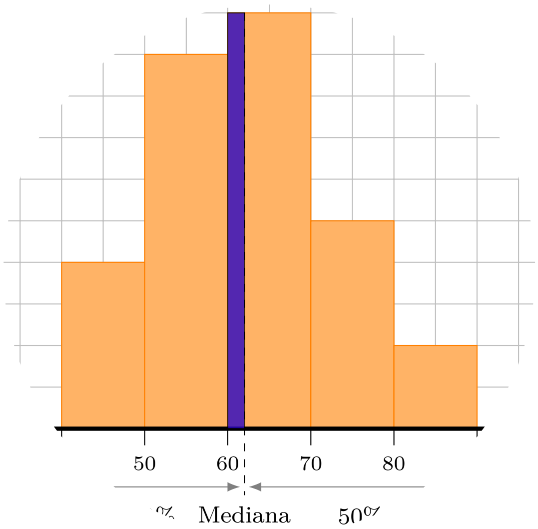
Para auxiliar na nossa interpretação, vamos adicionar à tabela que estamos contruindo uma coluna com as frequências relativas acumuladas ($F_r$) e, ao lado, um histograma com a representação das frequências relativas ($f_r$):

| Massa corporal (Kg) | $f_i$ | $F_r$ | $vm$ |
|---|---|---|---|
| 40 $\vdash$ 50 | 4 | 13,33% | 45 |
| 50 $\vdash$ 60 | 9 | 43,33% | 55 |
| 60 $\vdash$ 70 | 10 | 76,67% | 65 |
| 70 $\vdash$ 80 | 5 | 93,33% | 75 |
| 80 $\vdash$ 90 | 2 | 100% | 85 |
| **Total** | 30 | – | – |



Observemos, tanto na tabela quanto no histograma, que os 50% primeiros dados estão concentradas até a terceira classe. Como a primeira e a segunda classes, juntas, detém $43,33\%$ dos dados, para chegarmos aos 50% dos dados precisamos de mais $6,67\%$ dos dados (que é o resultado da diferença: $50\% - 43,33\%$) que estão na terceira classe.

Para continuar a análise, vamos fazer uma recorte na terceira classe do histograma:




A faixa agora pintada de azul sobre a terceira classe representa os $6,67\%$ dos dados que estamos procurando para se chegar à metade dos dados. É importante perceber que a classe toda representa $33,33\%$ dos dados, mas estamos buscando apenas uma fatia dela que, somada aos $43,33\%$ acumulados até a classe anterior, totalizarão os 50% pretendidos.

Para encontrar, pois, um valor que represente a mediana ($Me$), vamos usar de uma interpretação geométrica entre a área pintada de azul e a área completa da terceira classe, por meio de uma proporção que pode ser enunciada da seguinte maneira:

$$\frac{Me - \left(\begin{array}{c}\text{extremo inferior}\\ \text{da classe mediana}\end{array}\right)}{50\% - \left(\begin{array}{c}\text{frequência relativa acumulada da}\\ \text{classe anterior à classe mediana}\end{array}\right)} = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{extremo superior}\\ \text{da classe mediana}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{extremo inferior da}\\ \text{classe mediana}\end{array}\right)}{\begin{array}{c}\text{frequência relativa}\\ \text{da classe mediana}\end{array}}$$

Dessa forma, neste nosso caso presente, teremos:

$$\frac{Me - 60}{50\% - 43,33\%} = \frac{70 - 60}{33,33\%} \Rightarrow \frac{Me - 60}{6,67\%} = \frac{10}{33,33\%} \Rightarrow Me - 60 = \frac{66,7}{33,33} \Rightarrow Me \simeq 62$$

É importante notar que o valor 62 é um valor que está dentro dos limites da classe mediana e, portanto, faz sentido para o cálculo que estamos fazendo.

### 3.3.3 Medidas de dispersão

Se as medidas de tendência central buscavam exprimir, a partir de um único valor, um conjunto completo de dados, as **medidas de dispersão** nos servem para mostrar como os dados de um conjunto se distribuem em torno de uma medida de tendência central (em geral a média).

Assim, estas medidas buscam caracterizar o que chamamos de *variabilidade* dos dados. Vejamos, abaixo, uma situação onde é msotrada essa particularidade em conjuntos de dados distintos:

Suponhamos que, numa empresa, buscou-se analisar o salário médio dos funcionários, por setor. Percebeu-se um fato interessante: dois setores tinham o mesmo valor de salário médio, apesar de abrigarem funções bastante distintas umas das outras.

Salários no setor A ($R$\$): $1540,00$; $1600,00$; $1660,00$; $1710,00$; $1710,00$ e $1800,00$.

Salário médio: $\overline{x}_A = \dfrac{1540 + 1600 + 1660 + 1710 + 1710 + 1800}{6} = 1670$

Salários no setor B ($R$\$): $1170,00$; $1280,00$; $1360,00$; $1460,00$; $1950,00$ e $2800,00$.

Salário médio: $\overline{x}_B = \dfrac{1170 + 1280 + 1360 + 1460 + 1950 + 2800}{6} = 1670$

Notemos que em ambos os conjuntos a média é igual a $R\$1670,00$, apesar de possuírem elementos distintos. Por outro lado, podemos também notar que, no primeiro conjunto (do setor A), os dados estão mais próximos da média, enquanto que no segundo (setor B), os dados dos salários estão mais distantes dela. Essa distância em relação à média é o que, de modo geral, chamamos de dispersão em relação à média.

Na sequência, estudaremos três medidas estatísticas que medem essa dispersão em relação à média: o desvio médio, a variância e o desvio padrão. Veremos, ao final, que as três medidas têm muito a ver uma com a outra, podendo ser entendidas como escala de construção, onde uma delas sempre depende das anteriores.

## Desvio médio

Para introduzir esta medida estatística de dispersão vamos utilizar de uma situação hipotética, na qual supomos que uma rede de concessionária de veículos vendeu a seguinte quantidade de automóveis numa determinada semana:

| Domingo | Segunda-feira | Terça-feira | Quarta-feira | Quinta-feira | Sexta-feira | Sábado |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 12 | 18 | 16 | 33 | 17 | 25 |

Inicialmente, vamos calcular a média de veículos vendidos diariamente:

$$\overline{x} = \frac{26 + 12 + 18 + 16 + 33 + 17 + 25}{7} = \frac{147}{7} = 21$$

Vamos agora calcular a distância de cada dado à $\overline{x}$, chamando isto de *desvio em relação à media*:

- $x_1 - \overline{x} = 26 - 21 = 5$
- $x_2 - \overline{x} = 12 - 21 = -9$
- $x_3 - \overline{x} = 18 - 21 = -3$
- $x_4 - \overline{x} = 16 - 21 = -5$
- $x_5 - \overline{x} = 33 - 21 = 12$
- $x_6 - \overline{x} = 17 - 21 = -4$
- $x_7 - \overline{x} = 25 - 21 = 4$

A soma dos desvios sendo zero garante que a média foi calculada corretamente.

É possível verificar que a soma dos desvios é igual a zero ($5-9-3-5+12-4+4=0$). De modo que essa característica não impedisse que os desvios fossem usados para estudar os dados de um determinado conjunto, os estatísticos contornaram essa situação incluindo os *desvios absolutos* no cálculo do que chamaram de **desvio médio** ($Dm$) ou desvio absoluto médio. Sendo assim, temos:

$$Dm = \frac{|5|+|-9|+|-3|+|-5|+|12|+|-4|+|4|}{7} = \frac{42}{7} = 6$$

Portanto, há de falar que houve um desvio médio de 6 veículos vendidos.

**Definição 3.5 : *Desvio Médio***

O desvio médio (Dm) de um conjunto com n dados é determinado pela média aritmética dos desvios absolutos de cada valor em relação à média:

$$Dm = \frac{|x_1-\overline{x}|+|x_2-\overline{x}|+|x_3-\overline{x}|+\cdots+|x_n-\overline{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-\overline{x}|}{n}$$

## Variância

A **variância** ($\sigma^2$) é obtida por processo semelhante ao cálculo do desvio médio, distinguindo-se pelo expoente 2 adicionado a cada parcela da soma dos desvios.

**Definição 3.6 : *Variância***

A variância ($\sigma^2$) de um conjunto com n dados é determinada pela média aritmética dos quadrados dos desvios de cada valor em relação à média:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}$$

A partir dessa definição, podemos inferir que, no cálculo da variância, o artifício de elevar ao quadrado cada um dos desvios teve o mesmo intuito dos módulos incluídos no cálculo do desvio médio, ou seja, contornar o fato de a soma dos desvios ser zero.

## Desvio padrão

Do cálculo da variância, podem surgir muitas dúvidas e dificuldades referentes não só à sua interpretação propriamente, mas também à unidade de medida dos elementos da amostra.

Por exemplo: ao elevar ao quadrado os valores de unidades de grandezas, constrói-se, em tese, um resultado com esta mesma unidade ao quadrado (tanto é que o símbolo da variância adota o quadrado). No entanto, nem toda grandeza física denotada ao quadrado faz sentido prático ou mesmo encontra significado.

Assim sendo, diante dessas dificuldades e para retornar o grau da medida de dispersão para 1, a Estatística criou o **desvio padrão** ($\sigma$), que é a raiz quadrada da variância.

**Definição 3.7 : *Desvio Padrão***

O desvio padrão ($\sigma$) de um conjunto com n dados é determinado pela raiz quadrada da variância:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

**Exemplo 3.11**

Dois atletas de salto em distância, durante um período de treinamento, realizaram 10 saltos cada. As distâncias dos saltos de cada atleta foram os seguintes:

- Atleta A: $8,19$, $8,05$, $7,99$, $8,26$, $8,04$, $7,85$, $8,01$, $8,16$, $8,12$, $8,30$.
- Atleta B: $8,18$, $8,01$, $8,03$, $7,99$, $7,98$, $8,03$, $8,06$, $8,11$, $8,04$, $8,17$.

Diante desses dados, pergunta-se:

a) Qual atleta teve melhor salto?

**Solução:** Para responder a esta questão, basta verificar entre os 20 saltos aquele com maior valor. Isso acontece no último salto do atleta A. Portanto, este foi o que teve melhor salto.

b) Qual atleta teve melhor média de distância dos saltos?

**Solução:** Vamos calcular a média dos saltos de cada atlela:

$$\begin{aligned}
\overline{x}_A &= \frac{8,19+8,05+7,99+8,26+8,04+7,85+8,01+8,16+8,12+8,30}{10} \\
&= \frac{80,97}{10} \\
&= 8,097\ cm \\
\overline{x}_B &= \frac{8,18+8,01+8,03+7,99+7,98+8,03+8,06+8,11+8,04+8,17}{10} \\
&= \frac{80,6}{10} \\
&= 8,06\ cm
\end{aligned}$$

Assim, o atleta A também teve a melhor média de distância nos saltos.

c) Qual atleta foi mais regular?

**Solução:** Para proceder a essa análise, precisamos verificar o quanto e como estão distribuídos os valores em torno da média; estamos, portanto, querendo saber como é a dispersão dos dados. Quanto mais próximo à média, mais regulares são os dados; quanto mais dispersos, menos regulares. Calculemos as três medidas de dispersão vistas anteriormente. Antes, porém, vamos calcular os desvios nos saltos de cada atleta.

- Atleta A

$$\begin{aligned}
8,19-8,097 &= 0,093\\
8,05-8,097 &= -0,047\\
7,99-8,097 &= -0,107\\
8,26-8,097 &= 0,163\\
8,04-8,097 &= -0,057\\
7,85-8,097 &= -0,247\\
8,01-8,097 &= -0,087\\
8,16-8,097 &= 0,063\\
8,12-8,097 &= 0,023\\
8,30-8,097 &= 0,203
\end{aligned}$$

- Atleta B

$$\begin{aligned}
8,18-8,06 &= 0,12\\
8,01-8,06 &= -0,05\\
8,03-8,06 &= -0,03\\
7,99-8,06 &= -0,07\\
7,98-8,06 &= -0,08\\
8,03-8,06 &= -0,03\\
8,06-8,06 &= 0\\
8,11-8,06 &= 0,05\\
8,04-8,06 &= -0,02\\
8,17-8,06 &= 0,11
\end{aligned}$$

Agora, as medidas de dispersão:

$$\begin{aligned}
Dm_A &= \frac{|0,093| + |-0,047| + |-0,107| + |0,163| + |-0,057| + |-0,247| + |-0,087| + |0,063| + |0,023| + |0,203|}{10} \\
&= \frac{1,09}{10} \\
&= 0,109
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_A^2 &= \frac{(0,093)^2 + (-0,047)^2 + (-0,107)^2 + (0,163)^2 + (-0,057)^2 + (-0,247)^2 + (-0,087)^2 + (0,063)^2 + (0,023)^2 + (0,203)^2}{10} \\
&= \frac{0,16641}{10} \\
&= 0,016641
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_A &= \sqrt{0,016641} \\
&= 0,129
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Dm_B &= \frac{|0,12| + |-0,05| + |-0,03| + |-0,07| + |-0,08| + |-0,03| + |0| + |0,05| + |-0,02| + |0,11|}{10} \\
&= \frac{0,56}{10} \\
&= 0,056
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_B^2 &= \frac{(0,12)^2 + (-0,05)^2 + (-0,03)^2 + (-0,07)^2 + (-0,08)^2 + (-0,03)^2 + (0)^2 + (0,05)^2 + (-0,02)^2 + (0,11)^2}{10} \\
&= \frac{0,045}{10} \\
&= 0,0045
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_B &= \sqrt{0,0045} \\
&\simeq 0,067
\end{aligned}$$

Comparando as medidas de dispersão dos saltos dos dois atletas, é possível verificar que o atleta B teve índices menores e, logo, fez saltos mais regulares.

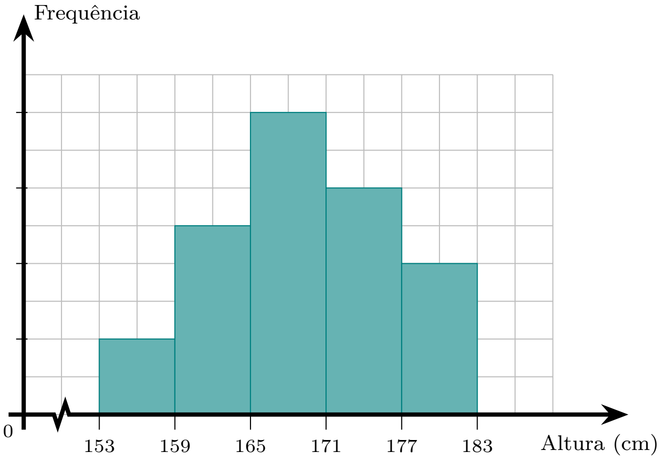
De maneira geral, não é preciso calcular as três medidas estatísticas de dispersão como no exemplo anterior. Fizemos isso para exercitar e exemplificar o que tínhamos discutido até então. Porém, ao optarmos por usar o desvio padrão, naturalmente a variância deverá ser calculada antes.

Ainda a partir do Exemplo 3.11 anterior, ressalta-se que o índice que uma medida de dispersão indica passa a fazer mais sentido quando comparamos dois ou mais conjuntos que reúnem dados de mesma natureza. Isso significa dizer que, quando calculamos a dispersão de apenas um conjunto numérico de dados e não o comparamos com nenhum outro, esta estatística obtida em muito pouco nos servirá. Em particular, podemos dizer que, quanto mais próximo de zero for a medida de dispersão, menos distantes os dados estarão da média, ou seja, menos dispersos em torno da média estarão os dados.

### 3.3.4 Medidas de dispersão para dados agrupados

É possível calcular uma estimativa para o desvio padrão de um conjunto de dados a partir de sua tabela de frequências. Assim sendo, quando obtemos um valor para uma medida de dispersão pela tabela de frequências estamos, na verdade, estimando o desvio padrão real dos dados brutos e, portanto, caracterizando-se sempre como uma aproximação da realidade, a qual, sempre que possível e exequível, deve ser obtida a partir da manipulação dos dados brutos.

Observemos o histograma abaixo e, a partir dele, vamos calcular o desvio padrão da variável altura de atletas de uma universidade (em centímetros).




Na Subseção 3.3.2 já aprendemos como calcular a média de dados agrupados. Vamos proceder a esse cálculo para que, depois, possamos calcular a variância e o desvio padrão. Vejamos:

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{2\cdot 156 + 5\cdot 162 + 8\cdot 168 + 6\cdot 174 + 4\cdot 180}{2+5+8+6+4}\\ &= \frac{312+810+1344+1044+720}{25}\\ &= \frac{4230}{25}\\ &= 169,2\end{aligned}$$

Por conseguinte, devemos calcular os desvios $(vm_i - \overline{x})$:

- $vm_1 - \overline{x} = 156 - 169,2 = -13,2$
- $vm_2 - \overline{x} = 162 - 169,2 = -7,2$
- $vm_3 - \overline{x} = 168 - 169,2 = -1,2$
- $vm_4 - \overline{x} = 174 - 169,2 = 4,8$
- $vm_5 - \overline{x} = 180 - 169,2 = 10,8$

Em seguida, para o cálculo da variância, não devemos esquecer de, a cada parcela do numerador, associar a frequência relativa ao respectivo desvio:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{2\cdot(-13,2)^2 + 5\cdot(-7,2)^2 + 8\cdot(-1,2)^2 + 6\cdot(4,8)^2 + 4\cdot(10,8)^2}{25}\\ &= \frac{348,48 + 259,2 + 11,52 + 138,24 + 466,56}{25}\\ &= \frac{1224}{25}\\ &= 48,96\end{aligned}$$

Por fim, calculamos o desvio padrão, que é: $\sigma = \sqrt{48,96} \simeq 7\ cm$.

### 3.3.5 Atividades propostas

*Respostas na pág. 199.*

1. Responda às questões seguintes:

   a) O valor da média pode estar fora dos limites da amplitude dos dados originais de um conjunto numérico?

   b) O valor da mediana pode estar fora dos limites da amplitude dos dados originais de um conjunto numérico?

   c) O valor da mediana pode ser um valor distinto daqueles que pertencem ao conjunto numérico do qual a originou? E o valor da média pode? E o valor da moda pode?

   d) É possível que um conjunto numérico tenha moda, mediana e média com os mesmos valores?

2. Os salários básicos do mês janeiro de 2022 dos funcionários do setor de logística de uma empresa do ramo têxtil estão representados abaixo (em R$):

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1800,00 | 1620,00 | 1950,00 | 2350,00 | 2480,00 | 1620,00 | 1620,00 |
| 2350,00 | 2480,00 | 2480,00 | 1820,00 | 2480,00 | 2480,00 | 1950,00 |
| 2480,00 | 1820,00 | 2350,00 | 2480,00 | 4500,00 | 2480,00 | 2480,00 |

   a) Qual é o salário mais frequente?

   b) Qual é o salário mediano dos funcionários?

   c) Qual é o salário médio dos funcionários?

3. Até a oitava rodada de um campeonato de futebol de 2014, a média, em 80 jogos, foi de 2,525 gols por jogo. A média do campeonato de 2013 foi de 2,9 gols por jogo. Quantos gols deveriam ter sido marcados, em 10 partidas, para que, na nona rodada, fosse atingida a média de gols do campeonato de 2013?

4. Se as idades de sete pessoas forem colocadas em lista ordenada obtém-se o seguinte: 6; 9; 10; $x$; $x+3$; $x+4$; 16. Qual o valor da média, sabendo que ela é igual à mediana?

5. (FGV) A média das alturas dos 6 jogadores em quadra de um time de vôlei é $1,92\ m$. Após substituir 3 jogadores por outros, a média das alturas do time passou para $1,90\ m$. Nessas condições, a média, em metros, das alturas dos jogadores que saíram supera em quanto a dos que entraram?

6. Um estudante obteve 4,5 de nota média entre duas provas na primeira semana de aulas. Na segunda semana, obteve nota 7 num exercício e 9 num trabalho. Considerando todas as notas obtidas por este estudante:

   a) Qual será a nota média quinzenal desse estudante se todas as atividades avaliativas tiverem o mesmo peso?

   b) E se as provas tiverem peso 3, o trabalho peso 2 e o exercício peso 1, qual será a nota média quinzenal desse estudante?

   c) Qual deveria ser o peso do trabalho, mantendo-se os pesos da prova e do exercício, para que sua média seja 6?

7. Abaixo, estão expressos os consumos mensais de energia elétrica (em kWh) de uma residência, durante os 12 meses de 2021:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 267 | 279 | 262 | 226 | 298 | 294 | 272 | 297 | 257 | 244 | 50 |

a) Qual foi o consumo médio de 2021 nessa residência?

b) Qual foi o consumo mediano de 2021 nessa residência?

c) Qual das duas medidas de centralidade você avalia representar melhor o consumo de energia elétrica dessa residência?

8. Os valores das mensalidades (em R$) do curso de História em 20 universidades do estado do Paraná estão agrupadas em intervalos segundo a tabela:

| Mensalidade (R$) | $f_i$ |
|---|---|
| [400, 500[ | 8 |
| [500, 600[ | 7 |
| [600, 700[ | 2 |
| [700, 800[ | 1 |
| [800, 900[ | 1 |
| [900, 1000[ | 1 |

a) Qual é o valor médio de uma mensalidade para o referido curso?

b) Qual o valor predominante das mensalidades para o citado curso?

9. Observe a seguinte distribuição de frequências e encontre a nota mediana:

| Nota em Biologia | $f_i$ |
|---|---|
| [0, 2[ | 2 |
| [2, 4[ | 7 |
| [4, 6[ | 8 |
| [6, 8[ | 6 |
| [8, 10] | 7 |

10. Em vez de adotar a média dos módulos dos desvios como medida de dispersão em uma amostra de dados, por que não se adota simplesmente a média dos desvios?

11. Uma loja de perfumes deseja conhecer o índice de satisfação de seus clientes diante de duas promoções realizadas em semanas subsequentes. Para tanto, 20 clientes, escolhidos ao acaso, deram notas de 1 a 5 para avaliar as promoções. As notas foram as seguintes:

Promoção A

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | 4 | 3 | 2 |

Promoção B

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 5 | 4 | 4 | 5 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 5 | 1 | 4 | 4 | 5 | 1 | 1 | 5 | 4 | 5 |

a) Qual a promoção foi melhor avaliada?

b) Qual a promoção foi avaliada de forma mais uniforme pelos clientes?

12. Uma empresa privada de pesquisa de opinião realiza semanalmente uma pesquisa de preços de combustíveis em seis postos da cidade. Na tabela abaixo são apresentados os preços da gasolina nesses postos em duas semanas consecutivas:

| Preço do litro da gasolina (R$) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Postos | | | | | |
| Semana | A | B | C | D | E | F |
| 1 | 7,57 | 7,58 | 7,61 | 7,59 | 7,60 | 7,59 |
| 2 | 7,60 | 7,63 | 7,64 | 7,61 | 7,63 | 7,61 |

a) Qual a porcentagem, aproximadamente, foi a diferença entre o menor e maior preço pesquisado em cada semana?

b) Qual é o preço médio da gasolina na semana 1? E na semana 2?

c) Para cada semana, calcule a dispersão do preço do litro da gasolina e indique em qual delas houve maior estabilidade.

13. Considere o exercício 2 precedente e responda o que se pede abaixo:

    a) Se cada funcionário receber um aumento de $R\$ \ 100,00$, o que ocorrerá com a média dos salários? E com o desvio padrão?

    b) Se cada funcionário receber um aumento de 10%, o que ocorrerá com a média dos salários? E com o desvio padrão?

14. Dois estudantes tiveram a mesma média em um vestibular, conforme pode ser constatada na lista abaixo:

| | Notas | |
|---|---|---|
| Disciplina | Estudante A | Estudante B |
| Biologia | 7,0 | 7,0 |
| História | 7,5 | 6,5 |
| Geografia | 8,0 | 8,0 |
| Português | 7,0 | 6,5 |
| Inglês | 6,0 | 7,5 |
| Matemática | 7,0 | 7,5 |
| Física | 6,5 | 6,0 |
| Química | 7,0 | 7,0 |

Como eles disputavam a última vaga num determinado curso, o criterio de desempate adotado foi o desvio padrão do conjunto de notas em todas as disciplinas: o candidato com desempenho mais regular teve direito à vaga.

    a) Qual candidato ficou com a vaga?

    b) Você avalia que o critério adotado é justo?

15. Considere o exercício 13 da seção de atividades anterior, à pág. 49. Com base na tabela de distribuição de frequência construída nele, determine:

    a) A média, a mediana e a moda dos dados absolutos.

    b) A média, a mediana e a moda dos dados agrupados.

    c) Comparando os resultados obtidos nos dois itens anteriores, o que se pode falar da média, da mediana e da moda quando são obtidas a partir de fontes com tratamentos diferentes (dados brutos *versus* dados agrupados)?

    d) O desvio padrão dos dados absolutos.

    e) O desvio padrão dos dados agrupados.

    f) Comparando os resultados obtidos nos dois itens anteriores, o que se pode falar do desvio padrão quando é obtido a partir de fontes com tratamentos diferentes (dados brutos *versus* dados agrupados)?

CAPÍTULO 4

# Matrizes e Determinantes

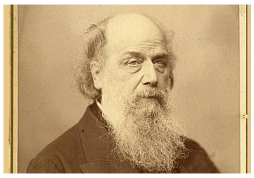
## 4.1 Matrizes

A organização numérica em forma de tabelas acompanha a humanidade há milênios; há registros na antiguidade que sugerem isso. No entanto, só mais recentemente, no século XIX, que o estudo destas tabelas numéricas foram organizadas, sistematizadas e aplicadas numa área da Matemática.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Em 1826, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), um matemático francês, denota essas configurações numéricas como tabela (*tableau* no francês); mas só em 1850 com o matemático inglês James Joseph Sylvester (1814-1897) é que elas foram chamadas de matrizes.

Sylvester, inclusive, se orgulhava de dar nomes a muitos termos matemáticos que até então não tinham uniformidade. Matriz vem do latim *matrix*, que significa ventre, útero. Ele adotou-o aduzindo que uma matriz matemática é “um arranjo retangular de números do qual diferentes sistemas de determinantes podem ser gerados, a partir do ventre de uma mãe comum”.



James Joseph Sylvester (1814-1897)

Num artigo publicado em 1858 pelo matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895), o conceito de matrizes é inserido no contexto das estruturas algébricas, sem apelo aplicado, o que só mais tarde se desenvolveu.

### 4.1.1 Conceitos, definição e representações de matrizes

Arthur Cayley (1821-1895)

Para a organização de informações, por vezes é desejável que isso seja feito a partir de tabelas numéricas retangulares, nas quais as dimensões vertical e horizontal têm, cada uma, um significado próprio. A partir de tal arranjo organizativo é possível interrelacionar vários grupos de informações, produzindo novas informações, fazendo cálculos mais complexos, analisando tendências e apurando resultados.

Áreas como Economia, Administração, Logística, Engenharia e Computação, entre outras, utilizam dessas tabelas em larga escala e de forma aplicada aos seus problemas.

Na Matemática, esse tipo de tabela numérica constante de certa quantidade de fileiras horizontais (**linhas**) e fileiras verticais (**colunas**) é chamada de **matriz**.

Sua utilização é amplamente difundida em áreas aplicadas como a Computação, as Engenharias, a Física, a Administração e a Economia, especialmente.

Observemos a Tabela 2 seguinte:

Tabela 2 – Características dos alunos do curso de Logística da Escola Frei João

| | | Cor do cabelo | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Castanho | Preto | Loiro | Ruivo |
| Cor dos olhos | Castanho | 12 | 9 | 6 | 2 |
| | Azul | 4 | 1 | 2 | 2 |
| | Verde | 2 | 3 | 3 | 2 |

Hipoteticamente, vamos supor que os dados acima foram retirados de uma verificação sobre duas características físicas dos alunos de um certo curso numa escola pública. Podemos representar essa tabela pela seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 12 & 9 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Na representação de matrizes deve-se usar somente colchetes ou parênteses como delimitadores.

Essa matriz tem 3 linhas e 4 colunas, por isso dizemos que ela é de ordem $3 \times 4$ (lê-se: *três por quatro*). Por óbvio, as linhas representam a "cor dos olhos" e as colunas, a "cor do cabelo". Assim, se analisamos linha a linha podemos obter as informações sobre as quantidades de alunos quanto às cores dos seus olhos e, se coluna a coluna, as quantidades de alunos a partir de suas cores de cabelo.

*Ordem* ou *tipo* ou *tamanho* são denominações para caracterizar as dimensões de uma matriz.

Na primeira linha, por exemplo, temos os alunos com olhos castanhos e, na segunda, aqueles com olhos azuis.

$$\begin{bmatrix} 12 & 9 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

O número de linhas e colunas determina o que chamamos de ordem da matriz. Assim, uma matriz com 2 linhas e 4 colunas ($M_{2\times4}$) é chamada de matriz $M$ de ordem 2 por 4.

Na segunda coluna, por exemplo, temos as quantidades de alunos com cabelo pretos e, na quarta, os de cabelo ruivo.

$$\begin{bmatrix} 12 & 9 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Se, por outro lado, analisamos elemento a elemento, teremos sempre uma referência horizontal e outra vertical. Neste caso, uma cor dos olhos e uma cor de cabelo. Por exemplo, o elemento da matriz que está localizado na terceira linha e na segunda coluna representa a quantidade de alunos que têm "olhos verdes e cabelos pretos".

$$\begin{bmatrix} 12 & 9 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

3 alunos com olhos verdes e cabelos pretos

**Definição 4.1 : *Matriz***

Define-se como **matriz** de ordem $m \times n$ (lê-se: m por n), uma tabela com $m \cdot n$ elementos dispostos em $m$ linhas e $n$ colunas. Pode-se representar genericamente uma matriz $A$ da seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Cada elemento de uma matriz está condicionado a dois índices: $a_{ij}$, onde $i$ representa a linha e $j$ representa a coluna onde ele se localiza na matriz.

Essa matriz também pode ser representada por:

$$A_{m\times n} = a_{ij} \quad \text{ou} \quad A = (a_{ij})_{m\times n} \tag{4.2}$$

Na indicação dos índices das matrizes, convencionou-se sempre considerar, nessa ordem, as linhas, cima para baixo, e depois as colunas, da esquerda pra direita.

Na definição 4.1, tanto $m$ quanto $n$ devem ser números naturais não nulos ($m, n \in \mathbb{N}^*$), já que se referem à contagem de linhas e colunas.

Usa-se letras maiúsculas do alfabeto latino para indicar o "nome" de uma matriz e a respectiva letra minúscula para indicar seus elementos.

### 4.1.2 Matriz determinada por lei de formação

A depender da situação, uma matriz pode não ser formada por uma apuração numérica advinda de uma observação ou contagem. É possível que ela seja determinada a partir de uma lei de formação, ou seja, uma função matemática que a defina.

Via de regra, a maneira de se estabelecer uma lei de formação para uma matriz leva em consideração seus índices, uma vez que são eles as únicas duas referências possíveis para cada elemento.

Vejamos um exemplo de uma matriz $B$, dada a partir da seguinte lei:

$$B = (b_{ij})_{3\times 2}, \text{ em que } b_{ij} = \begin{cases} i^2, & \text{se } i = j \\ 3j, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Observemos que, pela notação, a matriz é denotada por $B$ e tem 3 linhas e 2 colunas. Logo, escrevendo cada um dos seus elementos, e aplicando a lei de formação acima para cada um deles, temos que:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = B = \underbrace{\begin{pmatrix} \color{red}{b_{11}} & \color{blue}{b_{12}} \\ \color{blue}{b_{21}} & \color{red}{b_{22}} \\ \color{blue}{b_{31}} & \color{blue}{b_{32}} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Em vermelho, os} \\ \text{elementos que se encaixam} \\ \text{na primeira condição } (i=j); \\ \text{em azul, na segunda } (i\neq j).}} = \begin{pmatrix} \color{red}{1^2} & \color{blue}{3\cdot 2} \\ \color{blue}{3\cdot 1} & \color{red}{2^2} \\ \color{blue}{3\cdot 1} & \color{blue}{3\cdot 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

### 4.1.3 Tipos de matrizes

#### Matriz coluna

Denominamos assim toda matriz que possui apenas uma coluna, ou seja, quando $n = 1$. Exemplos:

i) $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$: $A$ é uma matriz coluna de ordem $4 \times 1$

ii) $B = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 2,3 \end{bmatrix}$: $B$ é uma matriz coluna de ordem $2 \times 1$

#### Matriz linha

Denominamos assim toda matriz que possui apenas uma linha, ou seja, quando $m = 1$. Exemplos:

i) $C = \begin{bmatrix} -15 & 2 & 1 \end{bmatrix}$: $C$ é uma matriz linha de ordem $1 \times 3$

ii) $D = \begin{pmatrix} 11 & 0 & -5 & 32 & 5 \end{pmatrix}$: $D$ é uma matriz linha de ordem $1 \times 5$

#### Matriz nula

É toda matriz, independentemente da ordem, onde todos os elementos são nulos $(a_{ij} = 0)$. Exemplos:

i) $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$: $E$ é uma matriz nula de ordem $2 \times 2$

ii) $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: $F$ é uma matriz nula de ordem $2 \times 3$

#### Matriz retangular

É toda matriz onde o número de linhas é diferente do número de colunas, ou seja, quando $m \neq n$. Exemplos:

i) $G = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{2} \\ 5 & 0 \\ -4 & 3 \\ 6 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$: $G$ é uma matriz retangular de ordem $4 \times 2$

ii) $H = \begin{bmatrix} 1 \\ 4,7 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$: $H$ é uma matriz retangular de ordem $3 \times 1$

### Matriz quadrada

É toda matriz onde o número de linhas é igual ao número de colunas, isto é, quando $m = n$. Exemplos:

i) $J = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$: $J$ é uma matriz quadrada de ordem $3 \times 3$

ii) $K = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$: $K$ é uma matriz quadrada de ordem $2 \times 2$

Faremos uma deferência a este tipo de matriz devido à sua importância na álgebra matricial. Quando temos uma matriz $A$, com igual número de linhas e colunas ($m = n$), ela é dita **quadrada** de ordem $n$ e escreve-se $A_n$.

Em uma matriz quadrada, as diagonais representam papel fundamental. A **diagonal principal** é formada por todos os elementos entre $a_{11}$ e $a_{nn}$, inclusive. Já a **diagonal secundária** é formada por todos os elementos entre $a_{1n}$ e $a_{n1}$, inclusive.

Reparemos que os elementos da diagonal principal têm seu índices iguais: $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$, ..., $a_{nn}$.

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & -2 \\ -4 & 0 & 9 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to \text{Diagonal secundária} \\ \\ \to \text{Diagonal principal} \end{array}$$

Após esses conceitos, vamos destacar alguns subtipos de matrizes quadradas:

i) **Matriz triangular superior:** é a matriz quadrada que tem os elementos $a_{ij} = 0$, para $i > j$.

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ii) **Matriz triangular inferior:** matriz quadrada que tem os elementos $a_{ij} = 0$, para $i < j$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

iii) **Matriz diagonal:** matriz quadrada onde todos os elementos que não estão na diagonal principal são 0.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

iv) **Matriz Escalar:** matriz diagonal com os elementos da diagonal principal iguais.

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

v) **Matriz Unidade ou Identidade ($I_n$):** matriz diagonal com todos os elementos da diagonal principal iguais a 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $I_n$ representa o elemento neutro na multiplicação entre matrizes, que estudaremos na subseção Produtos entre matrizes, à pág. 77.

## Matriz transposta

A *transposta* de uma matriz é obtida trocando-se as linhas com as colunas de uma matriz dada.

Em linguagem matemática, temos que, dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, sua transposta pode ser indicada por

$A^t = B = (b_{ij})_{n\times m}$, onde $b_i$

Exemplos:

i) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 0 & -8 & 3 \end{pmatrix}$ é a inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, e vice-versa.

ii) Se $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, então $P^t = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

**Propriedades 4.1 : *Matriz Transposta***

Consideremos $\lambda$ um número real qualquer e as matrizes $A$ e $B$ de mesma ordem. Valem as seguintes propriedades:

I) $(A+B)^t = A^t + B^t$

II) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

III) $(A^t)^t = A$

IV) $(AB)^t = B^t A^t$

V) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

Podemos definir dois casos particulares de matriz transposta:

a) **Matriz simétrica**: uma matriz quadrada é dita simétrica se $S^t = S$.

b) **Matriz antissimétrica**: uma matriz quadrada é dita antissimétrica se $A^t = -A$.

Exemplos:

i) A matriz $Q = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -2 \\ 5 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ é simétrica, pois $Q^t = Q$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 5 & -2 \\ 5 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{Q^t} = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 5 & -2 \\ 5 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{Q}$$

ii) A matriz $U = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -3 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ é antissimétrica, pois $U^t = -U$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix}}_{U^t} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix}}_{-U}$$

### Matriz oposta

A *oposta* de uma matriz é dada pela multiplicação do escalar $-1$ por cada um de seus elementos, ou seja, na prática basta trocar o sinal de todos os seus elementos. Desse modo, dada uma matriz $A$, sua oposta é indicada por $-A$.

Exemplos:

i) A matriz $\begin{pmatrix} 12 & -7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ é a oposta da matriz $\begin{pmatrix} -12 & 7 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.

ii) A matriz $\begin{pmatrix} 12 & -7 & 14 & -5 \end{pmatrix}$ é a oposta da matriz $\begin{pmatrix} -12 & 7 & -14 & 5 \end{pmatrix}$.

### Matriz inversa

Discutiremos este tipo de matriz com mais detalhes na Seção 4.3 adiante, devido à sua importância para o estudo de matrizes e determinantes. Ainda assim, conceituaremo-na aqui.

Uma matriz $B$ é dita *inversa* de outra matriz $A$ se é verificada a seguinte condição:

$$A \cdot B = I$$

Diz-se, neste caso, que $B$ é inversa de $A$ e sua notação é: $B = A^{-1}$ (ou, igualmente, $A$ é inversa de $B$, com notação $A = B^{-1}$).

Não vamos neste momento adicionar exemplos de matriz inversa por não termos ainda estudado o conceito de Produtos entre matrizes, previsto para a seção 4.1.4.3 adiante.

#### Matriz ortogonal

A matriz $M$ cuja inversa coincide com a transposta é denominada *matriz ortogonal*. Assim:

$$M^{-1} = M^t \Rightarrow M \cdot M^t = M^t \cdot M = I$$

Pelo mesmo motivo do item anteior, não adicionaremos neste momento exemplos de matriz ortogonal.

### 4.1.4 Álgebra matricial

#### 4.1.4.1 Igualdade de matrizes

Quando duas matrizes, $A$ e $B$, de mesma ordem, têm os elementos de mesma posição iguais, estas são ditas iguais ($a_{ij} = b_{ij} \Rightarrow A = B$). Como consequência, se duas matrizes têm ordens distintas ou um par de seus elementos correspondentes não é igual, então $A \neq B$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}}_{B} \iff a_{ij} = b_{ij} \Rightarrow A_{m\times n} = B_{m\times n}$$

Na sequência, apresentamos alguns exemplos:

**Exemplo 4.1 : *Igualdade de matrizes***

As matrizes $M = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} \frac{4}{2} & \frac{16}{2} \\ -\frac{2}{2} & -\frac{12}{3} \\ \frac{6}{3} & 0 \end{pmatrix}$ são iguais?

**Solução:** Uma vez que, após as devidas simplificações das frações em $N$, chegamos aos mesmos valores dos elementos de $M$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \frac{\cancel{4}}{\cancel{2}} & \frac{\cancel{16}}{\cancel{2}} \\ -\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} & -\frac{\cancel{12}}{\cancel{3}} \\ \frac{6}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

então as matrizes são iguais.

**Exemplo 4.2 : *Igualdade de matrizes***

As matrizes $P = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ 5 & -1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 11 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ são iguais?

**Solução:** Apesar de terem os mesmos números na sua composição, este não têm correspondência de posição e as matrizes têm ordens diferentes. Assim, as matrizes não são iguais.

### 4.1.4.2 Adição de matrizes

A soma (ou a diferença) entre matrizes apenas pode ocorrer entre aquelas de mesma ordem. Este processo algébrico se configura como a simples adição (ou subtração) de um determinado elemento de uma matriz com o seu correspondente em outra matriz. Vejamos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{pmatrix}}_{A+B}$$

A seguir, alguns exemplos da adição de matrizes:

**Exemplo 4.3 : *Adição de matrizes***

Calcule $M + N$, dadas as matrizes $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

**Solução:** Como visto, a soma das matrizes é a simples soma dos termos correspondentes. Dessa forma, teremos:

$$\begin{aligned} M + N &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4+(-5) & -2+2 \\ -2+1 & 0+0 \\ 1+3 & 2+(-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Exemplo 4.4 : *Adição de matrizes***

É possível somar $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $I_3$?

**Solução:** Temos que $M$ é uma matriz de ordem $3 \times 2$. Já a matriz identidade $I_3$, como visto, é uma matriz quadrada de ordem $3 \times 3$. Logo, a soma $M + I_3$ é impossível.

Na adição de matrizes, é possível estabelecer algumas propriedades gerais, que são aplicáveis em quaisquer casos:

**Propriedades 4.2 : *Adição de matrizes***

Dadas três matrizes de mesma ordem, $A$, $B$ e $C$, valem as seguintes propriedades na adição:

I) Associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$

II) Existência do elemento neutro: $A + 0 = 0 + A = A$

III) Existência do elemento simétrico: $-A + A = A - A = 0$

IV) Comutativa: $A + B = B + A$

Nas propriedades II e III ao lado, 0 é a matriz nula.

#### 4.1.4.3 Produtos envolvendo matrizes

Podemos dividir a forma de multiplicação envolvendo matrizes em dois grupos: o *produto de uma matriz por um escalar* e o *produto entre matrizes*.

#### Produto de uma matriz por escalar

Multiplicar uma matriz por um número real (ou escalar ou constante ou coeficiente) é a simples multiplicação desse número por todos os seus elementos. Dessa forma, considerando, por exemplo, uma matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ e uma constante real qualquer $\lambda$, temos que:

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \lambda \cdot a_{13} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \lambda \cdot a_{23} \end{pmatrix}$$

Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 4.5 : *Produto de matriz por escalar***

O produto de $\frac{1}{2}$ por $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -5 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ resulta em qual matriz?

**Solução:** Temos que a multiplicação da constante $\frac{1}{2}$ pela matriz $A$ é o produto da constante por cada um dos elementos da matriz. Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 6 & \frac{1}{2} \cdot 3 & \frac{1}{2} \cdot (-5) \\ \frac{1}{2} \cdot (-3) & \frac{1}{2} \cdot (-2) & \frac{1}{2} \cdot 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Exemplo 4.6 : *Produto de matriz por escalar***

Considerando as matrizes $M = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ e $T = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, encontremos o resultado de $5M + T$.

**Solução:** A expressão matricial que representa $5M + T$ é:

$$\begin{aligned}
5M + T &= 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 \cdot 0 & 5 \cdot 5 \\ 5 \cdot (-5) & 5 \cdot 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 25 \\ -25 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 + 6 & 25 + (-9) \\ -25 + 2 & 15 + 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 16 \\ -23 & 22 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Neste tipo de multiplicação, também é possível estabelecer algumas propriedades:

**Propriedades 4.3 : *Produto de matriz por escalar***

Consideremos $\lambda$ e $\mu$ números reais quaisquer e $A$ e $B$ matrizes de mesma ordem.

I) $\lambda\ (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu)\ A$

II) $(\lambda + \mu)\ A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

III) $\lambda\ (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$

IV) $(\lambda \cdot A)^t = \lambda \cdot A^t$

V) $1 \cdot A = A$

### Produtos entre matrizes

Ao contrário do que a intuição possa nos indicar, a multiplicação entre matrizes não é a simples multiplicação entre elementos correspondentes. Por suas particularidades e importância na álgebra de matrizes, esse conteúdo será estudado com bastante atenção.

Condição para existência da multiplicação de matrizes:

$$A_{(m,n)} \times B_{(n,p)} = C_{(m,p)}$$

$=$

*Isso indica que:*

i) O número de colunas da primeira matriz precisa ser igual ao número de linhas da segunda;

ii) a matriz resultante, produto da multiplicação das duas matrizes, terá o mesmo número de linhas da primeira e o mesmo número de colunas da segunda.

**Definição 4.2 : *Algoritmo da multiplicação de matrizes:***

Se duas matrizes são $A_{m,n} = a_{ij}$ e $B_{n,p} = a_{kj}$, o produto $AB$ é uma matriz $C = c_{ij}$ tal que:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ b_{kj}$$

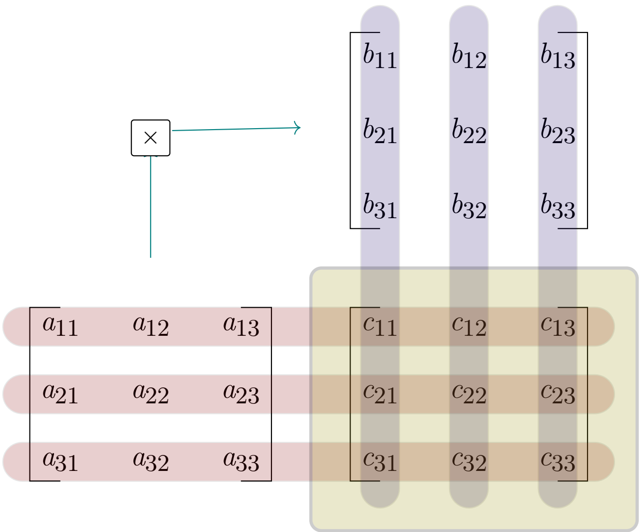
A matriz produto resultante dessa multiplicação é obtida pela multiplicação de linhas da primeira matriz por colunas da segunda, elemento a elemento, e é dada por:

$$C_{(m,p)} = \begin{cases} c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2} \\ \ldots \\ c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} \\ c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} \\ \ldots \end{cases}$$

Convenhamos que o esquema anterior, oriundo do somatório dado na Definição 4.2, não é nenhum pouco intuitivo.

Um esquema alternativo para a multiplicação de matrizes do tipo $A \times B = C$ pode ser montado na forma da Figura 10 e se mostra bastante útil e de mais fácil compreensão:

Figura 10 – Representação simbólica da multiplicação entre matrizes $A \cdot B = C$




Repare na figura que cada elemento $c_{ij}$ é o resultado da multiplicação entre uma linha e uma coluna, obtido da soma dos produtos entre os elementos respectivos, ou seja:

- o primeiro elemento da respectiva linha de $A$ é multiplicado pelo primeiro elemento da respectiva coluna de $B$;

- o segundo elemento da respectiva linha de $A$ é multiplicado pelo segundo elemento da respectiva coluna de $B$;
- e assim sucessivamente;
- no fim, soma-se todos esses produtos e é encontrado o valor de $c_{ij}$.

**Exemplo 4.7 :**

Indique a matriz produto obtida pela multiplicação das seguintes matrizes $T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $S = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

**Solução:** As matrizes dadas são de ordens diferentes, o que não impede, de imediato, a multiplicação. A matriz $T$ tem ordem $2 \times 3$ e $S$ tem ordem $2 \times 2$, ou seja:

$$T_{(2,3)} \times S_{(2,2)}.$$

$$\neq$$

Dessa forma, a multiplicação $T \times S$ é impossível.

**Exemplo 4.8 :**

Qual a matriz produto resultando da multiplicação entre as seguintes matrizes?

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -6 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

**Solução:** Ambas as matrizes são quadradas e de ordem 3, o que, de imediato, nos indica a possibilidade da multiplicação. Dessa forma, consta abaixo a resolução da multiplicação utilizando do esquema sugerido na Figura 10:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -6 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 12 & 1 \\ 18 & -28 & 2 \\ -3 & 36 & 9 \end{bmatrix} \\ & R \times Q \end{array}$$

Utilize os comandos abaixo do esquema para visualizar o passo-a-passo do cálculo da multiplicação. Porém, na maioria dos navegadores de Internet a animação abaixo não ficará disponível. Baixe o PDF e visualize-o no Adobe, Foxit etc.

Em geral, a existência do produto $AB$ não incide na existência automática do produto $BA$. É fácil verificar que, sendo $A$ e $B$ duas matriz quaisquer, havendo os produtos $AB$ e $BA$, eles são diferentes. Logo, a multiplicação de matrizes não é comutativa.

