

Sumário

1	Introdução	3
1.1	Lógica Formal	3
1.2	Dedução e Indução	5
1.3	Lógica Clássica e Lógica Simbólica	5
1.4	Proposições e Predicados	6
1.5	Princípios da Lógica	7
2	Cálculo Proposicional	9
2.1	Linguagem	9
2.1.1	Proposições Simples	9
2.1.2	Proposições Compostas	10
2.1.3	Fórmulas Bem Formadas	15
2.2	Semântica	18
2.2.1	Operações lógicas	19
2.2.2	Tabela-verdade	23
2.2.3	Tautologia, Contradição e Contingência	25
2.3	Equivalência Lógica	26
2.4	Formas normais	28
2.5	Inferência Lógica (Consequência Lógica)	32
3	Dedução no Cálculo Proposicional	33
3.1	Argumentos	33
3.2	Dedução	36
3.3	Simplificação da Conclusão	39
3.4	Invalidade	46

4	Cálculo de Predicados	49
4.1	Predicados e Termos	49
4.2	Operações Lógicas	52
4.3	Quantificadores	55
4.4	Símbolos funcionais	63
4.5	Fórmulas Bem Formadas	66
5	Dedução no Cálculo de Predicados	67
5.1	Eliminação e Inserção de Quantificadores	67
5.1.1	Instanciação Universal	68
5.1.2	Generalização Universal	68
5.1.3	Generalização Existencial	70
5.1.4	Instanciação Existencial	71
5.2	Cuidados na aplicação das regras	72
6	Método de prova por Resolução	75
6.1	Resolução	75
6.1.1	Representação clausal	76
6.1.2	Unificação	78
6.2	Resolução por Refutação	81
A	Equivalências e Inferências fundamentais	85
A.1	Leis de Equivalência	85
A.2	Regras de Inferência	86
A.3	Equivalências e Inferências com Quantificadores	87

Capítulo 1

Introdução

1.1 Lógica Formal

Embora existam muitas definições para o campo de estudo da lógica, essas definições não diferem essencialmente umas das outras; há um certo consenso entre os autores de que a Lógica tem, por objeto de estudo, as leis gerais do pensamento, e as formas de aplicar essas leis corretamente na investigação da verdade.

Embora tenham sido encontrados na Índia textos sobre esse assunto, escritos em épocas remotas, é tradicionalmente aceito que a Lógica tenha nascido na Grécia Antiga, por volta do século IV antes de Cristo. Os primeiros trabalhos sobre Lógica são devidos a PARMÊNIDES, ZENÃO e ao grupo conhecido como “sofistas”, mas o verdadeiro criador da Lógica é, sem dúvida, ARISTÓTELES, pois foi ele quem sistematizou e organizou esse conhecimento, elevando-o à categoria de ciência. Em sua obra chamada *Organum* (que em tradução livre significa “ferramenta”) ARISTÓTELES estabeleceu princípios tão gerais e tão sólidos que dominou o pensamento ocidental durante dois mil anos e até hoje são considerados válidos.

ARISTÓTELES tinha como objetivo a busca da verdade e, para isso, procurava caracterizar os instrumentos de que se servia a razão, nessa busca. Em outras palavras, ARISTÓTELES se preocupava com as formas de raciocínio que, a partir de conhecimentos considerados verdadeiros, permitiam obter novos conhecimentos. Caberia, pois, à Lógica a formulação de leis gerais de encadeamentos de conceitos e juízos que levariam à descoberta de novas verdades.

Essa forma de encadeamento é chamado, em Lógica, de *argumento*, enquanto as afirmações envolvidas são chamadas *proposições*; um argumento é um conjunto de proposições tal que se afirme

que uma delas é derivada das demais; usualmente, a proposição derivada é chamada *conclusão*, e as demais, *premissas*. Em um *argumento válido*, as premissas são consideradas provas evidentes da verdade da conclusão.

Eis um exemplo de argumento:

Se eu ganhar na loteria, serei rico.

Eu ganhei na loteria.

Logo, sou rico.

Como a conclusão “sou rico” é uma decorrência lógica das duas premissas, esse argumento é considerado válido.

É preciso deixar claro que a Lógica se preocupa com o relacionamento entre as premissas e a conclusão, com a estrutura e a forma do raciocínio, e não com seu conteúdo, isto é, com as proposições tomadas individualmente. Em outras palavras, não é objeto da Lógica saber se quem ganha na loteria fica rico ou não, ou se eu ganhei ou não na loteria. O objeto da Lógica é determinar se a conclusão é ou não uma consequência lógica das premissas. Por esse motivo, porque o objeto da Lógica é a forma pela qual o raciocínio está estruturado, a Lógica costuma receber o nome de *Lógica Formal*.

A validade do argumento está diretamente ligada à forma pela qual ele se apresenta, como pode ser mostrado pelo enunciado abaixo,

Se eu ganhar na loteria, serei rico.

Não ganhei na loteria.

Logo, não sou rico.

que, embora seja semelhante ao anterior, tem outra forma e, nessa forma, a conclusão não se segue logicamente das premissas e, portanto, não é um argumento válido¹. Os argumentos inválidos são também chamados *sofismas* ou *falácias*. Ambos são basicamente raciocínios errados. O que diferencia o sofisma da falácia, é que a falácia é involuntária e decorre de uma falha de quem argumenta. Por outro lado, o sofisma é intencional e tem como objetivo induzir a audiência ao engano.

¹Na Lógica Formal, o tempo cronológico não é considerado, veremos isso mais à frente nos Princípios da Lógica Clássica.

1.2 Dedução e Indução

A Lógica dispõe de duas ferramentas principais que podem ser utilizadas pelo pensamento na busca de novos conhecimentos: a *dedução* e a *indução*, que dão origem a dois tipos de argumentos, *dedutivos* e *indutivos*. Os argumentos dedutivos pretendem que suas premissas forneçam uma prova conclusiva da veracidade da conclusão. Um argumento dedutivo é válido quando suas premissas, se verdadeiras, fornecem provas convincentes para sua conclusão, isto é, quando for impossível que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa; caso contrário, o argumento dedutivo é dito inválido. Os dois argumentos citados anteriormente são do tipo dedutivo, o primeiro válido e o segundo inválido.

Os argumentos indutivos, por outro lado, não pretendem que suas premissas forneçam provas cabais da veracidade da conclusão, mas apenas que forneçam indicações dessa veracidade. Veja um exemplo de argumento indutivo:

Joguei uma pedra no lago e a pedra afundou.

Joguei outra pedra no lago e ela também afundou.

Joguei mais uma pedra no lago e também esta afundou.

Logo, se eu jogar uma outra pedra no lago, ela vai afundar.

Os termos “válidos” e “inválidos” não se aplicam aos argumentos indutivos; eles costumam ser avaliados de acordo com a maior ou menor possibilidade com que suas conclusões sejam estabelecidas.

Costuma-se dizer que os argumentos indutivos partem do particular para o geral, isto é, a partir de observações particulares, procura estabelecer regras gerais que, no caso das ciências naturais, devem ser provadas por outros meios; os argumentos dedutivos, por seu lado, partem de regras gerais para estabelecer a veracidade de acontecimentos particulares. O desenvolvimento da ciência tem dependido, em grande parte, da habilidade em combinar os dois tipos de raciocínio.

1.3 Lógica Clássica e Lógica Simbólica

Os argumentos formulados em uma linguagem natural, como o inglês ou português, são muitas vezes de difícil avaliação, principalmente por causa da ambiguidade inerente às linguagens naturais e das construções às vezes vagas ou confusas dos termos. Em virtude desses fatos, a partir dos trabalhos de GEORGE BOOLE, em meados do século XIX, foram sendo utilizados cada vez mais símbolos de origem matemática para expressar os enunciados e raciocínios da Lógica. A Lógica

apresentada dessa forma é chamada *Lógica Matemática* ou *Lógica Simbólica*, enquanto a Lógica baseada em linguagem natural é chamada *Lógica Clássica*.

À medida que a Lógica Simbólica desenvolve sua própria linguagem técnica, vem se tornando um instrumento cada vez mais poderoso para a análise e a dedução dos argumentos. A utilização de uma simbologia matemática ajuda a expor, com maior clareza, as estruturas lógicas das proposições e dos argumentos, que podem não ficar suficientemente claras se expressas em linguagem natural.

Uma outra vantagem da utilização de uma linguagem simbólica para a Lógica é a possibilidade de utilização de recursos computacionais no tratamento de enunciados e argumentos; os computadores digitais se mostram bastante adequados à manipulação de símbolos, enquanto apresentam extrema dificuldade no tratamento de linguagem natural. Em 1965, um pesquisador chamado ROBINSON desenvolveu um procedimento computacional para a dedução, chamado Resolução, evidenciando as vantagens da utilização de uma linguagem simbólica para a Lógica.

