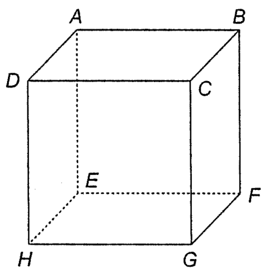
Exercícios Propostos[1]

⚠ *Base ortonormal e norma*

1. Seja $\mathcal{E} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal. Calcule a norma de $\vec{u}$, isto é, $||\vec{u}||$, nos casos:

(a) $\vec{u} = (1,1,1)_{\mathcal{E}}$ (b) $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$ (c) $\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j}$ (d) $\vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

2. Na figura abaixo, temos um cubo de aresta unitária. Considere os vetores $\vec{e}_1 = \overrightarrow{DH}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{DC}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{DA}$, $\vec{u} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{GC}$.



(a) Explique porque $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base ortonormal.

(b) Calcule as coordenadas de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ na base E.

(c) Mostre que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é uma base ortonormal, sendo $\vec{f}_1 = \dfrac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$, $\vec{f}_2 = \dfrac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$ e $\vec{f}_3 = \vec{w}$. Os vetores $\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$ são chamados de *versores* de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente.

(d) Obtenha a matriz M de mudança de base de E para F, bem como a matriz de mudança de F para E. A matriz M é *ortogonal*? Justifique.

(e) Calcule as coordenadas do vetor $\overrightarrow{HB}$ na base E e na base F.

3. Dados os pontos $A = (2,4,3)$, $B = (5,1,-3)$ e $C = (0,-3,1)$ na base canônica, esboce o triângulo ABC no espaço cartesiano $\mathbb{R}^3$ e determine:

(a) Os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CA}$.

(b) O comprimento dos três lados do triângulo, dados por $||\overrightarrow{AB}||$, $||\overrightarrow{BC}||$ e $||\overrightarrow{CA}||$. O triângulo é isósceles? Justifique.

(c) Os pontos médios dos três lados do triângulo. Mostre que a *mediana* relativa ao lado AB coincide com a sua *mediatriz*.

(d) Calcule o ângulo $B\hat{C}A$.

(e) A soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$. Por que essa soma deve ser zero?

⚠ *Produto escalar e ângulo entre vetores*

4. Demonstre as expressões abaixo.

(a) Prove que $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}||$ (Desigualdade de Schwarz) e que $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}||$ se, e somente se, $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{v}$.

(b) Use o item (a) para provar que $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ (Desigualdade triangular).

(c) Prove que $4\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2$.

5. São dadas as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em relação a uma base ortonormal fixada. Calcule, em radianos, o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

[1] Resolva os exercícios sem omitir nenhuma passagem em seus cálculos. Respostas sem resolução e/ou justificativa não serão consideradas. **Data máxima de entrega: 28/05/2025 até 14:00 horas**

(a) $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (-2,10,2)$
(b) $\vec{u} = (-1,1,1)$, $\vec{v} = (1,1,1)$
(c) $\vec{u} = (3,3,0)$, $\vec{v} = (2,1,-2)$
(d) $\vec{u} = \big(\sqrt{3},1,0\big)$, $\vec{v} = \big(\sqrt{3},1,2\sqrt{3}\big)$

6. Considerando uma base ortonormal fixada, determine x de modo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonais, isto é, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

(a) $\vec{u} = (x+1,1,2)$, $\vec{v} = (x-1,-1,-2)$
(b) $\vec{u} = (x,x,4)$, $\vec{v} = (4,x,1)$

7. (a) Obtenha $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v} = (4,-1,5)$ e $\vec{w} = (1,-2,3)$ tal que $\vec{u}\cdot(1,1,1) = -1$.
(b) Ache $\vec{u}$ tal que $||\vec{u}|| = 3\sqrt{3}$ e $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v} = (2,3,-1)$ e $\vec{w} = (2,-4,6)$. Dos vetores $\vec{u}$ encontrados, qual forma ângulo agudo com o vetor $\vec{i} = (1,0,0)$?
(c) O ângulo em radianos entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\dfrac{\pi}{4}$. Sabendo que $||\vec{u}|| = \sqrt{5}$ e $||\vec{v}|| = 1$, calcule o ângulo entre $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$.

⚠ *Projeção ortogonal*

8. Calcule a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ em cada caso, onde se considerou uma base ortonormal fixada.