No entanto, existem matrizes $A$ e $B$, tais que $AB = BA$. Dois exemplos desse evento acontecem quando:

a) envolvemos a multiplicação de uma matriz quadrada $M_n$ por $I_n$.

$$AI = IA = A$$

b) a multiplicação de duas matrizes quaisquer $A_n$ e $B_n$ resultam na $I_n$.

$$AB = BA = I$$

Quando este último caso ocorre, dizemos que $B$ é **inversa** de $A$ (ou $A$ é inversa de $B$) e podemos representar assim:

$$B = A^{-1} \Rightarrow AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Se uma matriz admitir inversa, veremos adiante que ele é **única** (Teorema **??**).

**Propriedades 4.4 : *Produto entre matrizes***

Consideremos $A$, $B$, $C$ e $I$ matrizes que atendem à condição de multiplicação entre si.

I) Associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

II) Distributiva à direita em relação à adição: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

III) Distributiva à esquerda em relação à adição: $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$

IV) Existência do elemento neutro: $A \cdot I = I \cdot A = A$.

Em decorrência das propriedades da multiplicação de matrizes, uma matriz quadrada $A$ pode ser multiplicada por si mesma $n$ vezes. Indicamos esse processo por $A^n$ e o chamamos de *potência de matriz*. **Matriz periódica:** quando $A^n = A$, para $n \geq 2$ (o período da potenciação é definido por $n - 1$). **Matriz idempotente:** quando $A^2 = A$, o período é 1. **Matriz Nihilpotente:** quando $A^2 = 0 \Rightarrow A^3 = A^4 = A^5 = \cdots = 0$.

### 4.1.5 Atividades propostas

*Respostas na pág. 200.*

1. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & \sqrt{3} & 4 \\ 0 & \frac{1}{4} & 8 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, responda:

   a) Qual a ordem da matriz?
   b) Qual elemento está na posição $a_{15}$?
   c) Qual elemento está na posição $a_{12}$?
   d) Qual elemento está na posição $a_{21}$?
   e) Qual elemento está na posição $a_{34}$?
   f) Qual a posição ocupada pelo elemento 8?
   g) Qual a posição ocupada pelo elemento $\frac{1}{4}$?
   h) Qual a ordem da matriz transposta?

2. Considere seis cidades, A, B, C, D, E e F; vamos indexar as linhas e colunas de uma matriz $6 \times 6$ por essas cidades e colocar 1 na posição definida pela linha X e coluna Y, se a cidade X possui uma estrada que a liga diretamente à cidade Y, e vamos colocar 0, caso X não esteja ligada diretamente por uma estrada à cidade Y. Colocaremos também 1 na diagonal principal. (UFLA-MG, adaptada)

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\
\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Avalie as em Verdadeira ou Falsa cada alternativa abaixo e justifique suas respostas:

a) É possível ir, passando por outras cidades, da cidade C até a cidade E.
b) É possível ir, passando por outras cidades, da cidade A até a cidade C.
c) Existem dois caminhos diferentes para ir da cidade A para a cidade D.
d) A matriz construída a partir da indexação indicada é simétrica.

3. Construa uma matriz triangular superior com traço igual a 0 que, somada a matriz $I_4$, resulta na matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Traço de uma matriz quadrada é a soma dos elementos da diagonal principal.

4. Considere as matrizes

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 6 \\ -4 & -10 \end{pmatrix} \text{ e } R = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -9 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Determine:

a) $P + R$ b) $2P - R$ c) $3P - \frac{1}{2}Q^t$

5. Determine a matriz $A$ tal que $A + 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 6 \\ 7 & -2 & 12 \end{bmatrix}$.

6. Verifique em cada item se a matriz dada é simétrica ou antissimétrica:

a) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & -3 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & -6 \\ 1 & -5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{2} \\ -2 & 0 & 6 \\ \frac{5}{2} & 6 & 13 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Dadas as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & -9 & 6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -7 \\ 8 & 1 & -9 \end{pmatrix},$$

determine o resultado de cada item abaixo, classificando-o:

a) $A + A^t$ b) $B + B^t$ c) $A \cdot A^t$ d) $C - C^t$

8. Considere a sequência de matrizes $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$, todas quadradas de ordem $A$, respectivamente iguais a: (UERJ)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 & 27 \\ 28 & 29 & 30 & 31 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 32 & 33 & 34 & 35 \\ 36 & 37 & 38 & 39 \\ 40 & 41 & 42 & 43 \\ 44 & 45 & 46 & 47 \end{bmatrix}, \ldots$$

Sabendo que o elemento $a_{ij} = 75432$ pertence à matriz $A_n$, determine os valores de $n$, $i$ e $j$.

9. Escreva a matriz $B = (b_{ij})_{3\times 2}$ em que: $b_{ij} = \begin{cases} i^2, & \text{para } i = j \\ 3j, & \text{para } i \neq j \end{cases}$.

10. Escreva a matriz $D = (d_{ij})_{3\times 4}$ em que: $d_{ij} = \begin{cases} i^j, & \text{para } i < j \\ ij, & \text{para } i \geq j \end{cases}$.

11. Resolva a equação matricial: $A \cdot X + B = C$, em que:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

12. Dadas as matrizes abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 4 & -1 & -6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 5 & -7 & -9 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

calcule:

a) $X = 2B - 3A - 6C$ b) $Y = 4C + 2A - 6B$

13. Considere as matrizes abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 7 & -4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -7 \\ 6 & 2 & -8 & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & -8 \\ -3 & -1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 9 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

calcule os seguintes produtos:

a) $AB$ b) $(AB)D$ c) $A(BD)$ d) $BA$ e) $(BA)C$

14. Conhecendo-se somente os produtos $AB$ e $AC$, como podemos calcular:

a) $A(B + C)$? b) $B^t A^t$? c) $C^t A^t$? d) $(ABA)C$?

15. Encontre um valor para $x$, tal que $A \cdot B^t = 0$, em que:

$$A = [\; x \quad 4 \quad 2 \;] \quad \text{e} \quad B = [\; 2 \quad -3 \quad 5 \;].$$

16. Duas máquinas, $I$ e $II$, produzem três itens: $A$, $B$ e $C$, de acordo com o número de peças feitas por hora de funcionamento (conforme disposto na matriz $H$). A matriz $S$, por outro lado, apresenta o número de horas que cada máquina trabalha por dia da semana.

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 11 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

Na matriz $H$, a coluna 1 representa a máquina $I$ e a coluna 2 a máquina $II$. Na matriz $S$, cada coluna representa o dia da semana (começando na segunda-feira até sexta-feira), e a linha 1 representa a máquina $I$ e a linha 2 a máquina $II$.

Nessas condições, pede-se:

a) Calcule o produto $H \cdot S$.

b) Que informação este produto $H \cdot S$ nos dá?

c) Quantos itens $B$ são produzidos na segunda-feira?

d) Quantos itens $C$ são produzidos na quinta-feira?

## 4.2 Determinantes

A toda matriz quadrada de números reais podemos associar um número real denominado **determinante**. Veremos que o estudo do determinante de uma matriz está ligado ao estudo de matrizes inversas, assunto da próxima seção, e de Sistemas de Equações Lineares, assunto do capítulo seguinte.

Para indicar o determinante de uma matriz, troca-se os parênteses ou colchetes laterais por barras verticais. Dessa forma, dada uma matriz $M$ de ordem 2, a representação

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

indica genericamente essa matriz. Por sua vez, a representação

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

indica o determinante da mesma matriz e sua notação simplificada é $\det M$ ou $\det(M)$.

### 4.2.1 Determinante de matrizes de ordem 1

Por definição, o determinante de uma matriz quadrada de ordem 1 é o seu próprio elemento único. Assim, sendo a matriz $A = [a_{11}]$, então $\det A = a_{11}$.

**Exemplo 4.9 : *Determinante de ordem 1***

a) Se $B = [-7]$, então $\det B = -7$.

b) Se $C = (\frac{4}{5})$, então $\det C = \frac{4}{5}$.

### 4.2.2 Determinante de matrizes de ordem 2

Em uma matriz quadrada de ordem 2, o determinante é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nessa ordem. Portanto, teremos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot a_{21})$$

$- \qquad +$

**Exemplo 4.10 : *Determinantes de ordem 2***

Qual o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$?

**Solução:**

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-5 \cdot 1) - (4 \cdot 2) \\ &= -5 - 8 \\ &= -13 \end{aligned}$$

### 4.2.3 Determinante de matrizes de ordem 3

O cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 é menos intuitivo, se ao de ordem 2 comparamos. Há um dispositivo que facilita esse cálculo e este é chamado de **Regra de Sarrus**.

Para aplicar essa regra, basta repetirmos a segunda e a terceira colunas à direita da matriz. Em seguida, realiza-se multiplicações a partir dos elementos da primeira linha no sentido das diagonais, conforme indicado abaixo, conservando o sinal naquelas que acompanham o sentido da diagonal principal e invertendo o sinal naquelas que acompanham o sentido da diagonal secundária. Vejamos a partir de uma matriz genérica:

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \det T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Resolução pela Regra de Sarrus:

$$\left|\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| = \begin{array}{l} +(a_{11} . a_{22} . a_{33}) + (a_{12} . a_{23} . a_{31}) + (a_{13} . a_{21} . a_{32}) \\ -(a_{12} . a_{21} . a_{33}) - (a_{11} . a_{23} . a_{32}) - (a_{13} . a_{22} . a_{31}) \end{array}$$

$- \quad - \quad - \; + \quad + \quad +$

Utilize os comandos abaixo da figura para visualizar o passo-a-passo do cálculo do determinante. Porém, na maioria dos navegadores de Internet a animação não ficará disponível. Baixe o PDF e tente noutro visualizador de PDF (Adobe, Foxit etc.).

**Exemplo 4.11 : *Determinante de ordem 3***

Calcular o determinante da matriz $T = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -2 \\ -4 & 0 & 9 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

**Solução:**

$$\left|\begin{array}{ccc:cc} 5 & 7 & -2 & 5 & 7 \\ -4 & 0 & 9 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right| = \begin{array}{l} +[5 \cdot 0 \cdot (-1)] + [7 \cdot 9 \cdot 3] + [(-2) \cdot (-4) \cdot 1] \\ -[7 \cdot (-4) \cdot (-1)] - [5 \cdot 9 \cdot 1] - [(-2) \cdot 0 \cdot 3] = 124 \end{array}$$

## Duas consequências para o cálculo de determinantes

No estudo de determinantes, há duas propriedades que muito nos ajudam na simplificação dos cálculos envolvidos. Essas propriedades são, na verdade, dois teoremas, os quais serão enunciados e exemplificados a seguir.

**Teorema 4.1 : *Teorema de Binet***

Sendo $A$ e $B$ duas matrizes quadradas de mesma ordem e $AB$ a matriz produto obtida a partir da multiplicação de ambas, então $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

**Exemplo 4.12 : *Aplicação do Teorema de Binet***

Consideremos as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$. Qual o determinante da matriz $AB$?

**Solução:** Obtemos $det\, A = (4 \cdot 6) - (3 \cdot 0) = 24$ e $det\, B = (-2 \cdot -1) - (5 \cdot 2) = -8$.

Logo, pelo Teorema de Binet, temos que $det\, AB = det\, A \cdot det\, B = 24 \cdot (-8) = -192$.

Esse fato poderia ser verificado obtendo o produto $AB$ e, em seguida, calculando seu determinante:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \cdot (-2) + 0 \cdot 5 & 4 \cdot (2) + 0 \cdot (-1) \\ 3 \cdot (-2) + 6 \cdot 5 & 3 \cdot (2) + 6 \cdot (-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8 & 8 \\ 24 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Verificamos que, de fato, $\begin{vmatrix} -8 & 8 \\ 24 & 0 \end{vmatrix} = (-8 \cdot 0) - (24 \cdot 8) = -192$.

**Teorema 4.2 : *Teorema de Jacobi***

Se a uma linha de uma matriz quadrada $A$ adicionarmos outra linha previamente multiplicada por um número real, obteremos uma matriz $B$ com o mesmo determinante de $A$.

Troque *linha* por *coluna* e o Teorema 4.2 continua valendo.

**Exemplo 4.13 : *Aplicação do Teorema de Jacobi***

Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Agora, vamos multiplicar a primeira linha por 2 e somar o produto de cada elemento dela ao elemento correspondente da segunda linha, e substituir o resultado na linha 2 (indicaremos isso por $L_2 \to 2L_1 + L_2$, o que é chamado de *combinação linear*):

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2 \to 2L_1 + L_2 \;\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 11 & 6 & 15 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = B\ .$$

O Teorema de Jacobi garante que, tanto o determinante da matriz $A$ quanto o de $B$, têm o mesmo valor. Vejamos, aplicando a Regra de Sarrus:

$$\begin{aligned}
\det\ A &= \left| \begin{array}{ccc|cc} 4 & 0 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right| \\
&= \{[4 \cdot 6 \cdot 1] + [0 \cdot 5 \cdot 2] + [5 \cdot 3 \cdot (-1)]\} - \{[0 \cdot 3 \cdot 1] + [4 \cdot 5 \cdot (-1)] + [5 \cdot 6 \cdot 2]\} \\
&= \{24 + 0 - 15\} - \{0 - 20 + 60\} \\
&= 9 - 40 \\
&= -31
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det\ B &= \left| \begin{array}{ccc|cc} 4 & 0 & 5 & 4 & 0 \\ 11 & 6 & 15 & 11 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right| \\
&= \{[4 \cdot 6 \cdot 1] + [0 \cdot 15 \cdot 2] + [5 \cdot 11 \cdot (-1)]\} - \{[0 \cdot 11 \cdot 1] + [4 \cdot 15 \cdot (-1)] + [5 \cdot 6 \cdot 2]\} \\
&= 24 + 0 - 55\} - \{0 - 60 - 60\} \\
&= -31 + 0 \\
&= -31
\end{aligned}$$

O que mostra a veracidade do teorema.

**Propriedades 4.5 : *Propriedades dos Determinantes***

i) Multiplicar uma linha por $\lambda$ multiplica o determinante por $\lambda$.

ii) Permutar duas linhas troca o sinal do determinante.

iii) O determinante de uma matriz $M$ é igual ao determinante da sua transporta, ou seja, $det\ M = det\ M^t$.

iv) O determinante de uma matriz é zero se, e somente se, as linhas são iguais ou proporcionais.

v) Se o $det\ A = k$, então $det\ A^{-1} = \dfrac{1}{k}$.

vi) Se o $det\ A = k$, então $det\ A^p = k^p$.

vii) Se o $det\ A = k$, então $det\ \lambda \cdot A = \lambda^m \cdot det\ A$, onde $m$ é a ordem da matriz $A$.

viii) O determinante de uma matriz triangular corresponde ao produto dos elementos da sua diagonal principal.

A propriedade iv remete ao fato de que, sempre que uma linha ou uma coluna for formada apenas por números nulos, o determinante da matriz quadrada correspondente também o será.

Um outro método para cálculo de determinantes é conhecico como **Desenvolvimento de Laplace ou Regra de Laplace**. Este método é bastante útil pois vale para matrizes de quaisquer ordens. No Apêndice A consta sua formalização.

**Proposição 4.1 : *Regra de Chió***

A **Regra de Chió** é um método utilizado para diminuir a ordem de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem $n \geq 2$, em que $a_{11} = 1$, sem alterar o valor do determinante. Para tanto, deve-se proceder com:

- Suprimimos a primeira linha e a primeira coluna de $A$;
- de cada elemento $a_{ij}$ restante subtraímos o produto dos elementos suprimidos da mesma linha e da mesma coluna de $a_{ij}$ (ou seja, $a_{i1}$ e $a_{1j}$);
- a matriz $B$ de ordem $n-1$ obtida tem determinante igual ao de $A$.

**Exemplo 4.14 : *Aplicação da Regra de Chió***

Calcular o determinante da matriz $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & 4 & 5 \\ -1 & 7 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

**Solução:** Calculemos o determinante utilizando a Regra de Chió, uma vez que $a_{11} = 1$. Vejamos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & \boxed{5} & 4 & 5 \\ -1 & 7 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

As linhas em vermelho serão suprimidas

e os elementos circulados serão multiplicados;

o resultado será subtraído do elemento dentro do retângulo

Todo esse processo resulta em:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & 4 & 5 \\ -1 & 7 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5-[-2\cdot 0] & 4-[-2\cdot -3] & 5-[-2\cdot 2] \\ 7 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -2 & 9 \\ 7-[-1\cdot 0] & -1-[-1\cdot -3] & 3-[-1\cdot 2] \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -2 & 9 \\ 7 & -4 & 5 \\ -3-[2\cdot 0] & 2-[2\cdot -3] & 0-[2\cdot 2] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -2 & 9 \\ 7 & -4 & 5 \\ -3 & 8 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A Regra de Chió garante que o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 9 \\ 7 & -4 & 5 \\ -3 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ é o mesmo da matriz $R$. Logo, calculemos o determinante desta última matriz:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5 & -2 & 9 \\ 7 & -4 & 5 \\ -3 & 8 & -4 \end{vmatrix} &= 5 \cdot (16 - 40) - (-2) \cdot (-28 + 15) + 9 \cdot (56 - 12) \\ &= -120 - 26 + 396 \\ &= 250 \end{aligned}$$

Desse modo, o $det(R) = 250$.

### 4.2.4 Atividades propostas

*Respostas na pág. 200.*

1. Indique o valor do determinante das seguintes matrizes:

   a) $A = \begin{bmatrix} 15 & 14 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

   b) $B = \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

   c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

   d) $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

   e) $E = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 7 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

   f) $F = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 & 3 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

   g) $G = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

2. Considere o exercício anterior e verifique qual o valor de:

   a) $det\, A \cdot det\, B$ b) $det\,(AB)$ c) $det\,(BA)$

   d) Qual conclusão podemos conjecturar a partir dos três itens anteriores deste exercício?

3. Sabemos que a matriz identidade é o elemento neutro na multiplicação de matrizes. Considere duas matrizes de mesma ordem $A$ e $I$, a primeira uma qualquer e a segunda, a identidade. Calcule $det\, I$ a partir do seguinte raciocício: (DANTE, 2016a, p. 83)

$$A \cdot I = A \Rightarrow det\,(AI) = det\, A \Rightarrow det\, A \cdot det\, I = det\, A \Rightarrow det\, I = ?$$

4. Dada a matriz $S = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, indique:

   a) $det\, S$ b) $det\, S^t$ c) $det\, S^{-1}$ d) $det\, S^2$ e) $det\, 3S$

5. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \\ -1 & y & x \end{pmatrix}$, calcule os valores de $x$ e $y$ para que o traço de $A$ seja 6 e $det\, A = -61$. (TEIXEIRA, 2020)

6. Observe as matrizes abaixo e responda o que se pede em seguida:

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \text{e } R = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

   a) Qual o determinante de cada uma das matrizes?
   b) Qual característica das matrizes pode explicar o fato obtido no item $a$?

7. Indique o(s) possível(is) valores de $x$ na igualdade seguinte:

$$\frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 2x & 6 & -1 \\ 2(x-1) & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 0 & 3 & 5 \\ 2x & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

8. Sabendo que $M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $det\,(M \cdot N) = -360$, determine o valor de $a$. (SOUZA, 2013a, p. 149)

9. Dadas as matrizes abaixo, indique o determinante das matrizes indicadas em cada item seguinte:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ -1 & 6 \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -20 & -8 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} -11 & -33 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} -29 & -62 \\ -1 & 6 \end{pmatrix},\ CB = \begin{pmatrix} -32 & -13 \\ 4 & 9 \end{pmatrix},\ AC = \begin{pmatrix} -11 & 7 \\ 33 & 97 \end{pmatrix},\ CA = \begin{pmatrix} 47 & 101 \\ 31 & 39 \end{pmatrix}.$$

   a) $B^t A^t$
   b) $(BA)^{-1}$
   c) $C \cdot (A + B)$
   d) $(B - C) \cdot A$
   e) $A^2 \cdot (B^t + C)$

10. Dadas as matrizes abaixo, indique o determinante das matrizes indicadas em cada item seguinte:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 5 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 9 & -3 & -2 \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 6 \\ -7 & 17 & -1 \\ -9 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 16 & -1 & 3 \\ 27 & 8 & 20 \\ 9 & -4 & 8 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} -14 & 28 & 15 \\ 43 & 23 & 19 \\ 13 & 5 & 1 \end{pmatrix},\ CB = \begin{pmatrix} -24 & -14 & -15 \\ 31 & 53 & 22 \\ -22 & 4 & -19 \end{pmatrix},\ AC = \begin{pmatrix} -10 & 22 & 10 \\ 43 & -26 & -9 \\ 32 & -20 & -11 \end{pmatrix},\ CA = \begin{pmatrix} -31 & 11 & -11 \\ 39 & -4 & 26 \\ -35 & 20 & -12 \end{pmatrix}.$$

   a) $C^t A^t$
   b) $(CA)^{-1}$
   c) $3 \cdot A^2$
   d) $(B - C) \cdot A$
   e) $B \cdot (B + A)$

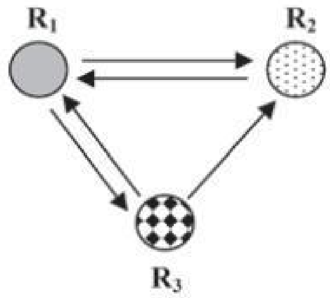
11. Indique o determinantes das seguintes matrizes:

   a) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 6 & -2 \\ -1 & 5 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 8 & 12 \\ 7 & -9 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 8 & 3 & -7 \\ -1 & 4 & 1 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 & 8 & 1 & -1 \\ 7 & -9 & 6 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -9 & -4 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & -7 & 5 \\ -1 & 4 & 1 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & -8 & 4 & 9 & -7 \end{pmatrix}$

12. O esquema abaixo apresenta três torres repetidoras de telefonia celular que permitem a comunicação entre as regiões $R_1$, $R_2$ e $R_3$. O sentido de cada seta indica que a torre de uma região transmite sinal para outra. (UFMT, adaptada)




Seja $A = (aij)$ a matriz que descreve as transmissões de sinais apresentadas no esquema, sendo que:

- $a_{ij} = 1$ significa que há transmissão de sinal da torre repetidora da região $i$ para a torre repetidora da região $j$;
- $a_{ij} = 0$ significa que não há transmissão de sinal da torre repetidora da região $i$ para a torre repetidora da região $j$;
- Considere que uma torre repetidora não transmite sinal para ela mesma.

A partir dessas informações, qual o valor do determinante da matriz $A^2$?

## 4.3 Matriz inversa

Partindo do conceito dado na Subseção 4.1.3, adicionaremos a seguinte definição para matriz inversa:

**Definição 4.3 : *Matriz inversa***

Dada uma matriz quadrada $A$, de ordem $n$, se $X$ é uma matriz tal que $AX = I_n$ e $XA = I_n$ então $X$ é denominada matriz inversa de $A$ e é indicada por $A^{-1}$.

A definição acima exprime que uma matriz quadrada qualquer admite inversa se a multiplicação de ambas resulta na matriz identidade. Matematicamente falando, sendo $M$ e $N$ duas matrizes quadradas e de mesma ordem, então

$$MN = I \quad \text{ou} \quad NM = I,$$

onde $I$ é a matriz identidade de mesma ordem que $M$ e $N$.

Quando uma matriz possui inversa, dizemos ser esta invertível (ou inversível) e indicamos sua inversa com o expoente $-1$, tal como na Definição 4.3.

**Exemplo 4.15 : *Verificação da matriz inversa***

A matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ admite inversa e esta é $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

**Vejamos:**

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.2 + 3.(-3) & 5.(-3) + 3.5 \\ 3.2 + 2.(-3) & 3.(-3) + 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 + (-3).3 & 2.3 + (-3).2 \\ (-3).5 + 5.3 & (-3).3 + 5.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, tanto $AB = I$ como $BA = I$, então pode-se afirmar que $A$ é invertível e sua inversa é $B$, o que implica dizer que $B = A^{-1}$. E, por óbvio, podemos dizer o mesmo de $B$ em relação à sua inversa $A$.

**Exemplo 4.16 : *Cálculo da matriz inversa***

Obter a matriz inversa de $M = \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 18 & -9 \end{bmatrix}$.

**Solução:**
Admitindo que há a inversa, teremos então que $MM^{-1} = I$. Logo,

$$MM^{-1} = \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 18 & -9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

o que, pela igualdade de matrizes, resulta em:

$$MM^{-1} = \begin{bmatrix} -12a + 6c & -12b + 6d \\ 18a - 9c & 18b - 9d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daí, teremos que: $i) \begin{cases} -12a + 6c = 1 \\ 18a - 9c = 0 \end{cases}$ e $ii) \begin{cases} -12b + 6d = 0 \\ 18b - 9d = 1 \end{cases}$.
Em $i$ e $ii$ temos um sistema com equações que podem ser resolvidos assim:

$$i) \begin{cases} -12a + 6c = 1 & \div(2) \\ 18a - 9c = 0 & \div(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6a + 3c = \frac{1}{2} \\ 6a - 3c = 0 \end{cases} +$$

$$\begin{aligned} 0a + 0c &= \tfrac{1}{2} \\ 0 &= \tfrac{1}{2} \ (impossível) \end{aligned}$$

$$ii) \begin{cases} -12b + 6d = 0 & \div(2) \\ 18b - 9d = 1 & \div(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6b + 3d = 0 \\ 6b - 3d = \frac{1}{3} \end{cases} +$$

$$\begin{aligned} 0a + 0c &= \tfrac{1}{3} \\ 0 &= \tfrac{1}{3} \ (impossível) \end{aligned}$$

Como os sistemas são impossíveis, ou seja, não têm solução, não podemos determinar os elementos da matriz $M^{-1}$. Dessa forma, podemos afirmar que a matriz $M$ não é invertível.

**Observação 4.1** *Apesar de todo número real, diferente de zero, ter um inverso multiplicativo, nem sempre uma matriz $A$ terá uma inversa $B$. Esse fato está ligado à condição de que o determinante de $A$ necessita ser diferente de 0 ($\det A \neq 0$).*

A partir da observação anterior (4.1), as matrizes dos dois exemplos anteriores poderiam ter seus determinantes calculados previamente para saber se admitiriam inversa.

Dessa forma, no primeiro exemplo, veríamos que $det\ A = 1$ e, no segundo, que $det\ M = 0$, indicando que $A$, de fato, admitia inversa, e $M$ não.

### 4.3.1 Atividades propostas

*Respostas na pág. 201.*

1. Determine $x$ e $y$, sabendo que a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ x & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ y & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. Nos itens abaixo, verifique se a matriz $A$ é inversa de $B$.

   a) $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -4 & -6 & -6 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & -2 \\ 10 & -8 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 & 1 \\ -\frac{11}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$

3. Determine, caso exista, a matriz inversa de:

   a) $C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

   b) $G = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

   c) $M = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

   d) $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Determine os valores de $x$ e $y$ sabendo que a matriz $H = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ é a inversa da matriz $J = \begin{bmatrix} x & -1 \\ y & 2 \end{bmatrix}$.

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$, onde $a$ e $b$ são números reais. Se $A.A = A^2 = A$, (Unicamp) e $A$ é invertível, então quais os valores de $a$ e $b$?

6. As afirmações abaixo são verdadeiras? Se sim, mostre um argumento matemático para tal.

   a) $M$ uma matriz quadrada e invertível, então $det\ A^{-1} = \dfrac{1}{det\ A}$.

   b) Sendo $A$ uma matriz quadrada de ordem $n$, então $det\ A^2 = (det\ A)^2$.

   c) Sendo $C$ uma matriz quadrada e invertível, então seu determinante só pode ser $\neq 0$.

CAPÍTULO 5

# Sistemas de Equações Lineares

A aplicação deste tema encontra espaço em várias áreas do conhecimento que têm seus fenômenos modelados pela Matemática.

Ainda que os métodos de resolução possam variar – e aqueles chamados de método da Adição e método da Substituição sejam familiares por estudos anteriores –, estudaremos a resolução dos Sistemas de Equações Lineares juntando a estes já conhecidos outro método envolvendo matrizes e determinantes, que abarca conteúdos estudados anteriormente. O método de Cramer será apresentado, portanto.

## 5.1 Equação linear

Toda equação de grau 1 (ou do 1º grau) com uma ou mais incógnitas é denominada **equação linear**.

**Definição 5.1 : *Equação Linear***

Uma **equação linear** em $n$ incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ é uma igualdade da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

onde:

- $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as **incógnitas**;
- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais, denominadas **coeficientes** das incógnitas; e
- $b$ é um número real denominado **termo independente**.

Dizemos que a equação é linear em $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

**Exemplo 5.1 : *Equação linear e seus elementos***

i) Na equação linear $-3x + 2y = 8$, os números reais $-3$ e $2$ são os coeficientes; $8$ é o termo independente; e $x$ e $y$ são as incógnitas;

ii) Na equação linear $\frac{8a-5b=-1}{3}$, os números reais $\frac{8}{3}$ e $-\frac{5}{3}$ são os coeficientes; $-\frac{1}{3}$ é o termo independente; e $a$ e $b$ são as incógnitas;

iii) Na equação linear $-\alpha + \frac{\beta}{2} - 5\gamma = \sqrt{2}$, os números reais $-1$, $\frac{1}{2}$ e $-5$ são os coeficientes; $\sqrt{2}$ é o termo independente; e $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ são as incógnitas.

Há de se reforçar para além da Definição 5.1 que, para que uma equação seja dita linear, cada um de seus termos dependentes de incógnitas (excluído, portanto, o termo independente) deve ser composto por apenas uma incógnita, cujo expoente deve ser apenas o 1. Dessa forma, temos:

a) $2x = 8$ é uma equação linear;

b) $x^2 = 16$ não é uma equação linear;

c) $2x - 5y - 6z = 0$ é uma equação linear;

d) $a - 2b = 12$ é uma equação linear;

e) $a^3 + 5b = 1$ não é uma equação linear;

f) $x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 6$ é uma equação linear;

g) $x_1x_2 + 2x_3 = 1$ não é uma equação linear;

h) $8\alpha + 3\beta - 2\lambda - 2\mu = 11$ é uma equação linear;

i) $\sqrt{x} - 3y - 2z = 0$ não é uma equação linear;

j) $\sqrt[3]{a - 7b} = 2$ é uma equação linear;

k) $x + \dfrac{1}{y} = 2$ não é uma equação linear;

l) $0a + 0b = 0$ é uma equação linear.

Toda equação linear onde o termo independente tem valor 0 é chamada de **homogênea**.

### 5.1.1 Solução de uma equação linear

Chamamos de **solução** da equação linear os valores que, substituídos ordenadamente em suas incógnitas, torna a igualdade verdadeira.

A essa sequência ordenada de $n$ elementos que, juntos, formam a solução de uma equação linear chamamos genericamente de $n$-upla (lê-se *ênupla*) de números.

Portanto, se $-x + 2y = -12$ é uma equação linear em $x$ e $y$ (ou seja, estas duas são as incógnitas), podemos verificar que o par ordenado $(2, -5)$ é uma solução da equação, pois:

$$\begin{aligned} -x + 2y &= -12 \\ -(2) + 2 \cdot (-5) &\stackrel{?}{=} -12 \\ -12 &= -12 \end{aligned}$$

Há uma infinidade de outras soluções para esta equação. E o motivo reside no fato de que uma equação linear com duas incógnitas nada mais é do que uma **função linear**. Basta olharmos para esta equação linear reescrita em formato de função:

$$y = \frac{x-12}{2} \quad \text{ou} \quad f(x) = \frac{x-12}{2}$$

Na Subeção 5.2.3, exploraremos essa relação entre equação e função linear.

Toda equação linear homogênea admite como solução a $n$-upla $(0, 0, \dots, 0)$, chamada de **solução trivial**.

## 5.2 Sistema de equações lineares

**Definição 5.2 : *Sistema de Equações Lineares***

Um **sistema de equações lineares**, ou simplesmente **sistema linear**, é um conjunto de equações lineares, ou seja,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde todos os termos $a_{ij}$ e $b_k$ são números reais.

A quantidade de equações e de incógnitas condiciona a forma como chamamos um sistema linear.

**Exemplo 5.2 : *Sistemas de Equações Lineares***

i) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 7y = 16 \end{cases}$ é um sistema linear $2 \times 2$.

ii) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 4x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$ é um sistema linear $3 \times 2$.

iii) $\begin{cases} 2x - 4y - 5z = 0 \\ -x - 2y + 3z = -7 \end{cases}$ é um sistema linear $2 \times 3$.

### 5.2.1 Solução de um sistema linear

Uma solução para um sistema linear nas incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ é a $n$-upla de números $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ que satifazem simultaneamente cada uma das equações do sistema. Ou, em outras palavras, é a sequência de números que, em conjunto, são solução para cada equação quando substituímos $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$.

Para intuir essa noção da solução, observemos a seguinte situação envolvendo duas equações lineares quaisquer e suas soluções:

| Equação Linear | Soluções |
|---|---|
| $x + 2y = 5$ | $(-1, 3), (-3, 4), \mathbf{(1,2)}, (5, 0), \ldots$ |
| $2x + y = 4$ | $(2, 0), \mathbf{(1,2)}, (-1, 6), (3, -2), \ldots$ |

Observemos que cada equação tem uma infinidade de soluções e, dentre elas, há o par ordenado $(1, 2)$ que é comum. Diante disso, podemos dizer que, se colocadas juntas num sistema, a única solução admitida é este par ordenado:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow S = \{(1, 2)\}$$

**Exemplo 5.3 :** ***Sistemas lineares e soluções***

i) $\begin{cases} 4x - 5y = 1 \\ -2x + y = -11 \end{cases}$ é um sistema linear que tem o par $(9, 7)$ como solução.

ii) $\begin{cases} 2x + 3y + 6z = 15 \\ -x + 4y + z = 24 \\ 3x - y + 7z = -7 \end{cases}$ é um sistema linear que tem a terna $(-3, 5, 1)$ como solução.

Genericamente, dizemos que, para um sistema linear do tipo $m \times n$, a $n$-upla de números que o satisfaz forma um conjunto chamado de **conjunto solução** ou **solução geral** do sistema.

Num sistema $3 \times 3$ que admite solução, teremos uma terna de números; num $4 \times 4$, uma quádrupla; num $5 \times 5$, uma quíntupla; e assim por diante.

### 5.2.2 Classificação de um sistema linear

Quanto à classificação, um sistema linear pode ser um **Sistema**:

- **Possível** (ou compatível): $\begin{cases} \text{e } \textbf{Determinado} \text{ (SPD): quando admitir uma só solução} \\ \text{e } \textbf{Indeterminado} \text{ (SPI): quando admitir infinitas soluções} \end{cases}$
- **Impossível** (ou incompatível, SI): quando não admitir solução

Um sistema linear que tem todas as suas equações homogêneas é chamado de **homogêneo** e admite, pelo menos, uma solução $(0, 0, \ldots, 0)$, chamada de **solução trivial** do sistema.

### 5.2.3 Sistema linear associado a funções afins

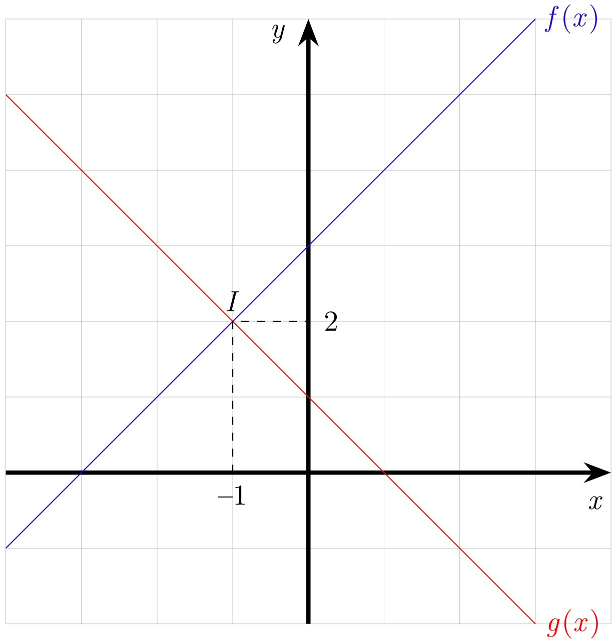
Uma equação linear em duas incógnitas terá infinitos pares ordenados como solução para si. Isso corresponde aos infinitos pontos que compõem a reta da representação gráfica de uma função afim, já que um ponto, no plano cartesiano, é também representado por um par ordenado. Vejamos um caso:

No sistema linear $2 \times 2$ seguinte cada uma das suas equações lineares pode ser reescrita no formato de função:

$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} y = x + 3 & [f(x)] \\ y = -x + 1 & [g(x)] \end{array}$$

A representação gráfica de cada uma dessas equações pode ser visto no gráfico da figura seguinte:

Figura 11 – Gráficos de $f(x) = x + 3$ e $g(x) = -x + 1$




Como a representação gráfica expressa na Figura 11 guarda correspondência com o sistema linear inicial, a interpretação de seu comportamento gráfico precisa nos servir também para entendernos a expressão algébrica.

De fato, uma das coisas que podemos depreender do gráfico anterior é que as retas se interceptam no ponto $I = (-1, 2)$, ou seja, o ponto $I$ é o único que, ao mesmo tempo, pertence a ambas as retas. Isso indica que, dos infinitos pontos de cada reta, apenas $I$ é comum a ambas, e, por conseguinte, representa o único par ordenado que também é comum às equações lineares que originaram as funções.

Assim, o par ordenado $(-1, 2)$ é a única solução comum para as equações lineares e, portanto, a solução do sistema linear. De fato, ao substituir esses valores em cada equação, teremos isso:

$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(-1) + 2 \stackrel{?}{=} 3 \\ -1 + 2 \stackrel{?}{=} 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 3 \\ 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \; S = \{(-1, 2)\}$$

Como esse sistema tem solução, e esta é única, trata-se de um sistema possível e determinado (SPD).

## 5.3 Resolução de Sistemas Lineares

Abordaremos nesse material três métodos para resolver sistemas lineares, especialmente os do tipo $2 \times 2$ e do tipo $3 \times 3$.

O primeiro, chamado de Método da Adição, até foi utilizado na seção Matriz inversa, porém sem nominá-lo assim. Nesta seção faremos sua formalização.

O segundo, chamado de Método da Substituição, é bastante prático e intuitivo, sendo bastante útil em sistemas menores do tipo $2 \times 2$.

Por fim, o terceiro, chamado de Regra de Cramer, é decorrente da álgebra matricial, que foi estudada no capítulo precedente de Matrizes e Determinantes.

É importante frisar que existem outros métodos, mas não serão abordados neste material.

### 5.3.1 Método da Adição

O **método da adição** é frequentemente ensinado em séries anteriores ao Ensino Médio, ainda que não tenha recebido esse nome propriamente naquele momento.

Como decorrência do Teorema de Jacobi, visto na pág. 85, chamamos de método da adição o procedimento no qual somam-se as duas equações de um sistema linear (podendo uma delas, ou ambas, serem multiplicadas por um número real precedentemente) de maneira que uma das variáveis se anule quando obtivermos o resultado.

A ideia de resolução nesse método é ir criando sistemas equivalentes ao primeiro que, mesmo diferentes na sua expressão, têm a mesma solução. Ao se chegar num sistema que tenha uma equação linear com apenas uma incógnita, poderemos, ao isolar essa incógnita na equação, obter a solução geral.

Um sistema linear é equivalente a outro quando possuem as mesmas soluções, ainda que tenham equações distintas.

**Exemplo 5.4 : *Resolução de sistema linear pelo método da adição***

Encontrar a solução do sistema linear $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$ pelo método da adição.

**Solução:** Inicialmente, vamos proceder a dois passos:

a) identificar cada uma das equações: $\begin{cases} 3x + y = 1 & \text{(i)} \\ 2x - 3y = 8 & \text{(ii)} \end{cases}$

b) multiplicar a primeira delas por 3: $\begin{cases} 3x + y = 1 & \times(3) \\ 2x - 3y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 3y = 3 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$

Agora, vamos somar as duas equações, encontrar um nova equação e montar um sistema equivalente:

$$\begin{cases} 9x \cancel{+3y} & = 3 \\ 2x \cancel{-3y} & = 8 \end{cases} +$$

$$11x \quad = 11 \quad \Rightarrow x = 1 \quad \text{(iii)}$$

(esta nova equação substituirá uma das duas primeiras equações)

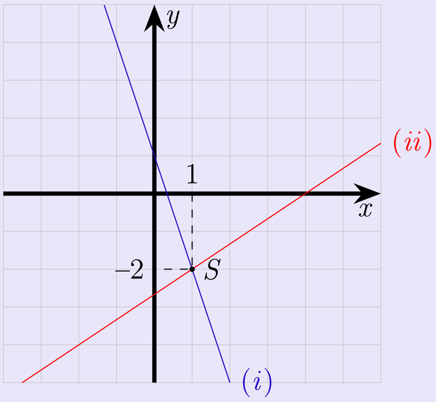
$$\underbrace{\begin{cases} 3x + y & = 1 \\ 2x - 3y & = 8 \end{cases}}_{\text{sistema original}} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} 3x + y & = 1 \\ x & = 1 \end{cases}}_{\text{sistema equivalente}}$$

Em seguida, substituímos a nova equação $(iii)$ na equação $(i)$:

$$\begin{cases} 3 \cdot (1) + y & = 1 \\ x & = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - 3 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Portanto, a solução do sistema é $S = \{(1, -2)\}$.

Se quiséssemos fazer a análise geométrica, poderíamos verificar a seguinte representação:




O caso de retas concorrrentes indica a existência de um único ponto do plano que, pertencendo concomitantemente às duas retas, corresponde à solução do sistema.

Ainda, se quiséssemos montar uma sequência dos sistemas equivalentes utilizados nessa resolução, poderíamos esquematizá-los assim:

$$\begin{cases} 3x & +y & = 1 \\ 2x & -3y & = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x & +3y & = 3 \\ 2x & -3y & = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x & +y & = 1 \\ x & & = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} & y & = -2 \\ x & & = 1 \end{cases}$$

### 5.3.2 Método da Substituição

O método da substituição também normalmente é estudado em séries anteriores ao Ensino Médio. Retomaremos sua ideia a partir de um exemplo usando do mesmo sistema linear utilizado anteriormente no Método da Adição. Vejamos:

**Exemplo 5.5 : *Resolução de sistema linear pelo método da substituição***

Encontrar a solução do sistema linear $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$ pelo método da substituição.

**Solução:** Inicialmente, vamos proceder a dois passos:

a) identificar cada uma das equações: $\begin{cases} 3x + y = 1 & \text{(i)} \\ 2x - 3y = 8 & \text{(ii)} \end{cases}$

b) isolar uma incógnita numa das equações: $\begin{cases} y = 1 - 3x \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$

Agora, vamos substituir essa equação $(i)$ na equação $(ii)$:

$$\begin{cases} y & = 1 - 3x \\ 2x - 3 \cdot (1 - 3x) & = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y & = 1 - 3x \\ 2x - 3 + 9x & = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y & = 1 - 3x \\ 11x & = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y & = 1 - 3x \\ x & = 1 & \text{(iii)} \end{cases}$$

Em seguida, substituimos a nova equação $(iii)$ na equação $(i)$:

$$\begin{cases} y & = 1 - 3 \cdot (1) \\ x & = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y & = 1 - 3 \\ x & = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y & = -2 \\ x & = 1 \end{cases}$$

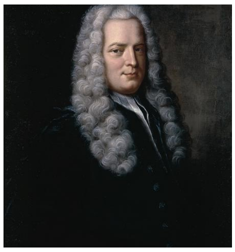
Portanto, verificamos, assim como no método da adição, que a solução do sistema é

$$S = \{(1, -2)\}.$$

A representação e a análise geométrica são as mesmas feitas na seção anterior, quando apresentamos o Método da Adição.

Os métodos da adição e da substituição também nos servem para resolver sistemas lineares do tipo $3 \times 3$. Todavia, por ser a Regra de Cramer mais otimizada para esses casos, reservaremos exemplos de resolução para estes sistemas na seção seguinte, quando apresentaremos essa técnica.

### 5.3.3 Regra de Cramer



Gabriel Cramer (1704-1752)

Este método, creditado ao matemático suíço Gabriel Cramer (1704-1752), mostra-se bastante útil na solução de sistemas possíveis e determinados. Ele possibilita obter a solução do sistema utilizando seus coeficientes organizados em matrizes.

Contudo, como veremos, o método só pode ser aplicada quando o determinante da matriz dos coeficientes não for nulo. Vejamos então, antes de proceder à explicação do método, como um sistema pode ser escrito de forma matricial:

#### Equação matricial associada a um sistema linear

A todo sistema linear podemos associar uma equação matricial correspondente. Dessa forma, o sistema linear $\begin{cases} -x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$ poderia ser assim escrito na sua forma matricial:

$$\begin{cases} -x & +y & = 3 \\ \phantom{-}x & +y & = 1 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{A \\ \text{matriz dos} \\ \text{coeficientes}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\substack{X \\ \text{matriz} \\ \text{das incóg-} \\ \text{nitas}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\substack{B \\ \text{matriz} \\ \text{dos termos} \\ \text{indepen-} \\ \text{dentes}}}$$

A **Regra de Cramer** é um método que utiliza-se do cálculo de determinantes para a resolução do sistema linear. Ele se mostra útil para resolver tanto sistemas lineares $2 \times 2$ quanto sistemas $3 \times 3$. Exploraremos a resolução destes últimos com a Regra de Cramer, para tanto, consideremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

A equação matricial associada a ele é:

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

O determinante da matriz $A$ do sistema é dado por $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Se substituirmos os valores dos coeficientes independentes $b_1, b_2, b_3$ em cada uma das colunas da matriz dos coeficientes (cada uma a sua vez), obteremos outras matrizes, as quais definimos seu determinante como:

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Observe que $D_x$ é o determinante da matriz A (dos coeficientes) que teve a coluna dos coeficientes de $x$ substituída pelos valores dos coeficientes independentes. O procedimento é análogo para $D_y$ e $D_z$.

Pela Regra de Cramer, a solução do sistema é dada por:

$$x = \frac{D_x}{D}; \quad y = \frac{D_y}{D}; \quad z = \frac{D_z}{D} \tag{5.1}$$

**Exemplo 5.6 : *Resolução de sistema linear pela Regra de Cramer***

Deteminar a solução do seguinte sistema linear: $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x + y + z = -1 \end{cases}$.

**Solução:** (pela Regra de Cramer)
O sistema pode ser escrito de forma matricial da seguinte forma:

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

O determinante da matriz $A$ dos coeficientes é dado por:

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1 + 1) - 2 \cdot (2 - 1) = -2$$

Os determinantes das matrizes obtidas pela substituição dos coeficientes independentes podem ser indicados e calculados da seguinte forma:

a) $D_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1 + 1) - 2 \cdot (0 - 1) = 2$

b) $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 - 1) - 7 \cdot (2 - 1) = -8$

c) $D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 - 0) - 2 \cdot (-2 + 0) + 7 \cdot (2 - 1) = 12$

Assim, pela Regra de Cramer, a solução do sistema é dada por:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D} \Rightarrow x = \frac{2}{-2} \Rightarrow x = -1 \\ y &= \frac{D_y}{D} \Rightarrow y = \frac{-8}{-2} \Rightarrow y = 4 \\ z &= \frac{D_z}{D} \Rightarrow z = \frac{12}{-2} \Rightarrow z = -6 \end{aligned}\right\} \ S = \{(-1, 4, -6)\}$$

## 5.4 Atividades propostas

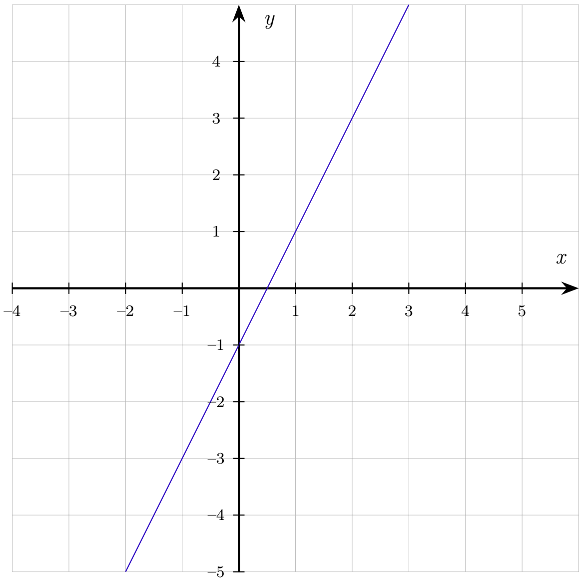
*Respostas na pág. 201.*

1. Verifique em cada item se a terna de números apresentada é solução da equação linear $2x + y + 3z = 11$.

   a) $(2, 2, 3)$ b) $(1, 3, 2)$ c) $(-2, 0, -5)$

2. Para qual valor de $\alpha$, a terna $(4\alpha, \alpha, -3\alpha)$ é solução da equação linear $5x+15y+z = -4$?

3. Observe o gráfico abaixo que representa a equação $2x - y = 1$. Após, indique quatro soluções para a equação.




4. Uma pessoa possui R\$100,00 em sua carteira, apenas em cédulas de R\$5, R\$10 e R\$20. Indicando, respectivamente, por $x$, $y$ e $z$ a quantidade dessas cédulas, faça o que se pede: (PAIVA, 2015, p. 85)

   a) Escreva uma equação linear que relacione as incógnitas $x$, $y$ e $z$ com a quantia total de dinheiro na carteira.
   b) Indique três soluções possíveis para esta equação linear.
   c) Determine o maior número possível de cédulas de R\$5 que a pessoa pode ter na carteira.