1.4 Proposições e Predicados

Muitas das ideias envolvidas nos argumentos podem ser apresentadas através de proposições (também chamados *enunciados* ou *sentenças*) que se referem a um objeto; por exemplo, “eu ganhei na loteria”, “José atirou uma pedra no lago”, “Sócrates é um homem”. Tais proposições são chamadas *singulares*.

Existem outras proposições, no entanto, que fazem referência a conjuntos de objetos; por exemplo, “todos os homens são mortais”, “alguns astronautas foram à Lua”, “nem todos os gatos caçam ratos”.

Os termos “homens”, “astronautas” e “gatos” são conceitos; não se referem a nenhum homem, astronauta ou gato em particular, mas sim ao conjunto de propriedades que faz com que um objeto esteja em uma categoria ou em outra. Tais propriedades são chamadas *predicados*.

Como a Lógica que trata apenas das proposições singulares é mais simples do que a que trata também de conjuntos de objetos, os autores preferiram separar o estudo da Lógica Matemática em duas partes: o *Cálculo Proposicional*, ou *Lógica Sentencial*, que se ocupa das proposições singulares, e o *Cálculo de Predicados*, ou *Lógica dos Predicados*, que trata dos conjuntos de objetos e suas propriedades.

Para tratar com objetos e suas propriedades, o *Cálculo de Predicados* apresenta dois conceitos matemáticos, a *variável*, para se referir a um objeto genérico de uma categoria, e os *quantificadores*,

expressões como “para todo” e “existe algum” para se referirem à quantidade de objetos que partilham o mesmo predicado; assim a proposição “todos os homens são mortais” assume a forma “para todo x , se x é um homem, então x é mortal” e as proposições “alguns astronautas foram à Lua” e “nem todos os gatos caçam ratos” assumem respectivamente as formas “existe um x tal que x é um astronauta e x foi à Lua” e “existe um x tal que x é um gato e x não caça ratos”.

Quando as variáveis e quantificadores se referem apenas aos objetos, o Cálculo de Predicados também é chamado *Lógica de Primeira Ordem*; mas podemos pensar em uma situação na qual as variáveis e quantificadores se refiram também aos predicados; por exemplo, considere o enunciado “existe um predicado que todas as pessoas possuem”, que pode ser expressa por “existe um P tal que P é um predicado e tal que para todo x , se x é uma pessoa, x possui P ”.

Quando as variáveis e quantificadores se referem também aos predicados, como na expressão acima, temos o que chamamos *Lógica de Segunda Ordem*. Um exemplo importante da Lógica de Segunda Ordem é o *Princípio de Indução Matemática*: “se o número 1 tiver um predicado, e o fato de n possuir esse predicado implica em que $n + 1$ também o possua, então o predicado se aplica a todos os números naturais”.

Os predicados de primeira ordem são, pois, aqueles que se aplicam a indivíduos; de segunda ordem são aqueles que se aplicam a indivíduos e aos predicados de primeira ordem. A generalização pode prosseguir, considerando-se predicados de terceira ordem, de quarta ordem, e assim por diante, cada um deles aplicando-se aos indivíduos e aos predicados das ordens anteriores.

Em nosso curso vamos nos limitar ao Cálculo Proposicional e ao Cálculo de Predicados de Primeira Ordem.

1.5 Princípios da Lógica

A Lógica Formal repousa sobre três princípios fundamentais que permitem todo seu desenvolvimento posterior, e que dão validade a todos os atos do pensamento e do raciocínio. São eles:

Princípio da Identidade

O que é, é; ou seja, todo objeto é idêntico a si próprio. Isso não é um simples jogo de palavras; na verdade, é possível defender a noção oposta, de que a realidade é fluida, de que nada permanece igual a si próprio, e que qualquer raciocínio sobre objetos é uma ficção.

Princípio da Não-Contradição

Um objeto não pode, simultaneamente, ser e não ser. Ou seja, não é possível afirmar e negar o mesmo predicado para o mesmo objeto ao mesmo tempo; ou ainda, de duas afirmações contraditórias, uma é necessariamente falsa.

Princípio do Terceiro Excluído

Todo objeto é ou não é. Ou seja, uma dada afirmação é necessariamente verdadeira ou falsa, não existindo uma terceira opção.

Sobre esses princípios repousa todo o arcabouço da Lógica Clássica. A negação de um ou mais desses princípios dá origem a outras lógicas, chamadas genericamente de *Lógicas Não-Clássicas*, cujas principais vertentes são:

- as *Lógicas Modais*, que incluem os conceitos de possibilidade e de necessidade, e nas quais o verbo pode ser modificado por um advérbio de modo, como nos enunciados “talvez chova amanhã”, e “certamente João saiu”;
- as *Lógicas Plurivalentes*, nas quais o conceito de veracidade deixa de ser binário (verdadeiro e falso) para assumir outros valores, como nas *Lógicas Trivalentes*, nas quais as proposições podem ser verdadeiras, falsas e neutras, nas *Lógicas Nebulosas*, em que existem gradações de veracidade e nas quais uma proposição pode ser mais verdadeira que outra, e nas lógicas probabilísticas, nas quais existe uma probabilidade de que uma proposição possa ser verdadeira;
- as *Lógicas Fracas*, como a *Intuicionista*, que não aceita o Princípio do Terceiro Excluído, e para a qual a dupla negação não equivale à afirmação, o que pode ser exemplificado pelo enunciado “não tenho nada” onde o termo “não” ao invés de se contrapor ao termo “nada” o reforça.

Nos últimos anos as Lógicas Não-Clássicas têm sofrido um enorme desenvolvimento, em virtude, principalmente, de novas aplicações, algumas das quais na área computacional, como a *Lógica Nebulosa* ou *Lógica Fuzzy*.

Capítulo 2

Cálculo Proposicional

2.1 Linguagem

2.1.1 Proposições Simples

O primeiro passo na construção de uma linguagem simbólica, mais adequada à formulação dos conceitos da Lógica, é a apresentação do que chamamos *proposição simples* ou *atômica*. Em linhas gerais, uma proposição simples (ou enunciado, ou sentença), é uma declaração que exprime um pensamento com sentido completo.

São exemplos de proposições simples:

A Lua é um satélite da Terra.

Sócrates é um homem.

Eu estudo Lógica.

Todos os homens são mortais.

Em geral, as proposições simples são constituídas por um sujeito, um verbo, e seus complementos. Em linguagem simbólica, costumamos representar as proposições simples pelas letras p , q , r , s , t etc., chamadas *letras sentenciais*. Assim, podemos fazer as seguintes representações:

p : A Lua é um satélite da Terra.

q : Sócrates é um homem.

r : Eu estudo Lógica.

s : Todos os homens são mortais.

2.1.2 Proposições Compostas

As *proposições compostas* ou *moleculares* são obtidas combinando proposições simples através de certos termos chamados *conectivos*. A Lógica dispõe de cinco conectivos básicos:

- e
- ou
- não
- se ... então
- se e somente se

Utilizando esses conectivos podemos construir, por exemplo, as seguintes proposições compostas:

A Lua **não** é o satélite da Terra.

João é magro **e** José é alto.

Mário foi ao cinema, João foi ao teatro **e** Marcelo ficou em casa.

Mário foi ao cinema **ou** Marcelo ficou em casa.

Maria foi à praia **ou** ao mercado.

Se a chuva continuar a cair, **então** o rio vai transbordar.

Se João estudar, será aprovado.

João será aprovado **se e somente se** estudar.