(a) $\vec{v} = (1,-1,2)$, $\vec{u} = (3,-1,1)$
(b) $\vec{v} = (1,3,5)$, $\vec{u} = (-3,1,0)$
(c) $\vec{v} = (-1,1,1)$, $\vec{u} = (-2,1,2)$
(d) $\vec{v} = (1,2,4)$, $\vec{u} = (-2,-4,-8)$

9. Dada a base ortonormal $\mathcal{E} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, sejam $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 3\vec{i} - 6\vec{j}$.

(a) Obtenha a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, e de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.
(b) Determine $\vec{p}$ e $\vec{q}$ tais que $\vec{v} = \vec{p} + \vec{q}$, sendo $\vec{p}$ paralelo e $\vec{q}$ ortogonal a $\vec{u}$.
(c) Use o resultado anterior para calcular a área do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

⚠ *Produto vetorial*

10. Fixada uma base ortonormal positiva, calcule $\vec{u}\times\vec{v}$ e determine $||\vec{u}\times\vec{v}||$.

(a) $\vec{u} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ e $\vec{v} = 5\vec{i} + 4\vec{j}$
(b) $\vec{u} = (7,0,-5)$, $\vec{v} = (1,2,-1)$
(c) $\vec{u} = (1,-3,1)$, $\vec{v} = (1,1,4)$
(d) $\vec{u} = (2,1,2)$, $\vec{v} = (4,2,4)$

11. (a) Mostre que $||\vec{u}\times\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$.
(b) Calcule a norma de $\vec{u}\times\vec{v}$, sabendo que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3$, $||\vec{u}|| = 1$ e $||\vec{v}|| = 5$.
(c) O lado do triângulo equilátero ABC mede ℓ. Calcule $||\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}||$ em função de ℓ.

12. Fixada a base canônica $\mathcal{E} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, determine o vetor $\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

(a) $\begin{cases} \vec{x}\cdot(2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}) = 9 \\ \vec{x}\times(-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}) = -2\vec{i}+2\vec{k} \end{cases}$
(b) $\begin{cases} \vec{x}\times(1,0,1) = 2(1,1,-1) \\ ||\vec{x}|| = \sqrt{6} \end{cases}$

(c) $\vec{x}$ tem norma $\sqrt{3}$, é ortogonal a $\vec{u} = (-3,0,3)$ e a $\vec{v} = (2,-2,0)$, e forma ângulo obtuso com $\vec{j}$.

⚠ *Cálculo de áreas e volumes*

13. Calcule as seguintes áreas e comprimentos:

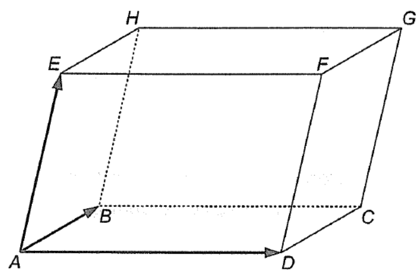
(a) Área do paralelogramo $ABCD$, sendo $\overrightarrow{AB} = (1,1,-1)$, $A = (3,2,-1)$ e $D = (5,3,3)$.

(b) Área do triângulo ABC, sendo $\overrightarrow{AB} = (-1,1,0)$ e $\overrightarrow{AC} = (0,1,3)$, bem como a altura do triângulo relativa ao vértice A e ao lado BC.

14. (a) Prove que $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$, onde $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ estão escritos na base canônica. Tal determinante é indicado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ e é chamado de *produto misto*.

(b) Calcule o produto misto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ para $\vec{u} = (1,3,2)$, $\vec{v} = (0,1,-2)$ e $\vec{w} = (-1,2,0)$, e use as *propriedades do determinante* para obter diretamente os valores de $[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$, $[\vec{v}, 2\vec{w}, \vec{u}]$ e $[\vec{u}, 3\vec{v} - 2\vec{u}, \vec{w} + 3\vec{u}]$.

15. Considere o paralelepípedo $ABCDEFGH$ da figura abaixo. Em relação a uma base ortonormal positiva, $\overrightarrow{AB} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{BE} = (2,2,2)$ e $\overrightarrow{AF} = (3,5,6)$. Calcule:



(a) A área do paralelogramo $ABCD$.

(b) O volume do paralelepípedo $ABCDEFGH$.

(c) A altura do paralelepípedo em relação à face $ABCD$.

(d) O volume do tetraedro $EABD$.

(e) A altura do tetraedro $EABD$ em relação à face DEB.