5. Represente, num mesmo plano cartesiano, o gráfico das equações lineares:

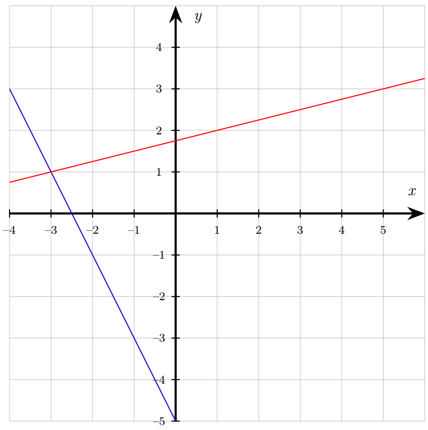
$$(i)\, x - 2y = 4 \quad (ii)\, 6y - 3x = 9 \quad (iii) - 2x + 4y = -8 \quad \text{e} \quad (iv)\, 5x - 3y = -1.$$

   A partir do esboço gráfico, responda:

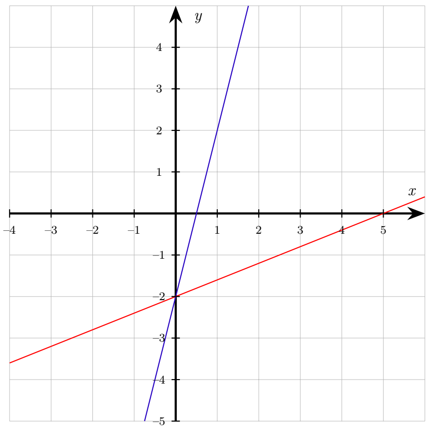
   a) Quais equações formam um sistema possível e determinado?
   b) Quais as soluções para os sistemas identificados no item anterior?
   c) Quais equações formam um sistema impossível?
   d) Quais equações formam um sistema possível e indeterminado?
   e) Quais as soluções para os sistemas identificados no item anterior?

6. Em cada item, escreva o sistema linear correspondente a cada representação gráfica, classificando-o e indicando sua solução, quando esta existir:

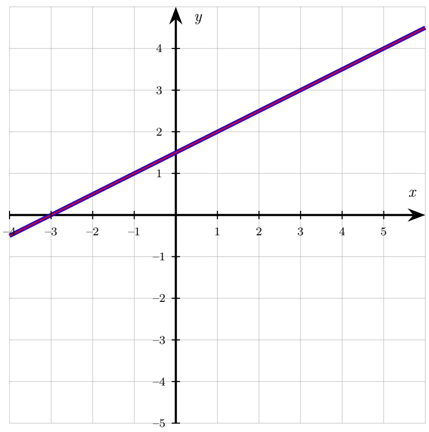
a)



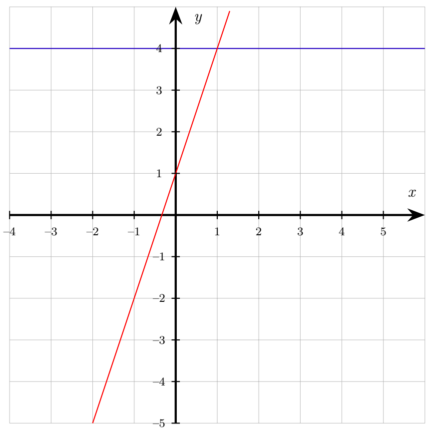
b)



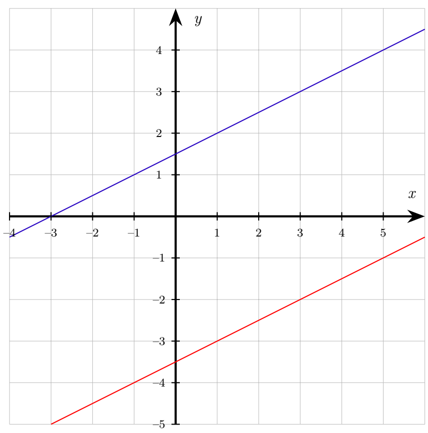
c)



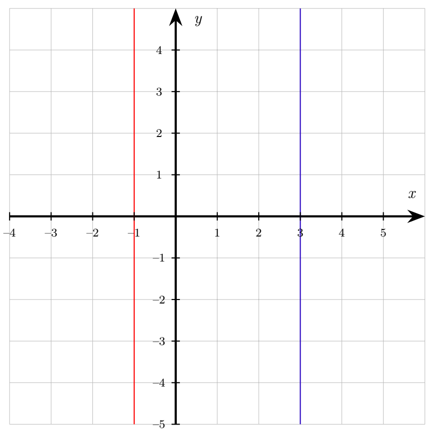
d)



e)



f)



7. Escreva os sistemas lineares na forma matricial:

a) $\begin{cases} -x + 8y = 3 \\ 5x - 4y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x-2y=3}{5} \\ 5y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3a + 2b - c = 0 \\ -a + \frac{b}{2} - c = 0 \\ 2a - c = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2\alpha - 3\beta = 7 \\ 3\alpha - 5\beta = -8 \\ -\alpha + 7\beta = 0 \end{cases}$

8. Indique o conjunto solução dos seguintes sistemas lineares, classifique-os e represente-os graficamente:

a) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -3x - 2y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 2y = 10 \\ -10x + 4y = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} -x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 12x + 9y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2a - b = -1 \\ a + b = 4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \frac{\alpha}{2} + \beta = 1 \\ -3\alpha - 6\beta = -6 \end{cases}$

9. Classifique os seguintes sistemas lineares, indicando, quando possível e determinado, o seu conjunto solução ou, quando possível e indeterminado, uma terna de números que é solução do sistema:

a) $\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y - z = 11 \\ x + 5y + 2z = -14 \\ 5x - y - z = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3a + 4b + c = -1 \\ a - b - 4c = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 4y + z = 7 \\ 2x + 6y - z = -9 \\ 3x + 2y = -2 \end{cases}$

10. Numa loja, todas as calças têm o mesmo preço, e as camisas também, sendo o preço de uma calça diferente do de uma camisa. Ricardo comprou 1 calça e 2 camisas e pagou R\$240,00. Roberto comprou 2 calças e 3 camisas e pagou R\$405,00. Qual o preço, em reais, de uma calça e uma camisa? (Unisinos)

11. Em certo concurso público, a prova escrita foi composta por 40 questões de múltipla escolha. Na correção, cada resposta correta valia 3 pontos e descontava-se 2 pontos se estivesse errada. Uma questão não assinalada não ganhava e nem perdia pontos. Sabendo que um candidato obteve 90 pontos na nota final da prova, respondendo todas as questões, determine a quantidade de respostas corretas e erradas de sua prova. (CHAVANTE; PRESTES, 2016a, p. 112)

12. Daniele fez um saque no valor de R\$150,00 em certo caixa eletrônico que dispunha apenas de cédulas de R\$20 e de R\$10, obtendo 11 cédulas. Quantas eram as cédulas de R\$20?

13. Juliana tem oito cartões de papel retangulares iguais. Se ela enfileirar todos os cartões juntando lados de mesma medida, ela pode obter um retângulo de perímetro 236 *cm* ou um retângulo de perímetro 376 *cm*. Qual é a área de cada cartão? (OBMEP)

14. Alguns alunos faziam uma prova em uma sala. Em dado momento, 5 meninas terminaram e saíram da sala, ficando o número de meninos igual ao dobro do número de meninas. Depois de alguns minutos, 7 meninos terminaram a prova e saíram, ficando na sala o mesmo número de meninas e de meninos. Determine o número total de alunos que fazia a prova nessa sala.

15. A soma das idades de Pedro e Maira é 22, e a soma das idades de Pedro e Iara é 23. Qual é a idade de Iara, se a soma da sua idade com a de Maira é 25? (LEONARDO, 2013a, p. 232)

16. Uma indústria produz três produtos, $X$, $Y$ e $Z$, utilizando dois tipos de insumos, $A$ e $B$. Para a manufatura de cada quilograma de $X$ são utilizados 2 gramas do insumo $A$ e 1 grama do insumo $B$; para cada quilograma do insumo $Y$, 1 grama do insumo $A$ e 3 gramas do insumo $B$ e, para cada quilograma de $Z$, 3 gramas de $A$ e 5 gramas de $B$. O preço de venda do quilograma de cada um dos produtos $X$, $Y$ e $Z$ é $R\$\,3$, $R\$\,2$ e $R\$\,4$, respectivamente. Com a venda de toda a produção de $X$, $Y$ e $Z$ manufaturada com $1,9$ Kg de $A$ e $2,4$ Kg de $B$, essa indústria arrecadou $R\$\,2900$. Determine quantos quilograma de cada um dos produtos $X$, $Y$ e $Z$ foram vendidos.

17. Uma companhia de seguros levantou dados sobre os carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano. O número de carros roubados da marca $X$ é o dobro do número de carros roubados da marca $Y$, e as marcas $X$ e $Y$ juntas respondem por cerca de 60% dos carros roubados. Qual o número esperado de carros roubados da marca $Y$? (ENEM, 2000)

18. Em um depósito, foram armazenadas sacas de adubo e sacas de sementes, totalizando 30 toneladas. Sabe-se que cada saca de adubo tem massa igual a 50 $Kg$, cada saca de sementes, 60 $Kg$, e que o triplo da massa de adubo armazenado é igual ao dobro da massa de sementes. Com base nessas informações, calcule o total de sacas de adubo e de sementes que foram armazenadas no depósito. (SOUZA, 2013a, p. 169)

19. Um operário se desloca de casa ao seu trabalho de motocicleta, mas nos dias chuvosos ele utiliza o transporte público. Quando utiliza motocicleta ele gasta, em média, R$1,50 a cada dia; e, com o transporte público, gasta R$6,00 ao dia. Em determinado mês, em que trabalhou 20 dias, esse operário gastou R$43,50 para se deslocar ao trabalho. Por quantos dias ele utilizou a motocicleta para ir ao trabalho? (BALESTRI, 2016a, p. 81)

20. Uma fábrica de automóveis utiliza três tipos de aço, $A_1$, $A_2$ e $A_3$, na construção de três tipos de carros $C_1$, $C_2$ e $C_3$. A quantidade dos três tipos de aço, em toneladas, usados na confecção dos três tipos de carros, está no quadro a seguir: (UFPE)

| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | 3 | 4 |
| $A_2$ | 1 | 1 | 2 |
| $A_3$ | 3 | 2 | 1 |

Se foram utilizadas 26 toneladas de aço do tipo $A_1$, 11 toneladas do tipo $A_2$ e 19 toneladas do tipo $A_3$, qual o total de carros construídos (dos tipos $C_1$, $C_2$ e $C_3$)?

21. Uma empresa deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha-de-caju e castanha-do-pará. Sabe-se que o quilograma do amendoim custa R$5, o quilograma da castanha-de-caju, R$20 e o quilograma de castanha-do-pará, R$16. Cada lata deve conter meio quilo da mistura e o custo total dos ingredientes de cada lata deve ser de R$5,75. (Unicamp)
Além disso, a quantidade de castanha-de-caju em cada lata deve ser igual a um terço da soma das quantidades das outras duas.
Determine as quantidades, em grama, de cada ingrediente por lata.

22. Para a ornamentação de um jardim, foi solicitado a um arquiteto o projeto de um espelho d'água triangular. O projeto deve contemplar duas condições: (LEONARDO, 2013a, p. 232)

    - a diferença entre as medidas de dois dos ângulos internos do triângulo deve ser 30°;
    - a soma das medidas de dois dos ângulos internos deve ser 120°.

    Determine a medida dos ângulos formados pelas laterais do espelho d'água.

CAPÍTULO 6

# O ponto e a reta

O filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650) é considerado o principal precursor da Geometria Analítica. A base de seus estudos pretendia explicar as verdades da ciência a partir de um modo racionalista do pensamento.

A publicação do livro *Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências*, datado de 1637, tem em um dos apêndices intitulado *A Geometria*, a apresentação do método de Descartes para o que viria a ser considerado uma nova abordagem da Geometria. A associação da Geometria com a Álgebra foi a grande contribuição daquele estudo, a partir do qual foi possível descrever situações, objetos e lugares geométricos utilizando-se de equações algébricas.

## 6.1 O plano cartesiano ortogonal

Para que as representações da Geometria Analítica possam acontecer sob as duas óticas – geométrica e algébrica –, é preciso posicionar as figuras geométricas num espaço que permita identificar e localizar cada um dos seus pontos. Sendo assim, utilizamos basicamente de três formas mais comuns de representação. A reta real ($\mathbb{R}$), o plano cartesiano ortogonal ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$) e o sistema tridimensional ortogonal ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$), conforme Figura 12.

Neste ponto de nosso estudo, utilizaremos o Plano Cartesiano Ortogonal para as representações de Geometria Analítica que vamos abordar. Este consta de um plano dividido por duas retas reais orientadas, perpendiculares entre si, que formam quatro regiões (os **quadrantes**). A interseção dessas duas retas orientadas (chamadas agora de **eixos**) é a origem do sistema (ponto $O$). O eixo horizontal é chamado de eixo das **abscissas** (comumente representado pelos valores de variáveis $x$) e o eixo vertical, chamado de eixo das **ordenadas** (variáveis $y$).

No plano cartesiano, a forma de localizar um ponto se dá por meio de um **par ordenado** que carrega uma correspondência biunívoca entre um valor do eixo das abscissas e outro do eixo das ordenadas, e sua representação é $(a, b)$. O par ordenado forma as **coordenadas do ponto** e, como os eixos são retas reais, seus valores podem ser quaisquer reais ($a, b \in \mathbb{R}$).

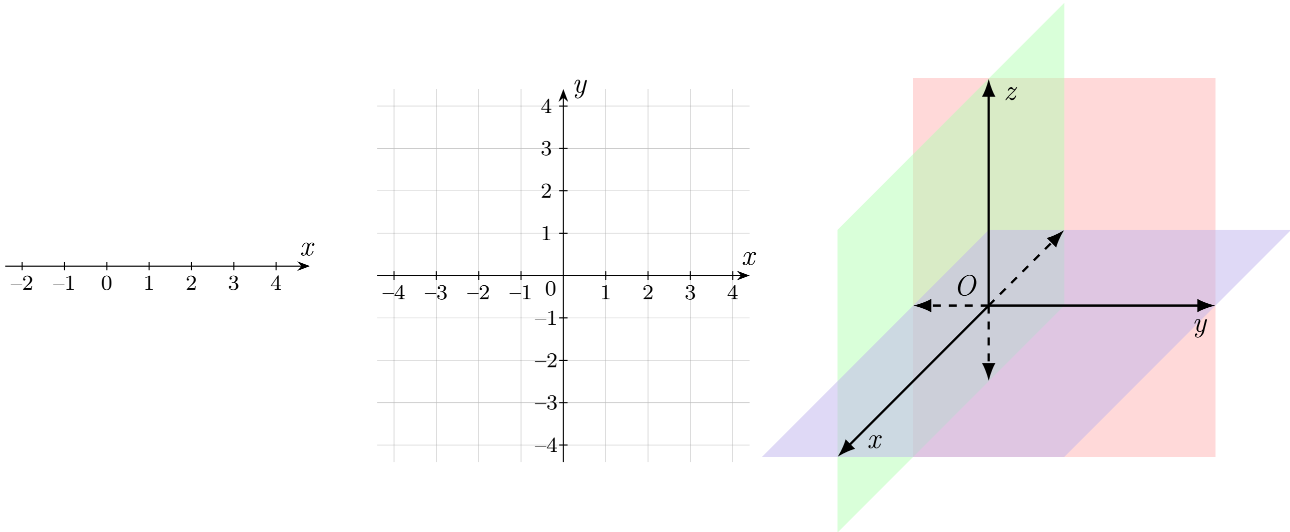



Figura 12 – A representação geométrica de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

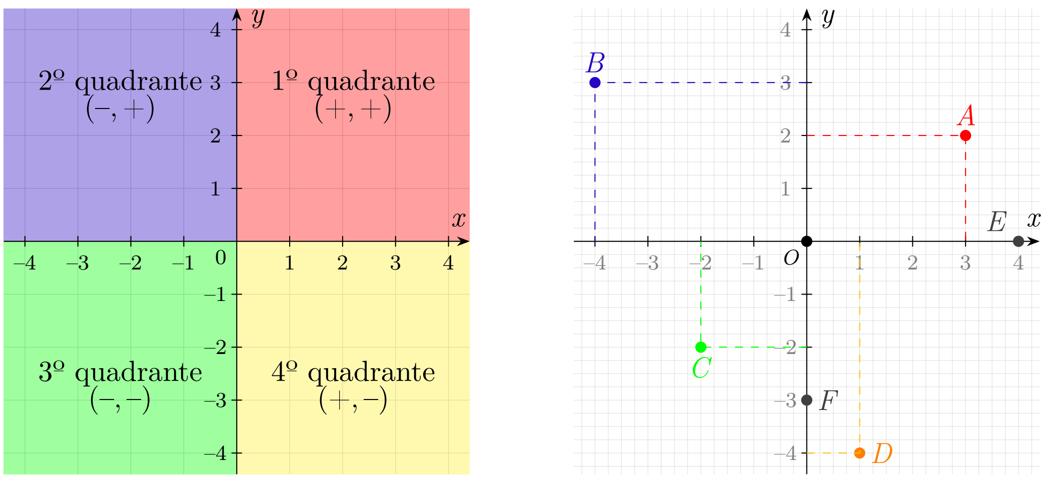



Figura 13 – Representação das *regiões dos quadrantes* e de *pontos* no Plano Cartesiano

Os pontos representados na Figura 13 têm as seguintes notações algébricas:

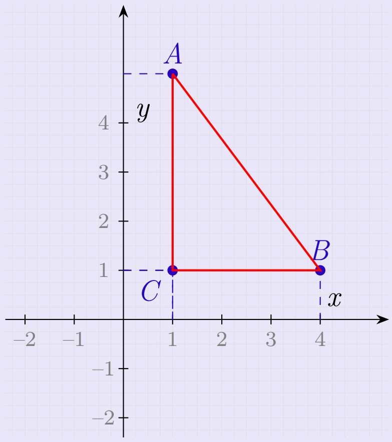
$$
\begin{aligned}
A &= (3,2) \\
B &= (-4,3) \\
C &= (-2,-2) \\
D &= (1,-4) \\
E &= (4,0) \\
F &= (0,-3) \\
O &= (0,0)
\end{aligned}
$$

Os quatro primeiros pontos pertencem, respectivamente, a cada um dos quatro quadrantes e os últimos, estão posicionados sobre os eixos.

**Exemplo 6.1 : *Representação de pontos no plano cartesiano***

Represente no plano cartesiano os pontos $A = (1, 5)$, $B = (4, 1)$ e $C = (1, 1)$ e trace os segmentos com extremidades nesses pontos.

**Solução:** Observemos que os três pontos pertencem ao primeiro quadrante, já que todas as coordenadas são positivas. Dado então o plano cartesiano abaixo, a representação solicitada é:




**Exemplo 6.2 : *Representação de pontos no plano cartesiano***

Observe as coordenadas dos pontos e determine a que quadrante cada um deles pertence:

a) $(3, -2)$ b) $(-1, 1)$ c) $(-3, -5)$ d) $(0, -4)$ e) $(8, 0)$

**Solução:** Para responder, basta que observemos o sinal dos valores de abscissa e ordenada que formam as coordenadas de cada ponto. Assim:

a) $(3, -2)$: pertende ao $4^\circ$ quadrande, pois tem abscissa positiva e ordenada negativa;

b) $(-1, 1)$: pertende ao $2^\circ$ quadrande, pois tem abscissa negativa e ordenada positiva;

c) $(-3, -5)$: pertende ao $3^\circ$ quadrande, pois tem abscissa negativa e ordenada negativa;

d) $(0, -4)$: está sobre o eixo das abscissas, pois tem abscissa zero;

e) $(8, 0)$: está sobre o eixeo das ordenadas, pois tem ordenada zero.

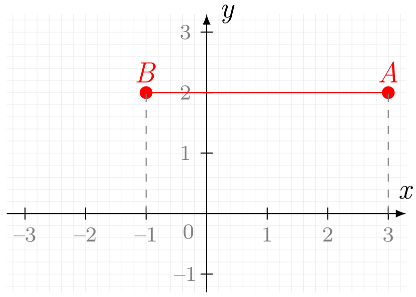
## 6.2 O ponto

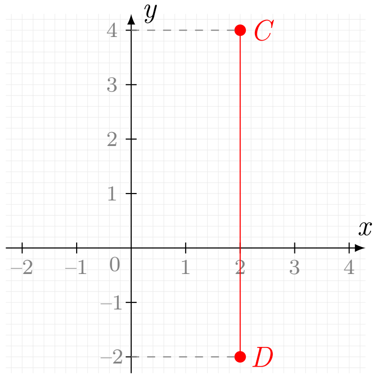
### 6.2.1 Distância entre dois pontos

Indicamos a distância entre dois pontos quaisquer $A$ e $B$ como $d(A, B)$ ou $d_{(A,B)}$ ou $\overline{AB}$ ou simplesmente $AB$.

Medir a distância entre dois pontos é calcular a medida do segmento de reta que os liga. Entretanto, temos condições de calcular essa medida utilizando as coordenadas dos pontos, que são as extremidades desse suposto segmento. Vejamos:

Se os pontos estão horizontalmente alinhados, ou seja, dispostos com o mesmo valor de ordenada, temos que o segmento formado pelos dois pontos é paralelo ao eixo $x$ e, portanto, tem medida igual à distância de suas abscissas. Basta então que calculemos $AB = |x_B - x_A|$ (módulo da diferença entre as abscissas).

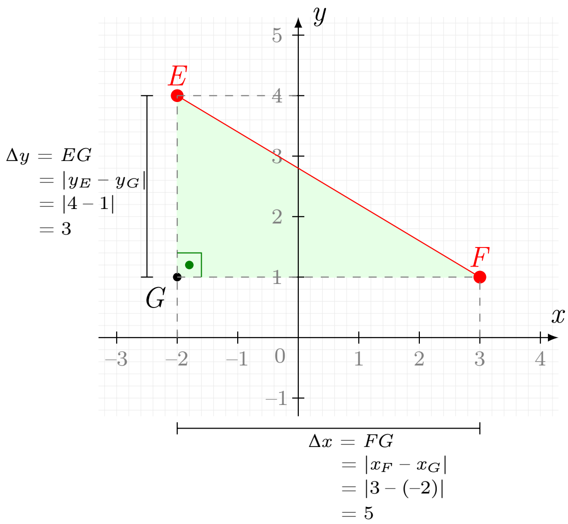


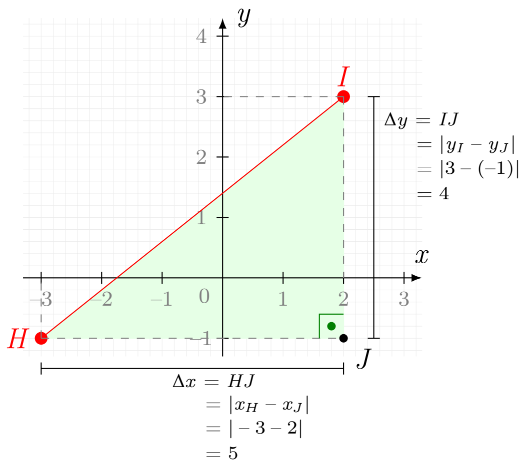




De forma análoga, se os pontos estão verticalmente alinhados, dispostos com o mesmo valor de abscissa, o segmento formado pelos dois pontos é paralelo ao eixo $y$ e tem medida que pode ser calculada por $CD = |y_D - y_C|$ (módulo da diferença entre as ordenadas).

Nos casos onde esses pontos não estão alinhados, o cálculo da distância é facilitado utilizando-se do **Teorema de Pitágoras**. Para a interpretação geométrica dessas situações, é preciso que utilizemos de um terceiro ponto, sob o qual incidirá o ângulo reto do triângulo retângulo definido pelos três.

Vejamos dois casos:

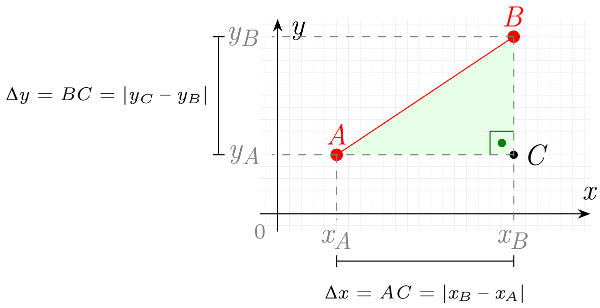



$$
\begin{aligned}
(EF)^2 &= (EG)^2 + (FG)^2 \\
(EF)^2 &= 3^2 + 5^2 \\
EF &= \sqrt{34} \\
EF &\simeq 5,83 \textit{ unidades de distância}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(HI)^2 &= (IJ)^2 + (JH)^2 \\
(HI)^2 &= 4^2 + 5^2 \\
HI &= \sqrt{41} \\
HI &\simeq 6,4 \textit{ unidades de distância}
\end{aligned}
$$

Podemos perceber que o terceiro ponto criado para nos auxiliar no cálculo da distância ($G$ no primeiro caso e $J$, no segundo) tem a mesma abscissa de um dos pontos e a mesma ordenada do outro. Isso nos será útil para determinar uma expressão que calcula a distância entre dois pontos quaisquer $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ no plano, independentemente de suas posições e alinhamentos:




$$
\begin{aligned}
(AB)^2 &= (AC)^2 + (BC)^2 \\
(AB)^2 &= (x_C - x_A)^2 + (y_B - y_C)^2 \\
(AB)^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\
AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}
\end{aligned}
$$

Dessa forma, a distância entre dois pontos quaisquer do plano é dada por:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \tag{6.1}$$

**Exemplo 6.3 :** ***Distância entre pontos***

Calcule a distância entre os pontos dados:

a) $A = (3, 7)$ e $B = (1, 4)$ b) $C = (3, -1)$ e $D = (3, 5)$

**Solução:** A distância de dois pontos é dada por:

a)
$$
\begin{aligned}
AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\
AB &= \sqrt{(1 - 3)^2 + (4 - 7)^2} \\
AB &= \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} \\
AB &= \sqrt{4 + 9} \\
AB &= \sqrt{13}
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
CD &= \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} \\
CD &= \sqrt{(3 - 3)^2 + (5 - (-1))^2} \\
CD &= \sqrt{(0)^2 + (6)^2} \\
CD &= \sqrt{36} \\
CD &= 6
\end{aligned}
$$

**Exemplo 6.4 :** ***Distância entre pontos***

A distância do ponto $A = (a, 1)$ ao ponto $B = (0, 2)$ é igual a 3. Calcule o valor da abscissa $a$.

**Solução:** Se $d(A, B) = 3$, então:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(0 - a)^2 + (2 - 1)^2} &= 3 \\
\sqrt{a^2 + 1} &= 3 \\
a^2 + 1 &= 9 \\
a^2 &= 8 \\
a &= \pm\sqrt{8} \\
a &= \pm 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

**Exemplo 6.5 : *Distância entre pontos***

Um ponto $P$ pertence ao eixo das abscissas e é equidistante dos pontos $A = (-1, 2)$ e $B = (1, 4)$. Quais são as coordenadas do ponto $P$?

**Solução:** Se $P$ pertence ao eixo das abscissas, então suas coordenadas são $(a, 0)$. Como $P = (a, 0)$ é equidistante de $A$ e $B$, devemos ter $d(P, A) = d(P, B)$. Assim:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(a-(-1))^2+(0-2)^2} &= \sqrt{(a-1)^2+(0-4)^2} \\
a^2+2a+1+4 &= a^2-2a+1+16 \\
a^2-a^2+2a+2a &= 1+16-1-4 \\
4a &= 12 \\
a &= 3
\end{aligned}$$

Dessa forma, as coordenadas do ponto são $P = (3, 0)$.

### 6.2.2 Coordenadas do ponto médio de um segmento

O particionamento de um segmento de reta é, por vezes, bastante útil no estudo da Geometria Analítica. Uma das principais formas de partir um segmento – e dela outras poderem ser feitas – é a definição de seu **ponto médio**, isto é, o ponto que é equidistante das extremidades de um segmento definido por dois pontos.

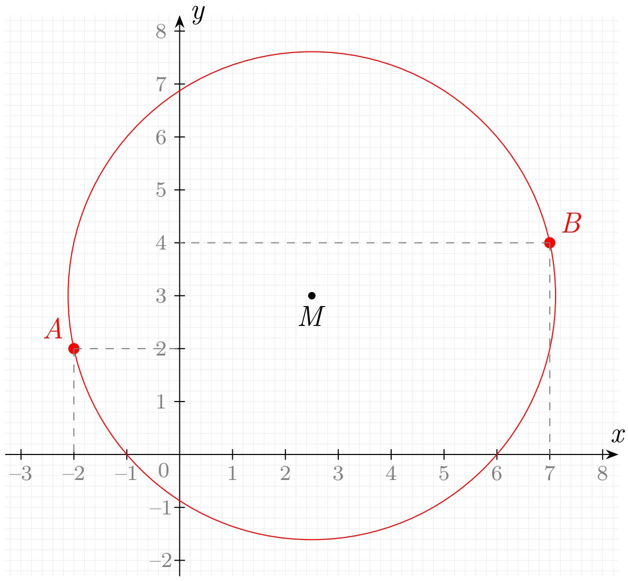


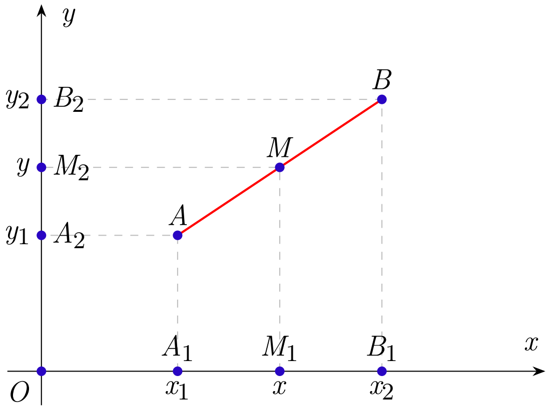

Figura 14 – Circunferência com centro no ponto médio de um segmento

Na circunferência anterior o segmento $\overline{AB}$ é um diâmetro. Ao procurarmos o ponto médio do segmento é como se estivéssemos procurando o centro dessa circunferência. Isso porque o centro da circunferência é o ponto que divide o segmento $\overline{AB}$ em duas partes de igual medida, isto é, seu ponto médio.

Vamos introduzir esse assunto pelo caso abaixo. Após, voltaremos a esse caso anterior da circunferência.

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, tal que $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ são pontos distintos, vamos determinar as coordenadas de $M$, que é ponto médio de $\overline{AB}$. Consideremos que:

- um segmento de reta com extremidades $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$;
- o ponto $M = (x, y)$, ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$.




Aplicando o Teorema de Tales[4], temos que:

$$\begin{aligned}\frac{AM}{MB} = \frac{A_1M_1}{M_1B_1} &\Rightarrow x - x_1 = x_2 - x \\ &\Rightarrow x + x = x_2 + x_1 \\ &\Rightarrow 2x = x_2 + x_1 \\ &\Rightarrow x = \frac{x_2 + x_1}{2}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{AM}{MB} = \frac{A_2M_2}{M_2B_2} &\Rightarrow y - y_1 = y_2 - y \\ &\Rightarrow y + y = y_2 + y_1 \\ &\Rightarrow 2y = y_2 + y_1 \\ &\Rightarrow y = \frac{y_2 + y_1}{2}\end{aligned}$$

Veja na pág. ??, uma outra maneira de demonstrar as coordenadas do ponto médio de um segmento (??).

Portanto, as coordenadas do ponto médio $M$ do segmento $PQ$ são dadas por:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \tag{6.2}$$

Se retornarmos ao exemplo da circunferência acima, verificaremos que o ponto médio de $PQ$ é:

i) $x_M = \dfrac{x_P + x_Q}{2} = \dfrac{-2 + 7}{2} = \dfrac{5}{2}$

ii) $y_M = \dfrac{y_P + y_Q}{2} = \dfrac{2 + 4}{2} = 3$

Portanto, o ponto médio, também centro da circunferência, é o ponto $M = \left(\frac{5}{2}, 3\right)$.

[4] Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina sobre esses lados segmentos proporcionais.

**Exemplo 6.6 : *Coordenadas de um ponto médio***

Determine as coordenadas do ponto B sabendo que $M = (-1, -1)$ é o ponto médio de $\overline{AB}$ com $A = (-1, 1)$.

**Solução:** Como $M = (-1, -1)$ é o ponto médio de $\overline{AB}$, então:

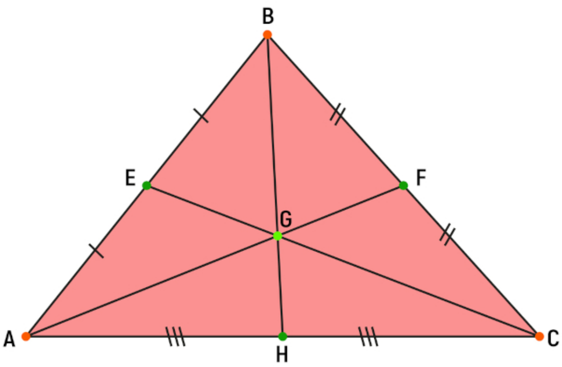
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{-1 + x_B}{2} \Rightarrow -1 + x_B = -2 \Rightarrow x_B = -1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{1 + y_B}{2} \Rightarrow 1 + y_B = -2 \Rightarrow y_B = -3$$

Logo, $B = (-1, -3)$.

### 6.2.3 Baricentro de um triângulo

Um dos pontos notáveis de um triângulo é seu baricentro, que é a interseção entre as três medianas. Conforme figura abaixo:




- $E$, $F$ e $H$ são pontos médios dos lados $AB$, $BC$ e $CA$, respectivamente.
- $BH$ é mediana relativa ao lado $CA$
- $AF$ é mediana relativa ao lado $BC$
- $CE$ é mediana relativa ao lado $AB$
- $G$ é o baricentro

O baricentro divide cada mediana em dois segmentos na razão $\frac{1}{2}$, ou seja, o segmento maior tem o dobro do menor.

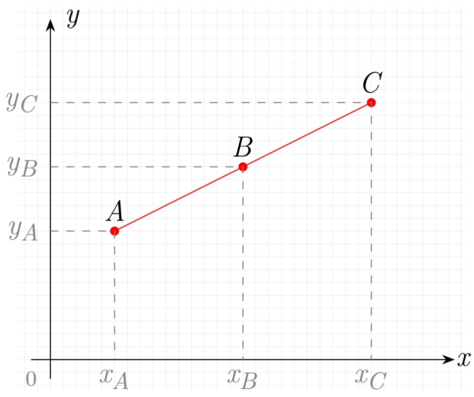
Encontrar as coordenadas do baricentro é semelhante à maneira de calcularmos o ponto médio de um segmento. A expressão algébrica para o baricentro é:

$$G = \left( \frac{x_A + x_B + x_c}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right) \tag{6.3}$$

A demonstração algébrica e a representação geométrica dessa expressão serão omitidas para fins práticos, mas tais decorrem do envolvimento do ponto médio dos lados e da razão determinada pelo baricentro nas medianas.

### 6.2.4 Condição de alinhamento de três pontos

Um fato importante no estudo da Geometria Analítica é conhecer a maneira como estão dispostos três ou mais pontos. A partir do que já foi estudado em Trigonometria (Teorema de Tales) e Matrizes e Determinantes é possível fazer uma associação entre esses conteúdos para se obter uma forma simbólica – mas eficaz – de verificar se três pontos estão alinhados. Vejamos:




Considerando que os pontos $A$, $B$ e $C$ são colineares, temos, pelo Teorema de Tales, que:

- $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{x_B - x_A}{x_C - x_A}$
- $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{y_B - y_A}{y_C - y_A}$

O que resulta, igualando as duas expressões, em:

$$\begin{aligned}
\frac{x_B - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A} &\Rightarrow (x_B - x_A)(y_C - y_A) = (x_C - x_A)(y_B - y_A) \\
&\Rightarrow x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C + x_A y_A = x_C y_B - x_c Y_A - x_A y_B + x_A y_A \\
&\Rightarrow x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C + \cancel{x_A y_A} - x_C y_B + x_c y_A + x_A y_B - \cancel{x_A y_A} = 0 \\
&\Rightarrow x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C - x_C y_B + x_c y_A + x_A y_B = 0 \qquad (6.4)
\end{aligned}$$

Notemos que o primeiro termo da igualdade (6.4) obtida logo acima corresponde ao determinante $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$. Dessa forma, podemos formalizar nosso conceito assim:

**Definição 6.1 : *Condição de alinhamento de três pontos***

Se três pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ são colineares, então:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.5)$$

Vejamos um exemplo a seguir:

**Exemplo 6.7 : *Colinearidade de pontos***

Qual o ponto pertencente ao eixo das ordenadas que é colinear com os pontos $E = (5, 1)$ e $F = (-6, -4)$?

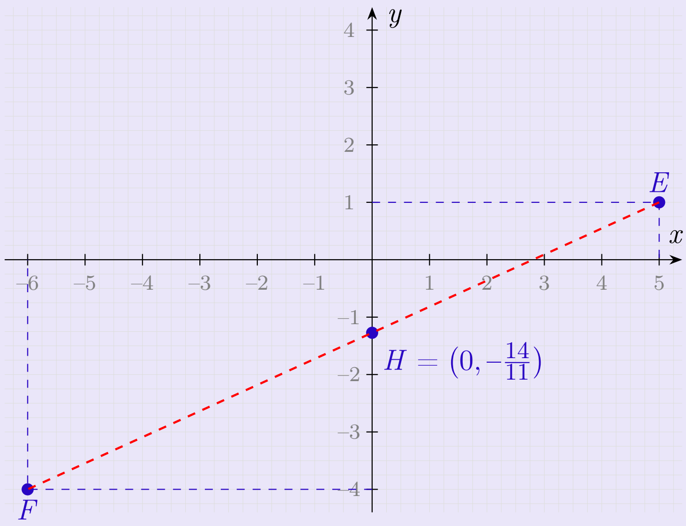
**Solução:** Temos que, para serem colineares, o determinante da matriz $3 \times 3$ formada pelos três pontos (com a coluna neutrra adicionada) deve ser igual a 0. Ainda, o ponto que estamos procurando, por estar sobre o eixo das ordenadas, tem abscissa igual a 0, portanto pode ser descrito como $H = (0, y)$. Dessa forma teremos:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & -4 & 1 \\ 0 & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ -6 & -4 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & y & 1 & 0 & y \end{array}\right| = 0 \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned} -20 + 0 - 6y - 0 - 5y + 6 &= 0 \\ -11y &= 14 \\ y &= -\frac{14}{11} \end{aligned}$$

Assim, o ponto $H = (0, -\frac{14}{11})$ é o ponto sobre o eixe das ordenadas que está alinhado com os pontos $E = (5, 1)$ e $F = (-6, -4)$.

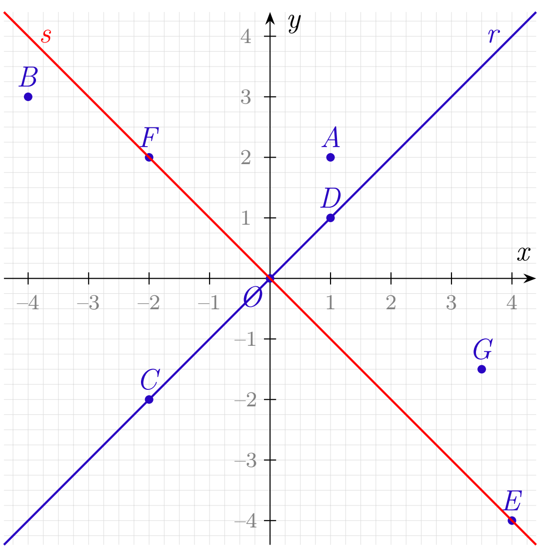
Se fizermos o esboço gráfico, veremos o alinhamento:




### 6.2.5 Atividades propostas

*Respostas na pág. 202.*

1. Considere o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ abaixo. Sabe-se que $r$ e $s$ são, respectivamente, a bissetriz do 1º e do 3º quadrantes e do 2º e do 4º quadrantes.




Escreva as coordenadas dos seguintes pontos:

a) $A$
b) $B$
c) $C$
d) $D$
e) $E$
f) $F$
g) $G$
h) $O$

2. Considere a atividade anterior e calcule as seguintes distâncias:

   a) $d(C, F)$
   b) $d(A, G)$
   c) $d(B, A)$
   d) $d(D, O)$

3. Sabe-se que o ponto $Q = (1, y)$ pertence ao quarto quadrante. Sua distância ao ponto $P = (0, 4)$ é $5\sqrt{2}$. Indique o valor da ordenada do ponto $Q$.

4. Qual o ponto pertencente ao eixo das abscissas que está a 5 unidades de distância do ponto $A = (2, 3)$?

5. Dois pontos são dados no plano: $A = (15, 20)$ e $B = (3, 4)$. Indique:

   a) O ponto $C$ que divide o segmento $AB$ na proporção $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{1}{3}$.
   b) O ponto $D$ que divide o segmento $AB$ na proporção $\dfrac{AD}{DB} = 3$.

6. Um triângulo tem vértices $A = (-4, 4)$, $B = (6, -2)$ e $C = (8, 8)$. Indique:

   a) as coordenadas do ponto médio de $AC$.
   b) as coordenadas do ponto médio de $AB$.
   c) as coordenadas do ponto médio de $BC$.
   d) o comprimento da mediana relativa ao lado $AC$.
   e) o comprimento da mediana relativa ao lado $AB$.
   f) o comprimento da mediana relativa ao lado $BC$.
   g) as coordenadas do baricentro do $\triangle ABC$.

7. Indique o valor de $k$ de modo que os pontos $A = (-6, k)$, $B = (2, -5)$ e $C = (4, -7)$ sejam colineares.

8. A reta $r$ contém os pontos $I = (2, -4)$ e $J = (6, 1)$. Sabe-se que os pontos $P$ e $H = (x, -\frac{3}{2})$ estão contidos em $r$ e $H$ é ponto médio de $IJ$. Quais as coordenadas de $P$ sabendo que ele é ponto médio de $IH$?

9. Indique o ponto sobre o eixo das abscissas que pertence à reta que também contém os pontos $Z = (1, -6)$ e $W = (4, -3)$.

10. Encontre o ponto $Q$ que divide o segmento de extremidades $E = (-3, 5)$ e $F = (1, 3)$ na proporção $\frac{EQ}{QF} = \frac{2}{5}$.

## 6.3 A reta

A **reta** é um dos principais elementos geométricos no estudo da Geometria Analítica. Sua fundamentação e conceito servem de base para o desenvolvimento de vários outros objetos e lugares geométricos.

Pode-se dizer que a reta é representante de um conjunto de situações do nosso cotidiano, exploradas por outras ciências como Física e Química, para denotar circunstâncias que apresentam comportamento uniforme, retilíneo, previsível etc.

**Conceito 6.1 : *A reta***

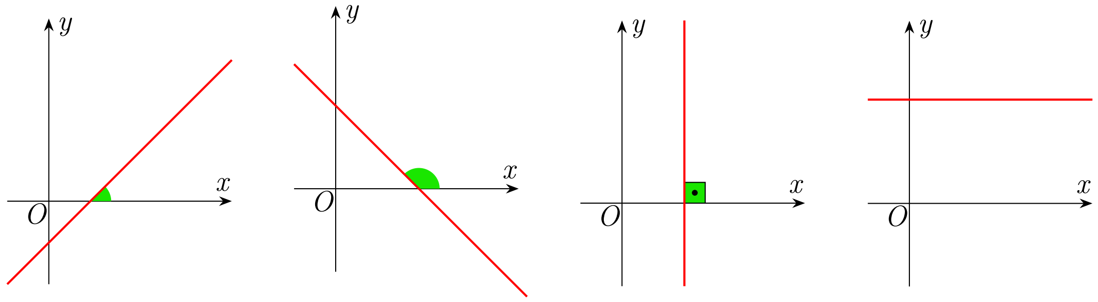
Chamamos de **reta** o conjunto de infinitos pontos alinhados e justapostos.

### 6.3.1 Inclinação e coeficiente angular

Posicionada no Plano Cartesiano Ortogonal, a reta vai sempre interceptar os eixos coordenados, a menos que esteja horizontalmente ou verticalmente alinhada.

O ângulo formado com o eixo das abscissas é de relevante significado e será denominado como **ângulo de inclinação** da reta.

Este ângulo (chamado aqui de $\alpha$) é expresso, de maneira geral, no intervalo $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ (ou, se em radianos for expresso, no intervalo $0 \leq \alpha < \pi$).

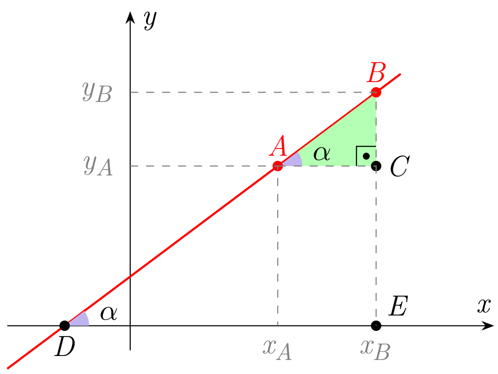



$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ $\quad$ $90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ $\quad$ $\alpha = 90^\circ$ $\quad$ $\alpha = 0^\circ$

Este ângulo de inclinação da reta pode ser associado à tangente trigonométrica ($\operatorname{tg}\alpha$) e, este fato, denomina o que chamamos de **coeficiente angular** da reta ($m$). Dessa forma, se uma reta faz com o eixo das abscissas um ângulo de $60^\circ$, por exemplo, dizemos que o seu coeficiente angular é $m = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

O coeficiente angular de uma reta pode ser obtido pelas coordenadas de dois quaisquer de seus pontos. Para isso, consideremos as retas tracejadas da figura abaixo e os pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$.

Do Teorema de Tales (que pode ser adicionado ao chamado Teorema Fundamental da Proporcionalidade[5]) decorre a semelhança entre os triângulos da figura ($\triangle DBE\ \triangle ABC$) e, também a congruência entre os ângulos $\alpha$ indicados.




Assim, temos: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BC}{AC} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

A situação apresentada acima refere-se ao caso em que o coeficiente angular é positivo, ou seja, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Nesses casos, dizemos que as retas são **crescentes**, justamente porque o coeficiente angular é positivo.

Em situações onde a $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, teremos o coeficiente angular negativo, pois a tangente desses ângulos tem valor negativo, e, portanto, teremos retas **decrescentes**.

[5] Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina sobre esses lados segmentos proporcionais.

**Definição 6.2 : *Coeficiente angular de uma reta no plano***

Seja uma reta r não paralela ao eixo das ordenadas que contém os pontos distintos $\mathrm{A} = (\mathrm{x_A}, \mathrm{y_A})$ e $\mathrm{B} = (\mathrm{x_B}, \mathrm{y_B})$, temos que o seu coeficiente angular é dado por:

$$m_r = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \tag{6.7}$$

### 6.3.2 Equação geral da reta

O conjunto de infinitos pontos colineares que habituamos chamar de reta pode ser denotado por uma expressão algébrica, chamada de **equação da reta**. Estudaremos duas diferentes formas de representá-la: a forma geral e a forma reduzida.

Antes de fazer a diferenciação entre as duas formas, porém, vamos analisar duas maneiras de se chegar à representação de retas.