Em Lógica Simbólica, a ação de combinar proposições é chamada *operação*, e os conectivos são chamados *operadores*, que são representados por símbolos específicos. Apresentamos abaixo as cinco operações lógicas, com seus respectivos conectivos e símbolos:

Operação	Conectivo	Símbolo
Negação	não	\neg
Conjunção	e	\wedge
Disjunção	ou	\vee
Condicional	se ... então	\rightarrow
Bicondicional	se e somente se	\leftrightarrow

Para representar as proposições compostas, primeiro representamos as proposições simples da expressão com uma letra sentencial e depois as combinamos utilizando os símbolos dos conectivos. Assim, as expressões do exemplo acima podem ser representadas da seguinte forma:

A Lua **não** é o satélite da Terra.

p : a Lua é o satélite da Terra

$(\neg p)$

João é magro **e** José é alto.

p : João é magro, q : José é alto

$(p \wedge q)$

Mário foi ao cinema, João foi ao teatro **e** Marcelo ficou em casa.

p : Mário foi ao cinema, q : João foi ao teatro, r : Marcelo ficou em casa

$(p \wedge q \wedge r)$

Mário foi ao cinema **ou** Marcelo ficou em casa.

p : Mário foi ao cinema, q : Marcelo ficou em casa

$(p \vee q)$

Maria foi à praia **ou** ao mercado.

p : Maria foi à praia, q : Maria foi ao mercado

$(p \vee q)$

Se a chuva continuar a cair, **então** o rio vai transbordar.

p : a chuva continua a cair, q : o rio vai transbordar

$(p \rightarrow q)$

Se João estudar, será aprovado.

p : João estuda, q : João será aprovado

$$(p \rightarrow q)$$

João será aprovado **se e somente se** estudar.

p : João é aprovado, q : João estuda

$$(p \leftrightarrow q)$$

Devido à riqueza da Língua Portuguesa, palavras com significados ligeiramente diferentes são representados pelo mesmo conectivo lógico. A seguir são mostradas algumas expressões comuns em português associadas a diversas operações lógicas:

Negação ($\neg A$)	não A
	não se dá que A
	não é fato que A
	não é verdade que A
	não é que A
	não se tem A
	é falso que A
	não é o caso que A
Conjunção ($A \wedge B$)	A e B
	A, mas B
	A, embora B
	A, assim como B
	A e, além disso, B
	tanto A como B
	A e também B
	não só A, mas também B
	A, apesar de B
Disjunção ($A \vee B$)	A ou B
	ou A ou B
	A ou B ou ambos

Condicional ($A \rightarrow B$)	se A, então B
	se A, B
	se A, isto significa que B
	tendo-se A, então B
	quando A, então B
	sempre que A, B
	B, sempre que se tenha A
	B, contanto que A
	B, se A
	B, quando A
	B no caso de A
	A, só se B ^(*)
	A, somente se B ^(*)
	A implica B
	A acarreta B
	B é implicada por A
	A, logo B
	B segue de A
	basta A para B
	A é condição suficiente para B ^(*)
	B é condição necessária para A ^(*)
	uma condição suficiente para B é A ^(*)
	uma condição necessária para A é B ^(*)
Bicondicional ($A \leftrightarrow B$)	A se e só se B
	A se e somente se B
	A quando e somente quando B
	A equivale a B
	A unicamente se B
	não A exceto se B
	A é condição necessária e suficiente para B ^(**)
	uma condição necessária e suficiente para A é B ^(**)

(*) **Condição suficiente ou condição necessária**

Neste ponto, vale destacar as expressões “condição suficiente” e “condição necessária”. Ambas são tratadas como condicionais ($A \rightarrow B$), onde dizemos que: “ A é uma condição suficiente para B ” e que “ B é uma condição necessária para A ”.

Exemplos:

Uma *condição suficiente* para votar é *possuir título de eleitor*.

p : eu possuo título de eleitor, q : eu voto

$(p \rightarrow q)$

A condição “possuir título de eleitor” basta (é suficiente) para votar.

Uma *condição necessária* para dirigir é *ter carteira de motorista*

p : eu dirijo, q : eu tenho carteira de motorista

$(p \rightarrow q)$

Neste caso, se eu dirijo, necessariamente, eu tenho carteira de motorista.

Note que, no entanto, existem outras condições necessárias para dirigir, como: saber dirigir, ter um carro etc.

Além disso, as expressões com os advérbios “só”, “somente” e “apenas” representam condições necessárias, onde a condição necessária (o consequente) é a palavra que vem **após** o “somente” da sentença em português. Por exemplo, as expressões abaixo:

João será aprovado, *somente* se estudar

Apenas se estudar João será aprovado

são representadas por $(p \rightarrow q)$, onde p representa “João será aprovado” e q representa “João estuda”.

() Condição necessária e suficiente**

No entanto, quando houver as duas condições, ou seja, “condição necessária e suficiente”, a expressão será uma bicondicional. Por exemplo:

João estudar é *condição necessária e suficiente* para ser aprovado

João será aprovado se e somente se estudar

João será aprovado unicamente se estudar

João não será aprovado, exceto se estudar

todas podem ser representadas por $(p \leftrightarrow q)$, onde p representa “João será aprovado” e q representa “João estuda”.

Neste caso, temos uma conexão mais forte entre as proposições que indica que ambas acontecerão ou ambas não acontecerão ao mesmo tempo. No exemplo acima, ou João estuda e é aprovado ou João não estuda e não é aprovado.

2.1.3 Fórmulas Bem Formadas

Com o auxílio dos conectivos podemos construir proposições compostas mais elaboradas. Por exemplo, considere a seguinte proposição:

Se o deficit persistir e a arrecadação não aumentar, então ou aumentamos os impostos ou haverá inflação.

Com a representação:

p : o deficit persiste

q : a arrecadação aumenta

r : aumentamos os impostos

s : haverá inflação

a proposição poderá ser escrita na forma simbólica:

$$((p \wedge (\neg q)) \rightarrow (r \vee s))$$

Uma proposição composta é portanto formada por conexões de proposições simples, ou seja, uma proposição composta é uma cadeia constituída pelos símbolos p, q, r etc. (representando proposições simples), símbolos de conectivos e parênteses. No entanto, nem toda cadeia desses símbolos representa uma proposição composta. Por exemplo, a cadeia:

$$pq \leftrightarrow) \wedge \wedge \vee (r \rightarrow$$

não tem nenhum significado em Lógica. Temos então o problema de reconhecer quando uma cadeia desses símbolos representa realmente uma proposição composta. As proposições são também conhecidas por *fórmulas bem formadas* (fbf) (ou, simplesmente, *fórmulas*) e possuem uma lei de formação, enunciada abaixo:

1. Proposições simples são fórmulas
2. Se A e B são fórmulas, então são também fórmulas:
 $(A \wedge B), (A \vee B), (\neg A), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$
3. Nada mais é fórmula

Observe que os símbolos A e B introduzidos na seção anterior se tratam de variáveis que denotam sentenças quaisquer da linguagem proposicional. O leitor deve estar atento para o fato de que tais símbolos não são propriamente símbolos da linguagem, mas sim símbolos que estão “fora” da linguagem proposicional. Tais variáveis denominam-se, costumeiramente, *meta-variáveis*.

Tanto as proposições simples como as compostas são chamadas expressões proposicionais. No que se segue, por uma questão de simplicidade, utilizaremos o termo proposição para indicar uma expressão proposicional, ou seja, tanto proposições simples como compostas.

Ordem de precedência das operações

Para evitar que uma fórmula fique com um número excessivo de parênteses podemos omitir alguns deles, a fim de facilitar a escrita ou a leitura da fórmula. Para isso é necessário estabelecer uma hierarquia de operação dos conectivos. Tal hierarquia (ou ordem de precedência) é a seguinte:

1. \neg
2. \wedge, \vee

$$\begin{array}{ccccccccc} (p & \leftrightarrow & q & \vee & (\neg & r & \rightarrow & s)) & \wedge & \neg & t \\ 4 & & 3 & & 1 & & 2 & & 6 & & 5 \end{array}$$

2.2 Semântica

Além das proposições, a Lógica dispõe de uma função, chamada *valor lógico* (representada por vl), que associa a cada proposição simples um de dois valores lógicos, chamados *verdadeiro* (representado por V) ou *falso* (representado por F). Geralmente, o valor lógico V ou F é associado à proposição, em consonância com o significado da proposição no mundo real, embora isso não seja essencial.

Com esse sentido podemos dizer que as proposições simples:

A Lua é o satélite da Terra.

Pedro Álvares Cabral descobriu o Brasil.

são verdadeiras, isto é assumem o valor lógico V, e que as proposições simples:

Dante escreveu Os Lusíadas.

O Brasil é uma monarquia.

são claramente falsas, e portanto assumem o valor lógico F.

O objetivo da Lógica, no entanto, não é verificar se as proposições são verdadeiras ou falsas; ao invés disso, o objeto de estudo da Lógica é examinar o relacionamento entre as proposições, em decorrência dos seus valores lógicos. Dito de outra forma, a Lógica não se interessa pelo significado das proposições, mas apenas por sua forma; no que concerne à Lógica, uma proposição como “A Lua é o satélite da Terra” pode ser tratada como “a proposição p ”, não sendo necessário nenhuma referência a conhecimentos de astronomia.

De acordo com os Princípios da Lógica, podemos afirmar que:

- Toda proposição verdadeira é sempre verdadeira, não podendo ser ora verdadeira ora falsa. (Identidade)
- Nenhuma proposição pode ser verdadeira e falsa simultaneamente. (Não-contradição)
- Toda proposição é necessariamente verdadeira ou falsa, não existindo outra possibilidade. (Terceiro excluído)

podemos escrever: $vl(p) = V$, $vl(q) = V$, $vl(r) = F$, $vl(s) = F$

Como podemos determinar o valor lógico de uma proposição composta, em função dos valores lógicos das proposições que a compõe?