#### Equação da reta, conhecidos dois pontos

Vamos recordar que três pontos $A$, $B$ e $C$ são colineares se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Utilizando desse mesmo artifício algébrico, podemos determinar, por exemplo, a equação da reta que passa pelos pontos $A = (2, 3)$ e $B = (-4, -2)$.

Para isso, precisamos considerar o terceiro ponto como um ponto genérico que, ao ser incluído na expressão do determinante, represente todos aqueles que atenderão à condição de igualdade a zero (uma vez que queremos que os pontos sejam colineares). Chamaremos esse ponto genério de $P = (x, y)$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} &= 0 \\ -4 - 4y + 3x + 2x + 12 - 2y &= 0 \\ 5x - 6y + 8 &= 0 \end{aligned}$$

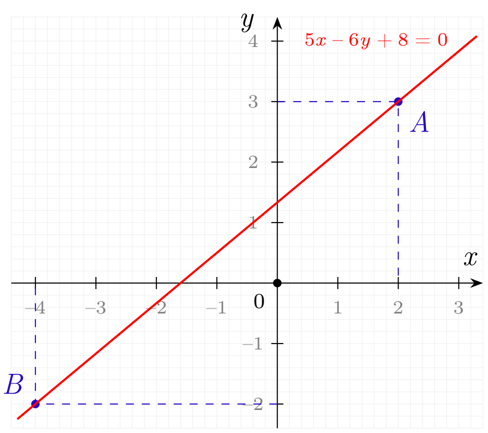



Figura 15 – Reta passando por dois pontos dados

O gráfico anterior representa a reta que passa pelos dois pontos.

Podemos generalizar essa interpretação para chegarmos a uma expressão geral da reta. Basta então que chamemos de $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ dois pontos distintos e conhecidos da reta. O ponto $P = (x, y)$, genérico, deve ser colinear aos dois e, portanto:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo essa expressão do determinante, teremos que:

$$\begin{aligned} x_A y_B + x y_A + x_B y - x y_B - x_B y_A = 0 \quad &\Rightarrow \quad \underbrace{(y_A - y_B)}_{a} x + \underbrace{(x_B - x_A)}_{b} y + \underbrace{(x_A y_B - x_B y_A)}_{c} = 0 \\ &\Rightarrow \quad ax + by + c = 0 \end{aligned} \tag{6.8}$$

A equação acima (6.8) é chamada de **equação geral** da reta, com $a$, $b$ e $c$ coeficientes reais, tal que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ (ou seja, $a$ e $b$ não podem ser simultaneamente iguais a zero).

**Exemplo 6.8 : *Equação de reta***

A partir da reta $5x - 6y + 8 = 0$ dada anteriormente, vejamos se os pontos $P(-3, -\frac{7}{6})$ e $Q(1, \frac{11}{6})$ pertencem a ela. Vejamos também em qual ponto a reta intercepta o eixo $x$.

**Solução:** Para verificar a pertinência dos pontos, basta substituí-los na expressão da reta e verificar se atendem à igualdade:

- $P \to r : 5(-3) - 6(-\frac{7}{6})y + 8 = 0 \Rightarrow -15 + 7 + 8 = 0 \Rightarrow 0 = 0$
- $Q \to r : 5(1) - 6(\frac{11}{6})y + 8 = 0 \Rightarrow 5 - 11 + 8 = 0 \Rightarrow 2 \neq 0$

Portanto, $P$ pertence à reta e $Q$ não pertence.

Ainda, para encontrarmos o ponto sobre o eixo das abscissas da interseção da reta, basta, nela, substituirmos o seguinte ponto $A(x, 0)$, uma vez que, para este tipo de ponto, o valor da ordenada é sempre zero. Assim:

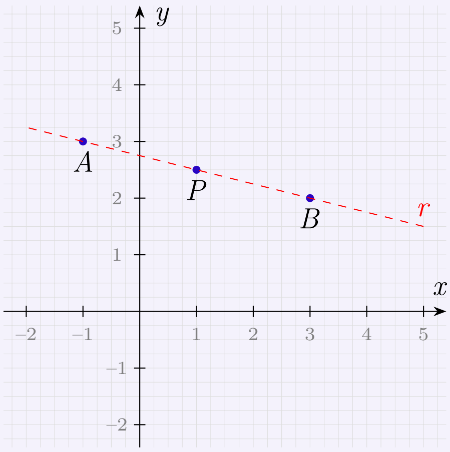
- $A \to r : 5(x) - 6(0)y + 8 = 0 \Rightarrow 5x - 0 + 8 = 0 \Rightarrow x = -\frac{8}{5}$

Dessa forma, o ponto de interseção da reta como eixo $x$ é $(-\frac{8}{5}, 0)$.

**Exemplo 6.9 : *Equação de reta***

Obtenha a equação geral da reta $r$ que passa pelos pontos $A = (-1, 3)$ e $B = (3, 2)$.

**Solução:** Consideremos um ponto $P = (x, y)$ pertencente à reta $r$. Ele está alinhado com os pontos $A$ e $B$.




Pela condição de alinhamento de três pontos, temos:

$$\begin{aligned}
\left|\begin{array}{ccc|cc} x & y & 1 & x & y \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right| &= 0 \\
3x + 3y - 2 - 9 - 2x + y &= 0 \\
x + 4y - 11 &= 0
\end{aligned}$$

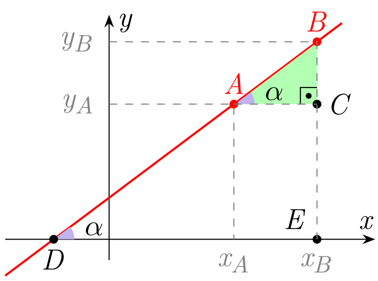
Portanto, a equação geral da reta r é $r : x + 4y - 11 = 0$.

### Equação da reta, conhecidos um ponto e o coeficiente angular

Outra maneira de se chegar à equação de uma reta é partindo da expressão de seu coeficiente angular. Para tanto, relembremos a Definição **??**, à pág. **??**, dada ao coeficiente angular para, agora, formarmos outra:

**Definição 6.3** *É única a reta que tem um valor fixo de* m *e passa por um ponto determinado.*

Desse modo, com o auxílio da interpretação geométrica ao lado, a expressão dada na Definição **??** pode agora, com a Definição 6.3, ser adaptada e generalizada para os casos onde conhecemos um ponto $A = (x_A, y_B)$ da reta e o seu o coeficiente angular.




$P(x, y)$ é um representante genérico de todos os pontos que são colineares com $A$, tendo a mesma inclinação $m$:

$$m = \frac{BC}{AC} = \frac{y - y_A}{x - x_A} \Rightarrow y - y_A = m(x - x_A) \tag{6.9}$$

Dessa forma, a equação da reta $r$ é dada por:

$$\boxed{y - y_A = m(x - x_A)}$$

Exemplo: Determine a equação da reta que passa pelo ponto $A = (-1, 4)$ e tem coeficiente angular 2.

*Solução:* Usando a equação fundamental da reta $(y - y_A) = m(x - x_A)$, temos:

$$\begin{aligned} y - 4 &= 2[x - (-1)] \\ y - 4 &= 2[x + 1] \\ y - 4 &= 2x + 2 \\ 2x - y + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Logo, a equação procurada é $2x - y + 6 = 0$.

### 6.3.3 Equação reduzida da reta

Chamamos de forma reduzida da equação da reta, a expressão algébrica que evidencia a variável $y$, de forma a dar igual destaque àquilo que já denominamos de coeficiente angular e também o que agora denominamos **coeficiente linear**.

Se tomarmos, por exemplo, a reta $s$ que tem equação $2x - y - 1 = 0$. Consideremos o ponto onde a reta intercepta o eixo das ordenadas $(0, n)$. Ao substituí-lo na forma dada pela expressão $y - y_A = m(x - x_A)$, teremos:

$$y - n = m(x - 0) \Rightarrow y = mx + n$$

A forma $y = mx + n$ é denominada **equação reduzida** da reta, sendo $m$ o coeficiente angular e $n$ o coeficiente linear, este último representando o ponto onde a reta intercepta o eixo $y$.

Coeficiente angular

$$y = mx + n$$

Coeficiente linear

Conhecendo a equação geral de uma reta, para a colocarmos na forma reduzida basta que isolemos a variável $y$. Assim, no exemplo dado no início dessa subseção, a reta $5x - 6y + 8 = 0$ pode ser escrita na sua forma reduzida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 5x - 6y + 8 = 0 &\Rightarrow -6y = -5x - 8 \\ &\Rightarrow 6y = 5x + 8 \\ &\Rightarrow y = \frac{5x + 8}{6} \end{aligned}$$

sendo o $m = \frac{5}{6}$ e $n = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

Exemplo: Determine os coeficientes linear e angular da reta da equação $6x - 5y - 30 = 0$.

*Solução:* Para determinar os coeficientes linear e angular da reta, basta isolar o $y$ na equação da reta. Assim:

$$\begin{aligned} 6x - 5y - 30 &= 0 \\ 5y &= 6x - 30 \\ y &= \frac{6x - 30}{5} \\ y &= \frac{6x}{5} - 6 \end{aligned}$$

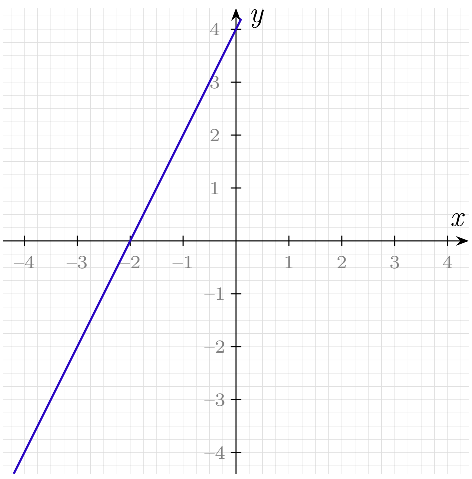
Comparando a equação obtida com a equação reduzida da reta, temos que o coeficiente linear é $-6$ e o coeficiente angular é $\frac{6}{5}$.

### 6.3.4 Atividades propostas

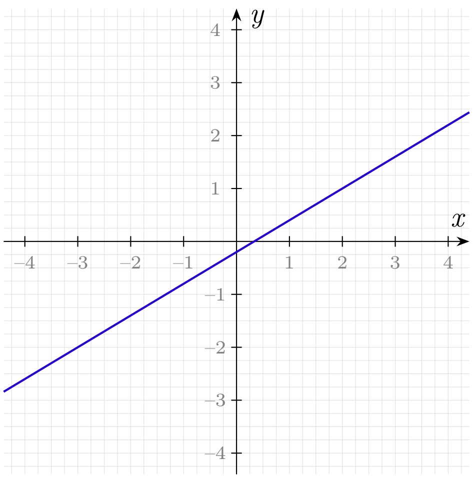
*Respostas na pág. 203.*

1. Dada a reta $t$ de equação $y = -2x + 5$, indique as coordenadas dos seguintes pontos:
   a) em que a reta intercepta o eixo das ordenadas.
   b) em que a reta intercepta o eixo das abscissas.
   c) de abscissa 6.
   d) de ordenada 3.
2. Determine a equação geral da reta que passa pelos pontos $A = (5, 4)$ e $B = (3, -2)$.
3. Indique, quando possível, a expressão da equação reduzida da reta que:
   a) contém o ponto $P = (5, 7)$ e tem $m = 2$.
   b) contém o ponto $Q = (-2, 0)$ e tem $m = -4$.
   c) passa pelo ponto $A = (12, 4)$ e é paralela ao eixo das ordenadas.
   d) passa pelos pontos $B = (0, 6)$ e $C = (-3, -9)$.
4. Dadas as representações geométricas seguintes, indique a equação geral da reta em cada alternativa:

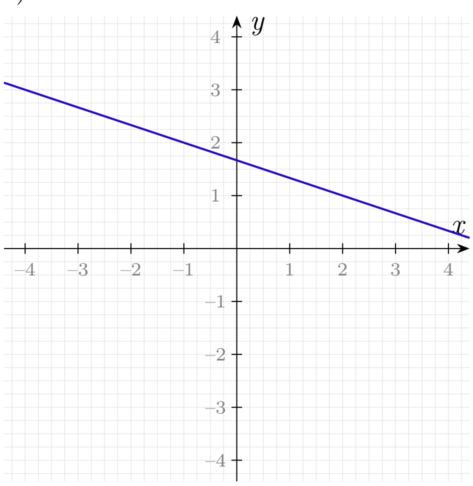
a)



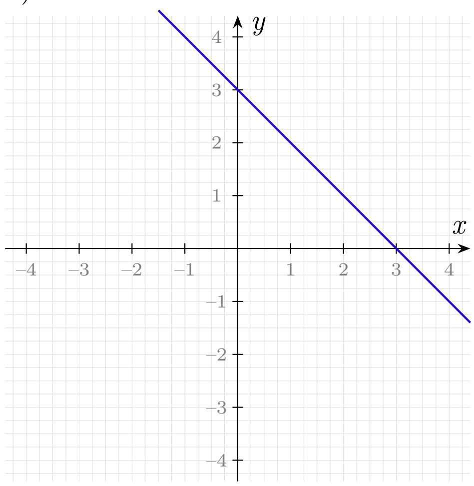

b)



c)




d)




5. Os pontos $D = (2, 5)$ e $E = (-1, -4)$ pertencem à mesma reta $s$ e os pontos $M = (0, 3)$ e $N = (6, -3)$ pertencem à reta $u$. Determine as coordenadas do ponto em que $s$ e $r$ se interceptam.

6. Determine o coeficiente angular (ou inclinação) da reta que passa pelos pontos:

   a) $A = (3, 2)$ e $B = (-3, -1)$
   b) $A = (2, -3)$ e $B = (-4, 3)$
   c) $P_1 = (3, 2)$ e $P_2 = (3, -2)$
   d) $P_1 = (-1, 4)$ e $P_2 = (3, 2)$
   e) $P = (5, 2)$ e $Q = (-2, -3)$
   f) $A = (200, 100)$ e $B = (300, 80)$

7. Determine a equação da reta que passa pelo ponto $A = (-1, 4)$ e tem coeficiente angular 2.

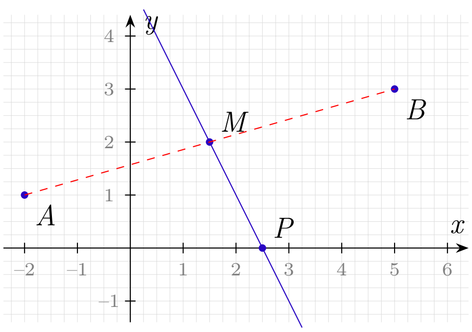
8. Determine a equação da reta que passa pelos pontos $A = (-1, -2)$ e $B = (5, 2)$.

9. Indique a equação reduzida da reta que contém o ponto $A = (3, 6)$ e tem inclinação de 45°.

10. Indique a equação geral da reta que contém o ponto $A = (3, 6)$ e tem inclinação de 135°.

11. Indique a equação da reta bissetriz dos quadrantes ímpares e a reta bissetriz dos quadrantes pares do plano cartesiano.

12. Determine as coordenadas do ponto $P$ que é a interseção da reta que passa pelo ponto médio do segmento $AB$ e tem coeficiente angular $-2$, conforme representado abaixo:




13. Encontre a equação da reta mediatriz do seguimento $AB$ do exercício anterior.

**Mediatriz** é a reta que divide um segmento ao meio de forma perpendicular a ele.

14. Qual a equação da reta que passa pelos pontos $M = (-1, 1)$, $N = (2, -5)$ e $O = (-3, 5)$?
15. Qual a equação da reta que passa pelos pontos $P = (7, 3)$, $Q = (2, 2)$ e $R = (-2, 1)$?

CAPÍTULO 7

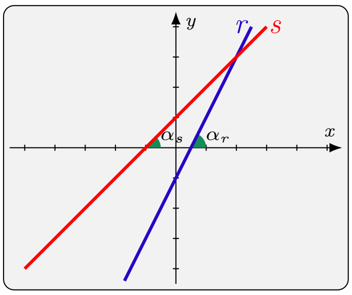
# Posições relativas e distâncias

## 7.1 Posições relativas entre duas retas no plano

Quando estudamos as inclinações das retas, foi possível perceber que, se duas delas têm coeficientes angulares diferentes (ou uma delas for horizontalmente ou verticalmente inclinada, com ângulo 0° ou 90°, respectivamente), elas serão necessariamente concorrentes em algum ponto do plano. Caso contrário, elas serão paralelas.

As representações abaixo demonstram algumas situações envolvendo posições de retas, associando-as aos coeficientes angulares.

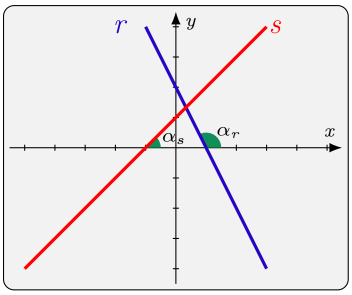
Retas concorrentes oblíquas




$tg\,\alpha_r = m_r > 0$

$tg\,\alpha_s = m_s > 0$

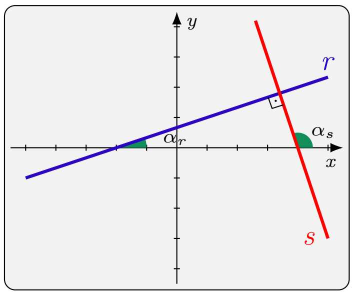
Retas concorrentes oblíquas




$tg\,\alpha_r = m_r < 0$

$tg\,\alpha_s = m_s > 0$

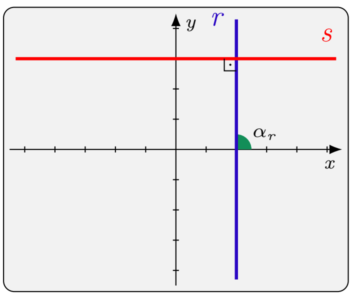
Retas concorrentes perpendiculares




$tg\,\alpha_r = m_r < 0$

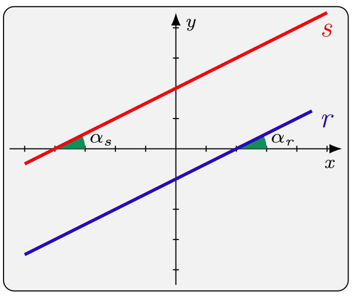
$tg\,\alpha_s = m_s > 0$

Retas concorrentes perpendiculares



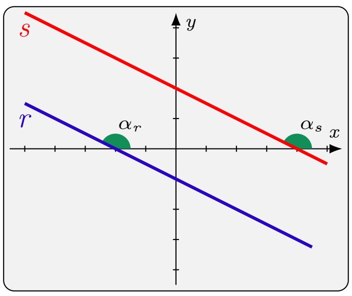

$\alpha_r = 0°$ $\quad \alpha_s = 90°$

Retas paralelas distintas



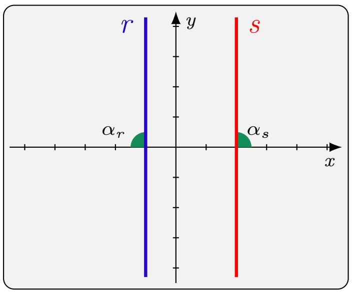

$tg\,\alpha_r = tg\,\alpha_s = m_r = m_s > 0$

Retas paralelas distintas



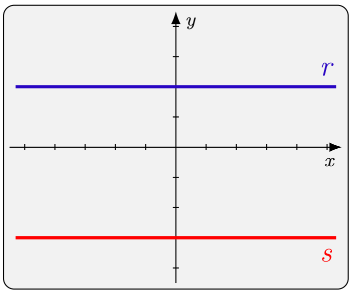

$tg\,\alpha_r = tg\,\alpha_s = m_r = m_s < 0$

Retas paralelas distintas



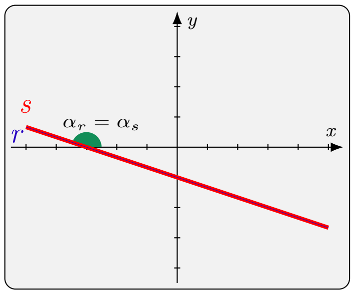

$\alpha_r = 90°$  $\alpha_s = 90°$

Retas paralelas distintas




$\alpha_r = 0°$  $\alpha_s = 0°$

Retas paralelas coincidentes

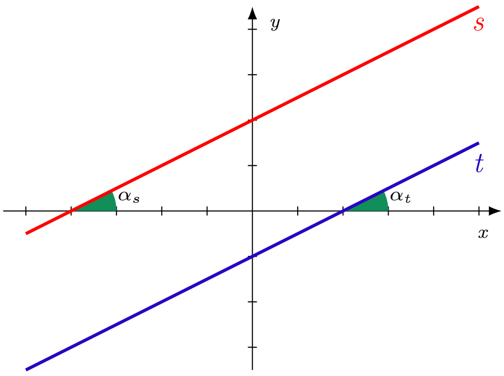



$tg\,\alpha_r = tg\,\alpha_s = m_r = m_s < 0$

### 7.1.1 Retas paralelas

O que vamos estudar a partir de agora é a maneira de se verificar, por meio de suas equações, quando duas retas são **paralelas**.

Geometricamente, a partir do exame da figura seguinte – constando de duas retas paralelas – é fácil perceber que a inclinação de ambas as retas precisam ser iguais.




Parece-nos razoável dizer, portanto, que não há par ordenado que satisfaça simultaneamente as equações de $t$ e $s$, ou seja, não há ponto comum entre as retas.

Algebricamente, podemos analisar o paralelismo das retas pelos seus coeficientes angulares. Vejamos:

$$\begin{matrix} t: -x + 2y + 2 = 0 \\ \\ s: -x + 2y - 4 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} t: y = \frac{x}{2} - 1 \\ \\ s: y = \frac{x}{2} + 2 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} m_t = \frac{1}{2} \\ \\ m_s = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

Depreende-se, da construção acima, que as retas têm coeficiente angular iguais $(m_t = m_s = \frac{1}{2})$, portanto, são paralelas.

Porém, seus coeficientes lineares são diferentes ($n_t = -1$ e $n_s = 2$), o que indica pontos distintos de interseção com o eixo das ordenadas, como se uma estivesse mais elevada do que a outra quando observamos um valor qualquer de abscissa, conforme Figura 16.

Se os coeficientes lineares de $s$ e $t$ também fossem iguais, estaríamos falando de uma mesma reta – ainda que identificada de forma diferente – e, por isso, as representações geométricas seriam idênticas.

Tomando na Figura 16 um valor qualquer de abscissa ($x_a$, por exemplo), podemos observar que a reta $s$ é superior à $t$, ou seja, tem um valor de ordenada maior. A mesma conclusão teremos quando outro valor qualquer de abscissa considerarmos ($x_b$). Observemos também que, tanto para $x_a$ quanto para $x_b$, a distância entre as retas é idêntica, e é isso que caracteriza o paralelismo entre elas. Podemos dizer, portanto, que: $d_a = d_b$.

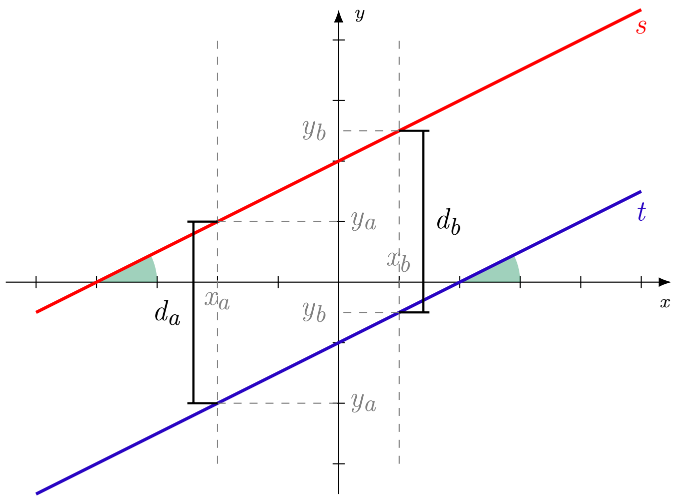



Figura 16 – Análise de retas paralelas a partir de valores específicos de abscissas

A conclusão a que podemos chegar então diz que:

**Definição 7.1** *Retas Paralelas:*
*Dadas duas retas quaisquer,* $\mathrm{r}$ *e* $\mathrm{u}$*,*

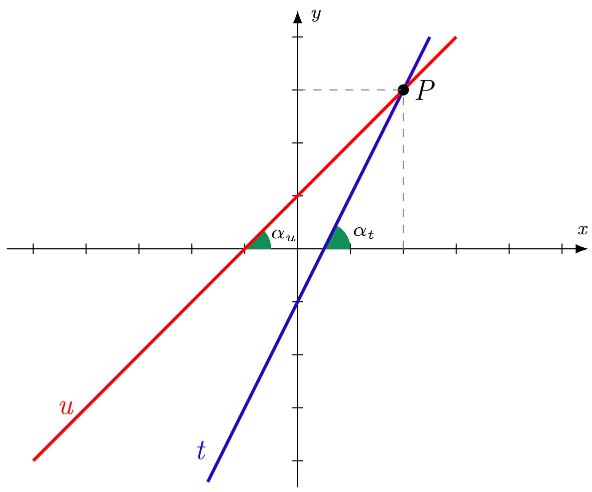
- *se* $\mathrm{m_r = m_u}$ *e* $\mathrm{n_r = n_u}$*, então as retas são* ***paralelas coincidentes*** $(\mathrm{r = u})$*.*
- *se* $\mathrm{m_r = m_u}$ *e* $\mathrm{n_r \neq n_u}$*, então as retas são* ***paralelas distintas*** $(\mathrm{r \cap u} = \{\ \})$*.*
- *se* $\mathrm{m_r \neq m_u}$*, então as retas são* ***concorrentes*** $(\mathrm{r \cap u = P})$*.*

### 7.1.2 Retas concorrentes

Em complemento à subseção anterior, verificaremos agora uma maneira de se analisar algebricamente se duas retas são concorrentes e, em caso afirmativo, qual o ponto de interseção entre elas e o ângulo formado entre si.

Quando analisamos a figura da subseção anterior, podemos extrair dela que, se uma das retas muda sua inclinação, elas deixarão de ser paralelas, logo, serão **concorrentes**. Disso, é fácil perceber também que, para que duas retas quaisquer sejam concorrentes, basta que suas inclinações sejam diferentes, ou seja, seus coeficientes angulares sejam distintos.

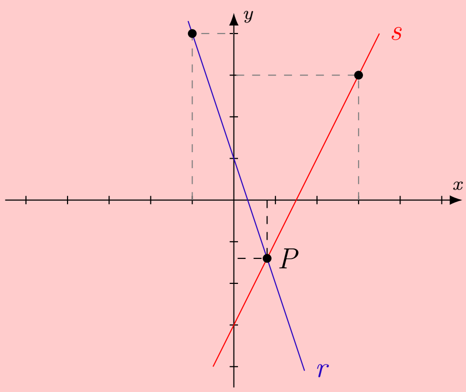
A figura abaixo apresenta geometricamente essa situação ($m_t \neq m_u$). O ponto $P$ é a interseção única entre as retas $t$ e $u$, isto é, o único ponto do plano que pertence simultaneamente a ambas as retas.




O que se apresenta como problema logo após analisar uma figura assim é descobrir as coordenadas desse ponto de interseção entre as retas. Se recordarmos as discussões feitas no Capítulo 5, onde estudamos Sistemas de Equações Lineares, nos situamos no fato de que, algebricamente, o ponto $P$ é a solução do sistema linear possível e determinado que está associado ao par de retas.

Dessa forma, para encontrar as coordenadas do ponto de interseção, basta que resolvamos o sistema formado pelas equações lineares de cada uma das retas.

Exemplo: Analisemos a seguinte situação e vamos definir as coordenadas do ponto $P$: (Considere a escala 1:1 no gráfico abaixo)




Primeiramente, definiremos as equações das retas $r$ e $s$. Observemos dois pontos pertencentes a cada uma:

(i) $r$ contendo os pontos $(-1, 4)$ e $(0, 1)$. Assim: $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + y - 1 = 0$

(ii) $s$ contendo os pontos $(0, -4)$ e $(3, 3)$. Assim: $\begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + y + 3 = 0$

Depois, resolvemos o sistema das equações lineares das retas: $\begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ -2x + y + 3 = 0 \end{cases}$.

Vejamos:

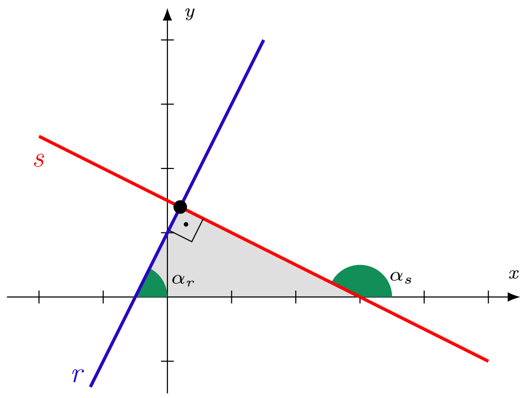
$$
\begin{aligned}
\begin{cases} 3x + y - 1 = 0 & (i) \\ -2x + y + 3 = 0 & (ii) \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} y = -3x + 1 & (i) \\ -2x + y + 3 = 0 & (ii) \end{cases} \quad [(i) \to (ii)] \\
& \Rightarrow \begin{cases} y = -3x + 1 & (i) \\ -2x + (-3x + 1) + 3 = 0 & (ii) \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} y = -3x + 1 & (i) \\ x = \frac{4}{5} & (ii) \end{cases} \quad [(ii) \to (i)] \\
& \Rightarrow \begin{cases} y = -3(\frac{4}{5}) + 1 & (i) \\ x = \frac{4}{5} & (ii) \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{7}{5} & (i) \\ x = \frac{4}{5} & (ii) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Portanto, a solução do sistema é $S = \{\left(\frac{4}{5}, -\frac{7}{5}\right)\}$, que igualmente representa o ponto em comum das retas, sua interseção.

Logo, as coordenadas deste ponto são $P = \left(\frac{4}{5}, -\frac{7}{5}\right)$.

### Retas perpendiculares

Consideremos, agora, uma situação como a seguinte, envolvendo duas retas $r$ e $s$, perpendiculares e não verticais:




Lembremos que, para $0° < \alpha < 180°$, temos:

- $sen\,(\alpha + 90°) = cos\,\alpha$
- $cos\,(\alpha + 90°) = -sen\,\alpha$

Tomando o triângulo hachurado da figura (formado pela interseção das retas com o eixo das abscissas e a interseção entre ambas), temos, pela soma dos seus ângulos internos, que:

$$
\begin{aligned}
\alpha_r + 90° + (180° - \alpha_s) = 180° \quad &\Rightarrow \quad \alpha_s = \alpha_r + 90° \\
&\Rightarrow \quad tg\,\alpha_s = tg\,(\alpha_r + 90°) \\
&\Rightarrow \quad tg\,\alpha_s = \frac{sen\,(\alpha_r + 90°)}{cos\,(\alpha_r + 90°)} \\
&\Rightarrow \quad tg\,\alpha_s = \frac{cos\,\alpha_r}{-sen\,\alpha_r} \\
&\Rightarrow \quad tg\,\alpha_s = -\frac{1}{tg\,\alpha_r} \\
&\Rightarrow \quad m_s = -\frac{1}{m_r} \qquad (7.1)
\end{aligned}
$$

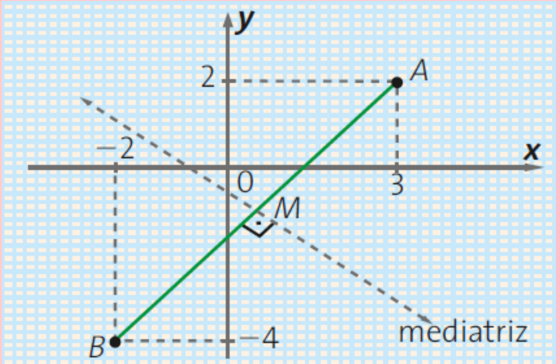
O que pretendemos mostrar com essa construção matemática anterior é a condição para que duas retas sejam consideradas **perpendiculares**. Trata-se, como visto, da comparação entre as tangentes dos seus ângulos de inclinação, ou nada mais do que a comparação entre seus coeficientes angulares. Assim, é possível fazer a seguinte definição:

**Definição 7.2** *Retas Perpendiculares:*
*Duas retas não verticais quaisquer* r *e* s*, serão perpendiculares entre si se, e somente se,* $\mathrm{m_r} = -\frac{1}{\mathrm{m_s}}$*. Isso quer dizer que:*

$$\mathrm{r} \perp \mathrm{s} \iff \mathrm{m_r} \,.\, \mathrm{m_s} = -1$$

**Exemplo:** Determine a equação da mediatriz do segmento de reta cujas extremidades são os pontos $A = (3, 2)$ e $B = (-2, -4)$.

*Solução:* Pela Geometria plana, sabemos que a mediatriz de um segmento de reta é uma reta perpendicular ao segmento no seu ponto médio. Na figura, $M$ é o ponto médio de $\overline{AB}$.




- Equação da reta-suporte do segmento de reta $AB$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - 2y - 12 + 4 + 4x - 3y = 0 \Rightarrow 6x - 5y - 8 = 0.$$

- Cálculo do coeficiente angular $m_1$ da reta-suporte:

$$6x - 5y - 8 = 0 \Rightarrow -5y = -6x + 8 \Rightarrow 5y = 6x - 8 \Rightarrow y = \frac{6x}{5} - \frac{8}{5} \therefore m_1 = \frac{6}{5}$$

- Cálculo do coeficiente angular $m_2$ da mediatriz:

$$m_2 = \frac{\frac{-1}{6}}{5} = -\frac{5}{6}$$

- Cálculo das coordenadas do ponto $M$:

$$\begin{array}{l} x = \dfrac{3-2}{2} = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{2-4}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{array} \Rightarrow M = (\tfrac{1}{2}, -1)$$

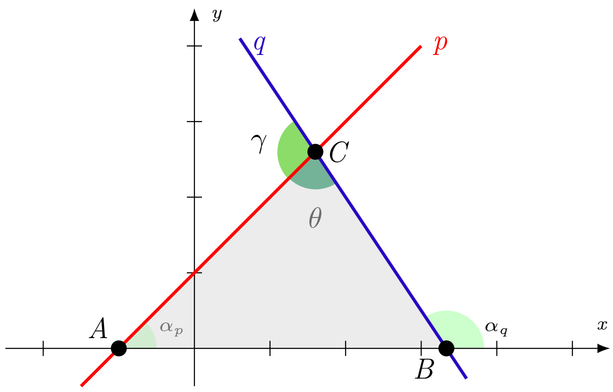
O problema, agora, fica reduzido a determinar uma equação da reta que passa pelo ponto $M = (\frac{1}{2}, -1)$ e que tem coeficiente angular $-\dfrac{5}{6}$. Então:

$$\begin{aligned} y - y_1 = m(x - x_1) \quad &\Rightarrow \quad y + 1 = \frac{-5}{6}(x - \frac{1}{2}) \\ &\Rightarrow \quad y + 1 = \frac{-5x}{6} + \frac{5}{12} \\ &\Rightarrow \quad 12y + 12 = -10x + 5 \\ &\Rightarrow \quad 10x + 12y + 7 = 0 \end{aligned}$$

Logo, a equação da mediatriz do segmento de reta é $10x + 12y + 7 = 0$.

### 7.1.3 Ângulo entre duas retas

Duas retas concorrentes, se não perpendiculares, formam entre si pares de ângulos congruentes opostos pelo vértice; um par agudo ($\theta$) e outro par obtuso ($\gamma$), onde $\theta + \gamma = 180°$, conforme mostra a seguinte.




Lembremos da expressão da tangente da diferença de dois arcos:

$$tg\,(a-b) = \frac{tg\ a - tg\ b}{1 + tg\ a\ .\ tg\ b}$$

Na figura anterior, vamos considerar o ângulo agudo $\theta$. A partir disso, vamos construir uma maneira de se encontrar sua medida. Vejamos:

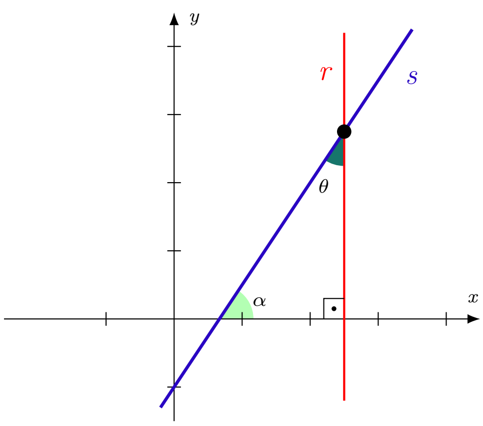
Num triângulo, sabemos que a medida de um de seus ângulos externos é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. Considerando o triângulo $ABC$ da figura anterior, temos que:

$$\begin{aligned} \alpha_q = \alpha_p + \theta \quad &\Rightarrow \quad \theta = \alpha_q - \alpha_p \\ &\Rightarrow \quad tg\,\theta = tg\,(\alpha_q - \alpha_p) \\ &\Rightarrow \quad tg\,\theta = \frac{tg\,\alpha_q - tg\,\alpha_p}{1 + tg\,\alpha_q\ .\ tg\,\alpha_p} \end{aligned}$$

Como estamos interessados no ângulo agudo $\theta$, este tem sempre tangente positiva, portanto:

$$tg\,\theta = \left| \frac{m_q - m_p}{1 + m_q\ .\ m_p} \right| \tag{7.2}$$

Podemos ter o caso também onde uma das retas é paralela ao eixo das ordenadas (verticalmente alinhada, portanto). Nesse caso, a aplicação da expressão 7.2 fica prejudicada, haja vista que uma das retas não tem coeficiente angular. Com a representação geométrica seguinte, fica fácil perceber que a definição do ângulo agudo entre as retas se dá pela aplicação do Teorema de Pitágoras, o que, na prática, terá expressão mais simplicada do que nos outros casos:




A medida do ângulo $\theta$ se dá por:

$$tg\,\theta = \frac{\overbrace{AB}^{cateto\ oposto\ a\ \theta}}{\underbrace{BC}_{cateto\ adjacente\ a\ \theta}} \quad (i)$$

$$m_s = tg\ m_s = \frac{\overbrace{BC}^{cateto\ oposto\ a\ \alpha}}{\underbrace{AB}_{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}} \quad (ii)$$

Se compararmos as igualdades em $(i)$ e $(ii)$, é fácil observar que uma é o inverso da outra (repare que o numerador de uma é o denominador da outra). Assim sendo, podemos definir que, dadas duas retas concorrentes $s$ e $r$, esta última vertical, o ângulo agudo $\theta$ formado entre elas se dá por:

$$tg\,\theta = \left|\frac{1}{m_s}\right| \tag{7.3}$$

## 7.2 Distâncias

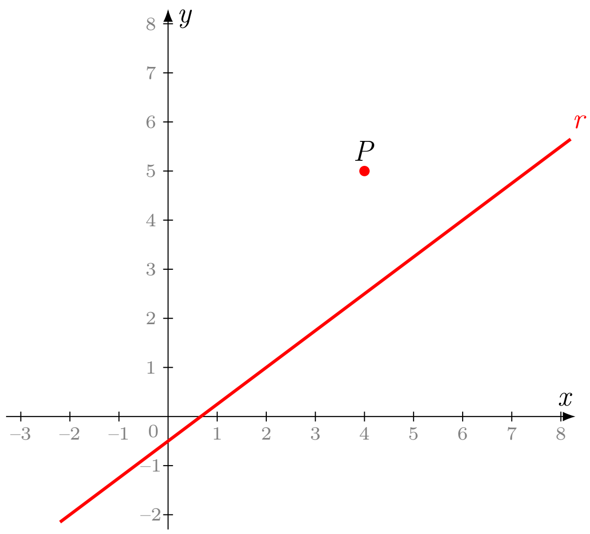
Os diferentes objetos geométricos, quando posicionados no Plano Cartesiano, localizam-se em regiões das quais podemos buscar medidas de distância. A forma de calcularmos essa distância no plano é comumente chamada de **distância euclidiana**.

Quando estamos em busca de distâncias, a característica principal das distâncias euclidianas é a procura pela menor delas, ou seja, a menos que se expresse algo em contrário, calcular a distância entre dois objetos é medir a menor delas. Como veremos, este modo de operacionalizar cálculos está diretamente ligado às **projeções perpendiculares** (ou **ortogonais**).

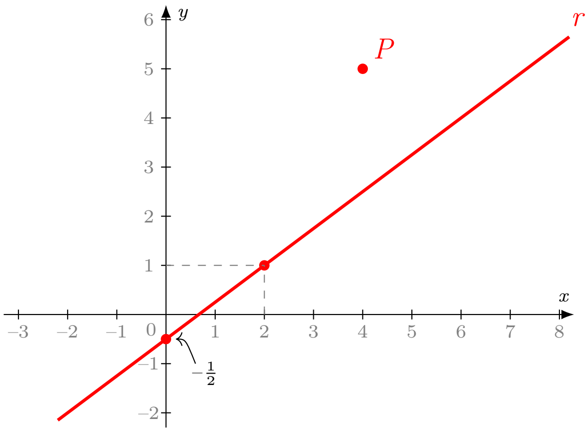
### 7.2.1 Distância entre ponto e reta

Para se medir a distância entre uma reta $r$ e um ponto $P$ fora dessa reta ($P \notin r$) é necessário que coloquemos em prática a citada noção de projeção ortogonal.

Vejamos o conceito:



A partir a representação geométrica anterior, desenvolveremos a noção algébrica para se chegar à distância entre o ponto $P$ e a reta $r$. Para isso, vamos chegar à equação de $r$ e ao seu coeficiente angular:

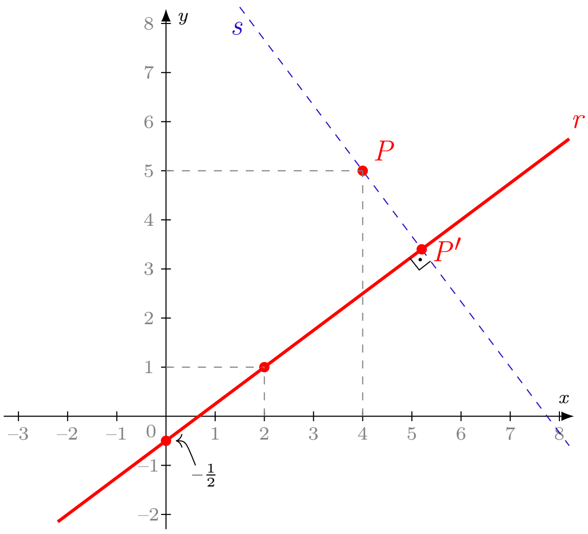



Considerando os pontos destacadas em $r$, as equações geral e reduzida da reta são:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x + 4y + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{3x - 2}{4}$$

Logo, $m_r = \dfrac{3}{4}$.




A reta $s$ tracejada é perpendicular à $r$ passando por $P$. Como $r \perp s$, segue que:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

Como a reta $s$ passa pelo ponto $P$, as equações reduzida e geral de $s$ podem ser assim expressas:

$$y - y_P = m(x - x_P) \quad \Rightarrow \quad y - 5 = -\frac{4}{3}(x - 4)$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-4x + 31}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 4x + 3y - 31 = 0$$

Em continuidade, percebemos que o ponto $P'$ é comum às duas retas, ou seja, é a interseção delas e, portanto, solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} -3x + 4y + 2 = 0 & (\times 4) \\ 4x + 3y - 31 = 0 & (\times 3) \end{cases} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{26}{5} \\ y = \frac{17}{5} \end{cases}$$

Basta agora que calculemos a distância entre $P$ e $P'$, utilizando-se da expressão contida no final da **??**:

$$PP' = \sqrt{(\tfrac{26}{5} - 4)^2 + (\tfrac{17}{5} - 5)^2} = \sqrt{(\tfrac{6}{5})^2 + (-\tfrac{8}{5})^2} = \sqrt{\tfrac{36}{25} + \tfrac{64}{25}} = \sqrt{\tfrac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2$$

Portanto, $d(P, P') = d(P, r) = 2$.

Trabalhoso? Um pouco não é?!

Mas os matemáticos desenvolveram uma expressão para se calcular a distância $d$ entre um ponto e uma reta a partir de toda essa construção vista anteriormente. Trata-se da expressão seguinte:

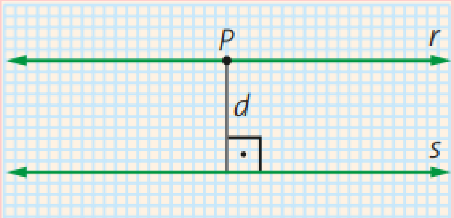
$$d_{r,P} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{7.4}$$

Se ao exemplo anterior aplicássemos essa expressão 7.4, teríamos:

$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-3.4+4.5+2|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}} = \frac{|-12+20+2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2$$

Obviamente o mesmo valor, como queríamos verificar.

Exemplo: São dadas as retas $r$ e $s$, de equações $2x + 3y - 10 = 0$ e $2x + 3y - 6 =$, respectivamente. Sabendo que essas retas são paralelas, calcule a distância entre elas.




*Solução:* Da Geometria Plana, sabemos que a distância entre duas retas paralelas é igual à distância de um ponto $P$ qualquer de uma delas à outra reta. Vejamos:

- Cálculo das coordenadas de um ponto $P$ qualquer da reta $r : 2x + 3y - 10 =$. Fazendo, arbitrariamente, $x = -1$, temos:

  $2(-1) + 3y - 10 = 0 \Rightarrow -2 + 3y - 10 = 0 \Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = 4$

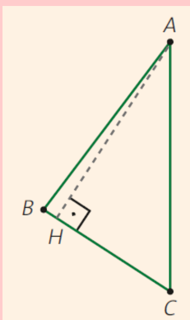
  Então, $P = (-1, 4)$.

- Cálculo da distância de $P$ à reta $s$:

$$\begin{aligned} d_{s,P} &= \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ &= \frac{|2(-1) + 3.4 - 6|}{\sqrt{2^2+3^2}} \\ &= \frac{|4|}{\sqrt{13}} \\ &= \frac{4\sqrt{13}}{13} \\ &\simeq 1,11 \end{aligned}$$

Logo, a distância entre as retas é $\frac{4\sqrt{13}}{13}$ unidades de distância ou $1,11$, aproximadamente.

Exemplo: Um triângulo tem os vértices nos pontos $A = (1, 2)$, $B = (-3, -1)$ e $C = (2, -5)$. Calcule a medida da altura do triângulo relativa ao lado $\overline{BC}$, conforme figura ao lado.




*Solução:* A medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$ é igual à distância entre o ponto $A$ e a reta-suporte de $\overline{BC}$.

- Equação da reta-suporte do lado de $\overline{BC}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 2y + 15 + 2 + 5x + 2y = 0 \Rightarrow 4x + 5y + 17 = 0.$$

- Cálculo da medida da altura:

$$d = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4.1 + 5.2 + 17|}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = \frac{31}{\sqrt{41}} = \frac{31\sqrt{41}}{41} \simeq 4,84$$

Logo, a medida da altura é $\dfrac{31\sqrt{41}}{41}$ unidades, ou, aproximadamente, $4,84$ unidades.

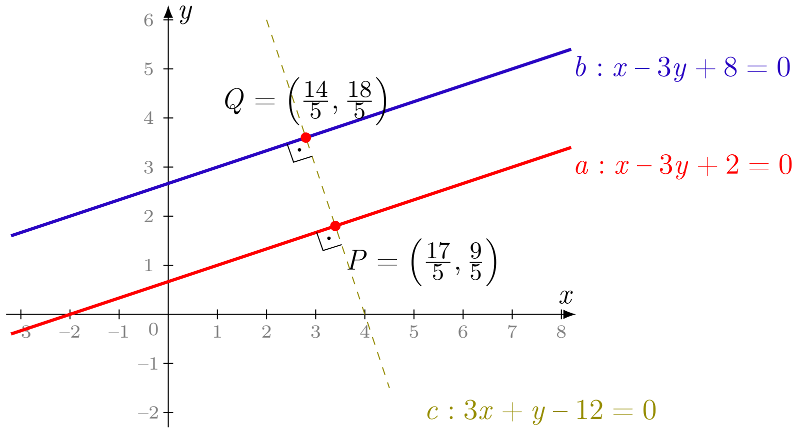
### 7.2.2 Distância entre retas paralelas

Notadamente, o cálculo de distância entre retas horizontalmente ou verticalmente alinhadas é trivial. Basta que verifiquemos a diferença entre as coordenadas de $y$ e de $x$, respectivamente.

Mas e nos outros casos? Como calculamos a distância entre retas paralelas? Distância essa que, diga-se de passagem, é constante.

Um erro comum é induzido pela forma horizontal ou vertical com que vemos naturalmente os objetos. Precisamos ficar atentos para não cometer esse erro. Como já dito, a distância entre dois objetos geométricos será dada pela menor dessas distâncias e, desse modo, precisamos lançar mão das projeções perpendiculares.

No exemplo abaixo, podemos verificar que a distância entre as retas $a$ e $b$ é dada pela distância entre os pontos $P$ e $Q$, que nada mais são do que as interseções da reta $c$ com $a$ e $b$, respectivamente (sendo a primeira perpendicular às outras duas).




Da expressão 7.4, podemos medir a distância entre $a$ e $b$ calculando $d(Q, a)$ ou $d(P, b)$ ou ainda, da expressão 6.1, a distância $d(P, Q)$. Vejamos o cálculo a partir de $d(Q, a)$:

$$\begin{aligned} d(a,b) = d(Q,a) &= \frac{|x_Q - 3y_Q + 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} \\ &= \frac{|\frac{14}{5} - 3(\frac{18}{5}) + 2|}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{|-6|}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{6\sqrt{10}}{10} \\ &\simeq 1,9 \end{aligned}$$

Portanto, a distância entre as retas $a$ e $b$ é, aproximadamente, $1,9$ unidades de distância.

## 7.3 Área de um triângulo

Uma aplicação prática da Geometria Analítica é para determinar o área de um triângulo. Em estudos anteriores, especialmente nos conteúdos de Trigonometria e Geometria Plana, você, estudante, já deve ter se deparado com várias formas de calcular a área de um triângulo. Veremos agora uma outra, utilizando-se das coordenadas de seus vértices.

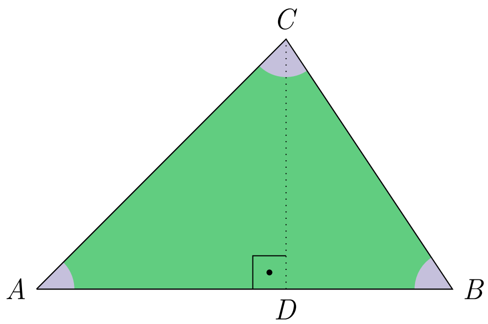
Estudamos que três pontos distintos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, quando colineares, atendem à seguinte expressão:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_B y_C + x_C y_A + x_A y_B - x_B y_A - x_A y_C - x_C y_B = 0$$

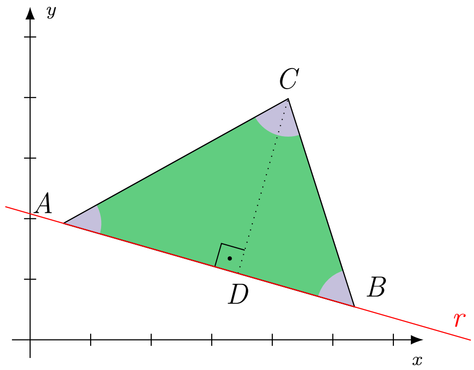
Isso implica dizer que, se $D \neq 0$, então os pontos não são colineares e, em consequência, podem determinar um triângulo no plano.

Recordemos que, da Geometria Plana, uma das maneiras de se calcular a área de um triângulo é a seguinte:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{\overbrace{AB}^{base} \,.\, \overbrace{CD}^{altura}}{2}$$



Agora, estudando Geometria Analítica, vamos chamar o segmento $AB$ de base, contido na reta $r$, e chamar de $d(C, r)$ a altura $CD$ do triângulo, que corresponde à distância do ponto $C$ à reta $r$.




De acordo com a equação 6.8, a equação geral da reta $r$ se dá por:

$$r : \underbrace{(y_A - y_B)}_{a}\, x + \underbrace{(x_B - x_A)}_{b}\, y + \underbrace{(x_A y_B - x_B y_A)}_{c} = 0$$

A medida da base por ser expressa por:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Para calcular $d(C, r)$, vamos utilizar a equação 7.4:

$$\begin{aligned} d_{C,r} &= \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|(y_A - y_B)x_C + (x_B - x_A)y_C + (x_A y_B - x_B y_A)|}{\sqrt{(y_A - y_B)^2 + (x_B - x_A)^2}} \end{aligned}$$

Dessa forma, a medida da área de um triângulo pode ser desenvolvida da seguinte maneira:

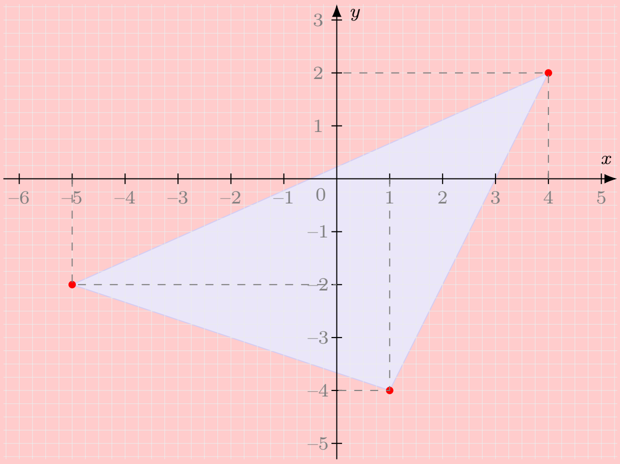
$$\begin{aligned} A &= \frac{\overbrace{\overline{AB}}^{base} \,.\, \overbrace{d(C, r)}^{altura}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \,.\, \frac{|(y_A - y_B)x_C + (x_B - x_A)y_C + (x_A y_B - x_B y_A)|}{\sqrt{(y_A - y_B)^2 + (x_B - x_A)^2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cancel{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \,.\, \frac{|(y_A - y_B)x_C + (x_B - x_A)y_C + (x_A y_B - x_B y_A)|}{\cancel{\sqrt{(y_A - y_B)^2 + (x_B - x_A)^2}}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,|(y_A - y_B)x_C + (x_B - x_A)y_C + (x_A yB - x_B y_A)| \\ &= \frac{1}{2}\,|x_B y_C + x_C y_A + x_A y_B - x_B y_A - x_A y_C - x_C y_B| \end{aligned} \tag{7.5}$$

Observemos que a expressão 7.5, acima, nada mais é do que o determinante $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$.

Disso tudo, concluímos que, a área de um triângulo cujos vértices são $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ é dada por:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D| \tag{7.6}$$

Exemplo: Calcular a área do triângulo expresso na figura abaixo:




É possível verificar que os vértices são $(1, -4)$, $(-5, -2)$ e $(4, 2)$. Logo:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 16 - 10 + 8 - 2 - 20 = -42$$

Daí, segue que a área do triângulo é dada por:

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot |D| = \frac{1}{2} \cdot |-42| = \frac{1}{2} \cdot 42 = 21$$

Portanto, a área desse triângulo é igual a 21 unidades de área (u.a).

## 7.4 Atividades propostas

*Respostas na pág. 203.*

1. Considere as retas:

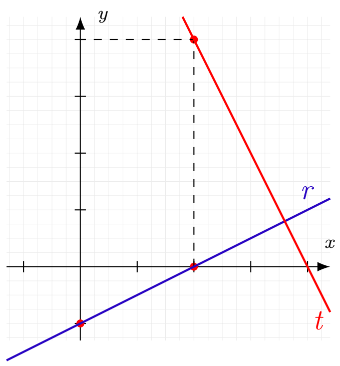
   $r : -2x - y + 3 = 0 \quad s : 2x + 3y - 6 = 0 \quad q : \dfrac{x - 2y + 6}{2} = 0 \quad t : -x + 2y - 6 = 0 \quad u : \dfrac{x}{2} - y\dfrac{3}{2} = 0$

   a) Quais são concorrentes oblíquas?
   b) Quais são concorrentes perpendiculares?
   c) Quais são paralelas coincidentes?
   d) Quais são paralelas distintas?

2. Determinar a equação geral da reta $u$ que contém o ponto $Q(3, 1)$ e é paralela à reta $r$ de equação $5x - y + 1 = 0$.

3. Observe a figura ao lado:

   Indique a equação geral da reta $t$ representada no gráfico ao lado, sabendo que $r \perp t$:




4. Encontre as coordenadas do ponto de interseção das retas $r: -2x + 3y + 7 = 0$ e $s: x + 2y = 0$:

5. Dadas as retas $r: -5x + y + 1 = 0$, $s: -10x + 2y - 6 = 0$ e $t: \frac{x}{5} + y + 1 = 0$, avalie em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo:

   - $r$ e $s$ são paralelas (distintas)
   - $r$ e $s$ são paralelas (coincidentes)
   - $r$ e $t$ são perpendiculares
   - $t$ e $s$ são perpendiculares
   - $s$ e $t$ são paralelas

   Marque a alternativa que corresponda à sequência correta:

   a) VFFFF
   b) VFVVF
   c) VVVVF
   d) VFFFV
   e) FVVVF

6. Para quais valores de $k$ as retas $r: -5kx + 10y - 2 = 0$ e $s: -(1-k)x + y + 1 = 0$ são:

   a) paralelas e distintas?
   b) concorrentes?
   c) perpendiculares?

7. O triângulo de vértices $A(-4,-1)$, $B(-1,4)$ e $C(4,1)$ é retângulo?

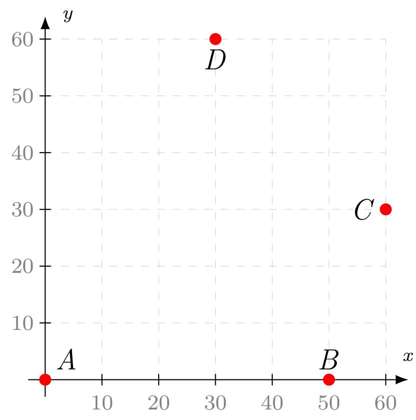
8. Mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a ele que passa pelo seu ponto médio. Sabendo disso, indique a equação reduzida da mediatriz do segmento de reta cujas extremidades são os pontos $P(-2,-4)$ e $Q(3,2)$.

9. (Fuvest-SP) Os pontos de interseção da reta $r$, de equação $y = \frac{x}{2} + 2$, com os eixos de coordenadas, determinam um segmento. Qual a equação geral da mediatriz desse segmento?

10. (Ibmec) Os pontos $A$, $B$, $C$ e $D$ do plano abaixo representam 4 cidades:

Uma emissora de televisão quer construir uma estação transmissora numa localização tal que:

- a distância entre a estação e a cidade localizada em $A$ seja igual à distância entre a estação e a cidade localizada em $B$.
- a distância entre a estação e a cidade localizada em $C$ seja igual à distância entre a estação e a cidade localizada em $D$.

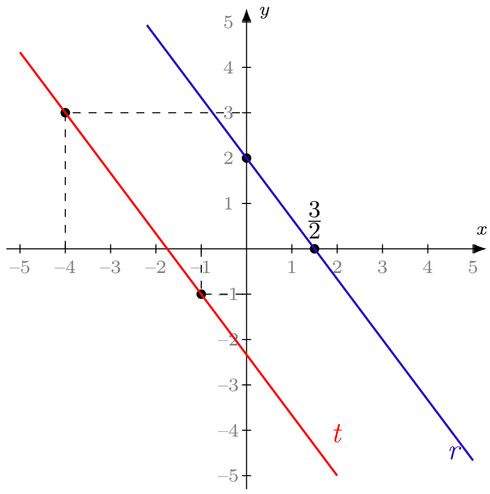



Considerando as coordenadas do plano acima, qual ponto melhor descreve as coordenadas da localização da estação?

11. Considere a reta $r: -4x + 5y + 8 = 0$ e o ponto $A(-3, 1)$. Indique a equação geral da reta $t$ que passa por $A$ e forma um ângulo $\alpha = 45°$ com $r$.

12. (Cesgranrio-RJ) O ponto $A(-1, -2)$ é um vértice de um triângulo equilátero $ABC$, cujo lado $BC$ está sobre a reta de equação $x + 2y - 5 = 0$. Determine a medida $h$ da altura desse triângulo.

13. Qual a distância entre as retas $r$ e $s$ do gráfico abaixo?

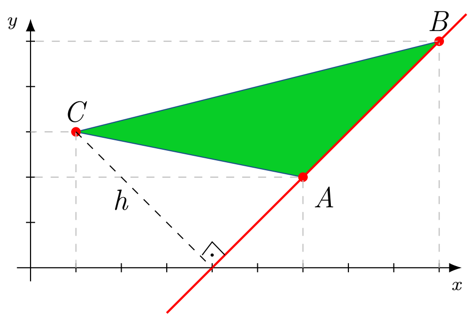



14. Determine o valor de $\eta$ de forma que os pontos $A(-1, 0)$, $B(3, -2)$ e $C(4, \eta)$ sejam vértices de um triângulo com área igual a $13\, u.a.$.

15. Determine a área do quadrilátero cujos vértices consecutivos são $P(7, 5)$, $Q(1, 4)$, $R(1, 1)$ e $S(6, 1)$.

16. (UFBA) Considere os pontos $A(-1, 2)$, $B(1, 4)$ e $C(-2, 5)$ do plano cartesiano. Sendo $D$ o ponto simétrico de $C$ em relação à reta que passa por $A$ e é perpendicular ao segmento $AB$, determine a área do quadrilátero $ABCD$.

17. Calcule a área do $\triangle ABC$ abaixo e a altura em relação ao lado $\overline{AB}$.



18. Um triângulo tem, como retas-suporte de seus lados, as retas com as seguintes equações: $x + 2y - 1 = 0$, $y - 5 = 0$ e $x - 2y - 7 = 0$. Calcule a área desse triângulo.

19. As retas-suporte dos lados do triângulo $ABC$ são: $r : 3x - y = 0$, $-x + y + 2 = 0$ e $2x + y = 10$. Qual a área de $\triangle ABC$?

20. Considere os pontos $A(-2, 1)$, $B(3, 5)$ e $C(1, -1)$. Considere agora a reta $r$ que passa por $A$ e $B$ e a reta $s$ que é perpendicular à $r$ e passa por $C$. Se $s \cap r = D$, determine:

    a) a equação geral de $r$.

    b) a equação geral de $s$.

    c) a altura em relação ao lado $\overline{BC}$ do $\triangle BCD$.

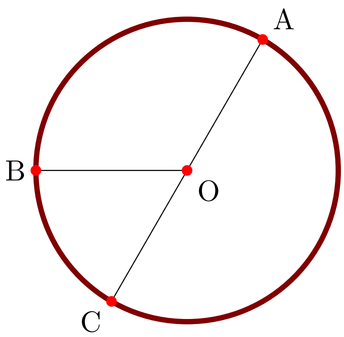
    d) a área do $\triangle BCD$.

CAPÍTULO 8

# A circunferência

## 8.1 Definição e equações

**Definição 8.1** *Circunferência:*
*Uma circunferência é definida no Plano Cartesiano como uma linha fechada, onde todos os pontos são equidistantes de um ponto fixo, denominado centro. Um segmento de reta com extremidades no centro e em um ponto da circunferência é chamado raio. E um segmento de reta com extremidades em dois pontos da circunferência, passando pelo centro, é chamado diâmetro.*

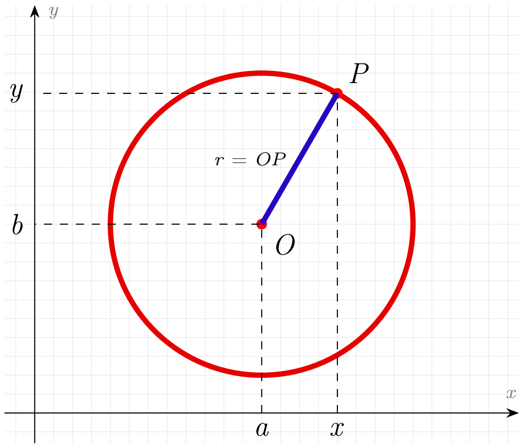



centro: $O$
raio $(r)$: $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$
diâmetro $(d = 2r)$: $\overline{AC}$

Estudamos, em Geometria Plana, características do círculo e da circunferência que muito nos ajudarão agora, no estudo analítico desse último objeto. Dessa forma, o que faremos é entender como esse objeto pode ser descrito em expressões algébricas.

Partimos, portanto, da própria definição 8.1 dada acima. O fato de todos os pontos da circunferência estarem a uma mesma distância do seu centro, associa, de pronto, ao fato da distância entre dois pontos que estudamos na Subseção **??**.

Vejamos a construção matemática abaixo para entendermos isso:




Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer da circunferência de centro $O(a,b)$, representada ao lado. A expressão 6.1, na página 6.1, nos indica que a distância entre os pontos $O$ e $P$ é a medida do segmento $OP$, que, no caso, é o raio da circunferência:

$$OP = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Elevando os dois lados da última igualdade ao quadrado, temos que:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{8.1}$$

Esta última equação (8.1) é dita **equação reduzida** da circunferência. Observe que, com ela, as coordenadas do centro e e a medida do raio ficam explícitas na representação algébrica.

Se, a partir da forma reduzida, fizermos o desenvolvimento da expressão, teremos:

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 &\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \end{aligned} \tag{8.2}$$

Esta última (8.2) é chamada de **equação geral** da circunferência.

Podemos notar que, caso o centro da circunferência for a origem do sistema cartesiano $O(0,0)$, então a equação reduzida fica da forma $x^2 + y^2 = r^2$ e a geral da forma $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

Exemplo: Verificar se os pontos $A(7,5)$ e $B(5,3)$ pertencem à circunferência $\pi$ que tem centro em $O(4,5)$ e raio igual à 3 unidades de distância.

*Solução:* Inicialmente, temos que a equação reduzida da circunferência é:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow (x-4)^2 + (y-5)^2 = 3^2 \Rightarrow (x-4)^2 + (y-5)^2 = 9$$

E a equação geral é:

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 10y + 32 = 0$$

Por fim, se testarmos os pontos $A$ e $B$ em qualquer uma das equações, vamos verificar que:

i) Substituindo $A$ na equação geral de $\pi$:

$$\begin{aligned} A \to \pi : 7^2 + 5^2 - 8 \cdot 7 - 10 \cdot 5 + 32 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 49 + 25 - 56 - 50 + 32 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

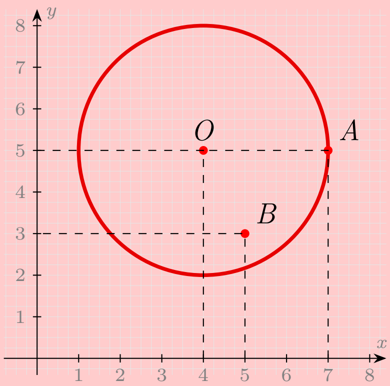
Logo, $A$ pertence à $\pi$.

ii) Substituindo $B$ na equação reduzida de $\pi$:

$$\begin{aligned} B \to \pi : \ (5-4)^2 + (3-5)^2 &\stackrel{?}{=} 9 \\ (1)^2 + (-2)^2 &\stackrel{?}{=} 9 \\ 1 + 4 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 5 &\neq 0 \end{aligned}$$

Logo, $B$ não pertence à $\pi$.

No plano cartesiano, temos:




Um outro problema que se apresenta é, conhecendo as equações da circunferência, como chegaríamos às coordenadas de seu centro e à medida do seu raio?

Obviamente, da equação reduzida esse problema é relativamente simples, haja vista que essa forma visa colocar essas informações em destaque. O problema então se dá quando temos uma equação geral.

Vejamos duas maneiras como podemos resolver problemas assim:

Exemplo: Qual o centro e o raio da circunferência $\eta$ de equação geral $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$?

*Soluções:*

- 1ª maneira: **método de comparação**
  Esse método consiste em comparar, termo a termo, a equação geral dada e os coeficientes da equação geral genérica (8.2) da circunferência:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2$$

(i) (ii) (iii) (iv) (v)

i) $x^2 = x^2$

ii) $y^2 = y^2$

iii) $-6y = -2by \Rightarrow -6 = -2b \Rightarrow b = 3$

iv) $4x = -2ax \Rightarrow 4 = -2a \Rightarrow a = -2$

v) $-3 = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow -3 = (-2)^2 + 3^2 - r^2 \Rightarrow -3 = 4 + 9 - r^2 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} r = 4 \\ r = -4\,(\nexists) \end{cases}$

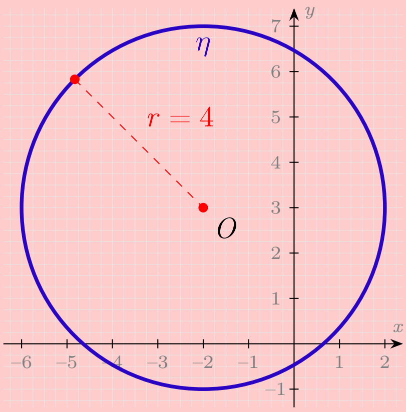
  Dessa forma, como $O(a, b)$, temos que $O = (-2, 3)$ e também $r = 4$.

- 2ª maneira: **completando quadrados**
  Este método consiste em escrever a equação geral na forma reduzida, como que se fôssemos comprimindo-a até chegar àquele formato. Vejamos:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + 4x + y^2 - 6y = 3 \\
&\Rightarrow \quad x^2 + 2\,.\,2\,.\,x + y^2 - 2\,.\,3\,.\,y = 3 \\
&\Rightarrow \quad x^2 + 2\,.\,2\,.\,x + 4 + y^2 - 2\,.\,3\,.\,y + 9 = 3 + 4 + 9 \\
&\Rightarrow \quad \underbrace{x^2 + 2\,.\,2\,.\,x + 4}_{(x+2)^2} + \underbrace{y^2 - 2\,.\,3\,.\,y + 9}_{(y-3)^2} = \underbrace{3 + 4 + 9}_{16} \\
&\Rightarrow \quad (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16 \\
&\Rightarrow \quad (x - (-2))^2 + (y - 3)^2 = 4^2
\end{aligned}$$

  O que coincide, por óbvio, às respostas dadas na primeira maneira: $O = (-2, 3)$ e $r = 4$.

No plano cartesiano, teremos:



## 8.2 Posições relativas entre circunferência e outros objetivos geométricos

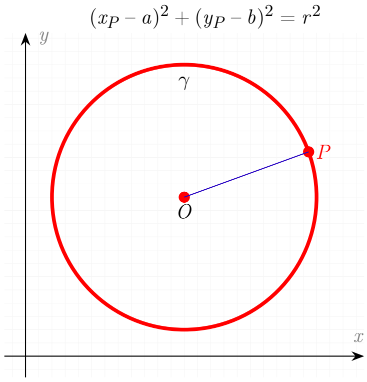
A sequência dos três próximos tópicos visa analisar e comparar a posição, no Plano Cartesiano Ortogonal, entre circunferências e outros objetos já estudados, no caso, pontos e retas. Dessa forma, estudaremos praticamente todo o conteúdo visto nos três últimos capítulos (O ponto e a reta, Posições relativas e distâncias e A circunferência), entrelaçando analiticamente considerações sobre as possíveis posições entre esses vários objetos geométricos.

### Posições relativas entre ponto e circunferência

Para estudarmos esse tópico, vamos considerar uma circunferência $\gamma$, com centro em $O(a, b)$ e raio $r$, e um ponto dado $P(x_P, y_P)$. Nessa situação, podem ocorrer três casos:

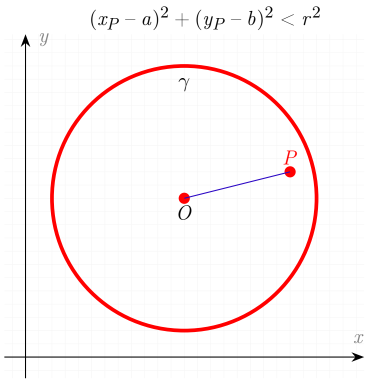
1) O ponto **pertence** à circunferência $(P \in \gamma)$
Isso significa dizer que as coordenadas do ponto $P$ satisfazem a equação da circunferência, pois a compõe. A distância, portanto, do ponto ao centro de $\gamma$ é igual ao raio, ou seja:

$$d(O, P) = r$$



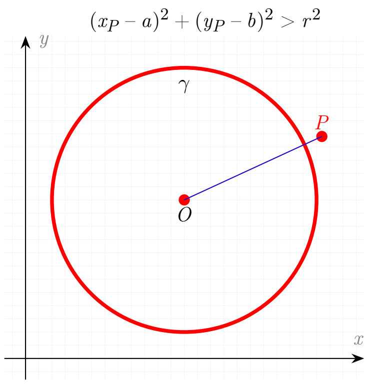

2) O ponto é **interno** à circunferência
Neste caso, as coordenadas do ponto $P$ não satisfazem a equação da circunferência e a distância dele ao centro desta é menor que a medida do raio, ou seja:

$$d(O, P) < r$$

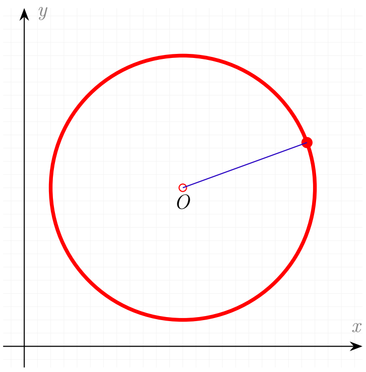



3) O ponto é **externo** à circunferência
Por fim, neste caso, as coordenadas do ponto $P$ também não satisfazem a equação da circunferência e a distância do ponto ao centro desta é maior que a medida do raio, ou seja:

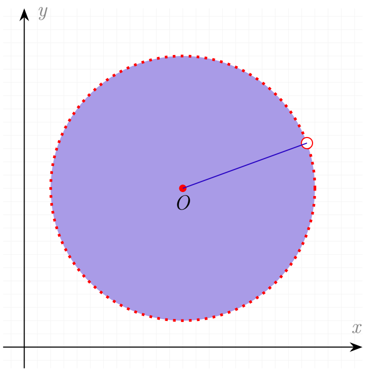
$$d(O, P) > r$$



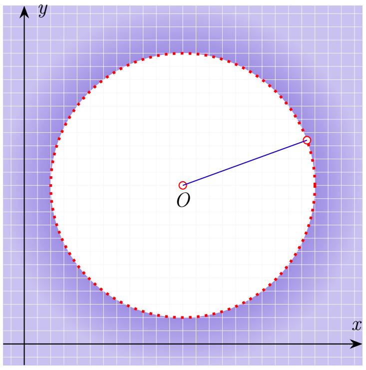

A partir dessas três situações, podemos afirmar que, diante da infinidade de pontos do Plano Cartesiano, uma equação de circunferência determina, neste, três regiões:




A equação $(x_P - a)^2 + (y_P - b)^2 = r^2$ é, por óbvio, a representação da própria circunferência.




A inequação $(x_P - a)^2 + (y_P - b)^2 < r^2$ representa a região correspondente ao interior da circunferência. Na representação geométrica ao lado, a circunferência é tracejada para indicar que não pertence à região. Se a representação da inequação usasse a símbolo $\leq$, a circunferência ao lado não seria tracejada e, então, teríamos a representação de um círculo.



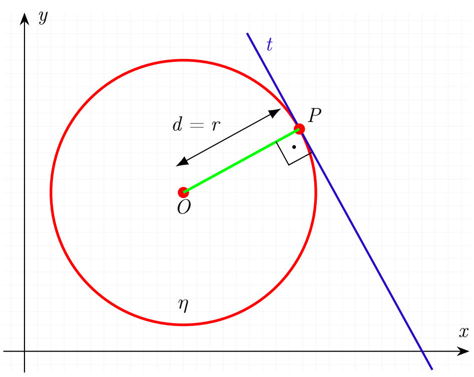

A inequação $(x_P - a)^2 + (y_P - b)^2 > r^2$ representa a região correspondente ao exterior da circunferência.

## Posições relativas entre reta e circunferência

Estudaremos agora as possíveis posições entre uma reta e uma circunferência. Definidas estas como uma reta $t$ e uma circunferência $\eta$ com centro em $O$ e raio $r$. Veremos que temos três possíveis situações:

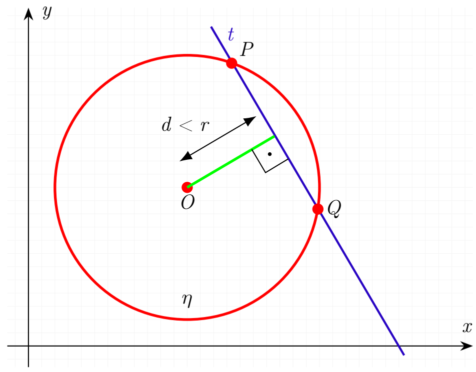
1) A reta é **tangente** à circunferência $(r \cap \eta = P)$
Nesta situação, a reta toca uma única vez na circunferência, num único ponto, que é a interseção de ambos os objetos. A reta $t$ é perpendicular ao raio nesse ponto de tangência e sua distância ao centro $O$ é igual à medida do raio $r$:

$$d(t, O) = r$$



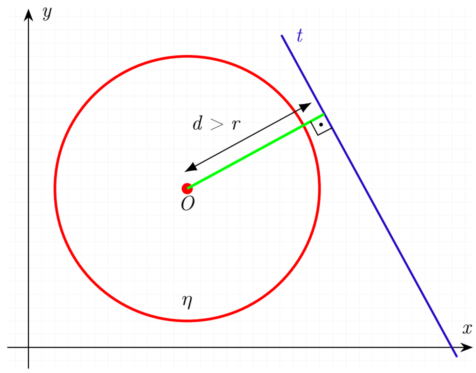
2) A reta é **secante** à circunferência ($r \cap \eta = \{P, Q\}$)
Já neste caso, a reta toca duas vezes na circunferência, que são as interseções de ambos os objetos. A distância da reta $t$ ao centro $O$ é sempre menor que a medida do raio $r$:

$$d(t, O) < r$$




3) A reta é **externa** à circunferência ($r \cap \eta = $)
Por fim, neste último caso, a reta não toca na circunferência e estes dois objetos não têm interseção. A distância da reta $t$ ao centro $O$ é sempre maior que a medida do raio $r$:

$$d(t, O) > r$$




## Posições relativas entre circunferências distintas

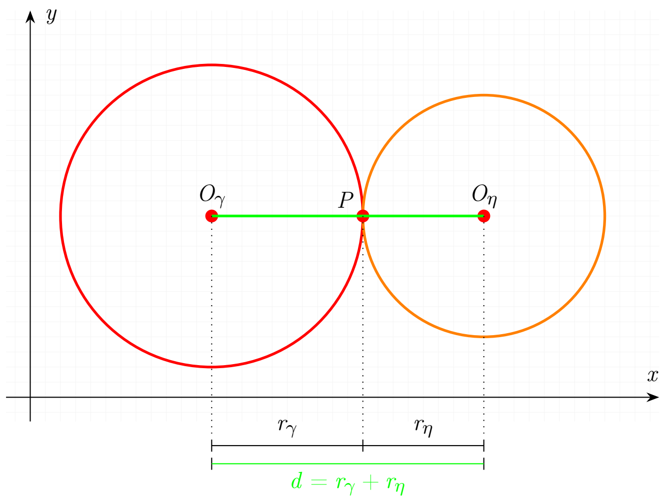
Para estudar este tópico vamos considerar duas circunferências, $\gamma$ e $\eta$ e seus respectivos raios, $r_\gamma$ e $r_\eta$.

1) As circunferências são **tangentes** ($\gamma \cap \eta = P$)

Neste primeiro caso, as circunferências tocam uma na outra apenas num único ponto, sendo este seu ponto de interseção. Todavia, podemos ter duas situações:

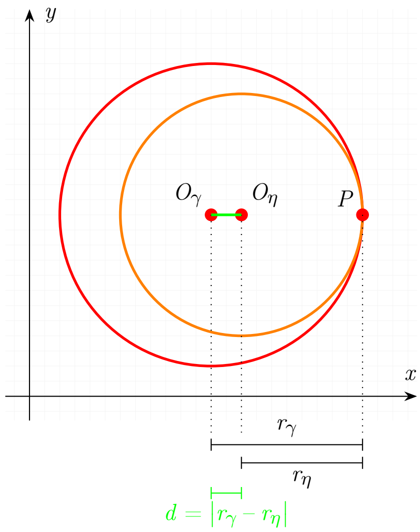
As circunferências são **tangentes externas**.
A distância entre seus centros é igual à soma de seus raios:

$$d(O_\gamma, O_\eta) = r_\gamma + r_\eta$$



As circunferências são **tangentes internas**. A distância entre seus centros é igual à diferença de seus raios, em módulo:

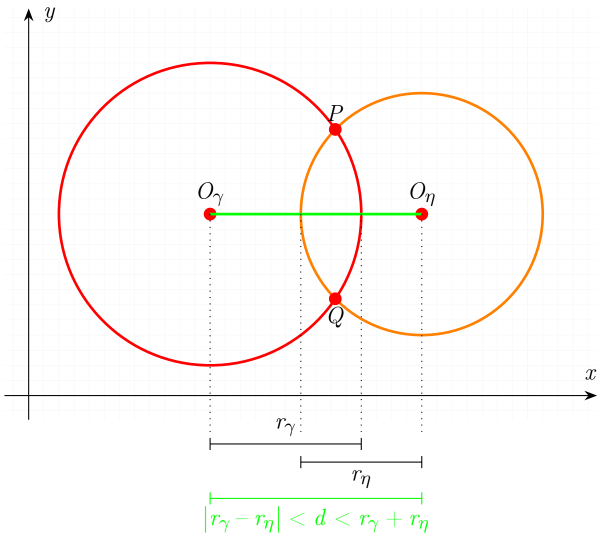
$$d(O_\gamma, O_\eta) = |r_\gamma - r_\eta|$$




2) As circunferências são **secantes** ($\gamma \cap \eta = \{P, Q\}$)

Neste segundo caso, as circunferências tocam uma na outra em dois pontos, sendo, estes, suas interseções. A distância entre seus centros está, portanto, entre o módulo da diferença da medida de seus raios e a soma destes:

$$|r_\gamma - r_\eta| < d(O_\gamma, O_\eta) < r_\gamma + r_\eta$$

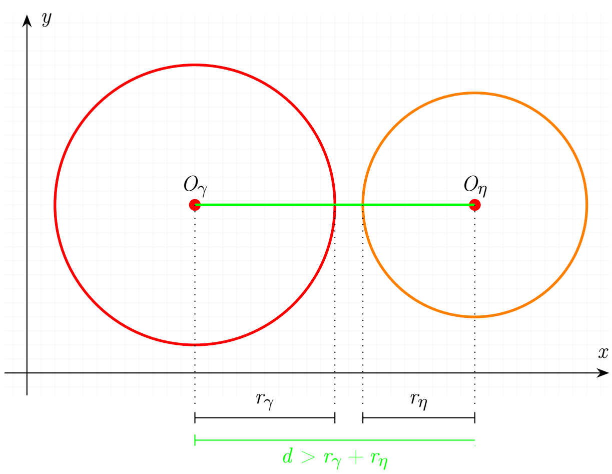



3) As circunferências são **distintas e sem ponto coincidente** ($\gamma \cap \eta = \{\ \}$)

Neste último caso, as circunferências não tocam uma na outra. Todavia, também podemos ter duas situações:

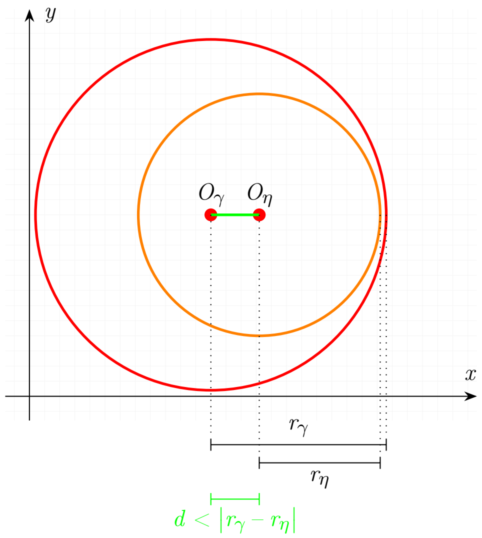
**Circunferências externas**
Nessa situação, as circunferências não se tocam, não havendo, portanto, ponto de interseção entre elas. A distância entre seus centros será maior que a soma da medida de seus raios:

$$d(O_\gamma, O_\eta) > r_\gamma + r_\eta$$



**Uma circunferência interna à outra**
Já nessa situação, as circunferências também não se tocam, e não têm ponto de interseção, mas a distância entre seus centros será menor que a diferença da medida de seus raios, em módulo:

$$d(O_\gamma, O_\eta) < |r_\gamma - r_\eta|$$




Ao estudarmos as posições relativas entre circunferências, podemos ter os casos em que duas delas são **concêntricas**, ou seja, têm o mesmo centro. A análise nestes casos fica facilitada, pois se resumirá aos seus raios. Se iguais, as circunferências serão coincidentes; se distintos, uma será interna à outra.

## 8.3 Atividades propostas

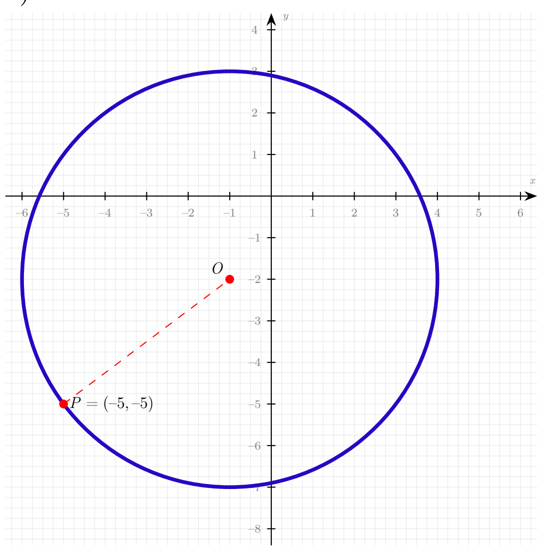
*Respostas na pág. 204.*

1. Indique as coordenadas do centro e do raio das seguintes circunferências:

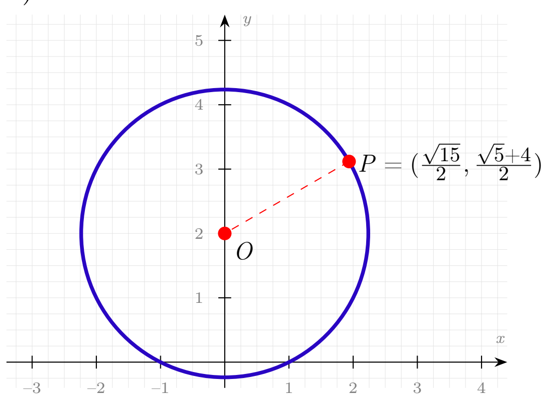
   a) $x^2 + (y-2)^2 = 9$
   b) $(x + \frac{3}{4})^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 5$
   c) $x^2 + y^2 + 2x - 7 = 0$
   d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$
   e) $x^2 + y^2 = 10$
   f) $y^2 + 8(y - x) + x^2 + 28 = 0$

2. Em cada item, indique as equações reduzida e geral da circunferência, sabendo que $OP$ é um raio:

   a)

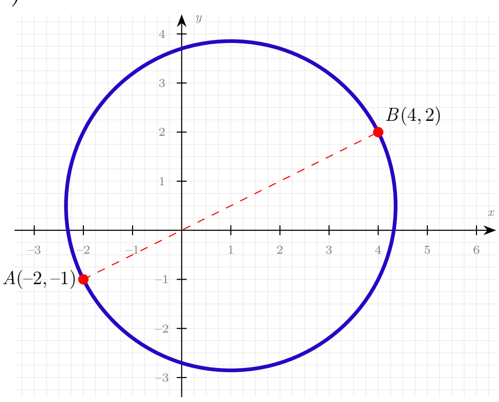



   b)

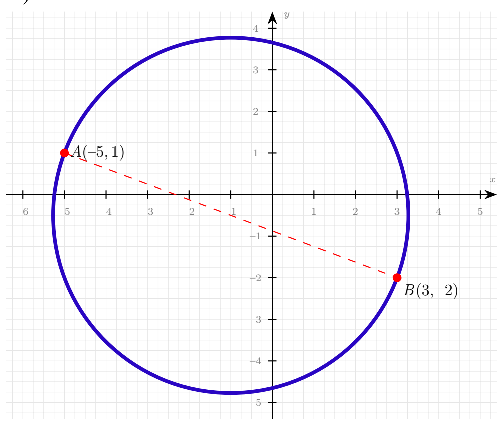



3. Em cada item, indique as equações reduzida e geral da circunferência, sabendo que $AB$ é um diâmetro:

a)




b)




4. Esboce o gráfico da circunferência cuja equação geral é $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$.

5. Uma circunferência passa pelos pontos $P = (0, -4)$ e $Q(0, 2)$. O centro dessa circunferência é o ponto médio de $PQ$. Nessas condições, indique:

   a) a equação reduzida da circunferência.
   b) a área interna à circunferência.

6. Verifique se as seguintes equações representam uma circunferência:

   a) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0$
   b) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 = 0$
   c) $2x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$
   d) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 1 = 0$
   e) $3x^2 + 3y^2 - 12x - 15y - 6 = 0$
   f) $4x^2 - 4y^2 = 0$

7. O centro de uma circunferência é o ponto médio de um segmento que tem extremidades $C(-2, -3)$ e $D(2, -5)$. Sabe-se que o raio dessa circunferência é $\sqrt{2}$. Qual é a equação geral dessa circunferência?

8. Duas retas $r : x - y - 2 = 0$ e $s : x + y - 6 = 0$ se interceptam no ponto $P$. Uma circunferência $\beta$ tem centro em $(2, 0)$ e contém o ponto $P$. Indique a equação de $\beta$.

9. Para quais valores reais de $k$ a equação $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 13k = 0$ representa uma circunferência?

10. O ponto $N(5, 2)$ pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 27 = 0$. Indique a equação da reta $t$ tangente a essa circunferência no ponto $N$.

11. A reta $r$ de equação $x - y + k = 0$ é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$. Nessa situação, qual o valor de $k$?

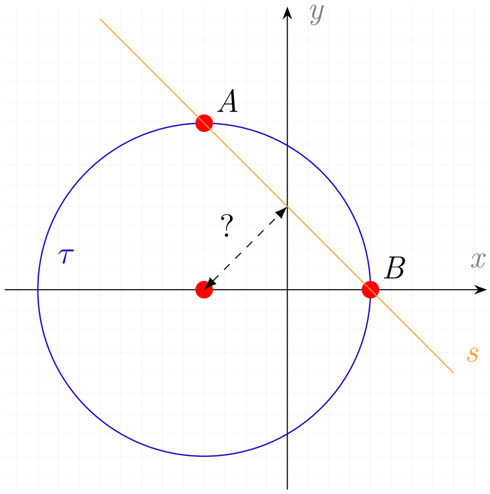
12. Em cada caso, considere a reta $r$ e a circunferência $\sigma$. Indique a posição relativa da reta em relação à circunferência, se tangente ou secante, indique também o(s) ponto(s) de interseção:

   a) $r : 2x - y + 1 = 0$ e $\sigma : x^2 + y^2 - 2x = 0$
   b) $r : y = x$ e $\sigma : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$
   c) $r : 2x + y - 1 = 0$ e $\sigma : x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$
   d) $r : \dfrac{4x}{3} - y + 2 = 0$ e $\sigma : (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$

13. (UFBA) Indique o tamanho da corda determinada pela interseção da reta $r$, de equação $x + y - 1 = 0$, com a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$.

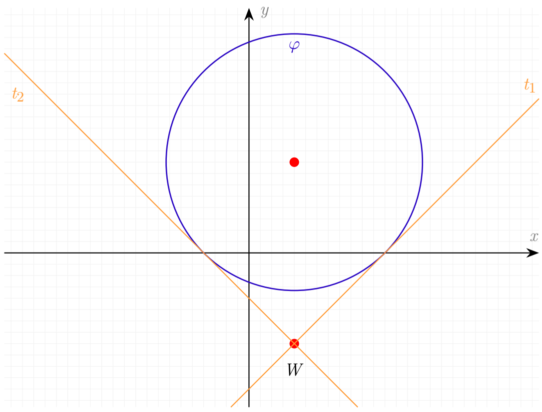
14. Observe a construção geométrica abaixo:

A circunferência $\tau : x^2+y^2+2x-3=0$ é seccionada pela reta $s : x+y-1=0$ nos pontos $A$ e $B$. Determine a distância do centro de $\tau$ ao segmento $\overline{AB}$.




15. Observe a figura abaixo:

A circunferência $\varphi : (x-1)^2+(y-2)^2 = 8$ tem o ponto $W(1,-2)$ externo a si. Indique as equações das retas $t_1$ e $t_2$, que são tangentes à circunferência e passam por $W$.




16. A distância entre os centros de duas circunferências é 5 $cm$. Indique a posição relativa entre elas, sabendo que possuem raios medindo:

a) 2 $cm$ e 3 $cm$
b) 6 $cm$ e 5 $cm$
c) 8 $cm$ e 2 $cm$
d) 1 $cm$ e 6 $cm$
e) 2 $cm$ e 1 $cm$

17. Indique a equação da circunferência de centro $(8,4)$ e que tangencia externamente outra de equação $x^2+y^2-4x+8y-16=0$.

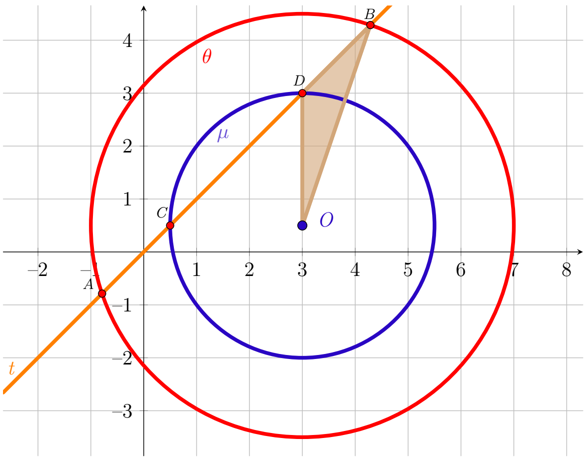
18. Obtenha, caso exista, o(s) ponto(s) de interseção entre as circunferências:

a) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=4$ e $\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+y^2=1$

b) $x^2+(y-4)^2=12$ e $(x+1)^2+(y+2)^2=6$

c) $(x-5)^2+y^2=9$ e $(x-2)^2+y^2=30$

19. Observe a figura abaixo:




As circunferências $\theta$ e $\mu$ são concêntricas em $O(3, \frac{1}{2})$. Sabe-se que:

i) $r_\theta = 4$.

ii) $r_\mu = \frac{5}{2}$

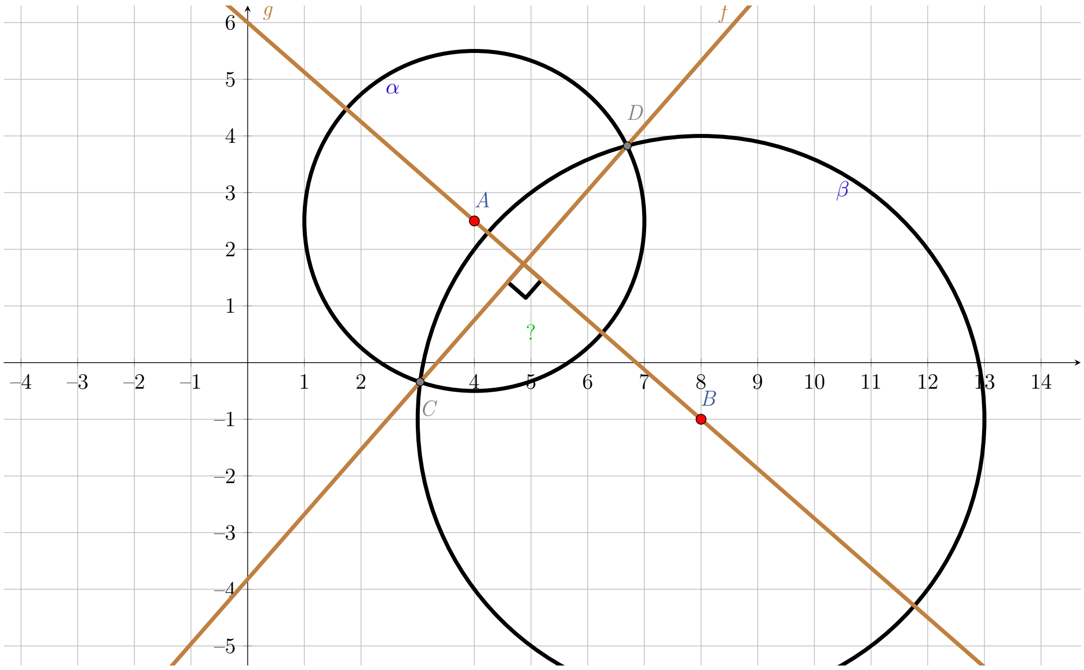
iii) $t$ é a bissetriz dos quadrantes ímpares

iv) $\theta \cap t = \{A, B\}$

v) $\mu \cap t = \{C, D\}$

Nessas condições, determine o valor da área do $\triangle OBD$.