Para responder a essa pergunta, temos que definir as operações, isto é, dar o resultado da operação para cada possível conjunto de valores dos operandos.

2.2.1 Operações lógicas

Negação

Se A é uma proposição, a expressão $\neg A$ é chamada *negação* de A . Claramente, a negação inverte o valor lógico de uma expressão; se A for verdadeira, $\neg A$ é falsa, enquanto que se A for falsa, $\neg A$ é verdadeira. A tabela da operação de negação é muito simples, e é apresentada abaixo, onde A é uma proposição qualquer.

A	$(\neg A)$
V	F
F	V

Então, se a expressão “Maria foi ao cinema” é representada por p , expressões como “Maria não foi ao cinema” ou “É falso que Maria tenha ido ao cinema” ficam representadas por $(\neg p)$.

Conjunção

Se A e B são proposições, a expressão $(A \wedge B)$ é chamada *conjunção* de A e B , e as proposições A e B são chamadas *fatores* da expressão. Se conhecermos os valores lógicos dos fatores de uma conjunção, o que podemos dizer do valor lógico da conjunção?

A expressão “João é magro e José é alto” será verdadeira unicamente no caso em que os dois fatores forem verdadeiros, isto é, se João for magro e José for alto; se um dos dois fatores (ou ambos) for falso, a conjunção é falsa.

O valor lógico do resultado da operação de conjunção pode ser apresentado através da tabela abaixo, onde A e B são proposições quaisquer:

A	B	$(A \wedge B)$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

Disjunção

Às vezes, a língua portuguesa encerra alguma ambiguidade no uso do conectivo “ou”; a utilização de “ou” entre dois fatos indica que um deles é verdadeiro, mas pode não deixar claro se ambos o são; normalmente, na linguagem natural, procura-se resolver a ambiguidade utilizando-se o contexto. Por exemplo, na frase “Maria foi à praia ou ao mercado” parece que apenas um dos fatos é verdadeiro, pois é difícil alguém ir à praia e ao mercado simultaneamente; no entanto, se não houver exigência de simultaneidade, pode ocorrer que Maria tenha ido à praia e depois ao mercado, e ambos os fatos são verdadeiros.

O outro exemplo, “Mário foi ao cinema ou Marcelo ficou em casa” é ainda pior, pois não há nenhuma indicação se apenas um ou os dois fatos ocorreram. Como na Lógica não são permitidas ambiguidades, foi necessário definir dois conectivos para o termo “ou”:

- o *ou-inclusivo*, onde se permite que um dos fatos ou ambos ocorram, e
- o *ou-exclusivo* onde um e apenas um dos fatos ocorrem.

Se A e B são proposições, a expressão $(A \vee B)$ é chamada *disjunção inclusiva* de A e B ; por seu turno, a *disjunção exclusiva* das expressões A e B é indicada por $(A \vee\vee B)$; em ambos os casos, as proposições A e B são chamadas *parcelas* da expressão.

Em que condições a expressão “Maria foi à praia ou ao mercado” é verdadeira? No conceito inclusivo do conectivo “ou” basta que Maria tenha ido pelo menos um dos lugares; ou seja, para que uma disjunção inclusiva seja verdadeira, basta que uma das parcelas (ou ambas) o seja; unicamente se ambas as parcelas forem falsas, a disjunção inclusiva o será.

Por outro lado, se se tratar de uma disjunção exclusiva, a expressão só será verdadeira se Maria tiver ido a um dos lugares, mas não ao outro. A disjunção exclusiva será verdadeira se uma das parcelas for verdadeira e a outra falsa; se ambas as parcelas tiverem o mesmo valor lógico, a disjunção exclusiva será falsa. Em nosso texto, trataremos unicamente da disjunção inclusiva;

isto é, o termo *disjunção* se referirá à disjunção inclusiva; quando se tratar da disjunção exclusiva, isso será expressamente citado.

A tabela abaixo apresenta os resultados das operações de disjunção inclusiva e exclusiva, onde A e B são proposições quaisquer.

A	B	$(A \vee B)$	$(A \vee\!\!\!\wedge B)$
V	V	V	F
F	V	V	V
V	F	V	V
F	F	F	F

Na forma textual, às vezes escrevemos um “ou” antes da frase, às vezes omitimos parte da expressão, mas isso não altera a forma simbólica; por exemplo, a expressão “Ou Maria foi ao teatro ou foi ao cinema” fica representada por $(p \vee q)$, onde p representa “Maria foi ao teatro” e q representa “Maria foi ao cinema”.

Condicionamento

Se A e B são proposições, a expressão $(A \rightarrow B)$ é chamada *condicional* ou *implicação* de A e B ; a proposição A é chamada *antecedente*, e a proposição B *consequente* da condicional. A operação de condicionamento indica que o acontecimento de A é uma condição para que B aconteça. Como podemos estabelecer o valor lógico da proposição condicionada, conhecidos os valores lógicos do antecedente e do consequente?

Considere a expressão “Se a chuva continuar a cair então o rio vai transbordar”. Suponha que ambas as coisas aconteçam, isto é, que a chuva tenha continuado a cair, e o rio tenha transbordado; nesse caso, a condicional é verdadeira. Suponha, por outro lado, que a chuva tenha continuado a cair, mas que o rio não tenha transbordado; nesse caso, A não foi condição para B , isto é, a condicional é falsa. Finalmente, considere que a chuva não tenha continuado a cair; nesse caso, independentemente do que tenha acontecido com o rio, a condicional é considerada verdadeira.

Por que esse fato ocorre? Por que motivo, a Lógica considera que se o antecedente for falso, a condicional é verdadeira, qualquer que seja o valor lógico do consequente?

Existem vários motivos para isso, e vamos aqui apresentar o mais simples. Quando o antecedente for falso, temos quatro possibilidades para o valor lógico da condicional:

		Possibilidades			
antecedente	consequente	1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a
F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F

Se a Lógica adotasse a segunda possibilidade, a condicional assumiria os mesmos valores lógicos do conseqüente, independentemente do antecedente, o que não parece razoável; se assumisse a terceira, o antecedente e o conseqüente poderiam ser permutados, sem modificar o valor lógico da condicional, o que também não parece ser razoável (se o rio transbordar, a chuva vai continuar caindo).

Finalmente, se a quarta possibilidade fosse adotada, a condicional não se distinguiria da conjunção; resta então a primeira possibilidade, que é a adotada pela Lógica.

Como já dissemos, a Lógica não se preocupa com os significados das expressões, mas somente com sua forma. Podemos então considerar que a operação de condicional foi definida da forma pela qual foi apresentada, sem a preocupação de que o antecedente seja “causa” do conseqüente. Nesse sentido as condicionais:

Se Dante escreveu Os Sertões então Cabral descobriu o Brasil

Se Dante escreveu Dom Casmurro então Vasco da Gama descobriu o Brasil

são ambas verdadeiras, pois em ambas o antecedente é falso.

A tabela que indica o resultado da operação de condicionamento é apresentada abaixo, onde A e B são proposições quaisquer.

A	B	$(A \rightarrow B)$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Bicondicionamento

Se A e B são proposições, a expressão $(A \leftrightarrow B)$ é chamada *bicondicional* ou *biimplicação* de A e B . Dizemos que a bicondicional é verdadeira quando ambos os termos são verdadeiros ou ambos são falsos; quando um é falso e outro é verdadeiro, a bicondicional é falsa.

Na expressão “João será aprovado se e somente se ele estudar”, o conectivo “se e somente se” indica que se João estudar será aprovado, e que essa é a única possibilidade de João ser aprovado, isto é, se João não estudar, não será aprovado. Os dois acontecimentos serão ambos verdadeiros ou ambos falsos, não existindo possibilidade de uma terceira opção.

A tabela do bicondicionamento é apresentada abaixo, onde A e B são proposições quaisquer.

A	B	$(A \leftrightarrow B)$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

2.2.2 Tabela-verdade

Para simplificar a determinação do valor lógico de uma expressão proposicional, podemos construir uma pequena tabela, na qual dispomos em colunas os valores lógicos das proposições componentes, e, a seguir, os valores lógicos das operações, na ordem de precedência¹. Por exemplo, determinar o valor lógico da expressão $p \wedge \neg q \rightarrow r \vee s$, na qual p e r são falsas, e q e s verdadeiras:

p	q	r	s	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$r \vee s$	$p \wedge \neg q \rightarrow r \vee s$
F	V	F	V	F	F	V	V

Muitas vezes, no entanto, estaremos interessados no conjunto de valores lógicos que a expressão pode assumir, para quaisquer valores lógicos das proposições simples componentes.