20. Observe a figura abaixo:




A circunferência $\alpha$ tem centro em $A(4, \frac{5}{2})$ e a circunferência $\beta$ tem centro em $B(8, -1)$. Sabe-se que:

i) $\alpha \cap \beta = \{C, D\}$.

ii) $\overline{AC} = 3$

iii) $\overline{BD} = 5$

Nessas condições, indique:

a) a área do $\triangle ABC$

b) o ponto de intercessão das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$

c) o ponto de intercessão da reta $\overleftrightarrow{AB}$ com o eixo das abscissas

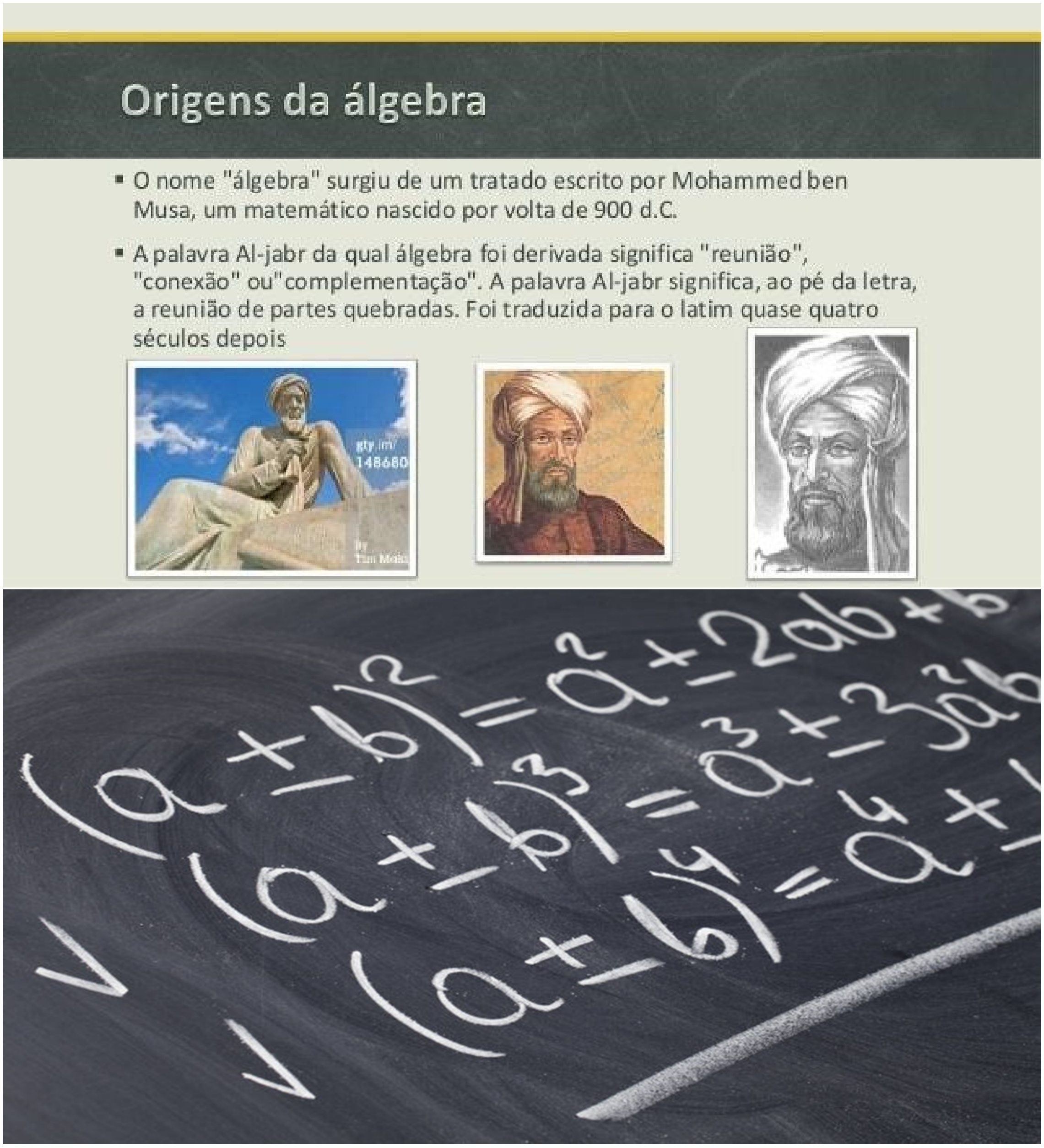
d) o ponto de intercessão da reta $\overleftrightarrow{CD}$ com o eixo das ordenadas

e) a posição relativa das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$

CAPÍTULO 9

# Polinômios

## 9.1 Contextualização



## 9.2 Polinômio e função polinomial

Estudar polinômios justifica-se por sua importância dentro da Matemática e aplicação em outras áreas correlatas.

Veremos que, para além de seu conceito e sua definição, os polinômios ou funções polinomiais podem ser expressas por expressões algébricas das mais distintas formas, desde aquelas que envolvem apenas números, até as que apresentam diversas variáveis, potências e coeficientes.

A palavra polinômio (**poli+nom+io**) origina-se do grego, onde *polýs* significa muito e *nómos*, elemento.

**Conceito 9.1** *Polinômio:*
*Chamamos de polinômios aquelas expressões que traduzem uma união de monômios, obtida pela interposição dos operadores aritméticos $+$ ou $-$ entre dois ou mais monômios (termos do polinômio).*

**Definição 9.1** *Polinômio e Função Polinomial:*
*Chamamos de **função polinomial** ou, simplesmente, **polinômio** a função definida por: $p(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, onde:*

i) $a_n, a_{(n-1)}, a_{(n-2)}, a_{(n-3)}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ são os coeficientes numéricos do polinômio, ou seja, são números reais;

ii) $n$ é um número inteiro positivo e não nulo;

iii) $a_0$ é o termo independente do polinômio;

iv) neste caso, o $x$ é a variável do polinômio $p$.

Adiante em nosso estudo, extrapolaremos essa definição nos reais ($\mathbb{R}$) para outro conjunto.

Observe que, em termos de notação, existe uma sutileza entre a definição de polinômio e de função polinomial. Enquanto a segunda exige a igualdade, o primeiro não.

### Grau de um polinômio

A todo polinômio está associado um **grau**. Este se dá pelo máximo grau observado entre os graus de seus monômios, ou seja, é o maior expoente da variável dos monômios que compõem o polinômio. O coeficiente do monômio de grau máximo é chamado **coeficiente dominante** do polinômio.

Exemplos:

1) Consideremos o polinômio $p(x) = 3x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 3$:

   a) Quantos termos compõem o polinômio $p$?
   *O polinômio $p$ é composto por 5 termos, sendo eles: $3x^4$, $-x^3$, $3x^2$, $-5x$ e 6.*

   b) Qual é a variável do polinômio $p$?
   *A variável é a letra $x$.*

   c) Qual é a soma dos coeficientes numéricos do polinômio $p$?
   *Os coeficientes numéricos são: $3, -1, 3, -5$ e 6. A soma deles é:*
   $3 - 1 + 3 - 5 + 6 = 0$.

Exemplos:

d) Qual o grau do polinômio $p$?
*O termo de maior grau no polinômio $p$ é $3x^4$, então o grau do polinômio $p$ é 4.*

2) Dado o polinômio $g(x) = (k^2 - 9)x^3 + (k - 3)x^2 - 5x + 7$, em que $k \in \mathbb{R}$, determine:

a) os valores de $k$ para que $g$ tenha grau igual a 3.
*O grau de $g$ será 3 se o coeficiente numérico do termo $(k^2 - 9)x^3$ for diferente de zero, ou seja, $k^2 - 9 \neq 0$, isto é, $k \neq 3$ e $k \neq -3$. Note que se $k$ assumir o valor $-3$ ou 3, o termo de $x^3$ se anula e o polinômio $g$ deixa de ter grau 3.*

b) os valores de $k$ para que $g$ tenha grau igual a 2.
*Para que o polinômio $g$ tenha grau 2 é necessário que o termo de $x^3$ se anule e o termo de $x^2$ não seja nulo. Para atender às duas condições expostas anteriormente é necessário que $k$ assuma o valor de $-3$, pois este é o único valor que atende as duas condições simultaneamente. Portanto se $k = -3$, então o polinômio $g$ é: $g(x) = -6x^2 - 5x + 7$.*

c) os valores de $k$ para que $g$ tenha grau igual a 1.
*Para que o polinômio $g$ tenha grau 1 é necessário que os termos de $x^3$ e $x^2$ sejam nulos. Para atender à condição exposta anteriormente é necessário que $k$ assuma o valor de 3, pois este é o único valor que atende a condição exposta no exemplo. Portanto se $k = 3$, então o polinômio $g$ é: $g(x) = -5x + 7$.*

3) Polinômio nulo:

Um polinômio é denominado nulo quando todos os seus coeficientes numéricos são iguais a zero.
$p(x) \equiv 0$
Ao polinômio nulo não se define grau.

Quais devem ser os valores das constantes $a$ e $b$ para que o polinômio $f(x) = (a + b - 1)x^2 + (2a - b - 8)x$ seja identicamente nulo?
Para que $f$ seja dito nulo, os coeficientes numéricos de seus termos devem ser todos iguais a zero. Então, temos:

$$\begin{aligned} a + b - 1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad a + b = 1 \\ 2a - b - 8 = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2a - b = 8 \end{aligned}$$

Com a duas equações acima temos um sistema linear; basta resolvê-lo e temos os valores das constantes $a$ e $b$.

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a - b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a - b = 8 \end{cases} + \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 3 \end{cases}$$

Portanto, os valores de $a$ e $b$ são respectivamente 3 e $-2$.

## Polinômios idênticos

Dois polinômios são idênticos, quando, escritos na forma geral, têm os coeficientes de um iguais aos coeficientes do termo de mesmo grau do outro.

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ q(x) &= b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0 \end{aligned}$$

$$p \text{ é idêntido à } q \iff a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \ldots,\ a_n = b_n.$$

Uma notação para polinômios idênticos: $p(x) \equiv q(x)$.

Exemplos:

1) Determinemos os valores de $a$, $b$ e $c$ para que os polinômios $p(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 1$ e $q(x) = ax^3 + x^2 + bx + c$ sejam iguais.

   Como vimos, para que $p(x) \equiv q(x)$, eles precisam ter os mesmos coeficientes. Assim $a = 2$, $b = 4$ e $c = 1$.

2) Considerando que $a$, $b$ e $c$ são constantes reais, tais que, para todo número real $x \neq 0$ e $x \neq 3$, $\dfrac{8x^2 - 13x + 27}{x(x-3)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-3} + \dfrac{c}{(x-3)^2}$, calcule a soma $a + b + c$, desprezando a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

   Vamos manipular algebricamente o lado direito da igualdade, calculando inicialmente o m.m.c dos denominadores $x$, $(x-3)$ e $(x-3)^2$, que é $x(x-3)^2$. Logo:

$$\begin{aligned} \frac{8x^2 - 13x + 27}{x(x-3)^2} &= \frac{a(x-3)^2 + b\,x(x-3) + cx}{x(x-3)^2} \\ &= \frac{a(x^2 - 6x + 9) + bx^2 - 3bx + cx}{x(x-3)^2} \\ &= \frac{ax^2 - 6ax + 9a + bx^2 - 3bx + cx}{x(x-3)^2} \\ &= \frac{ax^2 + bx^2 - 6ax - 3bx + cx + 9a}{x(x-3)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (-6a - 3b + c)x + 9a}{x(x-3)^2} \\ \frac{8x^2 - 13x + 27}{x(x-3)^2} &= \frac{(a+b)x^2 + (-6a - 3b + c)x + 9a}{x(x-3)^2} \end{aligned}$$

   Como os denominadores são iguais, basta que os termos dos numeradores também o sejam. Dessa forma,

$$\left\{ \begin{array}{r} a + b = 8 \\ (-6a - 3b + c) = -13 \\ 9a = 27 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} a + b = 8 \\ (-6a - 3b + c) = -13 \\ a = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} 3 + b = 8 \\ (-6a - 3b + c) = -13 \\ a = 3 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{r} b = 5 \\ (-6a - 3b + c) = -13 \\ a = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} b = 5 \\ (-6\,.\,3 - 3\,.\,5 + c) = -13 \\ a = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} b = 5 \\ -18 - 15 + c = -13 \\ a = 3 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b = 5 \\ c = 20 \\ a = 3 \end{array} \right.$$

   Somando $a + b + c$, como quer o exemplo, temos 28.

### 9.2.1 Atividades propostas

*Respostas na pág. 205.*

1. Determine $m$ a fim de que o grau de $p(x) = mx^2 - 5x + 7$ seja igual a 2.
2. Qual deve ser o valor de $k$ para que o grau de $f(x) = (k^2 - 16)x^3 + 7x^2 - 5x + 1$ seja igual a 2?
3. Dado o polinômio $g(x) = (-k^2 + 36)x^8 + (k - 6)x^5 - 3x^3 + x + 7$, em que $k \in \mathbb{R}$, determine:
   a) os valores de $k$ para que $g$ tenha grau igual a 5.
   b) os valores de $k$ para que $g$ tenha grau igual a 3.
   c) os valores de $k$ para que $g$ tenha grau igual a 8.
4. O polinômio $f(x) = (a + b)x^2 + (2a - b + 9)x - 5$ pode ter grau zero? Se sim, em que condições isso ocorre?
5. Calcular $a$, $b$ e $c$, sabendo-se que $f(x) = x^2 - 2x + 1$ e $g(x) = a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x + 1)$ são polinômios idênticos.
6. Determine os valores de $a$, $b$, $c$ e $d$ para que os dois polinômios $p$ e $q$ sejam idênticos: $p(x) = (a + b)x^3 + x^2 + d$ e $q(x) = 5x^3 + (b - a)x^2 + (c + d)x - 4$
7. Se os polinômios $s(x) = (3 - q)x^3 + (2p - 1)x + 5$ e $r(x) = 7x^3 + 2x + 5$ são idênticos, então quanto vale $p^2 - q^2$?
8. Se os polinômios $f(x) = x^2 - x + 4$ e $h(x) = (x - a)^2 + (x + b)$ são idênticos, então calcule $a + b$.

*Respostas na pág. 205.*

## 9.3 Valor numérico e raiz de um polinômio

Para falarmos sobre **valor númerico** e **raiz** de um polinômio, vamos consdiderar $\beta$ um número real e $p$ um polinômio qualquer definido por $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que:

$$p(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

O valor numérico de $p$ em $\beta$ é o valor obtido quando substituímos a variável $x$ pelo número real $\beta$ e efetuamos as operações indicadas, isto é:

$$p(\beta) = a_n \beta^n + a_{(n-1)} \beta^{(n-1)} + \cdots + a_2 \beta^2 + a_1 \beta + a_0.$$

O **valor numérico** diz respeito ao valor obtido quando calculamos uma função polinomial (ou polinômio) com um determinado valor para a variável $x$.

No estudo do valor numérico de um polinômio, notamos que, para cada valor que atribuímos à variável $x$, encontramos um valor numérico para o polinômio.

A **raiz** de um polinômio é denotada pelo valor que a variável assume de modo que o valor numérico do polinômio seja igual a 0 (zero), ou seja, $\beta$ é raiz do polinômio $p$ se, e somente se, $p(\beta) = 0$. Em linguagem matemática, temos que:

$$\beta \text{ é raiz do polinômio } p \iff p(\beta) = 0$$

Exemplos:

1) Calculemos o valor numérico do polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ para os seguintes valores: $1, -1, -2$ e $2$. Em seguida, verifiquemos se algum desses valores é a raiz do polinômio.

   Caso 1 seja raiz, teremos que $p(1) = 0$. Vamos verificar se isso é verdade:

$$p(1) = 1^3 - 2.1^2 - 1 + 2 = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$$

   Portanto, o valor $x = 1$ é uma das raízes do polinômio $p$.

   Da mesma forma, caso $-1$ seja raiz, teremos que $p(-1) = 0$. Verifiquemos:

$$p(-1) = (-1)^3 - 2.(-1)^2 - (-1) + 2 = -1 - 2 + 1 + 2 = 0$$

   Portanto, o valor $x = -1$ também é uma das raízes do polinômio $p$.

   Igualmente, caso $-2$ seja raiz de $p$, teremos que $p(-2) = 0$. Vejamos:

$$p(-2) = (-2)^3 - 2.(-2)^2 - (-2) + 2 = -8 - 8 + 2 + 2 = -12$$

   Portanto, o valor $x = -2$ não é uma das raízes do polinômio $p$.

   Por fim, caso 2 seja raiz, teremos que $p(2) = 0$. Verifiquemos:

$$p(2) = 2^3 - 2.2^2 - 2 + 2 = 8 - 8 - 2 + 2 = 0$$

   Portanto, o valor $x = 2$ também é uma das raízes do polinômio $p$.

2) Sabendo que $x = -3$ é raiz do polinômio $p(x) = 2x^3 + mx^2 - 5x + 3$, vamos determinar o valor de $m$.

   Se $x = -3$ é raiz do polinômio $p$, então $p(-3) = 0$. Portanto, basta substituir $x$ por $-3$ no polinômio, igualar a zero e resolver a equação, assim encontraremos o valor de $m$. Vejamos:

$$\begin{array}{rcl} p(-3) = 0 & = & 2.(-3)^3 + m.(-3)^2 - 5.(-3) + 3 \\ 0 & = & 2.(-3)^3 + m.(-3)^2 - 5.(-3) + 3 \\ 0 & = & 2.(-27) + m.9 + 15 + 3 \\ 0 & = & 9m - 54 + 15 + 3 \\ 36 & = & 9m \\ 4 & = & m \end{array}$$

3) Determine $a$ e $b$ em $p(x) = -3x^4 + ax^3 - 5x^2 + bx - 2$ , sabendo que 1 é raiz de $p$ e que $p(2) = -80$.

   Se 1 é raiz de $p$, então temos que $p(1) = 0$. Então:

$$\begin{array}{rcl} p(1) = 0 & = & -3.1^4 + a.1^3 - 5.1^2 + b.1 - 2 \\ 0 & = & -3 + a - 5 + b - 2 \\ 10 & = & a + b \end{array}$$

Do Exemplo 1, podemos observar que, dos quatro valores verificados, três deles são raízes de um polinômio. Uma pergunta interessante seria: quantas raízes um polinômio pode admitir?

Exemplos:

Se $p(2) = -80$, então temos que:

$$\begin{array}{rcrcl} p(2) & = & -80 & = & 3.2^4 + a.2^3 - 5.2^2 + b.2 - 2 \\ & & -80 & = & -48 + 8a - 20 + 2b - 2 \\ & & -10 & = & 8a + 2b \\ & & -5 & = & 4a + b \end{array}$$

Das duas últimas igualdades, temos que:

$$\left\{ \begin{array}{r} a + b = 10 \\ 4a + b = -5 \end{array} \right. \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -5 \\ b = 15 \end{array} \right.$$

Portanto, a = -5 e b = 15.

### 9.3.1 Atividades propostas

*Respostas na pág. 205.*

1. Indique os valores da constante $k$ nos polinômios seguintes:

   a) $p(x) = x^3 + 7x^2 - kx + 3$, sabendo que $p(-1) = 0$.

   b) $q(x) = 4x^4 - 8x^3 - (k + 5)x^2 + (3k - 2)x + 5 - k$, sabendo que $q(2) = 0$.

2. Indique os valores de $a$ e de $b$ nos polinômios seguintes:

   a) $p(x) = x^3 + (a - 2)x^2 + (b - a)x - 3$, sabendo que $p(1) = p(-1) = 0$.

   b) $q(x) = x^3 + ax^2 + (b - 18)x + 1$, sabendo que 1 é raiz de $q$ e $q(2) = 25$.

3. Determine $k$ de modo que 2 seja uma das raízes do polinômio $t(x) = x^3 + kx^2 + 20x - 12$.

4. Calcule o valor numérico do polinômio $p(x) = 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 5x + 16$ para cada valor de $x$.

   a) $x = \frac{1}{2}$

   b) $x = \sqrt{3}$

   c) $x = \pi$

   d) $x = 0$

5. Calcule o valor de $m$, sabendo que $f(y) = y^3 + 4y^2 + my - 3$ possui uma raiz igual a $-2$.

6. (SILVA JÚNIOR, 2021) No estudo do movimento uniformemente variado, a equação de Torricelli possui extrema importância por ser a única a relacionar espaço percorrido, velocidade e aceleração de um móvel sem depender do tempo. Essa equação leva o nome do físico italiano Evangelista Torricelli, responsável por importantes invenções e descobertas científicas no século XVII.

   A Equação de Torricelli é:

   $$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta S$$

   Perceba que não existe dependência do tempo, pois os termos da equação são a velocidade final do móvel ($v$), velocidade inicial do móvel ($v_0$), aceleração ($a$) e espaço percorrido ($\Delta S$). Usando seu conhecimento sobre polinômios e a equação de Torricelli, resolva o seguinte problema:

   Um móvel partindo do repouso possui aceleração constante e igual a $5\,m/s^2$. Determine o espaço percorrido pelo móvel quando a sua velocidade for igual a $72\,km/h$.

7. (DIAS, 2021) A Segunda Lei de Newton diz que a Força é sempre diretamente proporcional ao produto da aceleração de um corpo pela sua massa, ou seja:
$$F = m.a$$
Onde:
   - $F$ é a resultante de todas as forças que agem sobre o corpo (em $N$);
   - $m$ é a massa do corpo a qual as forças atuam (em $Kg$);
   - $a$ é a aceleração adquirida (em $m/s^2$).

   A unidade de força no sistema internacional é o $N$ (Newton), que equivale a $Kg\, m/s^2$ (quilograma-metro por segundo ao quadrado). Usando seu conhecimento sobre polinômios e a equação $F = m.a$ resolva a questão a seguir:

   Quando uma força de $12\, N$ é aplicada em um corpo de $2\, Kg$, qual é a aceleração adquirida por ele?
8. Sendo $p$ um polinômio do 2° grau, e sabendo que $p(2) = 6$, $p(-3) = 15$ e $p(-1) = -7$, calcule $p(1)$.
9. Determine $k$, em $p(x) = (k^2 - 2)x^3 - 5x^2 + x - 11$, sabendo que $p(-1) = -2$.
10. Sabendo que $-1$ é raiz de $p(x) = ax^3 - 2x^2 + bx - 1$ e que $p(2) = 3$, calcule $a$ e $b$.

*Respostas na pág. 205.*

## 9.4 Operações básicas com expressões polinomiais

Operar expressões polinomiais com soma, subtração e multiplicação não deve ser novidade para um estudante do Ensino Médio. Em séries anteriores, estudam-se esses procedimentos operativos, ainda que de forma mais simplificada.

Como regra geral veremos que a manipulação algébrica de polinômios busca relacionar os coeficientes correspondentes de cada um de seus elementos. Vejamos, inicialmente, os casos da soma e subtração.

### Soma e diferença de polinômios

Adicionar expressões algébricas é, em suma, proceder à soma dos coeficientes dos termos semelhantes, isto é, aqueles que têm o mesmo índice no expoente. A mesma ideia se aplica à subtração.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplos:

Consideremos os polinômios:
$$\begin{aligned} p(x) &= 4x^5 - 2x^4 + 3x^3 + x + 1 \\ q(x) &= 7x^6 - 8x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 + 3 \\ t(x) &= 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 5x + 9 \end{aligned}$$

i) Soma $p(x) + q(x)$:
$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= \underbrace{4x^5 - 2x^4 + 3x^2 + x + 1}_{p(x)} + \underbrace{7x^6 - 8x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 + 3}_{q(x)} \\ &= 7x^6 + 4x^5 - 8x^5 - 2x^4 + x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x^2 + x + 1 + 3 \\ &= 7x^6 + (4-8)x^5 + (-2+1)x^4 + (-1)x^3 + (3+2)x^2 + x + (1+3) \\ &= 7x^6 - 4x^5 - x^4 - x^3 + 5x^2 + x + 4 \end{aligned}$$

Exemplos:

ii) Soma $t(x) + q(x)$:

$$\begin{aligned} t(x) + q(x) &= \underbrace{3x^4 + 5x^3 - x^2 + 5x + 9}_{t(x)} + \underbrace{7x^6 - 8x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 + 3}_{q(x)} \\ &= 7x^6 - 8x^5 + x^4 + 3x^4 + 5x^3 - x^3 + 2x^2 - x^2 + 5x + 9 + 3 \\ &= 7x^6 - 8x^5 + (1+3)x^4 + (5-1)x^3 + (2-1)x^2 + 5x + (9+3) \\ &= 7x^6 - 8x^5 + 4x^4 + 4x^3 + x^2 + 5x + 12 \end{aligned}$$

iii) Subtração $q(x) - t(x)$:

$$\begin{aligned} q(x) - t(x) &= \underbrace{7x^6 - 8x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 + 3}_{q(x)} - \underbrace{(3x^4 + 5x^3 - x^2 + 5x + 9)}_{t(x)} \\ &= 7x^6 - 8x^5 + x^4 - (3x^4 + 5x^3) - x^3 + 2x^2 - (-x^2 + 5x + 9)\, 3 \\ &= 7x^6 - 8x^5 + (1-3)x^4 + (-5-1)x^3 + (2+1)x^2 - 5x + (-9+3) \\ &= 7x^6 - 8x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 5x - 6 \end{aligned}$$

iv) Subtração $p(x) - t(x)$:

$$\begin{aligned} p(x) - t(x) &= \underbrace{4x^5 - 2x^4 + 3x^3 + x + 1}_{p(x)} - \underbrace{(3x^4 + 5x^3 - x^2 + 5x + 9)}_{t(x)} \\ &= 4x^5 - 2x^4 - (3x^4 + 5x^3) + 3x^3 - (-x^2 + 5x) + x + 1 - 9 \\ &= 4x^5 + (-2-3)x^4 + (-5+3)x^3 + x^2 + (-5+1)x + (1-9) \\ &= 4x^5 - 5x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x - 8 \end{aligned}$$

Nos casos de soma e subtração de polinômios, o grau do polinômio resultante será o mesmo do polinômio de maior grau (máximo), ou seja:

$$gr(p \pm q) = max\{gr(p), gr(q)\}$$

Estamos a utilizar a notação $p(x) \pm q(x)$ para indicar a soma ou subtração de dois polinômios quaisquer $p$ e $q$. Outra notação aceita seria $(p \pm q)(x)$.

É importante dizer que não somamos polinômios definidos em variáveis distintas. Nos exemplos anteriores, os três polinômios tinham a mesma variável $(x)$, o que tornou possível a manipulação algébrica de soma e diferença nos termos com o mesmo expoente.

Lembremos que um polinômio (ou expressão polinomial) está sempre associado a uma função polinomial. Dessa maneira, ao somarmos polinômios definidos em variáveis distintas, estaremos criando nova função, porém agora definida em vários variáveis.

Vejamos um exemplo:

Exemplos:

Consideremos um polinômio associado à função polinomial $f$, com variável $x$, conforme segue (renomearemos $f$ para $z_1$ apenas por praticidade na manipulação da expressão):

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 3 \\ z_1 &= 2x^2 + 3 \end{aligned}$$

Igualmente, consideremos agora um polinômio associado à função polinomial $g$ com variável $y$:

$$\begin{aligned} g(y) &= y - 5 \\ z_2 &= y - 5 \end{aligned}$$

Exemplos:

Para proceder à soma dos dois polinômios, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
f(x) + g(y) = z_1 + z_2 &= 2x^2 + 3 + y - 5 \\
z_3 &= 2x^2 + y - 2 \\
z &= 2x^2 + y - 2 \\
h(x, y) &= 2x^2 + y - 2
\end{aligned}
$$

Podemos observar que a soma resultante é uma função $(h)$ definida em duas variáveis $(x, y)$, ou seja, não mais um polinômio.

### Multiplicação de polinômios

A multiplicação de polinômios pode ser separada em dois casos. Em ambos aplica-se a **propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição**, de modo que, em cada termo multiplicado, deve-se ter especial atenção na multiplicação dos coeficientes e das variáveis, esta última obtida pela soma dos seus expoentes.

Vejamos os exemplos:

Exemplos:

Consideremos os polinômio $p(x) : x^5 - 2x^4 + 3x^3 + x + 1$ e $m(x) : 2x - 1$.

1) **Multiplicação de um polinômio por uma constante**

$$
\begin{aligned}
3\,.\,p(x) &= 3\,.\,(4x^5 - 2x^4 + 3x^3 + x + 1) \\
3\,.\,p(x) &= 3\,.\,(4x^5 - 2x^4 + 3x^3 + x + 1) \\
3\,.\,p(x) &= (3\,.\,4)x^5 + (3\,.\,(-2))x^4 + (3\,.\,3)x^3 + (3\,.\,1)x + (3\,.\,1) \\
&= 12x^5 - 6x^4 + 9x^3 + 3x + 3
\end{aligned}
$$

2) **Multiplicação de um polinômio por outro**

$$
\begin{aligned}
m(x)\,.\,p(x) &= (2x - 1)\,.\,(4x^5 - 2x^4 + 3x^3 + x + 1) \\
m(x)\,.\,p(x) &= (2x - 1)\,.\,(4x^5 - 2x^4 + 3x^3 + x + 1) \\
m(x)\,.\,p(x) &= (2\,.\,4)x^{1+5} + (2\,.\,(-2))x^{1+4} + (2\,.\,3)x^{1+3} + (2\,.\,1)x^{1+1} + (2\,.\,1)x \\
& \quad (-1\,.\,4)x^5 + (-1\,.\,(-2))x^4 + (-1\,.\,3)x^3 + (-1\,.\,1)x + (-1\,.\,1) \\
&= 8x^6 - 4x^5 + 6x^4 + 2x^2 + 2 - 4x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x - 1 \\
&= 8x^6 - 4x^5 - 4x^5 + 6x^4 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2 - 1 \\
&= 8x^6 + (-4 - 4)x^5 + (6 + 2)x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + (2 - 1) \\
&= 8x^6 - 8x^5 + 8x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1
\end{aligned}
$$

Podemos dizer que o primeiro caso é um caso particular do segundo.

No primeiro caso, notamos que o grau do polinômio resultado do produto é o mesmo daquele multiplicado por uma constante $\lambda$ qualquer, ou seja:

$$gr(p) = gr(\lambda.p)$$

Já no segundo caso, o grau do produto dos polinômios é igual à soma dos graus de cada um, ou seja:

$$gr(m.p) = gr(m) + gr(p)$$

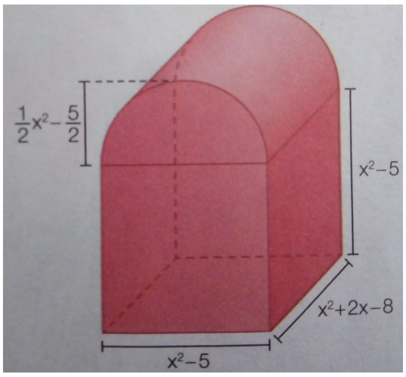
### 9.4.1 Atividades propostas

*Respostas na pág. 205.*

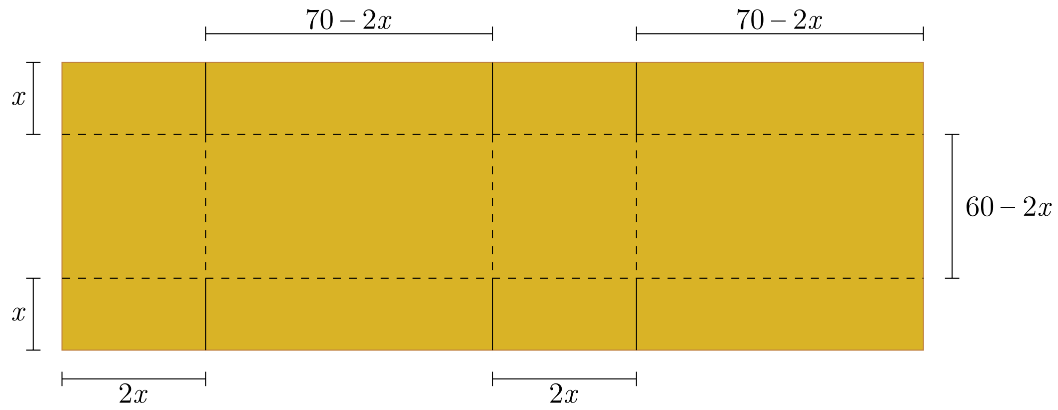
1. Qual é o produto dos polinômios $a(x) = 2x^3 - x + 6$ e $b(x) = x^2 - 5x + 3$?
2. Qual é o polinômio oposto à $n(x) = -2x^2 + 5x + 2$?
3. Considerando os polinômios seguintes, indique o que se pede em cada item:
   $p(x) = 5x^4 + 3x^2 - 2x - 1,\ q(x) = 2x^3 + 4x + 3,\ r(x) = \frac{1}{3}x^2 + x - 2.$
   a) $p(x) + q(x)$
   b) $q(x) - p(x)$
   c) $p(x) \cdot q(x)$
   d) $q(x) \cdot r(x)$
   e) $[r(x)]^2$
4. Considere os polinômios $p(x) = ax^2 - 8x + b$ e $s(x) = 3x^2 - bx + a - c$. Para quais valores de $a$, $b$ e $c$ é nulo o polinômio $p(x) + s(x)$?
5. (SOUZA, 2013b) Um armazém utilizado para estocar grãos pode ser decomposto em duas partes, sendo uma com forma de paralelepípedo reto, e outra, de semicilindro reto, conforma a figura ao lado.

   a) Determinar o polinômio $v(x)$ que corresponde à capacidade desse armazém.
   b) Qual a capacidade de armazenagem para $x = 3\,m$?

   *(Apesar de improvável, considere que todo o interior do armazém como sendo sua capacidade.)*




6. A figura abaixo exemplifica o molde de uma caixa de papelão que, após montada, tem forma de paralelepípedo. O molde é construído com um papelão retangular de medidas $140\,cm \times 60\,cm$. As linhas contínuas são cortes no papelão e as tracejadas são vincos pelos quais o papelão é dobrado e a caixa, montada.




De acordo com a figura apresentada e os dados detalhados, determine:

a) Quais são as dimensões da caixa?

b) Existe alguma condição para os valores da variável $x$?

c) Qual expressão nos dá o volume dessa caixa?

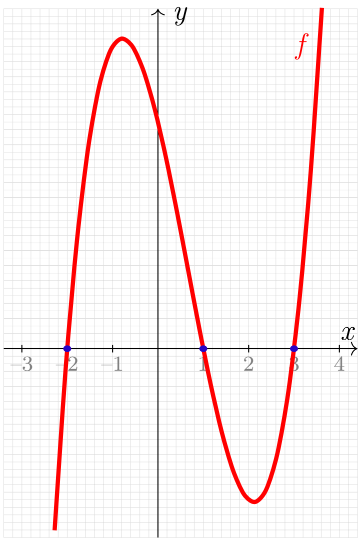
d) Qual o volume dessa caixa se $x = 10$?

e) Qual o volume dessa caixa se $x = 11$?

f) Qual o volume dessa caixa se $x = 15$?

g) Qual o valor de $x$ para que o volume seja máximo?

7. (BALESTRI, 2016b) O gráfico abaixo apresenta todos os pontos em que $f$ toca no eixo das abscissas.




Sendo $g(x) = x^2 + (k-1)x - 2$ e $h(x) = x - (k+1)$, determine o valor de $k$, sabendo que a função polinomial representada graficamente corresponde a $f(x) = g(x)\,.\,h(x)$.

*Respostas na pág. 205.*

## Divisão de polinômios

Dados dois polinômios $p(x)$ e $h(x)$, com $h$ não-nulo, dividir $p$ por $h$, significa encontrar dois polinômios $q(x)$ e $r(x)$ que satisfaçam as seguintes condições:

1ª) $p(x) = h(x)\,.\,q(x) + r(x)$ onde $p(x)$ é chamado de dividendo, $h(x)$ de divisor, $q(x)$ de quociente e $r(x)$ de resto.

2ª) o grau de $r(x)$ não pode ser igual ou maior que o grau de $h(x)$.

### Método da chave

Um possível esquema de divisão é apresentado a seguir:

$$\begin{array}{r|l}
p(x) & h(x) \\ \cline{2-2}
-r(x) & q(x)
\end{array}$$

Podemos denominar este esquema de **método da chave**. Ele é idêntico ao que usamos para dividir números reais.

Exemplos:

1) Vamos efetuar a divisão do polinômio $p(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ pelo polinômio $h(x) = x + 4$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + x^2 - x + 1 & x + 4 \\ \cline{2-2}
-x^3 - x^2 \qquad\qquad & x^2 - 3x + 11 \\ \cline{1-1}
-3x^2 - x + 1 & \\
3x^2 + 12x \quad & \\ \cline{1-1}
11x + 1 & \\
-11x - 44 & \\ \cline{1-1}
-43 &
\end{array}
$$

Seguiremos o seguinte roteiro:

i) Escrevemos os dois polinômios em ordem decrescente de grau.

ii) Completamos o dividendo, caso falte algum termo de grau intermediário, através do coeficiente zero.

iii) Utilizando o mesmo algoritmo da divisão numérica, dividimos o primeiro termo de $p$ pelo primeiro termo de $h$: $\frac{x^3}{x} = x^2$.

iv) Multiplicamos o quociente obtido por $h$ e subtraímos o resultado de $p$, encontrando o 1º resto parcial.

v) Dividimos o primeiro termo do 1º resto parcial pelo primeiro termo de $h$. Multiplicamos o quociente obtido por $p$ e subtraímos do 1º resto parcial, obtendo o 2º resto parcial: $\frac{-3x^2}{x} = -3x$.

vi) Repetimos esse procedimento até que o grau do resto seja menor que o grau do divisor: $\frac{11x}{x} = 11$.

Neste exemplo temos $q(x) = x^2 - 3x + 11$ e $r(x) = -43$.

Observemos que o $gr(q) = gr(p) - gr(h)$ e que $h(x) \,.\, q(x) + r(x) = p(x)$.

2) Vamos dividir o polinômio $a(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 1$ por $b(x) = x^2 - 2x + 3$.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 - 3x^3 + 0x^2 + x - 1 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2}
-2x^4 + 4x^3 - 6x^2 \qquad\qquad & 2x^2 + x - 4 \\ \cline{1-1}
x^3 - 6x^2 + x - 1 & \\
-x^3 + 2x^2 - 3x \quad & \\ \cline{1-1}
-4x^2 - 2x - 1 & \\
4x^2 - 8x + 12 & \\ \cline{1-1}
-10x + 11 &
\end{array}
$$

Seguiremos o seguinte roteiro:

i) Escrevemos os dois polinômios em ordem decrescente de grau.

ii) Completamos o dividendo, caso falte algum termo de grau intermediário, através do coeficiente zero: $2x^4 - 3x^3 + 0x^2 + x - 1$.

iii) Utilizando o mesmo algoritmo da divisão numérica, dividimos o primeiro termo de $a$ pelo primeiro termo de $b$: $\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$.

iv) Multiplicamos o quociente obtido por $b$ e subtraímos o resultado de $a$, encontrando o 1º resto parcial.

v) Dividimos o 1º termo do 1º resto parcial pelo primeiro termo de $b$. Multiplicamos o quociente obtido por $a$ e subtraímos do 1º resto parcial, obtendo o 2º resto parcial: $\frac{x^3}{x^2} = x$.

vi) Repetimos esse procedimento até que o grau do resto seja menor que o grau do divisor.

Neste exemplo temos $q(x) = x^2 - 3x + 11$ e $r(x) = -43$.

Observemos que o $gr(q) = gr(a)\breve{\ }gr(b)$ e que $b(x) \,.\, q(x) + r(x) = a(x)$

### Método da comparação dos termos (ou de Descartes)

O método em questão consiste em obter os coeficientes dos polinômios *quociente* e *divisor* a partir da relação:

$$p(x) = q(x) \, . \, d(x) + r(x)$$

**Exemplo:**

Vamos obter o quociente e o resto da divisão de $p(x) = 6x^3 - 7x^2 + 2x + 5$ por $d(x) = 3x^2 - 5x + 3$ pelo método de Descartes.

Observemos que $gr(q) = gr(p) - gr(d) = 1$. Assim, $q(x)$ é um polinômio de grau 1: $q(x) = ax = +b$, com $a \neq 0$. Quanto ao resto, ou ele é o polinômio nulo ou seu grau não pode exceder a 1 (o grau do divisor é 2). Logo, $r(x) = cx + d$.

Como $p(x) = q(x) \, . \, d(x) + r(x)$, temos que:

$$\begin{aligned}
6x^3 - 7x^2 + 2x + 5 &= (ax + b) \, . \, (3x^2 - 5x + 3) + (cx + d) \\
6x^3 - 7x^2 + 2x + 5 &= 3ax^3 - 5ax^2 + 3x + 3bx^2 - 5x + 3 + cx + d \\
6x^3 - 7x^2 + 2x + 5 &= 3ax^3 + (-5a + 3b)x^2 + (3a - 5b + c)x + (3b + d)
\end{aligned}$$

Ao fazer a correspondência entre os coeficientes dos polinômios, obtemos:

- $6 = 3a \Rightarrow a = 2$
- $-7 = -5a + 3b \Rightarrow b = 1$
- $2 = 3a - 5b + c \Rightarrow c = 1$
- $5 = 3b + d \Rightarrow d = 2$

Como $q(x) = ax + b$ e $r(x) = cx + d$, temos que $q(x) = 2x + 1$ e $r(x) = x + 2$.

### Divisão por binômios de tipo $x - a$

Vamos agora estudar um caso particular de divisão de polinômios, aquele em que o divisor é um binômio de grau 1 do tipo $x + a$, sendo $a$ um número real. Estudamos esse tipo de divisão a partir de dois dispositivos: o **Teorema do Resto** e o dispositivo prático de divisão denominado **Dispositivo de Briot-Ruffini**.

Para melhor entender o Teorema do Resto e depois enuciá-lo, vamos efetuar, pelo método da chave, a divisão de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ por $g(x) = x - 3$.

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 4x^2 + 5x - 2 & x - 3 \\ \cline{2-2}
-x^3 + 3x^2 \qquad\qquad & x^2 - x + 2 \\ \cline{1-1}
-x^2 + 5x - 2 & \\
x^2 - 3x \qquad & \\ \cline{1-1}
2x - 2 & \\
-2x + 6 & \\ \cline{1-1}
4 &
\end{array}$$

Notemos que:

i) Como vimos, em qualquer divisão temos o $gr(r) < gr(g)$. Como o $gr(g) = 1$, devemos ter $gr(r) < 1$, ou seja, $gr(r) = 0$. Logo, o resto é um número real independente de $x$.

ii) A raiz do divisor $g(x)$ é $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$. Agora, calculando $f(3)$, temos: $f(3) = 3^3 - 4.3^2 + 5.3 - 2 = 27 - 36 + 15 - 2 = 4$, portanto $f(3) = 4$. O valor encontrado para $f(3)$ é igual ao resto obtido na divisão. Assim $r = f(3)$.

**Teorema 9.1** *Teorema do Resto:*
*Sendo $a$ uma constante qualquer, o resto $r$ da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x - a$ é igual a $p(a)$, ou seja, $r = p(a)$.*

Assim, na divisão de um polinômio $p(x)$ por $h(x) = x - a$, temos que:

$$p(x) = (x - a)\,.\,q(x) + r$$

Fazendo $x = a$ e calculando $p(a)$, obtemos:

$$p(a) = \underbrace{(a - a)}_{0}\,.\,q(x) + r \Rightarrow p(a) = r$$

Exemplos:

1) Vamos calcular o resto da divisão de $p(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 3$ por $h(x) = x - 4$.

   Pelo Teorema do Resto, temos que:

   $$p(4) = 2(4)3 - (4)2 + 5(4) - 3 = 128 - 16 + 20 - 3 = 129$$

   Logo, o resto da divisão é 129.

2) Vamos determinar o valor de a de modo que o polinômio $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - ax + 2$ seja divisível por $h(x) = x - 2$.

   Se $p$ é divisível por $h$, o resto da divisão deve ser 0. Assim, pelo Teorema do Resto, temos:

   $$\begin{array}{rcl} p(2) & = & 0 \\ 2(2)^3 + 5(2)^2 - a(2) + 2 & = & 0 \\ 16 + 20 - 2a + 2 & = & 0 \\ 2a & = & 38 \\ a & = & 19 \end{array}$$

   Logo, $a = 19$.

Uma importante consequência do Teorema do Resto é o **Teorema de d'Alembert**, enunciado da seguinte maneira:

**Teorema 9.2** *Teorema de d'Alembert:*
*Sendo $a$ uma constante qualquer, um polinômio $p(x)$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, $a$ é raiz de $p(x)$, ou seja, $p(a) = 0$.*

**Exemplo:**

Verifiquemos, pelo Teorema de d'Alembert, se o polinômio $p(x) = -x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 13x + 4$ é divisível por $h(x) = x - 4$.

Como $a = 4$, temos:

$$\begin{aligned} p(4) &= -4^5 + 4.4^4 + 2.4^3 - 5.4^2 - 13.4 + 4 \\ &= -1024 + 1024 + 128 - 80 - 52 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $p(4) = 0$, podemos afirmar que $p(x)$ é divisível por $h(x)$.

Há um dispositivo que permite efetuar as divisões por polinômio do tipo $x - a$ de uma maneira bastante simples e prática, chamada de **Dispositivo de Briot-Ruffini**.

**Dispositivo de Briot-Ruffini:**
Em homenagem aos matemáticos Charles Briot (1817-1882) e Paolo Ruffini (1765-1822).

Vejamos os esquema do dispositivo:

| | | |
|---|---|---|
| termo constante do divisor (com sinal trocado) | coeficientes de $x$ do dividendo $p(x)$ | termo constante do dividendo $p(x)$ |
| | coeficientes do quociente $x$ | resto |

Vamos aplicar o esquema para entendermos melhor como ele funciona, dividindo o polinômio $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ por $h(x) = x - 2$.

Utilize os comandos abaixo do esquema para visualizar o passo-a-passo do cálculo da divisão. Porém, na maioria dos navegadores de Internet a animação abaixo não ficará disponível. Baixe o PDF e visualize-o no Adobe, Foxit etc.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | $-5$ | 1 | $-2$ |
| | 3 | 1 | 3 | 4 |
| | | $d(x)$ | | $r(x)$ |

Uma síntese do passo-a-passo feito no Dispositivo de Briot-Ruffini poderia ser assim descrita:

- Repetimos, no quociente, o coeficiente dominante do dividendo;
- Multiplicamos esse coeficiente repetido pelo valor de $a$ e somamos o produto com o próximo coeficiente do dividendo para obter o próximo coeficiente do quociente;

- Repetimos os dois passos anteriores para obter o novo termo do quociente, e assim sucessivamente, até chegarmos ao último coeficiente do quociente.

A partir desse algoritmo chegamos que $q(x) = 3x^2 + x + 3$ e $r(x) = 4$, ou seja, temos que:

$$\begin{aligned} p(x) &= h(x).d(x) + r \\ 3x^3 - 5x^2 + x - 2 &= (x-2)(3x^2 + x + 3) + 4 \end{aligned}$$

e que 2 é uma raiz do polinômio. Portanto, através desse processo é possível também encontrar as raízes dos polinômios.

O esquema abaixo, utiliza de uma aparência semelhante à chave utilizada no método da chave, mas aplica o mesmo Dispositivo de Briot-Ruffini; porém de forma mais completa, digamos.

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -5 & 1 & -2 \\ 2 & & 6 & 2 & 6 \\ \hline & 3 & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

A diferença, nesse esquema, é que cada elemento da segunda linha dentro da chave corresponde ao produto do coeficiente anterior do divisor por $a$ (primeira parte do segundo passo do passo-a-passo anterior). Este produto deve ainda ser somado com o coeficiente seguinte do dividendo e, por isso, é colocado sob ele.