Vejamos um exemplo. Considere a expressão proposicional:

$$p \vee q \rightarrow p \wedge q$$

No exemplo anterior, construímos uma pequena tabela para determinar o valor lógico da expressão, a partir dos valores lógicos dos componentes; agora, vamos ampliar aquela tabela, para incluir cada combinação dos valores lógicos dos componentes.

Na expressão, existem apenas duas proposições simples componentes, p e q ; como cada uma pode ser verdadeira ou falsa, temos então quatro possibilidades: p e q ambas verdadeiras, p verdadeira e q falsa, p falsa e q verdadeira, ou, finalmente, p e q ambas falsas.

¹Para que a construção da tabela fique unicamente determinada, podemos convencionar que as proposições simples componentes fiquem dispostas em ordem alfabética.

Tendo obtido também a ordem de precedência das operações, nossa tabela assume a forma:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \vee q \rightarrow p \wedge q$
V	V	V	V	V
F	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	F	F	F	V

Uma tabela como essa, na qual são apresentados todos os valores verdade possíveis de uma proposição composta, para cada combinação dos valores verdade das proposições componentes, é chamada *tabela-verdade* da proposição composta.

Cada linha da tabela corresponde a uma possível combinação dos valores lógicos das proposições componentes; como são dois os valores lógicos, existem, para n componentes, 2^n combinações possíveis. Portanto, a tabela-verdade de uma expressão proposicional tem 2^n linhas, além do cabeçalho.

A atribuição de valores lógicos aos componentes simples de uma proposição composta é chamada uma *interpretação* dessa proposição. Assim, uma proposição com n componentes simples distintos admitirá 2^n interpretações.

Observe que a tabela-verdade possui dois tipos de colunas: colunas para as proposições simples componentes (onde são distribuídos os valores V e F de forma a incluir cada possível combinação) e colunas para as operações (onde os valores V e F são obtidos pela definição das operações); assim, se a expressão possui n componentes e m operações, a tabela terá $m + n$ colunas.

Para determinar unicamente a tabela-verdade, podemos estabelecer certas convenções para sua construção:

1. Para as colunas:

1.1 Dispor as proposições simples componentes em ordem alfabética.

1.2 Dispor as operações na ordem de precedência determinada.

2. Para as linhas:

2.1 Alternar V e F para a coluna da primeira componente simples.

2.2 Alternar V V e F F para a coluna da segunda componente simples.

2.3 Alternar V V V V e F F F F para a coluna da terceira componente simples.

2.4 Prosseguir dessa forma, se houver mais componentes simples, sempre dobrando o número de V's e F's para cada coluna à direita.

Para exemplificar, considere a expressão proposicional:

$$(p \rightarrow q) \vee \neg((p \leftrightarrow r) \rightarrow \neg r)$$

A precedência das operações é dada por:

$$\begin{array}{ccccccc} (p & \rightarrow & q) & \vee & \neg & ((p & \leftrightarrow & r) & \rightarrow & \neg & r) \\ 1 & & 6 & 5 & & 2 & & 4 & 3 \end{array}$$

A tabela-verdade assume o aspecto:

p	q	r	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow r$	$\neg r$	$(p \leftrightarrow r) \rightarrow \neg r$	$\neg((p \leftrightarrow r) \rightarrow \neg r)$	$(p \rightarrow q) \vee \neg((p \leftrightarrow r) \rightarrow \neg r)$
V	V	V	V	V	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	F	V
V	V	F	V	F	V	V	F	V
F	V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	F	F	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V	F	V

2.2.3 Tautologia, Contradição e Contingência

De acordo com os valores lógicos que as proposições compostas assumem, em suas possíveis interpretações, elas podem ser classificadas nos seguintes tipos:

1. Se a expressão assume sempre o valor V, em qualquer interpretação, é chamada uma *tautologia*, ou uma *expressão válida*; por exemplo: $(p \vee \neg p)$

- 1.1 Se a expressão assume o valor V em alguma interpretação, é dita *satisfatível*, ou *consistente*; evidentemente, as tautologias são exemplos de expressões satisfatíveis.

2. Se a expressão assume sempre o valor F, em qualquer interpretação, é chamada uma *contradição*, ou uma *expressão insatisfatível*, ou *inconsistente*; por exemplo: $(p \wedge \neg p)$

2.1 Se a expressão assume o valor F em alguma interpretação, é chamada uma *expressão inválida*; claramente, as contradições são, também, expressões inválidas.

3. Se a expressão é satisfatível e inválida, ou seja, assume o valor V em pelo menos uma interpretação e o valor F em outra interpretação, é chamada de *contingência*; por exemplo: $(p \rightarrow \neg p)$

2.3 Equivalência Lógica

Duas expressões A e B são ditas logicamente equivalentes se tiverem o mesmo conteúdo lógico, isto é, se elas tiverem o mesmo valor verdade em todas as interpretações.

Uma expressão proposicional da forma bicondicional $A \leftrightarrow B$ que é, também, uma tautologia, é chamada uma *equivalência* (ou *equivalência lógica*). As proposições A e B são ditas *equivalentes*, e escrevemos $A \equiv B$.

Por exemplo, a expressão $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ é uma equivalência. Veja sua tabela-verdade:

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
V	V	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Escrevemos, então, $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$

Decorre imediatamente da definição que, se duas proposições são equivalentes, então possuem a mesma tabela-verdade, e, reciprocamente, se duas proposições têm a mesma tabela-verdade, são equivalentes. De fato, uma bicondicional é V se e somente se seus componentes têm os mesmos valores lógicos; como a expressão também é uma tautologia, é V em todos os casos; isto é, seus componentes têm o mesmo valor lógico em todos os casos, ou seja, têm a mesma tabela-verdade.

Decorre ainda da definição que todas as tautologias, bem como todas as contradições, são equivalentes entre si.

Relação de equivalência

Podemos mostrar também que a relação de equivalência possui as propriedades:

- Reflexiva: $A \equiv A$
- Simétrica: Se $A \equiv B$ então $B \equiv A$
- Transitiva: Se $A \equiv B$ e $B \equiv C$ então $A \equiv C$

Em termos textuais, duas proposições são equivalentes quando traduzem a mesma idéia, diferindo apenas a forma de apresentar essa idéia.

No Apêndice A são listadas algumas das equivalências mais importantes (e úteis) da Lógica; cada uma delas pode ser provada, simplesmente mostrando que a bicondicional correspondente é uma tautologia, bastando, para isso, construir sua tabela-verdade.

Proposições Associadas a uma Condicional

Dada uma condicional $(A \rightarrow B)$, chama-se *proposição associada* a esta condicional as três proposições condicionais a seguir:

- Proposição *contrapositiva* de $(A \rightarrow B)$: $(\neg B \rightarrow \neg A)$
- Proposição *recíproca* de $(A \rightarrow B)$: $(B \rightarrow A)$
- Proposição *inversa* ou *contrária* de $(A \rightarrow B)$: $(\neg A \rightarrow \neg B)$

Por exemplo, considere a seguinte expressão: “Se Carlos é professor, então é pobre.”

- A contrapositiva da expressão é: “Se Carlos não é pobre, então não é professor.”
- A recíproca da expressão é: “Se Carlos é pobre, então é professor.”
- A inversa da expressão é: “Se Carlos não é pobre, então não é professor.”

A condicional $(A \rightarrow B)$ é equivalente à sua contrapositiva $(\neg B \rightarrow \neg A)$, mas não é equivalente à sua recíproca $(B \rightarrow A)$ nem à sua inversa $(\neg A \rightarrow \neg B)$. Já a recíproca da condicional é equivalente à inversa da condicional.

Redução do número de conectivos

O conceito de equivalência nos permite mostrar ainda que são suficientes as operações de negação e uma das duas, conjunção ou disjunção, para representar qualquer expressão proposicional. Para isso, necessitamos das seguintes equivalências:

- Eliminando a bicondicional: $A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
- Eliminando a condicional: $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
- Escrevendo a disjunção em termos de conjunção: $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- Escrevendo a conjunção em termos de disjunção: $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$

Veja o seguinte exemplo: escrever a proposição $(p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg p$ em termos de negação e disjunção:

- Eliminando a condicional: $\neg(p \leftrightarrow q) \vee \neg p$
- Eliminando a bicondicional: $\neg((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee \neg p$
- Escrevendo a conjunção em termos de disjunção: $\neg(\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(p \vee q)) \vee \neg p$

2.4 Formas normais

Um *literal* é uma sentença simples ou a negação de uma sentença simples. Por exemplo: p , $\neg q$ etc.

Uma proposição está na *forma normal* se e somente se contém, quando muito, os conectivos \neg , \wedge e \vee . Toda proposição pode ser levada à forma normal pela eliminação dos conectivos \rightarrow e \leftrightarrow , se existirem. Existem duas formas normais: a *forma normal conjuntiva* e a *forma normal disjuntiva*.

Forma normal conjuntiva (FNC)

Uma proposição A está na forma normal conjuntiva (FNC) se e somente se A for uma conjunção da forma:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$$

onde cada A_i , $i \geq 1$, é da forma $L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_m$, e L_j , $j \geq 1$, é um literal.

Da definição temos que estão na FNC:

- uma sentença simples (que é um literal)
- uma negação de sentença simples (que é um literal)
- conjunções de literais
- disjunções de literais
- conjunção de disjunções de literais

São exemplos de proposições na FNC:

$$p$$

$$\neg q$$

$$p \wedge \neg q$$

$$p \vee \neg q$$

$$(p \vee \neg q) \wedge \neg r$$

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (q \vee r)$$

Para obter a forma normal conjuntiva de uma proposição:

1. Elimine os conectivos \rightarrow e \leftrightarrow , utilizando as equivalências:

- Condicional: $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
- Bicondicional: $A \leftrightarrow B \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

2. Reduza o escopo da negação na proposição simples, utilizando as equivalências:

- Dupla Negação: $\neg(\neg A) \equiv A$
- DeMorgan:
$$\begin{cases} \neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \\ \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \end{cases}$$

3. Escreva a proposição sob forma de conjunção de disjunções, utilizando a equivalência:

- Distributiva: $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Exemplos:

1. $(q \vee r) \rightarrow p \stackrel{COND}{\equiv} \neg(q \vee r) \vee p \stackrel{DM}{\equiv} (\neg q \wedge \neg r) \vee p \stackrel{DIST}{\equiv} (\neg q \vee p) \wedge (\neg r \vee p)$
2. $\neg p \leftrightarrow (q \wedge r) \stackrel{BICOND}{\equiv} (\neg \neg p \vee (q \wedge r)) \wedge (\neg(q \wedge r) \vee \neg p) \stackrel{DN,DM}{\equiv} (p \vee (q \wedge r)) \wedge ((\neg q \vee \neg r) \vee \neg p) \stackrel{DIST}{\equiv} ((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \neg p)$

Forma normal disjuntiva (FND)

Uma proposição A está na forma normal disjuntiva (FND) se e somente se A for uma conjunção da forma:

$$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$$

onde cada A_i , $i \geq 1$, é da forma $L_1 \wedge L_2 \wedge \dots \wedge L_m$, e L_j , $j \geq 1$, é um literal.

Da definição temos que estão na FND:

- uma sentença simples (que é um literal)
- uma negação de sentença simples (que é um literal)
- disjunções de literais
- conjunções de literais
- disjunção de conjunções de literais

São exemplos da forma normal disjuntiva:

$$p \vee q$$

$$\neg p \wedge q$$

$$(\neg p \wedge q) \vee \neg r$$

$$(\neg p \wedge q) \vee (r \wedge s) \vee (p \wedge \neg s)$$

Para obter a forma normal disjuntiva de uma proposição:

1. Elimine os conectivos \rightarrow e \leftrightarrow , utilizando as equivalências:

- Condicional: $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
- Bicondicional: $A \leftrightarrow B \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

2. Reduza o escopo da negação a proposições simples, utilizando as equivalências:

- Dupla Negação: $\neg(\neg A) \equiv A$
- DeMorgan: $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
 $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

3. Escreva a proposição sob forma de disjunção de conjunções, utilizando a equivalência:

- Distributiva: $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Exemplo: achar a FND, a partir da tabela-verdade, do ou-exclusivo.

Podemos usar o conceito de FND para achar expressões equivalentes usando tabelas verdade.

Por exemplo, considere a tabela verdade abaixo do ou-exclusivo no qual queremos encontrar uma fórmula A que seja equivalente (possui os mesmo valores verdade) ao ou-exclusivo.

Para isso, basta verificar as interpretações verdadeiras e fazer as disjunções ilustradas abaixo na tabela.

p	q	$p \veebar q$	$A(?)$	
V	V	F	F	
F	V	V	V	$p : F, q : V, (\neg p \vee q)$
V	F	V	V	$p : V, q : F, (p \vee \neg q)$
F	F	F	F	

Assim, podemos escrevemos que $(p \veebar q) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

2.5 Inferência Lógica (Consequência Lógica)

Uma *inferência lógica*, ou, simplesmente uma *inferência*, é uma tautologia da forma $A \rightarrow B$. As inferências lógicas, ou *regras de inferência*, são representadas por $A \models B$.

As regras de inferência são, na verdade, formas válidas de raciocínio, isto é, são formas que nos permitem concluir o consequente, uma vez que consideremos o antecedente verdadeiro; em termos textuais, costumamos utilizar o termo “logo” (ou seus sinônimos: “portanto”, “em consequência” etc.) para caracterizar as Regras de Inferência; a expressão $A \models B$ pode então ser lida: A ; logo, B .

É possível mostrar que as regras de inferência têm as seguintes propriedades:

- Reflexiva: $A \models A$
- Transitiva: Se $A \models B$ e $B \models C$ então $A \models C$

No Apêndice A são listadas algumas das regras de inferência mais importantes da Lógica; da mesma forma que no caso das equivalências, cada uma delas pode ser provada, bastando para isso construir a tabela-verdade da condicional correspondente; se a condicional for tautológica, será uma inferência.

Vamos exemplificar com a regra de inferência conhecida por Modus Ponens: $(p \rightarrow q), p \models q$

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
F	F	V	F	V

Capítulo 3

Dedução no Cálculo Proposicional

3.1 Argumentos

Chama-se argumento¹ a afirmação de que de um dado conjunto de proposições P_1, P_2, \dots, P_n chamadas premissas, decorre uma proposição Q , chamada conclusão. Pode ser expresso simbolicamente como:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

O símbolo “ \vdash ”, chamado traço de asserção, afirma que a fórmula à sua direita pode ser deduzida utilizando como premissas somente as fórmulas que estão à sua esquerda.

Eis um exemplo de argumento:

P_1 : Se José pegou as joias ou a Sra. Krasov mentiu, então ocorreu um crime.

P_2 : Se ocorreu um crime, então o Sr. Krasov estava na cidade.

P_3 : O Sr. Krasov não estava na cidade.

Q : Portanto, José não pegou as jóias e a Sra. Krasov não mentiu.

O que queremos dizer com a expressão “a conclusão decorre das premissas”? Basicamente, significa dizer que a veracidade da conclusão está incluída na veracidade das premissas; isto é, significa dizer que se as premissas forem verdadeiras, a conclusão também o será. Quando a conclusão

¹Como foi visto anteriormente, na Lógica existem dois tipos de argumentos, dedutivos e indutivos, mas vamos nos limitar, no presente texto, a examinar os argumentos dedutivos.

realmente decorre das premissas, dizemos que o argumento é válido; quando não, dizemos que o argumento é inválido.

Abaixo, dois exemplos de argumentos:

Se eu tiver dinheiro, vou ao cinema ou ao teatro.

Mas eu não tenho dinheiro.

Logo, não vou ao cinema nem ao teatro.

A conclusão apresentada não decorre das premissas. Portanto, o argumento é inválido.

Se eu estudar, fico cansado.

Se eu ficar cansado, durmo.

Logo, se eu estudar, durmo.

Claramente, a conclusão decorre das premissas, e o argumento é válido.

Na Lógica Simbólica, a estrutura que melhor representa um argumento, é a operação de condicionamento: um argumento é, portanto, uma condicional da forma:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$$

A validade do argumento depende exclusivamente do relacionamento lógico entre as premissas e a conclusão; isto é, não é ocupação da Lógica verificar se as premissas são verdadeiras. O objetivo da Lógica Formal é verificar se o argumento é estruturado de forma tal que, independentemente dos valores lógicos das proposições simples envolvidas, a veracidade das premissas implica na veracidade da conclusão.

Em termos lógicos, isso significa dizer que se um argumento é válido, então a condicional que o representa é sempre verdadeira, independentemente dos valores lógicos das proposições componentes. Em outras palavras, se um argumento é válido, a condicional que o representa é uma tautologia.

A tabela-verdade é o método mais simples para verificar se uma forma simbólica é ou não uma tautologia, e pode ser utilizado para determinar a validade ou invalidade de um argumento; vejamos os dois exemplos apresentados:

O primeiro argumento, “se eu tiver dinheiro, vou ao cinema ou ao teatro; mas eu não tenho dinheiro. Logo, não vou ao cinema nem ao teatro” pode ser representado por:

$$(p \rightarrow q \vee r) \wedge (\neg p) \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)$$

onde:

p : eu tenho dinheiro; q : eu vou ao cinema; r : eu vou ao teatro

Construindo a tabela-verdade:

p	q	r	$q \vee r$	$p \rightarrow q \vee r$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg q \wedge \neg r$	$(p \rightarrow q \vee r) \wedge (\neg p)$	$(p \rightarrow q \vee r) \wedge (\neg p) \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)$
V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	F	F	V	F
V	V	F	V	V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V

A expressão não é uma tautologia e, conseqüentemente, o argumento não é válido.