Utilize os comandos abaixo do esquema para visualizar o passo-a-passo do cálculo da divisão. Porém, na maioria dos navegadores de Internet a animação abaixo não ficará disponível. Baixe o PDF e visualize-o no Adobe, Foxit etc.

Na animação ao lado, é possível visualizar o passo-a-passo utilizado neste esquema. Decida você, estudante, qual esquema prefere – o mais completo ou o mais enxuto – para resolver divisões por Briot-Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -5 & 1 & -2 \\ 2 & & 6 & 2 & 6 \\ \hline & 3 & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

$d(x) = 3x^2 + x + 3$

$r(x) = 4$

### 9.4.2 Atividades propostas

*Respostas na pág.* *205*.

1. Determine o resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$, em cada caso, usando o teorema do resto, sendo:

   a) $f(x) = (x-4)^2$ e $g(x) = x - 3$
   b) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 5x$ e $g(x) = x + 1$
   c) $f(x) = -2x^5 + x^4 - 6x^3 + 2x + 4$ e $g(x) = x - 2$
   d) $f(x) = x^{74} + x^{34} + x^{16} - 3$ e $g(x) = x - 1$

2. Usando o método da chave, determinar o quociente $q(x)$ e o $r(x)$ da divisão de $f(x)$ por $g(x)$, usando:

   a) $f(x) = -14x^2 + 3x - 5$ e $g(x) = 7x + 2$
   b) $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 1$ e $g(x) = x^2 - 3x$
   c) $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 - 2$
   d) $f(x) = 6x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 3$ e $g(x) = 3x^3 - 4x^2 + x - 1$

3. Em cada caso, $f(x)$ é divisível por $g(x)$. Encontre o valor de $a$.

   a) $f(x) = 4x^2 - 2x + a$ e $g(x) = 2x - 3$
   b) $f(x) = x^3 + ax + 1$ e $g(x) = x - 1$

4. Se o polinômio $2x^3 - ax^2 + bx + 2$ é divisível por $2x^2 + 5x - 2$, então qual é o valor de $a - b$?

5. Um polinômio $p(x)$, dividido por $x - 3$, deixa resto 5 e, dividido por $x + 1$, deixa resto 2. Qual é o resto da divisão de $p$ por $(x - 3).(x + 1)$?

6. Um polinômio é chamado mônico quando o coeficiente do termo de maior grau é 1. Assim, são polinômios mônicos $x^3 + 4x^2 - 5x + 3$ e $x^2 - 5$. Determine um polinômio mônico de grau 2, divisível por $x - 1$ que, quando dividido por $x + 1$, deixa resto 3.

7. Se $n \in \mathbb{N}^*$ e $p(x) = x^{n+1} - x^n - 1$:

   a) determine $n$ a fim de que o resto da divisão de $p$ por $x - 2$ seja igual a 7.
   b) qual é o resto da divisão de $p$ por $x + 1$ quando $n$ é ímpar?

8. Determine o quociente e o resto da divisão de $f$ por $g$ em cada caso, utilizado o dispositivo Briot-Ruffini:

   a) $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 3$ e $g(x) = x + 4$
   b) $f(x) = -x^4 + 5x^3 - 2x + 1$ e $g(x) = x - 1$
   c) $f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 5x + 2$ e $g(x) = x - \frac{1}{2}$
   d) $f(x) = x^5 - 1$ e $g(x) = x - 1$

*Respostas na pág. 205.*

CAPÍTULO 10

# Números Complexos e Equações Algébricas

Este capítulo será dividido em duas partes. A primeira Seção, Números Complexos, pretende estender a Definição 9.1 dada aos Polinômios no Capítulo anterior, denotando e caracterizando um novo conjunto numérico: $\mathbb{C}$. A Seção seguinte, Equações Algébricas, aborda então este conceito estendido e se desdobra, principalmente, no estudo das raízes de equações polinomiais.

## 10.1 Números Complexos

### 10.1.1 Contextualização

Resolver equações sempre foi uma curiosidade da humanidade, mas só faziam sentido se fossem formuladas a partir de um problema real. Povos antigos – babilônios, egípcios, hindus, gregos etc. – conheciam formas particulares de resolver equações de grau 2, no entanto, em vez de estruturas algébricas, muitas vezes utilizava-se de artifícios geométricos para tanto.

Tendo essa base geométrica, a ocorrência de raízes quadradas de números negativos significava a não solução daquele tipo de problema concreto que lhes eram próximos e, num primeiro momento, carentes de solução.

Antes de dos matemáticos italianos Niccolo Tartaglia, Girolamo Cardano e Ludovico Ferrari os algebristas, quando se deparavam com raízes quadradas de números reais, diziam apenas que o problema era inresolúvel.

É comum encontrar, na biografia de Cardano, traduções de seu primeiro como Gerônimo ou Gerolamo.

Porém, no século XVI isso começou a mudar com esses três matemáticos. No século XVIII, com Gauss, viu-se a abragência do conteúdo e a importância para outras áreas da Matemática e correlatas (Engenharia, Física, Sistemas dinâmicos, entre outras).

#### Linha do tempo

1500-1557: **Niccolo Tartaglia** descobriu, mas não publicou, uma fórmula geral para resolver equações do tipo $x^3 + px = q$, com $p, q \in \mathbb{R}$:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} \tag{10.1}$$

1501-1576: **Girolamo Cardano** publicou, em 1545, a obra Ars Magna, na qual, quebrando um juramento feito a Tartaglia, apresentou a fórmula descoberta por ele. Cardano assumiu isso francamente em seu livro. A solução das equações cúbicas lhe fora dada por Tartaglia; a das quárticas por Ludovico Ferrari.

1522-1565: **Ludovico Ferrari**, era amanuense de Cardano, descobriu uma solução para equações quárticas.

**Amanuense:** funcionário que escrevia à mão textos, procedia à cópias e registros diversos e cuidava de material de correspondência.

1526-1573: **Rafael Bombelli** admirava a publicação de Cardano e, em 1572, publicou o título *l'Álgebra*, cujo conteúdo abordava os mesmos de Ars Magna. Porém ele percebeu que em algumas situações a fórmula de Tartaglia-Cardano necessitava da utilização de números imaginários na resolução de equações cúbicas, mesmo quando as raízes da equação pertenciam ao conjunto dos números reais.

1745-1855: **Gaspar Wessel** desenvolver estudos na área e publicou, em 1799, um artigo sobre o assunto dos números complexos.

1768-1822: **Jean Robert Argand** também desenvolver estudos na área.

1707-1783: **Leonard Euler** usou pela primeira vez a notação $i$ para representar a unidade imaginária $\sqrt{-1}$.

1777-1855: **Carl Friedrich Gauss** usou, em 1801, o símbolo $i$, popularizando-o entre os matemáticos. Em 1831, fez um estudo sobre a representação geométrica e, no ano seguinte, introduziu a expressão *números complexos*. É creditado a Argand e Gauss a forma de representação geométrica dos números complexos (num plano). Porém, há um quase consentimento entre historiadores que a prioridade da ideia pertence a Wessel, com base no artigo publicado em 1799; porém, este foi demoradamente reconhecido.

1765-1822: Paolo Ruffini encontrou uma solução, em 1813, de que equações de grau 5 não são solúveis por radiciais.

A questão das equações de grau 5 levou mais de 300 anos para ser resolvida e a solução encontrada, por Paolo Ruffini em 1813, com algumas lacunas, e Niels Henrik Abel em 1824, foi que tais equações não são solúveis por radicais.

1802-1829: Niels Henrik Abel completa o trabalho de Ruffini em 1824.

1811-1832: Evariste Galois apresenta, em 1832, uma teoria unificadora que generalizou todos os resultados. Ele demonstrou, de modo geral, que as equações algébricas de grau maior ou igual a 5 não são solúveis por radicais, isto é, não se pode determinar expressões algébricas que formalizem as soluções dessas equações. Este trabalho é considerado muito a frente de seu tempo.

A fórmula resolutiva de Tartalia-Cardano não tinha grandes aplicações práticas, métodos de aproximação pareciam mais eficientes. Todavia, sua discussão lógica, culminou no desenvolvimento do conceito dos Números complexos.

### Uma situação-problema proposta por Cardano

*Como dividir um segmento de 10 unidades de comprimento em duas partes cujo produto seja 40?* O problema, matematicamente, se exprime assim:

Este problema foi proposto no Capítulo 37 de Ars Magna.

$$x(10 - x) = 40$$

Essa equação tem as sequintes soluções: $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$.

Cardano admite que o problema não tinha solução, pois $\sqrt{-15}$ não estava definida no conjunto dos reais. Entretanto, supôs, a título de curiosidade, que fossem válidas as propriedaddes operatórios usuais e, somando as duas raízes, obteve:

$$(5+\sqrt{-15})+(5-\sqrt{-15})=10,$$

e, além disso, multiplicando os dois valores, obteve:

$$(5+\sqrt{-15})\times(5-\sqrt{-15})=40$$

que satisfazem a condição do problema. Surgira, portanto, um primeiro impasse na teoria de Tartaglia-Cardano.

Em sua publicação, Bombelli percebeu uma primeira dificuldade quando ele aplicou a fórmula de Tartaglia-Cardano (10.1) na equação $x^3-15x=4$, chegando a uma solução do tipo:

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

A raiz quadrada de número negativo o intrigou porque, à época, era considerado inexistente. Porém, como ele sabia que $x=4$ era uma solução para a equação surgiu um impasse na aplicação da fórmula. Mas note que $m=-15<0$ e $n=-4<0$, o que contraria a condição inicial para utilizar a fórmula.

A exemplo de Cardano, Bombelli percebeu que, supondo serem válidas propriedades de soma e multiplicação, dos valores encontrados era possível encontrar soluções para as equações. Assim, pela primeira vez verificou-se que existe solução para uma equação envolvendo o cálculo da raiz quadrada de um número negativo em um dos membros, satisfeitas as condições operatórias.

O que se desenvolveu a partir disso foi extraordinário e representou muito para a Matemática. Os chamados números *imaginários*, *fictícios* ou *impossíveis* foram sistematizados e elevados ao mesmo patamar dos seus antecessores reais.

### 10.1.2 Conceitos iniciais e definição

Como visto anteriormente, foi preciso admitir uma extensão do conjunto dos números reais – o mais abrangente deles até então – para criar o Conjunto dos Números Complexos ($\mathbb{C}$).

**Definição 10.1** *Conjunto dos Números Complexos ($\mathbb{C}$):*

*Pode-se definir este conjunto como sendo composto pelos pares ordenados $(x, y)$ de números reais, que podem ser escritos na forma*

$$x+y\,i$$

*em que $x$ e $y$ são números reais e $i$ é a unidade imaginária, ou seja, $i=\sqrt{-1}$ ou $i^2=-1$.*

Neste material preferiremos utilizar a definição $i^2=-1$.

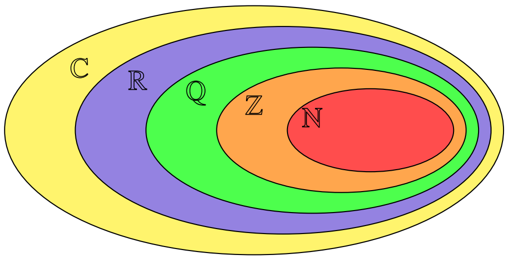



Figura 17 – Representação em diagrama dos conjuntos númericos, incluindo $\mathbb{C}$

### 10.1.3 Representações algébrica, geométrica e trigonométrica

A forma dada na Definição 10.1 anterior é chamada de **forma algébrica**, ou binomial. Isso caracteriza os números complexos com uma estrutura de duas partes:

parte real de $z$ ($Re(z)$) parte imaginária de $z$ ($Im(z)$)

$$z = a + b\,i$$

Quando a parte imaginária de número complexo é nula ($Im(z) = 0$) diz-se, simplesmente, que ele é um número real. Se, ao contrário, a parte real é nula ($Re(z) = 0$) e $Im(z) \neq 0$) diz-se que o número é imaginário puro. Obviamente, se $Re(z) = Im(z) = 0$ teremos $z = 0$, ou seja, $z$ é o número real nulo.

Como, por definição, cada número complexo é um par ordenado, podemos representá-los num plano cartesiano onde cada eixo representa uma das partes. Esse plano é chamado de **Plano Argand-Gauss**. Vejamos alguns exemplos:

| **Número complexo** | **Afixo** |
|---|---|
| $z_1 = 2 + i$ | $P_1(2, 1)$ |
| $z_2 = -3 + 2i$ | $P_2(-3, 2)$ |
| $z_3 = 5 - i$ | $P_3(5, -1)$ |
| $z_4 = -3$ | $P_4(-3, 0)$ |
| $z_5 = 4i$ | $P_5(0, 4)$ |
| $z_6 = \pi + i$ | $P_6(\pi, 1)$ |

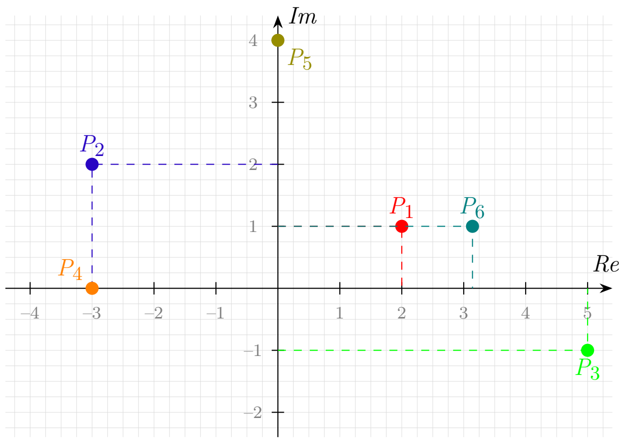



Figura 18 – Representação geométrica de números complexos

O **Plano Argand-Gauss** faz referência aos matemáticos Jean Robert Argand e Johann Karl Friedrich Gauss que, de forma independente e em momentos diferentes, formularam a mesma ideia sobre a representação geométrica para números complexos. O primeiro não tinha suficiente notoriedade à época de sua publicação. Apenas quando Gauss publicou seu trabalho, décadas após, é que Argand foram aceitas, recebendo postumamente os créditos à sua formulação.

Esse tipo de representação dá base para uma outra: a **representação vetorial**. Nela, faz-se uso de vetores para representar um número complexo. A extremidade de origem do vetor fica em $(0, 0)$ e a outra no ponto de coordenadas $(a, b)$, conforme figura seguinte:

Vetor é um segmento de reta orientado com tamanho, direção e sentido.

Reparemos na Figura 19 que, por se tratar de uma representação vetorial, há uma associação unívoca entre um determinando número complexo e o vetor que o representa. O vetor representante de um número complexo possui um ângulo formado com o eixo horizontal – que chamaremos de argumento $\theta$ – e um tamanho – que chamaremos de módulo $\rho = |z|,\ \rho \in \mathbb{R}^*$.

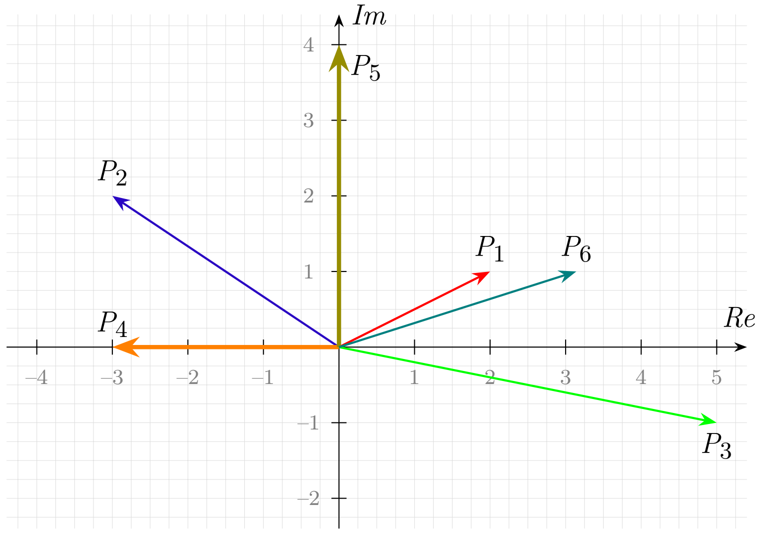
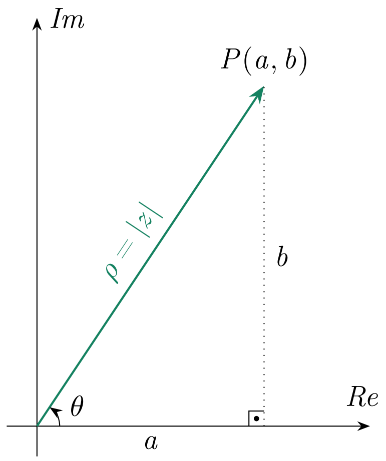



Figura 19 – Representação vetorial de números complexos

Isso nos ajuda a construir a forma **trigonométrica** ou **polar** de números complexos.




Da figura ao lado, podemos extrair, usando o Teorema de Pitágoras, que:

a) $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

b) $\text{sen}\ \theta = \dfrac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho \,.\, \text{sen}\ \theta$

c) $\cos\ \theta = \dfrac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \,.\, \cos\ \theta$

Substituindo esses valores na forma algébrica de $z$, temos:

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= \rho \,.\, \cos\ \theta + (\rho \,.\, \text{sen}\ \theta)i \\ &= \rho \,.\, \cos\ \theta + \rho \,.\, i\ \text{sen}\ \theta \\ &= \rho\ (\cos\ \theta + i\ \text{sen}\ \theta) \end{aligned} \tag{10.2}$$

A expressão 10.2 representa a forma trigonométrica de números complexos, onde $\rho$ é o módulo e $\theta$ é o ângulo do vetor de $z$ no Plano Argand-Gauss.

### 10.1.4 Operações básicas

Definiremos adiante operações de adição, subtração, multiplicação (e potenciação) e divisão de números complexos a partir da representação algébrica destes.

**Somar** ou **subtrair** números complexos é, em síntese, agrupar suas partes e operá-las em separado.

Com a forma trigonométrica também é possível realizar esse tipo de cálculo, mas esse conteúdo será omitido nesse material.

Dessa forma, se tomarmos dois números complexos quaisquer, $z_1$ e $z_2$, para proceder à soma ou à diferença de ambos ($z_1 \pm z_2$) basta que a parte real de $z_1$ seja somada/subtraída da parte real de $z_2$ e que a parte imaginária de $z_1$ seja somada/subtraída da parte imaginárioa de $z_2$. Assim:

$$z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \tag{10.3}$$
$$z_1 - z_2 = a_1 + b_1 i - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \tag{10.4}$$

Para procedermos à **multiplicação** de dois números complexos, basta utilizarmos da propriedade distribuitiva entre as sua spartes. Portanto, dados dois números complexos quaisquer, $z_1$ e $z_2$, a multiplicação ($z_1 \,.\, z_2$) é dada por:

$$\begin{aligned}
z_1 \,.\, z_2 &= (a_1 + b_1 i)\,.\,(a_2 + b_2 i) \\
&= (a_1 + b_1\, i)\,.\,(a_2 + b_2\, i) \\
&= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 i\; b_2 i \\
&= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \underbrace{i^2}_{-1} \\
&= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2 \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i
\end{aligned} \tag{10.5}$$

Antes de falarmos da divisão, vamos introduzir o conceito de **conjugado** de um número complexo. Para tanto, para obtermos o conjugado $\overline{z}$ de um complexo qualquer $z = a + bi$, basta que invertamos o sinal da parte imaginária, ou seja, $\overline{z} = a - bi$.

Visto isso, vamos compreender agora o que acontece quando multiplicamos um número complexo pelo seu conjugado:

$$\begin{aligned}
z \,.\, \overline{z} &= (a + bi)(a - bi) \\
&= a^2 - \cancel{abi} + \cancel{abi} - b^2 \underbrace{i^2}_{-1} \\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}$$

Observemos que, como produto, obtemos um número real. Isso nos será bastante útil para procedermos à divisão de números complexos.

Para procedermos à **divisão** de dois números complexos quaisquer $z_1$ e $z_2$, com $z_2 \neq 0$, multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador.

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} \\
&= \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}
\end{aligned} \tag{10.6}$$

multiplicando por $\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = 1$ não altera o resultado

O que acontece, nesse processo, é que tornamos o denominador um número real, cuja manipulação é facilitada.

Como decorrência das operações anteriores, podemos também definir a **potenciação** de $i$. Reparemos na sequência abaixo:

$$\begin{array}{lll}
i^0 = 1 & i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1 & i^8 = i^2.i^2.i^2.i^2 = 1 \\
i^1 = i & i^5 = i^2.i^2.i = i & i^9 = i^2.i^2.i^2.i^2.i = i \\
i^2 = -1 & i^6 = i^2.i^2.i^2 = -1 & \ldots \\
i^3 = i^2.i = -1,.,i = -i & i^7 = i^2.i^2.i^2.i = -i &
\end{array}$$

As potências da unidade imaginária $i$ se repetem conforme um padrão. Esse padrão dá conta de que, de quatro em quatro valores do expoente, os valores $1, i, -1, -i$ se repetem. Isso significa dizer que qualquer potência de $i^n$ (com $n \in \mathbb{N}$) poderá sempre ser reduzida a uma das quatro primeiras $i^0, i^1, i^2, i^3$ e seus respectivos valores.

Para isso, basta dividir o expoente por 4 e considerar o resto dessa divisão como sendo correspondente ao expoente original. Vejamos:

$$\begin{aligned}
&= i^n \\
&= i^{4p+r} \\
&= i^r
\end{aligned}$$

$n = 4 \times p + r$

o resto $r$ é o expoente correspondente

As expressões 10.3, 10.4, 10.5 e 10.6 exprimem a maneira algébrica de manipular as operações básicas com números complexos.

Exemplos: A partir dos números complexos seguintes, vamos verificar a soma, a diferença, o produto e o quociente indicados, além de uma potenciação:

$$z_1 = 2 - 3i,\ z_2 = 4i \text{ e } z_3 = -1 + 2i$$

a)

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (2 - 3i) + (4i) \\
&= 2 + (-3i + 4i) \\
&= 2 + i
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
z_2 - z_3 &= (4i) - (-1 + 2i) \\
&= -(-1) + (4i - 2i) \\
&= 1 + 2i
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
z_1 \, . \, z_3 &= (2 - 3i).(-1 + 2i) \\
&= -2 + 4i + 3i - 6i^2 \\
&= -2 + 7i + -6 \, . \, (-1) \\
&= -2 + 6 + 7i \\
&= 4 + 7i
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\frac{z_2}{z_3} &= \frac{4i}{-1+2i}\cdot\frac{\overline{z_3}}{\overline{z_3}} \\
&= \frac{4i}{-1+2i}\cdot\frac{-1-2i}{-1-2i} \\
&= \frac{4i\,.\,(-1-2i)}{(-1)^2+(2)^2} \\
&= \frac{-4i-8i^2}{1+4} \\
&= \frac{8-4i}{5} \\
&= \frac{8}{5}-\frac{4}{5}i
\end{aligned}$$

e)

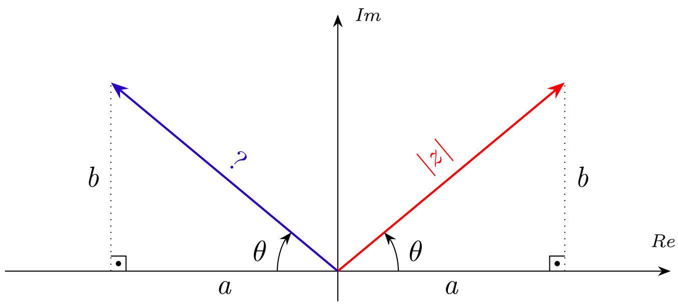
$$\begin{aligned}
(z_2)^{17} &= (4i)^{1}7 \\
&= 4^{17}i^{17} \\
&= 4^{17}i^{16+1} \\
&= 4^{17}i^{1} \\
&= 4^{17}i
\end{aligned}$$

### 10.1.5 Atividades propostas

*Respostas na pág.* *206*.

1. No Plano Argand-Gauss, qual característica guardam um número complexo e seu conjugado? Explique.

2. Considere a seguinte representação trigonométrica de um número complexo $z$ (em vermelho). A outra representação, em azul, corresponde ao oposto de $z$? Justifique sua resposta.




3. Conhecendo $z_1 = -3+i$, $z_2 = 2-5i$ e $z_3 = -6i$, determine:

   a) $z_1 + z_3$

   b) $z_3 - z_2$

   c) $z_3 \cdot z_1$

   d) $\dfrac{z_2}{z_3}$

4. Se adicionarmos ao conjugado de $z_2$ o oposto de $z_1$ obtemos $2-2i$. Já diminuindo do oposto de $z_2$ o conjugado de $z_1$ temos o resultado $-6+4i$. Determine $z_1$ e $z_2$.

5. Determine em $\mathbb{C}$ o conjunto solução de cada item abaixo e, após, represente as soluções de cada uma em um mesmo plano de Argand-Gauss (*Sugestão: utilize a fórmula* $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ *(Bhaskara) para isso.*):

   a) $2x^2 + 18 = 0$ b) $x^2 + 6x + 13 = 0$

6. Qual(is) o(s) valor(es) de $m$ ($\in \mathbb{R}$) para que o número complexo abaixo seja imaginário puro:

   a) $z_1 = (m^2 + m) - m\,i$ b) $z_2 = (2m - 3) - m\,i$

7. Qual o valor da expressão: $\dfrac{(i+1)^{14} + 4i^{29}}{(i-1)^2}$?

8. Considere dois números complexos quaisquer e não nulos $z_1$ e $z_2$:

   a) $\overline{z_1 \,.\, z_2} = \overline{z_1} \,.\, \overline{z_2}$ ? b) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ ?

## 10.2 Equações Algébricas

As equações algébricas são importantes pelo seu aspecto histórico, conforme contado no íncio desse capítulo, e a criação de muitas delas é e foi meio para resolver importantes problemas que o homem se deparou ao longo dos anos. Ao lado, deixamos algumas referências para aqueles que se interessarem em conhecer um pouco mais sobre a história das equações algébricas.

Equação Cúbica

Dal Ferro, Tartaglia, Cardano e Ferrari - uma história italiana

**Definição 10.2** *Equações algébricas:*

*Uma equação polinomial ou algébrica é toda equação redutível à forma* $p(x) = 0$, *em que:*

*i)* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0$ *é um polinômio de grau* $n \geq 1$ *(* $comn \in N^*; a_n \neq 0$*);*

*ii)* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$ *e* $a_0$ *são números reais* ($\in \mathbb{R}$) *chamados de coeficientes;*

*iii) a variável* $x$ *assume um valor qualquer em* $\mathbb{C}$*; e*

*iv)* $a_0$ *é o termo independente.*

Exemplos:

a) $3x - 4 = 0$ é uma equação algébrica ou polinomial de 1º grau.

b) $2x^2 - 5x + 8 = 0$ é uma equação algébrica ou polinomial de 2º grau.

c) $x^3 - 5x^2 + 6x + = 0$ é uma equação algébrica ou polinomial de 3º grau.

**Definição 10.3** *Raiz de uma equação:*

*Denomina-se raiz de uma equação algébrica o número $\alpha \in \mathbb{C}$, para o qual a igualdade:*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = 0$$

*é uma sentença verdadeira, ou seja, substituindo $x$ por $\alpha$ na equação e efetuando os cálculos, obtemos $p(\alpha) = 0$*

Exemplos:

1) Os números –6 e 1 são raízes da equação $p(x) = x^2 + 5x^1 - 6$?

   Resolução:

   - $P(-6) = (-6)^2 + 5.(-6) - 6 = 36 - 30 - 6 = 0$
   - $P(1) = 1^2 + 5.1 - 6 = 1 + 5 - 6 = 0$

   Assim, os números complexos -6 e 1 são raízes da equação $p(x) = x^2 + 5x^1 - 6$.

2) Dado o conjunto $Q = \{1, 3, i, -i\}$ e a equação $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$, verifique quais dos números do conjunto Q é raiz da equação.

   Resolução:

   - Para $x = 1$, temos que $1^3 - 3.1^2 + 1 - 3 = 1 - 3 - 1 - 3 = -4 \neq 0$, logo não é raiz
   - Para $x = 3$, temos que $3^3 - 3.3^2 + 3 - 3 = 27 - 27 + 3 - 3 = 0$ é raiz
   - Para $x = i$, temos que $i^3 - 3.i^2 + i - 3 = -i + 3 + i - 3 = 0$ é raiz
   - Para $x = -i$, temos que $(-i)^3 - 3.(-i)^2 + (-i) - 3 = i + 3 - i - 3 = 0$ é raiz

**Teorema 10.1** *Teorema Fundamental da Álgebra:*

*O Teorema Fundamental da álgebra afirma que qualquer polinômio de grau $n$, com $n \geq 1$, admite ao menos uma raiz complexa.*

*(Admitiremos aqui a validade desse teorema, sem demonstração.)*

### 10.2.1 O Teorema da decomposição de um polinômio

Este teorema é uma consequência do Teorema Fundamental da Álgebra (10.1), demonstrado pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855).

Esse teorema diz respeito à quantidade de raízes de um polinômio e à forma como o polinômio pode ser escrito em função de um produto que envolve essas raízes.

**Teorema 10.2** *Teorema da Decomposição:*

*Todo polinômio de grau $n \geq 1$ pode ser decomposto em fatores de grau 1.*

*Dessa forma, a equação polinomial $p(x) = 0$ possui exatamente $n$ raízes $r_1, r_2, ..., r_n$, complexas ou reais, e pode ser decomposto da seguinte forma:*

$$p(x) = a(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \cdots \cdot (x - r_n).$$

Exemplos:

1) Pelo teorema da decomposição de polinômios, $P(x) = x^2 - 2x - 8 = 0$ possui duas raízes complexas (reais ou não), já que o polinômio é de grau 2.

   *Como se trata de uma equação do 2º grau, podemos utilizar Bhaskara para determinar essas duas raízes. Os valores encontrados são 4 e −2.*

   *Assim, o polinômio pode ser decomposto da seguinte forma:*

   $P(x) = (x - 4).(x + 2)$

2) Pelo teorema da decomposição, podemos determinar qual é o polinômio de coeficiente dominante igual a 2 e raízes 1, 3 e −4.

$$\begin{aligned} p(x) &= 2 \cdot (x-1) \cdot (x-3) \cdot (x+4) \\ &= (2x-2) \cdot (x-3) \cdot (x+4) \\ &= (2x^2 - 6x - 2x + 6) \cdot (x+4) \\ &= (2x^2 - 8x + 6) \cdot (x+4) \\ &= 2x^3 + 8x^2 - 8x^2 - 32x + 6x + 24 \\ &= 2x^3 - 26x + 24 \end{aligned}$$

### 10.2.2 Multiplicidade de uma raiz

As raízes de uma equação algébrica podem ser distintas ou não. Se um número $\alpha$ for uma só vez raiz de uma equação algébrica, ele será chamado de raiz simples. Se uma equação algébrica tiver duas raízes iguais a um certo número, esse número será uma raiz de multiplicidade 2; se tiver três raízes iguais, o número será uma raiz de multiplicidade 3, e assim sucessivamente.

Exemplos:

1) As raízes da equação $x^2 - 4x + 4 = 0$ são 2 e 2.

   *Portanto, dizemos que uma das raízes tem multiplicidade 2, ou seja, o numero 2 é raiz duas vezes.*

2) Resolver a equação $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 3x - 36 = 0$, sabendo que 3 é raiz dupla.

   *Considere $p(x)$ como sendo o polinômio dado. Assim:*

   *Note que $q(x)$ é obtido fazendo a divisão de $p(x)$ por $(x-3)^2$. Fazendo a divisão pelo dispositivo prático de Briot–Ruffini, obtemos:*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | -9 | 23 | -3 | -36 |
| 3 | 1 | -6 | 5 | 12 | 0 |
| | 1 | -3 | -4 | 0 | |

*Após a realização da divisão, vemos que os coeficientes do polinômio $q(x)$ são 1, $-3$ e $-4$. Assim, $q(x) = 0$ será: $x^2 - 3x - 4 = 0$.*

*Vamos resolver a equação acima para determinarmos as demais raízes:*

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \overbrace{\frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2(1)}}^{Bhaskara}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

*Portanto o conjunto solução da equação é, $U = \{-1, 3, 4\}$.*

### 10.2.3 Resolução de equações do segundo grau e biquadrada

A equação do segundo grau é caracterizada por um polinômio de grau 2, ou seja, um polinômio do tipo $ax^2 + bx + c$, em que $a$, $b$ e $c$ são números reais.

Ao resolvermos uma equação de grau 2, estamos interessados em encontrar valores para a incógnita $x$ que torne o valor da expressão igual a 0, que são chamadas de raízes, isto é, $ax^2 + bx + c = 0$. Uma forma prática e largamente utilizada para encontar as raízes de uma equação do segundo grau é a fórmula de Bhaskara. Vejamos uma aplicação:

Exemplo: A soma do quadrado de um número com o próprio número é 12. Calcular esse número.

*Primeiro equacionar $x^2 + x = 12$, ou seja, $x^2 + x - 12 = 0$. Depois, aplicamos a fórmula de Bhaskara:*

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-12)}}{2.1} \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} \\ x &= \frac{-1 \pm 7}{2} \\ x_1 &= \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 &= \frac{-8}{2} = -4 \end{aligned}$$

*E, portanto, o conjunto solução é: $S = \{3, -4\}$.*

As equações biquadradas são aquelas que possuem grau 4, ou equações do 4ž grau, cujos expoentes são pares, como constataremos adiante. Portanto, uma condição indispensável para equaçõe desse tipo é não existir expoentes ímpares na equação a ser resolvida.

Vejamos a forma geral de uma equação biquadrada:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \tag{10.7}$$

Note que os expoentes da incógnita são expoentes pares (quatro e dois); esse fato é importante para que possamos realizar os passos de nossa resolução.

Vejamos um exemplo de uma equação do 4º grau que não é biquadrada: $ax^2 + bx + c = 0$.

Caso você se depare com uma equação do 4º grau que não seja escrita dessa forma (10.7), os passos que utilizaremos não poderão ser aplicados.

Na resolução de uma equação biquadrada em $\mathbb{R}$, devemos substituir sua variável, transformando-a numa equação do 2º grau. Observe agora a sequência prática que deve ser utilizado:

i) Considere $x^2 = y$, assim substitua $x^4$ por $y^2$ $x^2$ por $y$;

ii) resolva a equação $ay^2 + by + c = 0$;

iii) determine a raiz quadrada de cada uma da raízes ($y'$ e $y''$) da equação $ay^2+by+c = 0$.

$x^4 = (x^2)^2 = y^2$

As duas relações ($x^2 = y'$ e $x^2 = y''$) indicam-nos que cada raiz positiva da equação $ay^2 + by + c = 0$ dá origem a duas raízes simétricas para a biquadrada: a raiz negativa não dá origem a nenhuma raiz real para a mesma.

Exemplo: Determinar as raízes da equação biquadrada $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

*Considerando $x^2$ por $y$, temos: $y^2 - 13y + 36 = 0$.*
*Resolvendo essa equação usando a fórmula de Bhaskara, obtemos como valores de $y$ o seguintes números: $y' = 4$ e $y'' = 9$.*
*Como $x^2 = y$, temos:*

$$x_1^2 = 4 \Rightarrow x_1 \pm \sqrt{4} \Rightarrow x_1 \pm 2$$
$$x_2^2 = 9 \Rightarrow x_2 \pm \sqrt{9} \Rightarrow x_2 \pm 3$$

*Logo, temos para conjunto solução: $S = \{-3, -2, 2, 3\}$.*

### 10.2.4 Atividades propostas

*Respostas na pág. 206.*

1. Resolva, em $\mathbb{C}$, cada equação seguinte e, em seguida, fatore o polinômio dado:

a) $x^2 - 8x + 25 = 0$

b) $x^3 + x^2 - 2x = 0$

2. Em cada caso, escreva uma equção algébrica de grau mínimo cujas raízes são:

   a) $-3i$ e $3i$

   b) $-2$, $2 + i$ e $2 - i$

   c) $-5$, 4 e 1

   d) 1, 2, 3 e 4

3. O número 2 é raiz da equação $x^3 - 16x^2 + mx - 106 = 0$.

   a) Determine $m$.

   b) Encontre as demais raízes dessa equação.

4. O polinômio $x^3 - 2x^2 - 5x + d$, é divisível por $(x - 2)$.

   a) Determine $d$.

   b) Calcule as raízes da equação $p(x) = 0$.

5. Duas raízes da equação $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$, são 1 e 2. Encontre o conjunto solução dessa equação.

6. A respeito da equação $(x - 2)^2.(x^3 + 3x^2 - 10x) = 0$, determine suas raízes e as respectivas multiplicidades.

7. Em cada caso, escreva uma equação algébrica de grau mínimo tal que:

   a) 2 seja raiz dupla e $-1$ seja raiz simples.

   b) $-3$ seja raiz tripla.

8. Sabendo que a equação $3x^3 + 5x^2 + x + m = 0$ apresenta $-1$ como raiz dupla:

   a) Determine $m$.

   b) Encontre as outras raízes dessa equação.

9. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 14x^2 + 12x - 8 = 0$, sabendo que 2 é raiz tripla.

### 10.2.5 Raízes de equações algébricas com coeficientes reais

As equações algébricas que estudamos até aqui constam de expressões com coeficientes reais. Ainda que outras com coeficientes complexos sejam consideradas e existentes, são as primeiras as mais importantes na prática. Nesta seção, estudaremos algumas características das raízes dessas equações algébricas que servirão para resvolvê-las.

#### 10.2.5.1 Raízes Complexas não reais

**Teorema 10.3** *Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{x-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ um polinômio não nulo, com $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, e seja $p(z) = 0$, com $z \in \mathbb{C}$, então $p(\overline{z}) = 0$, sendo $\overline{z}$ o conjugado de $z$.*

Exemplo: Sabendo que $5+2i$ é uma das raízes da equação $x^4-11x^3+37x^2-9x-58=0$, determinemos as demais raízes, em $\mathbb{C}$.

*Vimos que o conjugado de $5+2i$ também deve ser raiz da equação, logo assumimos que $5+2i$ e $5-2i$ são duas das possíveis quatro raízes da equação. Pelo dispositivo de Briot-Ruffini é possível proceder à redução da equação de tal maneira a facilitar a busca pelos outras duas raízes. Vejamos:*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5+2i | 1 | -11 | 37 | -9 | -58 |
| 5-2i | 1 | -6+2i | 3-2i | 10-4i | 0 |
| | 1 | -1 | -2 | 0 | |

*Ao resolver a última equação obtida, $x^2-x-2=0$, teremos as outras raízes. Como já visto em seções anteriores, o procedimento para encontrar raízes de equações de grau 2 é simplificado e pode ser a expressão de Bhaskara. Sendo assim, obteremos $-1$ e $2$ como raízes.*
*Dessa forma, o conjunto solução das raízes da equação algébrica em questão é: $S=\{5+2i, 5-2i, -1, -2\}$.*

Em relação ao Teorema 10.3, é possível tecer algumas observações:

a) As raízes complexas de uma equação algébrica, quando existem, ocorrem aos pares, estes formados por um número complexo e seu conjugado;
b) As raízes reais de uma equação algébrica, quando existem, não necessariamente ocorrem aos pares, uma vez que $z=\overline{z} \Rightarrow p(z)=p(\overline{z})=0$;
c) Se $z$ é uma raiz complexa não real com multiplicidade $m$ de uma equação algébrica, então seu conjugado $\overline{z}$ também possui multiplicidade $m$.

Ainda que esta última observação possa ser demonstrada como decorrência do Teorema 10.3, ela nos servirá neste momento como argumento para provar uma consequência importante no exame de raízes de equação algébrica: toda equação algébrica de grau ímpar e com coeficientes reais possui, ao menos, uma raiz real.

Esta última afirmação configura-se como um teorema.

#### 10.2.5.2 Raízes Racionais

O que vamos estudar agora pode ser considerado como um procedimento pouco intuitivo, com viabilidade matematicamente questionável. Isso porque se trata de um procedimento de busca, de testagem, de garimpagem quase às escuras.

No entanto, se em seus estudos até agora você ainda não percebeu isso, na Matemática há diversos casos onde esse processo de aproximações iterativas permite responder com eficiência alguns problemas práticos.

Estudaremos, portanto, algumas condições necessárias para que um número racional seja encontrado como raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros.

##### Pesquisa de raízes racionais

Notemos que este não é um método generalizado de resolução de equações algébricas, não só pela limitante condição imposta aos seus coeficientes (que devem ser inteiros), mas também pela possibilidade de que a "pesquisa" não retorne resultados satisfatórios ou mostre-se trabalhosa em alguns momentos. Mesmo assim, o seguinte teorema nos ajudará nesse procedimento:

**Teorema 10.4** *Teorema das Raízes Racionais:*

*Se $\dfrac{p}{q}$, com $p$ e $q$ inteiros não nulos e primos entre si, é raiz racional da equação algébrica de grau $n$ e coeficiente inteiros $a_n x^n + a_{n-1} x^{x-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ (com $a_n \neq 0$), então $p$ é divisor de $a_0$ e $q$ é divisor de $a_n$.*

Dois números são **primos entre si** quando o único divisor de ambos é 1.

A existência de raízes racionais para equações algébricas com coeficientes inteiros não é garantida. No entanto, caso uma equação algébrica admita alguma raiz racional não nula, o Teorema 10.4 mostra algumas condições que devem ser satisfeitas por ela.

Na prática, a utilização do Teorema das Raízes Racionais exige que criemos uma lista com todos os números racionais $\frac{p}{q}$, sendo $p$ divisor de $a_0$ e $q$ divisor de $a_n$, que deverão ser testados um a um e, após ser encontrado um que seja uma raiz $r$, seja este utilizado para diminuir o grau da equação original através da divisão por $(x - r)$.

Exemplo: Determinemos as raízes da equação $x^4 - \dfrac{7}{6}x^3 - 2x^2 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3} = 0$.

*Observemos, de imediato, que a equação não possui coeficientes inteiros. Resolvemos isso, utilizando, por exemplo, um processo de obtenção do mínimo múltiplo comum (mmc), que é 6, e aplicando uma divisão nos dois lados da igualdade:*

$$\begin{aligned} x^4 - \frac{7}{6}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} &= 0 \\ \frac{6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2}{6} &= \frac{0}{6} \\ 6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2 &= 0 \qquad (10.8) \end{aligned}$$

*A última equação (10.8) é equivalente à equação dada e, portanto, possuem as mesmas raízes.*
*Temos que $a_0 = 2$ e $a_n = 6$. Os posíveis valores de $p$ são: $D(2) = \{\pm1, \pm2\}$.*
*Os posíveis valores de $q$ são: $D(6) = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$.*
*Determinando $\frac{p}{q}$, com $p$ e $q$ primos entre si, temos:*
$\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm2, \pm\frac{2}{3}$.
*Por uma questão prática, podemos começar pelos números inteiros a verificação de quais dessas opções podem ser raízes da equação, que será denotada por $p(x)$. Dessa forma:*

$$\begin{aligned} p(-1) &= 6\cdot(-1)^4 - 7\cdot(-1)^3 - 12\cdot(-1)^2 + 3\cdot(-1) + 2 = 6 - (-7) - 12 + (-3) + 2 = 0 \\ p(1) &= 6\cdot(1)^4 - 7\cdot(1)^3 - 12\cdot(1)^2 + 3\cdot(1) + 2 = 6 - 7 - 12 + 3 + 2 = -8 \\ p(-2) &= 6\cdot(-2)^4 - 7\cdot(-2)^3 - 12\cdot(-2)^2 + 3\cdot(-2) + 2 = 96 - (-56) - 48 + (-6) + 2 = 100 \\ p(2) &= 6\cdot(2)^4 - 7\cdot(2)^3 - 12\cdot(2)^2 + 3\cdot(2) + 2 = 96 - 56 - 48 + 6 + 2 = 0 \end{aligned}$$

*Conhecendo duas das raízes $-1$ e $2$, vamos fazer seguidas divisões pelos termos $(x + 1)$ e $(x - 2)$ para diminuir o grau da equação dada. Assim:*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 6 | -7 | -12 | 3 | 2 |
| 2 | 6 | -13 | 1 | 2 | 0 |
| | 6 | -1 | -1 | 0 | |

*A equação obtida no quociente é $6x^2 - x - 1 = 0$, a qual tem raízes $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{3}$, que podem ser obtidas pela expressão $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (Bhaskara) ou mesmo pela continuidade dos testes nas demais opções que tínhamos. Notadamente, a primeira opção é mais factível.*

*Dessa forma, a equação algébrica $x^4 - \dfrac{7}{6}x^3 - 2x^2 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3} = 0$ tem o seguinte conjunto solução: $S = \{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2\}$.*

Como decorrência do Teorema 10.4 e do que fizemos neste último exemplo, poderíamos verificar que em equações com coeficientes inteiros e $a_n = 1$, caso existam raízes racionais, elas serão inteiras e divisoras de $a_0$.

### 10.2.6 Relações de Girard

As chamadas relações de Girard associam os coeficientes de uma equação algébrica às suas raízes. Elas se mostram como mais uma interessante ferramenta na busca pelas raízes de uma equação algébrica.

Em homenagem ao matemática francês Albert Girard (1595-1632).

#### 10.2.6.1 Relações entre coeficientes e raízes de uma equação do 2º grau

Esta é a mais famosa das relações de Girard. Pode ser que você a conheça como *resolução por soma e produto*. Vejamos como ela funciona:

Consideremos $x_1$ e $x_2$ as raízes de uma equação $p(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Pelo Teorema da Decomposição (Teorema 10.2), temos que:

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^2 + bx + c && (10.9) \\ p(x) &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ p(x) &= a(x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2) \\ p(x) &= a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] \\ p(x) &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 && (10.10) \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes da primeira forma (10.9) e da última (10.10) da equação, temos:

- $-a(x_1 + x_2) = b \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $ax_1x_2 = c \Rightarrow x_1x_2 = \frac{c}{a}$

Portanto, podemos afirmar que, se $x_1$ e $x_2$ são as raízes de uma equação algébrica de grau 2, com o coeficiente dominante diferente de 0, então:

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1x_2 = \frac{c}{a}$

Exemplo: Sejam $r$ e $s$ as raízes, em $\mathbb{C}$, da equção $2x^2 + 6x + 1 = 0$, determine:

a) $r + s$ b) $r \cdot s$ c) $\frac{1}{r} + \frac{1}{s}$ d) $r^2 + s^2$

*Como esta equação é de grau 2, temos que seus coeficientes numéricos são: $a = 2$, $b = 6$ e $c = 1$. Podemos resolver esta questão usando as relações de Girard para equações de grau 2. Vejamos:*

a) $r + s$*: segue que* $r + s = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{2} = -3$.

b) $r \cdot s$*: segue* $r \cdot s = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

c) $\frac{1}{r} + \frac{1}{s}$*: ao calcular o mmc, obtemos* $\frac{r+s}{r.s}$*, portanto temos* $\frac{-3}{\frac{1}{2}}$ *daí segue que* $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = -6$.

d) $r^2 + s^2$*: como* $(r + s)^2 = r^2 + 2r \cdot s + s^2$*, para obter* $r^2 + s^2$ *podemos escrever* $r^2 + s^2 = (r + s)^2 - 2r \cdot s = (-3)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 9 - 1 = 8$.

#### 10.2.6.2 Relações entre coeficientes e raízes de uma equação do 3º grau

Para equações de grau 3, $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$, o procedimento é análogo. Mesmo assim, registraremos abaixo sua construção:

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (10.11) \\ p(x) &= a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ p(x) &= a[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - (x_1x_2x_3)] \\ p(x) &= ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - a(x_1x_2x_3) \quad (10.12) \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes da primeira forma (10.11) e da última (10.12) da equação, temos:

- $-a(x_1 + x_2 + x_3) = b \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$
- $a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = c \Rightarrow x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$
- $-a(x_1x_2x_3) = d \Rightarrow x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$

Portanto, podemos afirmar que, se $x_1$, $x_2$ e $x_3$ são as raízes de uma equação algébrica de grau 3, com o coeficiente dominante diferente de 0, então:

- $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$
- $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$

Exemplo: Resolva a equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, sabendo que uma das raízes é a média aritmética das outras.