Por outro lado, o argumento: “se eu estudar, fico cansado; se eu ficar cansado, durmo. Logo, se eu estudar, durmo”, por sua vez pode ser representado por:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

onde:

p : eu estudo; q : eu fico cansado; r : eu durmo

Com a seguinte tabela-verdade:

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Como a condicional é uma tautologia, o argumento é válido.

Não deve ter passado despercebido ao leitor mais atento que esse argumento é, na verdade, a regra de inferência chamada Silogismo Hipotético. Qual a diferença, então, entre os argumentos válidos e as regras de inferência? Formalmente, nenhuma. Na prática, as condicionais tautológicas com poucos antecedentes e cuja forma já é conhecida, são chamadas regras de inferência, enquanto as condicionais maiores, que ainda devemos mostrar que são tautologias são chamadas argumentos. A propósito, os argumentos com duas premissas são chamados *silogismos*.

Entre as várias notações utilizadas para representar os argumentos, uma das mais simples é representar as premissas uma em cada linha e separando-as da conclusão através de um traço horizontal. Nessa notação, o argumento

“Se José pegou as joias ou a Sra. Krasov mentiu, então ocorreu um crime. Se ocorreu um crime, então o Sr. Krasov estava na cidade. Mas o Sr. Krasov não estava na cidade. Portanto, José não pegou as jóias e a Sra. Krasov não mentiu.”

apresentado anteriormente assumem a forma:

$$\begin{array}{c} p \vee q \rightarrow r \\ r \rightarrow s \\ \neg s \\ \hline \neg p \wedge \neg q \end{array}$$

onde:

p : José pegou as joias

q : a Sra. Krasov mentiu

r : ocorreu um crime

s : o Sr. Krasov estava na cidade

3.2 Dedução

Como vimos, então, o método da tabela-verdade pode ser utilizado para mostrar que um argumento é válido ou inválido. No entanto, esse método apresenta dois sérios inconvenientes:

1. O número de linhas cresce muito rapidamente à medida que aumenta o número de proposições simples envolvidas no argumento – com 10 proposições a tabela necessita de 1024 linhas, e com 11 o número de linhas vai a 2048. Com mais umas poucas proposições, sua construção se torna impraticável.
2. No Cálculo de Predicados, que veremos a seguir, não existe tal procedimento mecânico que funciona para todas as fórmulas.

Por isso, foram desenvolvidos outros métodos para que se possa mostrar a validade de um argumento. Tais métodos são chamados *métodos dedutivos*, e sua aplicação chama-se *dedução*. Em termos mais formais, o conceito de dedução pode ser apresentado da seguinte forma:

Dado um argumento:

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline Q \end{array}$$

chama-se *demonstração* ou *dedução* de Q a partir das premissas P_1, \dots, P_n , a sequência finita de proposições X_1, X_2, \dots, X_k , tal que cada X_i ou é uma premissa ou decorre logicamente de proposições anteriores da sequência, de tal modo que a última proposição X_k seja a conclusão Q do argumento dado.

Cada proposição X_i que incluímos na sequência deve decorrer logicamente das anteriores; isso significa que deve ser obtida através da atuação de equivalências ou inferências sobre uma proposição ou uma conjunção de proposições anteriores.

Se for possível obter a conclusão Q através do procedimento de dedução, o argumento é válido; caso contrário, não é válido.

O processo de dedução consiste basicamente dos seguintes passos:

1. definimos o conjunto P constituído pelas premissas $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$;
2. sobre um ou mais elementos do conjunto fazemos atuar equivalências e inferências conhecidas, obtendo novas proposições, e incluindo-as no conjunto P ;
3. repetimos o passo acima até que a proposição incluída seja o consequente Q .

Vamos exemplificar o processo provando o argumento apresentado no último exemplo da seção anterior:

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \rightarrow r \\ r \rightarrow s \\ \neg s \end{array}}{\neg p \wedge \neg q}$$

A dedução é apresentada sob a forma de uma tabela, com três colunas, da seguinte forma:

- coluna 1 os passos dados na dedução – a cada passo obtemos uma proposição que é referenciada no restante da dedução por este número. Os primeiros passos são, naturalmente, o estabelecimento das premissas.
- coluna 2 a proposição obtida naquele passo – a última deve ser a conclusão do argumento.
- coluna 3 indicação de como foi obtida a proposição naquele passo – normalmente as proposições são obtidas aplicando-se equivalências, regras de inferência ou outras propriedades sobre proposições já obtidas em passos anteriores.

1.	$p \vee q \rightarrow r$	Premissa 1
2.	$r \rightarrow s$	Premissa 2
3.	$\neg s$	Premissa 3
4.	$\neg r$	2,3,MT
5.	$\neg(p \vee q)$	1,4,MT
6.	$\neg p \wedge \neg q$	5,DM

É possível mostrar que todo o corpo da Lógica Matemática pode ser erguido a partir de umas poucas regras de inferência axiomáticas. Nosso objetivo, no entanto, não é alcançar os fundamentos da Lógica, mas tão somente descrever o funcionamento dos métodos de dedução. No Apêndice A estabelecemos um conjunto fundamental de leis de equivalência e regras de inferência para, a partir destas, mostrar a validade de argumentos mais complexos. Em outras palavras, no decorrer dos processos dedutivos poderemos lançar mão destas, e apenas destas, equivalências e inferências, considerando-as já conhecidas.

3.3 Simplificação da Conclusão

Formalmente, o método de dedução que apresentamos é suficiente para obter a conclusão de qualquer argumento válido; no entanto, muitas vezes, quando a conclusão é uma proposição composta, envolvendo uma ou mais operações lógicas, a dedução torna-se mais difícil. Nesses casos, costuma-se simplificar a conclusão, de forma a facilitar a dedução.

Conclusão da forma $A \wedge B$

Quando a conclusão é uma conjunção, devemos obter, independentemente, as parcelas A e B e a seguir obter $A \wedge B$, por CONJ.

Exemplo:

Se a procura do produto aumentar, seu preço subirá; se o preço subir, o produto não será exportado; se não houver importação ou se o produto for exportado, o produto escasseará. A procura do produto aumentou e não haverá importação. Logo, o produto não será exportado e escasseará.

Fazendo:

p : a procura aumenta

q : o preço sobe

r : o produto é exportado

s : haverá importação

t : o produto escasseará

temos o argumento na forma simbólica e sua dedução:

$$\begin{array}{c}
 p \rightarrow q \\
 q \rightarrow \neg r \\
 \neg s \vee r \rightarrow t \\
 p \wedge \neg s \\
 \hline
 \neg r \wedge t
 \end{array}$$

1.	$p \rightarrow q$	Premissa 1
2.	$q \rightarrow \neg r$	Premissa 2
3.	$\neg s \vee r \rightarrow t$	Premissa 3
4.	$p \wedge \neg s$	Premissa 4
5.	p	4, SIMP
6.	$p \rightarrow \neg r$	1, 2, SH
7.	$\neg r$	5, 6, MP
8.	$\neg s$	4, SIMP
9.	$\neg s \vee r$	8, AD
10.	t	3,9, MP
11.	$\neg r \wedge t$	7, 10, CONJ

Conclusão de forma $A \rightarrow B$

Suponha que o argumento tenha a forma

$$P \rightarrow (B \rightarrow C)$$

onde P é a conjunção de premissas. Ora, sabemos que pela equivalência Exportação-Importação (EI),

$$A \wedge B \rightarrow C \equiv A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

o que permite escrever o argumento dado na forma

$$P \wedge B \rightarrow C$$

Portanto, para deduzirmos um argumento cuja conclusão é da forma $B \rightarrow C$, incluímos B no conjunto de premissas, e procuramos deduzir C . Este artifício é conhecido como *Dedução da Condicional* (ou Teorema da Dedução).

Exemplo:

Se a casa ficar vazia ou eu conseguir o empréstimo, então pago a dívida e me mudo.

Se eu me mudar ou Pedro ficar em São Paulo, então volto a estudar. Logo, se a casa ficar vazia, volto a estudar.