*Vamos chamar as raízes da equação de $r$, $s$ e $t$. Escrevendo as relação de Girard, temos:*

(I) $r + s + t = -\frac{-6}{1} = 6$

(II) $r \cdot s + r \cdot t + s \cdot t = \frac{11}{1} = 11$

(III) $r \cdot s \cdot t = -\frac{-6}{1} = 6$

*Do enunciado, podemos escrever:* $r = \frac{s+t}{2} \Rightarrow s + t = 2 \cdot r$ *(IV).*
*Agora substituindo (IV) em (I), obtemos:*
$r + s + t = 6 \Rightarrow r + 2r = 6 \Rightarrow 3r = 6 \Rightarrow r = 2.$
*Portanto, uma das raízes da equação é o número* 2.
*Para obter as outras duas, primeiro vamos utilizar o dispositivo Briot-Ruffini, para encontrarmos uma equação de grau* 2*, e então, utilizando a fórmula de Bhaskara, encontraremos essas raízes:*

| 2 | 1 | -6 | 11 | -6 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -4 | 3 | 0 |

*Ao resolver a equação* $x^2 - 4x + 3 = 0$*, obtemos as seguintes raízes* 1 *e* 3.
*As raízes da equação são, portanto,* 1, 2 *e* 3.

#### 10.2.6.3 Relações entre coeficientes e raízes de uma equação de grau $n$

As relações de Girard podem ser generalizadas para equações algébricas de grau maior que 3. sua formalização pode ser expressa inclusive num Teorema. Mas vamos apresentar essa generalização de forma mais intuitiva. Vejamos:

Consideremos a equação $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$, cujas raízes são $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, r_n$. Podemos generalizar as relações de Girard para essa equação da seguinte forma:

- $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ *(soma das $n$ raízes)*
- $r_1 r_2 + r_1 x_3 + \cdots + r_{n-1} r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$ *(soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas)*
- $r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \cdots + r_{n-2} r_{n-1} r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$ *(soma dos produtos das raízes tomadas três a três)*

$\vdots$

- $r_1 r_2 r_3 \cdot \cdots \cdot r_{n-1} r_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}$ *(produto das $n$ raízes)*

### 10.2.7 Atividades propostas

*Respostas na pág. 206.*

1. Uma equação de coeficientes reais admite, como raízes simples, 2, $-3$ e $4 + i$. Qual deve ser seu menor grau? Explique.

2. Uma equação algébrica com coeficientes reais e com grau 4 pode ter uma única raiz real simples? Explique.

3. Escreva uma equação algébrica, com o mínimo grau possível, que tenha coeficientes reais e admita $-2$ e $2+i$ como raízes simples.

4. Qual o conjunto solução da equação:

    a) $(x-5)(x+3)(x-4)=0$
    b) $2(x+\frac{1}{4})^2(x-7)=0$
    c) $x(1-x)^3(x-\sqrt{6})^2$
    d) $\frac{x}{2}(x+1)(x-1)(x)=0$

5. Analise as afirmativas abaixo. Apresente a soma das alternativas corretas.

    (1) Uma equação algébrica de grau 4, com coeficientes reais, pode ter 4 raízes reais
    (2) Uma equação algébrica de grau 3, com coeficientes reais, pode ter 3 raízes complexas não reais.
    (4) Na equação $ix-1=0$, o número complexo $-i$ é uma raiz. Assim, $i$ também é raiz da equação.
    (8) Há uma equação polinomial de grau 4, com coeficientes reais, cujas raízes são $i$, $-i$, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

6. Pesquise as raízes racionais e obtenha o conjunto solução em $\mathbb{C}$ das seguintes equações:

    a) $2x^3+x^2-25x+12=0$
    b) $x^3-x^2-x-2=0$

7. (IEZZI et al., 2010) A diferença entre o cubo de um número real e o seu quadrado é igual à soma do triplo do quadrado desse número com 25. Qual é esse número?

8. Resolva a equação $x^4+4x^3+8x^2+12x+15=0$, sabendo que uma de suas raízes é $-2+i$.

9. Dada a equação polinomial $x^3-5x^2+8x-m=0$, em que $m$ é um parâmentro real:

    a) Explique por que tal equação tem ao menos uma raiz real.
    b) Obtenha $m$, de modo que 3 seja raiz, e encontre as outras raízes.

10. Duas das raízes da equação $x^4-11x^3+42x^2-14x+p=0$, em que $p$ é um coeficiente real, são 2 e $5+3i$, determine o conjunto solução dessa equação.

11. Dada a equação polinomial $x^3-2x^2+x+4=0$, use as relações de Girard para calcular:

    a) A soma de suas raízes.
    b) A soma dos inversos de suas raízes.

12. Dada a equação polinomial $x^3-6x^2+10x-8=0$, usando as relações de Girard calcule: $(\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c})^2$, sendo $a, b$ e $c$ raízes dessa equação.

13. Sabendo que a soma de duas das raízes da equação $x^3-7x^2+14x-8=0$ é igual a 5, encontre o conjunto solução dessa equação.

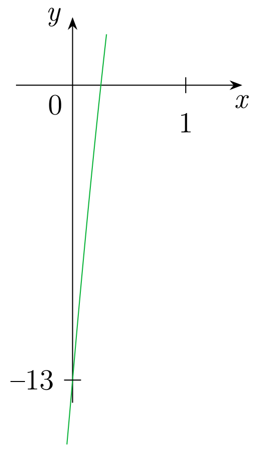
14. Encontre o conjunto solução da equação $x^3-15x^2+74x-120=0$, sabendo que as raízes estão em progressão aritmética.

15. As raízes da equação $x^3 - 18x^2 + 92x + t = 0$ estão em progressão aritmética. Determine o valor de $t$ e o conjunto solução.

16. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18 = 0$.

17. Se $a, b$ e $c$ são raízes da equação $x^3 - 13x^2 - 5x + 1 = 0$, o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & a & -c \\ 0 & b & c \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ vale quanto?

18. Uma parte da função polinomial definida por $y = 4x^3 - 25x^2 + 58x - 13$, crescente em $\mathbb{R}$, está esboçada no gráfico abaixo. Quais são as três raízes dessa função polinomial?



CAPÍTULO 11

# Respostas das Atividades Propostas

## Capítulo 1 - Análise Combinatória

### ??, pág. ??

1. 288
2. 43.200
3. 5.120
4. 63
5. 83
6. 24
7. 720
8. a) 720 b) 120 c) 360 d) 240
9. 72
10. 73ª
11. a) 12 b) 6 c) 5.040 d) 840
12. 495
13. 2.520
14. a) 180 b) 90 c) 90
15. a) 720 b) 240 c) 144
16. 90
17. 504
18. 6.720
19. 360
20. 120
21. 1.365
22. 21
23. 45.045
24. a) 49 b) 4.480 c) 6.300 d) 84 e) 280 f) 1.260 g) 3.300 h) 6.566 i) 7.776
25. 27.000
26. 39

### ??, pág. ??

1. $x = 2$ ou $x = 4$
2. 13
3. Está correta.
4. 255
5. 42
6. $T_3 = 28$

7. $x^3+3x^2y+3x^2z+3xy^2+6xyz+xz^2+y^3+3y^2z+3yz^2+z^3$

8. a) $-1$
   b) $64$

9. a) $64x^6 + 192x^5y + 240x^4y^2 + 160x^3y^3 + 60x^2y^4 + 12xy^5 + y^6$
   b) $-2187x^7 - 10206x^6 - 20412x^5 - 22680x^4 - 15120x^3 - 6048x^2 - 1344x - 128$
   c) $a^5+15a^4b+90a^3b^2+270a^2b^3+405ab^4+243b^5$
   d) $\frac{1}{x^5} + \frac{10y}{3x^4} + \frac{40y^2}{9x^3} + \frac{80y^3}{27x^2} + \frac{80y^4}{81x} + \frac{32y^5}{243}$
   e) $4x^2 - 8\sqrt{2x} + \frac{12}{x} - \frac{4\sqrt{2}}{x^5} + \frac{1}{x^4}$

10. a) $T_5 = 560x^3y^4$
    b) $T_5 = -\frac{700000x^5}{9y^4}$
    c) $T_5 = 256 \cdot \binom{n}{4} \cdot x^{n-4}y^4$

## Capítulo 2 - Probabilidade

### seção 2.5, pág. 25

1. a)
   b)
   c)
   d)
   e)
   f)
   g)
   h)

2. $S = \{(A,L),(A,M),(A,N),(A,O),(B,L),(B,M),(B,N),(B,O),(C,L),(C,M),(C,N),(C,O)\}$

3. $S = \{(A,B),(A,C),(A,D),(B,C),(B,D),(C,D)\}$

4. a) $A = \{(E,D,F),(E,D,G),(E,D,H),(E,F,G),(E,F,H),(E,G,H)\}$
   b) $B = \{(F,H,D),(F,H,E),(E,H,G)\}$
   c) $C = \{(E,F,G),(E,F,H),(E,G,H),(E,G,H)\}$
   d) $D = \{\ \}$

5. a) $P(E_1) =$
   b) $P(E_2) =$
   c) $P(E_3) =$
   d) $P(E_4) =$

6. a) $A = \{(C,C),(E,E),(O,O),(P,P)\}$
   b) $B = \{(O,O),(O,C),(O,E),(O,P)\}$
   c) $C = \{(E,E),(E,O),(E,P),(O,O),(O,P),(P,P)\}$

7. a)
   b)
   c)

8. a) $\frac{9}{36}$
   b) $\frac{6}{36}$
   c) $\frac{6}{36}$
   d) $\frac{1}{36}$
   e) $\frac{10}{36}$

9. a) $\frac{7}{25}$
   b) $\frac{12}{25}$

10. a) $\frac{4}{19} = 21,05\%$
    b) $\frac{10}{19} = 52,63$

11. 50%

12. a) $\frac{3}{4} = 75\%$
    b) $\frac{11}{12} = 91,6\%$
    c) $\frac{1}{6} = 16,6\%$

13. a) $\frac{1}{52} \simeq 1,92\%$
    b) $\frac{1}{13} \simeq 7,69\%$
    c) $\frac{4}{13} \simeq 30,77\%$
    d) $\frac{2}{13} \simeq 15,38\%$
    e) $\frac{5}{26} \simeq 19,23\%$

14. 60%

15. 45%

16. $\frac{1}{4} = 25\%$

17. $\frac{1}{15} \simeq 6,67\%$

18. $\frac{3}{51} \simeq 5,88\%$

19. $\frac{1}{8}$

20. a) $\frac{35}{144} = 24,3\%$
    b) $\frac{49}{144} = 34,03\%$

## seção 2.6, pág. 28

1.

2.

3.

4.

5. a) $50\%$
   b) $28,57\%$
   c) $25\%$
   d) $32,14\%$
   e) $42,86\%$

6. a) $33,3\%$
   b) $66,6\%$
   c) $100\%$
   d) $50\%$
   e) $0\%$

7. a) $49,41\%$
   b) $35,29\%$
   c) $16,47\%$

8. c

9. d

10. a

11. e

12. a) $\frac{1}{52} \simeq 1,92\%$
    b) $\frac{1}{13} \simeq 7,69\%$
    c) $\frac{4}{13} \simeq 30,77\%$
    d) $\frac{2}{13} \simeq 15,38\%$
    e) $\frac{5}{26} \simeq 19,23\%$

13. $\frac{3}{4} = 75\%$

14. a) $\frac{19}{20} = 95\%$
    b) $\frac{17}{20} = 85\%$
    c) $\frac{1}{60} \simeq 1,67\%$

15. a) $\frac{7}{11} \simeq 63,63\%$
    b) $\frac{5}{5} = 40\%$
    c) $\frac{8}{17} \simeq 47,06\%$

16. d

17. c

18. a) $60\%$
    b) $26\%$
    c) $65\%$
    d) $21\%$
    e) $40\%$

19. a) Não
    b) Sim

20. a) $\frac{2}{3}$
    b) $\frac{4}{7}$

21. $\frac{2}{9}$

22. $27,3\%$

23. $99,7\%$

24. a) $\frac{1}{16}$
    b) $\frac{3}{8}$
    c) $\frac{1}{4}$

25. a) $14,2\%$
    b) $0,05\%$
    c) $31,5\%$
    d) $4,7\%$
    e) $99,9\%$
    f) $85,8\%$

26. a) $\frac{45}{512}$
    b) $\frac{135}{512}$
    c) $\frac{405}{1024}$
    d) $\frac{243}{1024}$

27. c

28. c

29. e

30. c

31. d

32. b

33. e

34. b

# Capítulo 3 - Estatística e Análise de dados

## subseção 3.2.2, pág. 44

1. a) Clientes do Cinema

   b) Sexo, Nível de Escolaridade, Estado Civil e Transporte utilizado. Idade e Renda Mensal.

   c) 20

2.

| Estado civil | $f_i$ | $f_r$ | $F_i$ | $F_r$ |
|---|---|---|---|---|
| Solteiro | 9 | 45% | 9 | 45% |
| Casado | 8 | 40% | 17 | 85% |
| Divorciado | 3 | 15% | 20 | 100% |
| **Total** | 20 | 100% | – | – |

| Transporte utilizado | $f_i$ | $f_r$ | $F_i$ | $F_r$ |
|---|---|---|---|---|
| Carro | 11 | 55% | 11 | 55% |
| Ônibus | 5 | 25% | 16 | 80% |
| A pé | 4 | 20% | 20 | 100% |
| **Total** | 20 | 100% | – | – |

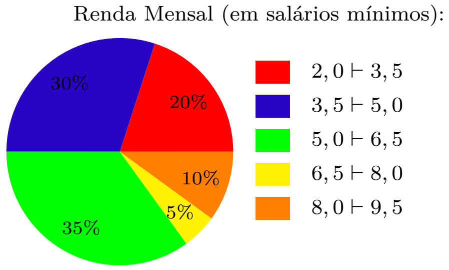
   a) 45% b) 25% c) 30% d) 30%

3.

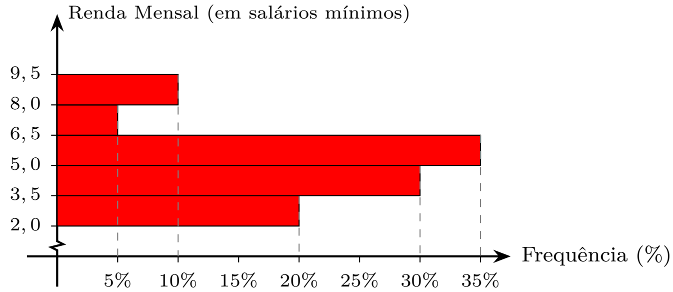
| Renda mensal (R$) | $f_i$ | $f_r$ | $F_i$ | $F_r$ |
|---|---|---|---|---|
| $2,0 \vdash 3,5$ | 4 | 20% | 4 | 20% |
| $3,5 \vdash 5,0$ | 6 | 30% | 10 | 50% |
| $5,0 \vdash 6,5$ | 7 | 35% | 17 | 85% |
| $6,5 \vdash 8,0$ | 1 | 5% | 18 | 90% |
| $8,0 \vdash\dashv 9,5$ | 2 | 10% | 20 | 100% |
| **Total** | 20 | 100% | – | – |

   a) $7,5$ b) 50%

   c)




   d)




4. $a = 25\%$, $b = 63$, $c = 72$ e $d = 40\%$

5. a)

| Classes (em R$) | $f_i$ | $f_r$ | $F_i$ | $F_r$ |
|---|---|---|---|---|
| $65 \vdash 85$ | 3 | 15% | 3 | 15% |
| $85 \vdash 105$ | 7 | 35% | 10 | 50% |
| $105 \vdash 125$ | 5 | 25% | 15 | 75% |
| $125 \vdash 145$ | 2 | 10% | 17 | 85% |
| $145 \vdash\dashv 165$ | 3 | 15% | 20 | 100% |
| **Total** | 20 | 100% | – | – |

   b) 50%. Não.

   c) 70%. Sim.

6.

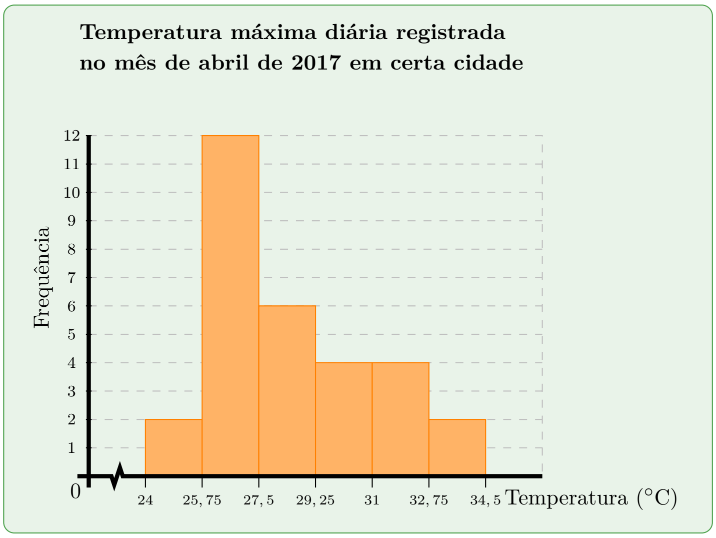
a) $R\$23$ bilhões

b) 121%

7. alternativa *c*

8. alternativa *e*

9.




10.

| Classes (em R\$) | $f_i$ | $f_r$ | $F_i$ | $F_r$ |
|---|---|---|---|---|
| $5 \vdash 9$ | 4 | 8% | 4 | 8% |
| $9 \vdash 13$ | 17 | 34% | 21 | 42% |
| $13 \vdash 17$ | 11 | 22% | 32 | 64% |
| $17 \vdash 21$ | 11 | 22% | 43 | 86% |
| $21 \vdash\!\dashv 25$ | 7 | 14% | 50 | 100% |
| **Total** | 50 | 100% | – | – |

a) 92%

b) 58%

c) 78%

d) $9 \vdash 17$

e) 7490 L

f) 4490 L

g) $\simeq 40$

11. alternativa *b*

12. a) 40 apartamentos. 6 apartamentos.

b)

| Número de moradores | $f_i$ | $f_r$ | $F_i$ | $F_r$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 10% | 4 | 10% |
| 1 | 5 | 12, 5% | 9 | 22, 5% |
| 2 | 12 | 30% | 21 | 52, 5% |
| 3 | 11 | 27, 5% | 32 | 80% |
| 4 | 6 | 15% | 38 | 95% |
| 5 | 2 | 5% | 40 | 100% |
| **Total** | 40 | 100% | – | – |

c) 27, 5%

d) 21 apartamentos. 52, 5%

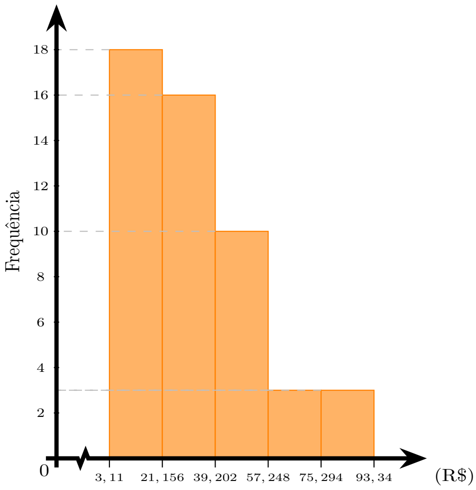
13. a) 50

b) A variável contínua *dinheiro*.

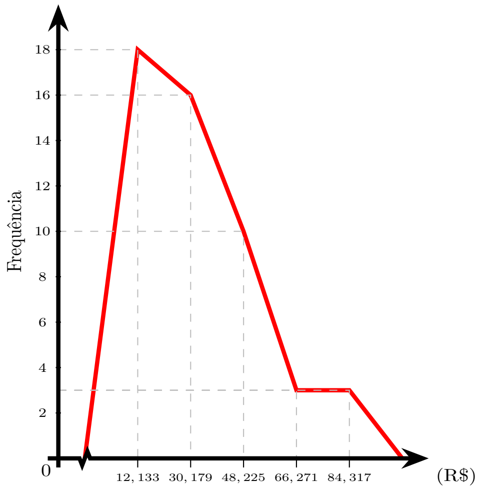
c)

| Classes (em R\$) | $f_i$ | $f_r$ | $F_i$ | $F_r$ | $vm$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $3,10 \vdash 21,15$ | 18 | 36% | 18 | 36% | $12,125$ |
| $21,15 \vdash 39,20$ | 16 | 32% | 34 | 68% | $30,175$ |
| $39,20 \vdash 57,25$ | 10 | 20% | 44 | 88% | $48,225$ |
| $57,25 \vdash 75,30$ | 3 | 6% | 47 | 94% | $66,275$ |
| $75,30 \vdash 93,35$ | 3 | 6% | 50 | 100% | $84,325$ |
| **Total** | 30 | 100% | – | – | – |

d)




e)




subseção 3.3.5, pág. 64

1. a) Não
   b) Não
   c) Sim. Sim. Não.
   d) Sim.
2. a)
   b)
   c)
3. 59
4.
5. $0,04\ m$
6. a) $6,25$
   b) $5,77$
   c)
7. a) 233 kWh
   b) $264,5$ kWh
   c) A mediana, pois ela considera em menor grau de importância os valores muito baixos.
8. a) $R\$\ 565,00$
   b) $R\$\ 450,00$
9. $5,5$
10. Porque a soma dos desvios é sempre zero.
11. a)
    b)
12. a)
    b)
    c)
13. a) A $\overline{x}$ aumentará R\$ 100,00. O $\sigma$ não alterará.
    b)
14. a)
    b)
15. a) $\overline{x} = 33,2716$, $Me = 26,25$ e $Mo = 15,23$
    b) $\overline{x} = 32,70544$, $Me = 26,05$ e $Mo = 12,13$
    c) *Interpretativa*
    d) $\sigma = 20,62516$
    e) $\sigma = 20,7364$
    f) *Interpretativa*

# Capítulo 4 - Matrizes e Determinantes

subseção 4.1.5, pág. 80

1. a) $2 \times 5$
   b) 4
   c) $-5$
   d) 0
   e) não há essa posição
   f) $a_{23}$
   g) $a_{22}$
   h) $5 \times 2$

2. a) Verdadeira
   b) Falsa
   c) Verdadeira
   d) Verdadeira

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. a) $P + R = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 7 & -2 & 7 \end{pmatrix}$
   b) $2P - R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 25 \\ -4 & -10 & -7 \end{pmatrix}$
   c) $3P - \frac{1}{2}Q^t = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 26 \\ 3 & -15 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 4 & -8 & 10 \\ 7 & -10 & 0 \end{bmatrix}$

6. a) Não é simétrica nem antissimétrica
   b) Simétrica
   c) Não é simétrica nem antissimétrica
   d) Simétrica

7. a) $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -7 \\ 6 & -7 & 12 \end{bmatrix}$ Simétrica
   b) $\begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ -5 & 16 & 4 \\ 10 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ Simétrica
   c) $\begin{bmatrix} 54 & -20 & 79 \\ -20 & 29 & -9 \\ 79 & -9 & 142 \end{bmatrix}$ Simétrica
   d) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -8 \\ 3 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ Antissimétrica

8. $n = 4715$, $i = 3$ e $j = 1$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 6 & 9 & 81 \end{bmatrix}$

11. $X = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix}$

12. a) $X = \begin{bmatrix} 4 & -77 & -90 \\ -18 & -13 & -16 \end{bmatrix}$
    b) $Y = \begin{bmatrix} -26 & 84 & 102 \\ 12 & -10 & 6 \end{bmatrix}$

13. a) $AB = \begin{bmatrix} -11 & -1 & 11 & -13 \\ 9 & 11 & -23 & -18 \\ -17 & 13 & -3 & -61 \\ 59 & 33 & -97 & -8 \end{bmatrix}$
    b) $(AB)D = \begin{bmatrix} -29 & -104 & 41 & 130 \\ -206 & -25 & -227 & -51 \\ -373 & -318 & -213 & 280 \\ -468 & 259 & -745 & -547 \end{bmatrix}$
    c) $A(BD) = \begin{bmatrix} -29 & -104 & 41 & 130 \\ -206 & -25 & -227 & -51 \\ -373 & -318 & -213 & 280 \\ -468 & 259 & -745 & -547 \end{bmatrix}$
    d) $BA = \begin{bmatrix} -60 & -42 \\ -29 & 49 \end{bmatrix}$
    e) $(BA)C = \begin{bmatrix} 6 & -450 \\ -205 & 129 \end{bmatrix}$

14. a) $A(B + C) = AB + AC$
    b) $B^t A^t = (AB)^t$
    c) $C^t A^t = (AC)^t$
    d) $(ABA)C = [(AB)A]C = AB \cdot AC$

15. $x = 1$

16. a) $H \times S = \begin{bmatrix} 34 & 41 & 49 & 44 & 38 \\ 62 & 73 & 87 & 78 & 68 \\ 20 & 25 & 30 & 27 & 23 \end{bmatrix}$
    b) Resposta interpretativa.
    c) 62
    d) 27

subseção 4.2.4, pág. 88

1. a) 36
   b) 2
   c) 0
   d) 19
   e) 0
   f) 0
   g) 0
2. a) 72
   b) 72
   c) 72
   d) O Teorema de Binet ($det\,A \cdot det\,B = det\,(AB) = det\,(BA)$), ou seja, a multiplicação dos determinantes de duas matrizes é igual ao determinante da multiplicação das matrizes.
3. 1
4. a) –7
   b) –7
   c) $-\frac{1}{7}$
   d) 49
   e) –63
5. $x = 2$ e $y = 9$
6. a) $det\,M = det\,N = det\,R = 0$
   b) Duas linhas/colunas são iguais ou múltiplas.
7. $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
8. 5
9. a)
   b)
   c)
   d)
   e)
10. a)
    b)
    c)
    d)
    e)
11. a)
    b)
    c)
12. 1

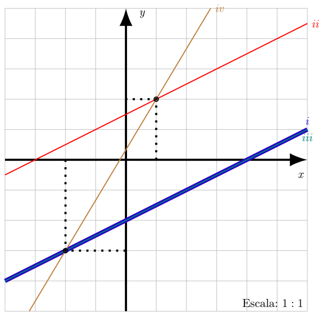
## subseção 4.3.1, pág. 92

1. $x = 4$, $y = 1$
2. a)
   b) É inversa.
3. a) $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$
   b) $G^{1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$
   c) $M$ não admite inversa.
   d) $I_2$
4. $x = 2$ e $y = -3$
5. $a = 1$ e $b = 0$
6. a) Resolve-se pelo Teorema de Binet: $A\,.\,A^{-1} = I \Rightarrow det\,A\,.det\,A^{-1} = det\,I \Rightarrow det\,A.\,det\,A^{-1} = 1 \Rightarrow det\,A^{-1} = \dfrac{1}{det\,A}$
   b) Resolve-se pelo Teorema de Binet: $det\,(A^2) = det\,(A.A) = det\,A\ .\ det\,A = (det\,A)^2$
   c) Se $A$ é invertível, então $det\,A\ .\ det\,A^{-1} = 1$, o que implica dizer que nenhum dos termos pode ser zero, inclusive $det\,A$, como queremos mostrar.

# Capítulo 5 - Sistemas de Equações Lineares

## seção 5.4, pág. 102

1. a) Não
   b) Sim
   c) Não
2. $\alpha = -\frac{1}{8}$
3. $(-2, -5)$, $(-1, -3)$, $(1, 1)$ e $(2, 3)$, por exemplo.
4. a) $5x + 10y + 20z = 100$
   b) $(2, 1, 4)$, $(4, 2, 3)$, $(0, 1, 3)$
   c) 14

5. 


   a) $i$ e $iv$, $ii$ e $iv$, $iii$ e $iv$
   b) $i$ e $iv$: $S = \{(-2, -3)\}$
      $iii$ e $iv$: $S = \{(-2, -3)\}$
      $ii$ e $iv$: $S = \{(1, 2)\}$
   c) $i$ e $ii$, $iii$ e $ii$
   d) $i$ e $iii$
   e) $S = \{(2y + 3, y); y \in \mathbb{R}\}$

6. a) $S = \{(-3, 1)\}$
   b) $S = \{0, -2\}$
   c) $S = \{(2y - 3, y); y \in \mathbb{R}\}$
   d) $S = \{(1, 4)\}$
   e) $S = \{\ \}$
   f) $S = \{\ \}$

7. a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$
   b) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 3 \end{bmatrix}$
   c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
   d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}$

8. a) SPD, $S = \{(3, -7)\}$
   b) SPI, $S = \{(x, \frac{1-3x}{4}); x \in \mathbb{R}\}$
   c) SI, $S = \{\ \}$
   d) SPD, $S = \{(1, 3)\}$
   e) SI, $S = \{\ \}$
   f) SPI, $S = \{(\alpha, -\frac{\alpha}{2} + 1); \alpha \in \mathbb{R}\}$

9. a) SPD, $S = \{3, 1, 2)\}$
   b) SPI, $S = \{(\frac{15c+19}{7}, \frac{-13c-16}{7}, c); c \in \mathbb{R}\}$
   c) SPD, $S = \{(1, -3, 0)\}$
   d) SPI, $S = \{\ \}$

10. Calça: R\$90 e camisa: R\$75.

11. 34 acertos; 6 erros.

12. 4

13. $264\ cm^2$

14. 26

15. 13

16. $X = 500$, $Y = 300$ e $Z = 200$

17. 30

18. Adubo: 240 sacas, Sementes: 300 sacas

19. 17

20. 9

21. Amendoim: 250g; castanha-de-caju: 125g; castanha-do-pará: 125g.

22. $90°$, $60°$ e $30°$ ou $75°$, $45°$ e $60°$

## Capítulo 6 - O ponto e a reta

### seção 6.2: O ponto

#### subseção 6.2.5, pág. 115

1. a) $A = (1, 2)$
   b) $B = (-4, 3)$
   c) $C = (-2, -2)$
   d) $D = (1, 1)$
   e) $E = (4, -4)$
   f) $F = (-2, 2)$
   g) $G = (3.5, -1.5)$
   h) $O = (0, 0)$

2. a) $d(C, F) = 4$ unidades
   b) $d(A, G) \simeq 4,3$ unidades
   c) $d(B, A) \simeq 5,1$ unidades
   d) $d(D, O) = \sqrt{2}$ unidades

3. $-3$

4. $(-2, 0)$ e $(6, 0)$

5. a) $C = (12, 16)$
   b) $D = (6, 8)$

6. a) $M_{AC} = (2, 6)$
   b) $M_{AB} = (1, 1)$

c) $M_{BC} = (7, 3)$
d) $d(B, M_{AC}) = 4\sqrt{5}$ unidades
e) $d(C, M_{AB}) = 7\sqrt{2}$ unidades
f) $d(A, M_{BC}) = \sqrt{122}$ unidades
g) $G(\frac{10}{3}, \frac{10}{3})$

7. $k = 3$
8. $P = (3, -\frac{11}{4})$
9. $(7, 0)$
10. $(-\frac{13}{7}, \frac{31}{7})$

### seção 6.3: A reta

#### subseção 6.3.4, pág. 122

1. a) $t \cap 0y = (0, 5)$
   b) $t \cap 0x = (\frac{5}{2}, 0)$
   c) $(6, -7)$
   d) $(1, 3)$
2. $-3x + y + 11 = 0$
3. a) $y = 2x - 3$
   b) $y = -4x - 8$
   c) $x = 12$
   d) $y = 5x + 6$
4. a) $-2x + y - 4 = 0$
   b) $-3x + 5y + 1 = 0$
   c) $x + 3y - 5 = 0$
   d) $x + y - 3 = 0$
5. $s \cap u = (1, 2)$
6. a)
   b)
   c)
   d)
   e)
   f)
7.
8.
9. $y = x + 3$
10. $x + y - 9 = 0$
11. $x - y = 0$ e $x + y = 0$, respectivamente.
12.
13.
14.
15.

## Capítulo 7 - Posições relativas e distâncias

### seção 7.4, pág. 138

1. a) $q$ e $s$, $t$ e $s$, $r$ e $s$, $s$ e $u$
   b) $r$ e $t$, $r$ e $q$, $r$ e $u$
   c) $t$ e $q$
   d) $t$ e $u$, $q$ e $u$
2. $u : 5x - y - 14 = 0$
3. $t : 2x + y - 8 = 0$
4. $(2, -1)$
5. alternativa $b$
6. a) $k = \frac{2}{3}$
   b) $k \neq \frac{2}{3}$
   c) $k = -1$ ou $k = -2$
7. Sim. $\measuredangle A\widehat{B}C = 90°$
8. $y = \frac{-10x-7}{12}$
9. $2x + y + 3 = 0$
10. $(25, 25)$
11. $t_1 : -9x + y - 28 = 0$ ou $t_2 : \frac{x}{9} + y - \frac{2}{3} = 0$
12. $h = 2\sqrt{5}$
13. $\frac{13}{5} = 2,6$ u.d.
14. $\eta = -9$ ou $\eta = 4$
15. $A_{PQRS} = 19\, u.a.$
16. $8\, u.a.$
17. $A = 9\, u.a.$, $h_{\overline{AB}} = 3\sqrt{2}\, u.d.$
18. $84,5\, u.a.$
19. $15\, u.a.$
20. a) $r : -4x + 5y - 13 = 0$
    b) $s : -5x - 4y + 1 = 0$
    c) $2.88\, u.d.$
    d) $9,12\, u.a.$

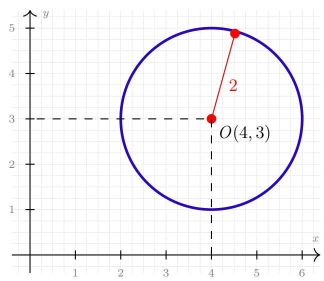
# Capítulo 8 - A circunferência

## seção 8.3, pág. 150

1. a) $O(0,2)$ e $r = 3$
   b) $O(-\frac{3}{4}, \sqrt{3})$ e $r = \sqrt{5}$
   c) $O(-1,0)$ e $r = 2\sqrt{2}$
   d) $O(1,-2)$ e $r = 3$
   e) $O(0,0)$ e $r = \sqrt{10}$
   f) $O(4,-4)$ e $r = 2$

2. a) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 25$, $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$
   b) $x^2 + (y-2)^2 = 5$, $x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$

3. a) $(x-1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{45}{4}$, $x^2 + y^2 - 2x - y - 10 = 0$
   b) $(x+1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{73}{4}$, $x^2 + y^2 + 2x + y - 17 = 0$

4. 


5. a) $x^2 + (y+1)^2 = 9$
   b) $A_c = 9\pi \simeq 28,27\, u.a.$

6. a) É circunferência, com equação reduzida: $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 1$, logo $O(2,4)$ e $r = 1$.
   b) Não é circunferência. Transformando à forma reduzida, temos a igualdade: $(x+1)^2 + (y-1)^2 = -4$, a qual é impossível.
   c) Não é circunferência. Transformando à forma reduzida, temos a igualdade: $2(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$, a qual não representa uma equação diante dos diferenes coeficientes associados aos termos da adição do primeiro termo $(2 \neq 1)$.
   d) É circunferência, com equação reduzida: $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 24$, logo $O(4,-3)$ e $r = 2\sqrt{6}$.
   e) É circunferência, com equação reduzida: $(x-2)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$, logo $O\left(2, \frac{5}{2}\right)$ e $r = \frac{7}{2}$.
   f) Não é circunferência. A expressão se resume à $x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x+y)(x-y) = 0$, o que não representa circunferência, mas sim, cada uma dos termos da multiplicação do primeiro lado da igualdade, as equações das bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares, respectivamente.

7. $x^2 + y^2 + 8y + 14 = 0$

8. $(x-2)^2 + y^2 = 8$

9. $\{k \in \mathbb{R} / k < 2\}$

10. $t : 6x - y - 28 = 0$

11. $k = \pm 3\sqrt{2}$

12. a) Exterior
    b) Secante, $(2,2)$ e $(-1,-1)$
    c) Secante, $\left(\frac{-9+2\sqrt{29}}{5}, \frac{23-4\sqrt{29}}{5}\right)$ e $\left(\frac{-9-2\sqrt{29}}{5}, \frac{23+4\sqrt{29}}{5}\right)$
    d) Tangente, $(\frac{3}{5}, \frac{14}{5})$

13. $\sqrt{2}$ u. d.

14. $\sqrt{2}$ u. d.

15. $t_1 : x - y - 3 = 0$, $t_2 : x + y + 1 = 0$

16. a) Tangentes externas
    b) Secantes
    c) Internas
    d) Tangentes internas
    e) Externas

17. $(x-8)^2 + (y-4)^2 = 16$ ou $x^2 + y^2 - 16x - 8y + 64 = 0$

18. a) $(\frac{5}{2}, 0)$
    b) Não há
    c) $(7, \sqrt{5})$ e $(7, -\sqrt{5})$

19. $A_{\triangle OBD} \simeq 1,61$

20. a) $A_{\triangle ABC} \simeq 7,36$ u.d.
    b) $(4.87, 1.74)$
    c) $(3.34, 0)$
    d) $(0, 6)$
    e) Perpendiculares

# Capítulo 9 - Polinômios

## subseção 9.2.1, pág. 157

1. $m \neq 0$
2. $k \neq \pm 4$
3. a) $k = -6$
   b) $k = 6$
   c) $k \neq \pm 6$
4. Sim, se $a = -3$ e $b = 3$.
5. $a = 4,\ b = -3$ e $c = -3$
6. 
7. $-\frac{55}{4}$
8. $a + b = 4$

## subseção 9.3.1, pág. 160

1. a) $k = -9$
   b) $k = 19$
2. a) $a = 5$ e $b = 4$
   b) $a = 10$ e $b = 6$
3. $k = -9$
4. a) $p(\frac{1}{2}) = \frac{283}{16}$
   b) $p(\sqrt{3}) \simeq 24,87$
   c) $p(\pi) \simeq 180,17$
   d) $p(0) = 16$
5. $\frac{5}{2}$
6. 
7. $a = 6\, m/s^2$
8. $p(x) = \frac{46x^2+19x-132}{15}$, $p(1) = -\frac{67}{15}$
9. $k = \pm\sqrt{-13}$, $(\notin \mathbb{R})$
10. $a = 3$ e $b = -6$

## subseção 9.4.1, pág. 164

1. $a(x).b(x) = 2x^5 - 10x^4 + 5x^3 + 11x^2 - 33x + 18$
2. $-n(x) = 2x^2 - 5x - 2$
3. a) $p(x) + q(x) = 5x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$
   b) $q(x) - p(x) = -5x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 6x + 4$
   c) $p(x)\,.\,q(x) = 10x^7 + 26x^5 + 11x^4 + 10x^3 + x^2 - 10x - 3$
   d) $q(x)\,.\,r(x) = \frac{2}{3}x^5 + 2x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 5x^2 - 5x - 6$
   e) $[r(x)]^2 = r(x)\,.\,r(x) = \frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4$
4. $a = -3,\ b = -8$ e $c = -11$
5. a) $v(x) = \frac{7}{4}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{63}{2}x^4 - 35x^3 + \frac{735}{4}x^2 + \frac{175}{2}x - 350$
   b) $196\, m^3$
6. a) $70 - 2x \times 60 - 2x \times 2x$
   b) $\{x \in \mathbb{R}/0 < x < 30\}$
   c) $V = 8x^3 - 520x^2 + 8400x$
   d) $V = 40000\, cm^3$
   e) $V = 41128\, cm^3$
   f) $V = 36000\, cm^3$
   g) $x \simeq 10,74$
7. $k = 2$

## subseção 9.4.2, pág. 171

1. a) 1
   b) 9
   c) –88
   d) 0
2. a) $q(x) = -2x + 1$ e $r(x) = -7$
   b) $q(x) = x + 2$ e $r(x) = x + 1$
   c) $q(x) = x^2 + x + 1$ e $r(x) = 2x + 3$
   d) $q(x) = 2x^2 + 2x + 3$ e $r(x) = 7x^2$
3. a) –6
   b) –2
4. 4
5. $r(x) = \dfrac{3x + 11}{4}$
6. $p(x) = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$
7. a) 3
   b) 1
8. a) $q(x) = 2x^2 - 9x + 37$ e $r(x) = -151$
   b) $q(x) = -x^3 + 4x^2 + 4x + 2$ e $r(x) = 3$
   c) $q(x) = 12x^2 - 2x + 4$ e $r(x) = 4$
   d) $q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ e $r(x) = 0$

# Capítulo 10 - Números Complexos e Equações Algébricas

## subseção 10.1.5, pág. 180

1. São simétricos em relação ao eixo $Re(z)$.
2.
3. a) $z_1 + z_3 = -3 - 5i$
   b) $z_3 - z_2 = -2 - i$
   c) $z_3 \cdot z_1 = 6 + 18i$
   d) $\frac{z_2}{z_3} = \frac{5+2i}{6}$
4. $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 4 - i$
5. a) $S = \{-3i, 3i\}$
   b) $S = \{-3 - 2i, -3 + 2i\}$
6. a) $m = -1$
   b) $m = \frac{3}{2}$
7. 62
8. a) Sim
   b) Sim

## subseção 10.2.4, pág. 185

1. a) $S = \{4-3i, 4+3i\}; (x-4-3i).(x-4+3i)$
   b) $S = \{0, 1, -2\}; x.(x-1).(x+2)$
2. a) $x^2 + 9 = 0$, por exemplo
   b) $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$, por exemplo
   c) $x^3 - 21x + 20 = 0$, por exemplo
   d) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$, por exemplo
3. a) $m = 81$
   b) $7 + 2i$ e $7 - 2i$
4. a) 10
   b) $2, -\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$
5. $S = \{-3, -1, 1, 2\}$
6. Raiz 2, multiplicidade 3
   Raiz 0, multiplicidade 1
   Raiz –5, multiplicidade 1
7. a) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$
   b) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = 0$
8. a) –1
   b) $\dfrac{1}{3}$
9. $S = \{2, -i, i\}$

## subseção 10.2.7, pág. 191

1. Grau 4
2.
3. $p(x) = k(x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0); k \in \mathbb{R}$
4. a) $S = \{-3, 4, 5\}$
   b) $S = \{-\frac{1}{4}, 7\}$
   c) $S = \{-\sqrt{6}, 0, 1\}$
   d) $S = \{-1, 0, 1\}$

5. 9

6. a) $S = \{-4, \frac{1}{2}, 3\}$

   b) $S = \{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, 2\}$

7. 5

8. $S = -2 + i, -2 - i, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}$

9. a)

   b) $m = 6$ e $S = 1 + i, 1 - i$

10. $S = 2, 5 + 3i, 5 - 3i, -1$

11. a) 2

    b) 8

12. 25

13. $S = \{1, 2, 4\}$

14. $S = \{4, 5, 6\}$

15. $t = -120$ e $S = \{2, 6, 10\}$

16. $S = \{1, 2, 3, -\frac{3}{2}\}$

17. $-5$

18. $S = \{\frac{1}{4}, 3 - 2i, 3 + 2i\}$

# Referências


BALESTRI, Rodrigo. **Matemática**: interação e tecnologia. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016a. v. 2. 352 p. Manual do professor. ISBN 978-85-451-0325-7. Citado na p. 105.

BALESTRI, Rodrigo. **Matemática**: interação e tecnologia. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016b. v. 3. 416 p. Manual do professor. ISBN 978-85-451-0326-4. Citado na p. 165.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Métodos de Contagem e Probabilidade**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 89 p. ISBN 978-85-244-0343-9. eprint: 11.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante Matemática, 2º ano**: ensino médio. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2016a. 368 p. (Coleção quadrante matemática). Manual do professor. ISBN 978-85-418-1409-6. Citado na p. 104.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante Matemática, 3º ano**: ensino médio. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2016b. 416 p. (Coleção quadrante matemática). Manual do professor. ISBN 978-85-418-1411-9. Citado na p. 47.

COSTA NETO, Pedro Luiz de Oliveira. **Estatística**: Paiva. São Paulo: Edgar Blücher, 1977. 264 p.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto & aplicações: ensino médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016a. v. 2. 392 p. Obra em 3 v. Manual do professor. ISBN 978-85-08-17940-4. Citado na p. 88.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto & aplicações: ensino médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016b. v. 3. 392 p. Obra em 3 v. Manual do professor. ISBN 978-85-08-17940-4.

DIAS, Fabiana. **Segunda Lei de Newton (Princípio Fundamental da Dinâmica)**. Atualizado em 20/07/2020. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/fisica/segunda-lei-de-newton-principio-fundamental-da-dinamica. Acesso em: 23 nov. 2021. Citado na p. 161.

FARIAS, Marcos Alves de. **Muito além das equações do 2° grau**. Disponível em: https://ciencia.bambui.ifmg.edu.br/index.php/arquivos/2021/jul-2021/arquivo/junho-2021/muito-alem-das-equacoes-do-2-grau. Acesso em: 7 dez. 2021.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática**: ciência e aplicações, 3: ensino médio. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010. 432 p. Manual do professor. ISBN 978-85-02-09381-2. Citado na p. 192.

LEONARDO, Fabio Martins de (Ed.). **Conexões com a Matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013a. v. 2. 319 p. Obra em 3 v. Manual do professor. Citado nas pp. 27, 31, 32, 104, 105.

LEONARDO, Fabio Martins de (Ed.). **Conexões com a Matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013b. v. 3. 223 p. Obra em 3 v. Manual do professor.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e probabilidade**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991. 343 p. (Coleção do Professor de Matemática; 2). ISBN 978-85-85-85818-01-2.

PAIVA, Manoel. **Matemática**: Paiva. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015. 368 p. Obra em 3 v. Manual do professor. Citado na p. 102.

SILVA JÚNIOR, Joab Silas da. **Equação de Torricelli**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/equacao-torricelli.htm. Acesso em: 23 nov. 2021. Citado na p. 160.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013a. v. 2. 496 p. Manual do professor. ISBN 978-85-322-8522-5. Citado nas pp. 25–27, 89, 105.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática : 3**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013b. v. 3. 496 p. Manual do professor. ISBN 978-85-322-8524-9. Citado nas pp. 48, 164.

TEIXEIRA, Lilian Aparecida (Ed.). **Diálogo**: matemática e suas tecnologias. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020. v. 3. 160 p. Obra em 6 v. Manual do professor. Grandezas, Medidas e Matemática financeira [. . . ] Citado na p. 88.

APÊNDICE A

# Regra de Laplace para cálculo de determinantes

A Regra de Sarrus é um dispositivo útil para o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 3, entretanto, não serve para matrizes de ordens superiores. Para esses casos, incluindo também a de ordem 3, passaremos a discorrer sobre uma técnica. Definiremos, antes, os conceitos de **Menor** e **Cofator** de uma matriz.

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$, o Menor do elemento $a_{ij}$ denotado por $\tilde{A_{ij}}$ é a submatriz $(n-1)\times(n-1)$ de $A$ obtida eliminando-se a *i-ésima* linha e a *j-ésima* coluna de $A$.

**Definição A.1** *Para uma matriz* $A = (a_{ij})_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$*, a submatriz do menor* $\tilde{A_{23}}$ *é:*

$$\tilde{A}_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Ademais, temos que o Cofator do elemento $a_{ij}$, denotado por $A_{ij}$, é definido por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, det(\tilde{A_{ij}})$$

.

Nessa definição, o primeiro fator da multiplicaçãoo $[(-1)^{i+j}]$ implica em considerarmos as matrizes com o seguinte jogo de sinais:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix}$$

**Exemplo A.1** *Para uma matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, o cofator do elemento $a_{23}$ será dado por:*

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\, det(\tilde{A}_{23}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -a_{11}a_{32} + a_{31}a_{12}$$

Construído este raciocínio, definiremos agora o determinante de uma matriz $3 \times 3$ utilizando cofatores.

Consideremos uma matriz genérica, como a seguinte. Tomamos sua primeira linha como exemplo para o cálculo do determinante:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Então, o **determinante de $A$ é igual à soma dos produtos dos elementos da 1ª linha pelos seus cofatores**. Ou seja,

$$\begin{aligned} det(A) &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \qquad \text{(A.1)} \\ det(A) &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \end{aligned}$$

O calculo do determinante da matriz poderia ser feito, utilizando do mesmo procedimento, para qualquer outra linha ou qualquer outra coluna.

Esse processo, conhecido como **Regra de Laplace**, permite-nos calcular o determinante de matrizes de qualquer ordem, bastando diminuí-las em submatrizes de ordem $2 \times 2$.

**Definição A.2** *Determinante:*

*Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$, o determinante de $A$, detonado por $det(A)$, é definido por*

$$det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ A_{1j}$$

A expressão anterior é chamada de **desenvolvimento em cofatores do determinante de A em termos da 1ª linha**.