Fazendo:

p : a casa fica vazia

q : eu consigo o empréstimo

r : eu pago a dívida

s : eu me mudo

t : Pedro fica em São Paulo

u : eu volto a estudar

temos o argumento

$$\frac{\begin{array}{l} p \vee q \rightarrow r \wedge s \\ s \vee t \rightarrow u \end{array}}{p \rightarrow u}$$

Utilizando Dedução da Condicional, incluo p nas premissas e a conclusão se reduz a u :

$$\frac{\begin{array}{l} p \vee q \rightarrow r \wedge s \\ s \vee t \rightarrow u \\ p \end{array}}{u}$$

1.	$p \vee q \rightarrow r \wedge s$	Premissa 1
2.	$s \vee t \rightarrow u$	Premissa 2
3.	p	Hipótese
4.	$p \vee q$	3, AD
5.	$r \wedge s$	4, 1, MP
6.	s	5, SIMP
7.	$s \vee t$	6, AD
8.	u	7,2, MP
9.	$p \rightarrow u$	3-8, dedução condicional

Conclusão de forma $A \vee B$

Sabemos que pela equivalência Condicional (COND),

$$A \vee B \equiv \neg A \rightarrow B$$

Portanto, se a conclusão do argumento tem a forma $A \vee B$, podemos substituí-la por $\neg A \rightarrow B$, e, utilizando Dedução da Condicional, incluir $\neg A$ nas premissas e deduzir B .

Exemplo:

Pagamos a dívida ou o déficit aumenta; se as exportações crescerem, o déficit não aumenta. Logo, pagamos a dívida ou as exportações não crescem.

Fazendo:

p : pagamos a dívida

q : o déficit aumenta

r : as exportações crescem

temos o argumento

$$\frac{p \vee q \quad r \rightarrow \neg q}{p \vee \neg r}$$

Como a conclusão $p \vee \neg r$ é equivalente a $\neg p \rightarrow \neg r$; então, pela Dedução da Condicional, o argumento assume a forma abaixo, com a dedução a seguir:

$$\frac{p \vee q \quad r \rightarrow \neg q \quad \neg p}{\neg r}$$

1.	$p \vee q$	Premissa 1
2.	$r \rightarrow \neg q$	Premissa 2
3.	$\neg p$	Hipótese
4.	q	1, 3, SD
5.	$\neg r$	2, 4, MT
6.	$\neg p \rightarrow \neg r$	3-5, dedução condicional

Uma outra forma de deduzir uma disjunção, é obter um dos disjuntos, e, por adição, incluir o outro.

Por exemplo, considere o argumento abaixo, já na sua forma simbólica:

$$\frac{(\neg p \vee q) \wedge (r \rightarrow s) \quad \neg q}{\neg p \vee s}$$

Como a conclusão é $\neg p \vee s$, podemos deduzir $\neg p$, e, por adição, $\neg p \vee s$, ou deduzir s , e, por adição, $\neg p \vee s$.

1.	$(\neg p \vee q) \wedge (r \rightarrow s)$	Premissa 1
2.	$\neg q$	Premissa 2
3.	$\neg p \vee q$	1, SIMP
4.	$\neg p$	2, 3, SD
5.	$\neg p \vee s$	4, AD

Conclusão de forma $A \leftrightarrow B$

Sabemos que pela equivalência Bicondiconal (BICOND)

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

Então, se a conclusão tem a forma $A \leftrightarrow B$, podemos substituí-la por $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$, o que indica que temos que deduzir, independentemente, $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow A$. Utilizando Dedução da Condicional, podemos, na dedução de $A \rightarrow B$, incluir A nas premissas e deduzir B , e, na dedução de $B \rightarrow A$, incluir B nas premissas e deduzir A .

Por exemplo, considere o argumento abaixo, já na sua forma simbólica:

$$\frac{\begin{array}{c} p \wedge q \rightarrow r \\ r \vee q \rightarrow \neg p \vee s \\ s \rightarrow q \\ p \end{array}}{r \leftrightarrow s}$$

Temos então que fazer duas deduções, uma para $r \rightarrow s$, para a qual incluímos r nas premissas e deduzimos s , e outra para $s \rightarrow r$, na qual incluímos s nas premissas e deduzimos r . As duas deduções devem ser realizadas em separado, pois os resultados intermediários de uma não podem ser utilizados na outra.

1.	$p \wedge q \rightarrow r$	Premissa 1	1.	$p \wedge q \rightarrow r$	Premissa 1
2.	$r \vee q \rightarrow \neg p \vee s$	Premissa 2	2.	$r \vee q \rightarrow \neg p \vee s$	Premissa 2
3.	$s \rightarrow q$	Premissa 3	3.	$s \rightarrow q$	Premissa 3
4.	p	Premissa 4	4.	p	Premissa 4
5.	r	Hipótese	5.	s	Hipótese
6.	$r \vee q$	5, AD	6.	q	3, 5, MP
7.	$\neg p \vee s$	2, 6, MP	7.	$p \wedge q$	4, 6, CONJ
8.	s	4, 7, SD	8.	r	1, 7, MP
9.	$r \rightarrow s$	5-8, ded.cond.	9.	$s \rightarrow r$	5-8, ded.cond.

Alternativamente, poderíamos, na dedução da bicondicional, utilizar a outra equivalência BI-COND,

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Nesse caso, bastaria deduzir $A \wedge B$, ou deduzir $\neg A \wedge \neg B$, e incluir o outro disjuncto por Adição. Exemplo:

$$\frac{\begin{array}{c} p \wedge q \\ p \rightarrow (q \rightarrow (s \wedge t)) \end{array}}{s \leftrightarrow t}$$

1.	$p \wedge q$	Premissa 1
2.	$p \rightarrow (q \rightarrow (s \wedge t))$	Premissa 2
3.	$p \wedge q \rightarrow (s \wedge t)$	2, EI
4.	$(s \wedge t)$	1, 3, MP
5.	$(s \wedge t) \vee (\neg s \wedge \neg t)$	4, AD
6.	$s \leftrightarrow t$	5, BICOND

Dedução por Absurdo

Considere o argumento $P \rightarrow Q$, onde P é a conjunção de premissas, e Q é a conclusão. Então, se o argumento for válido, isto é, se $P \rightarrow Q$ for uma tautologia, $\neg P \vee Q$ também o será, pela equivalência Condicional (COND); consequentemente, sua negação, $\neg(\neg P \vee Q)$ que, pela equivalência De Morgan (DM) é equivalente a $P \wedge \neg Q$, será uma contradição.

Então, para mostrarmos que o argumento $P \rightarrow Q$ é válido, é suficiente mostrar que $P \wedge \neg Q$ é uma contradição. Ou seja, para mostrarmos que um argumento é válido, podemos negar a conclusão, incluí-la nas premissas e deduzir F , que representa uma contradição. Essa forma de deduzir um argumento é conhecida por *Dedução por Absurdo*.

Por exemplo, considere o argumento abaixo, já na sua forma simbólica:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \vee r \\ q \rightarrow \neg p \\ s \rightarrow \neg r \\ \hline \neg(p \wedge s) \end{array}$$

Utilizando Demonstração por absurdo, incluímos $p \wedge s$ nas premissas e deduzimos uma contradição:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \vee r \\ q \rightarrow \neg p \\ s \rightarrow \neg r \\ p \wedge s \\ \hline F \end{array}$$

1.	$p \rightarrow q \vee r$	Premissa 1
2.	$q \rightarrow \neg p$	Premissa 2
3.	$s \rightarrow \neg r$	Premissa 3
4.	$p \wedge s$	Hipótese (sup. absurdo)
5.	p	4, SIMP
6.	s	4, SIMP
7.	$q \vee r$	5, 1, MP
8.	$\neg r$	6, 3, MP
9.	q	7, 8, SD
10.	$\neg p$	9, 2, MP
11.	$\neg p \wedge p$	10, 5, CONJ
12.	F	11, EC
13.	$\neg(p \wedge s)$	4-12, redução ao absurdo

3.4 Invalidade

Os métodos de dedução que examinamos são capazes de mostrar a validade de um argumento, através de uma sequência de equivalências e inferências, que, a partir das premissas, produz uma série de conclusões parciais, até chegar à conclusão final do argumento.

Esse processo, no entanto, não serve para provar a invalidade de um argumento; de fato, se, durante o processo de dedução, não conseguirmos chegar à conclusão, não podemos inferir que não é possível obter tal conclusão; talvez apenas não saibamos como chegar a ela.

Portanto, para mostrar a invalidade de um argumento, necessitamos de um outro método. Um argumento é, na verdade, uma operação de condicionamento. Se o argumento for válido, essa condicional é tautológica, isto é, é verdadeira para qualquer combinação possível de valores lógicos das proposições que constituem o argumento; se, no entanto, existir pelo menos uma combinação de valores lógicos das proposições que torne a condicional falsa, o argumento é inválido.

Ora, em que condições uma condicional é falsa? Só existe uma possibilidade: quando o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso. Mas, em um argumento, o antecedente é uma conjunção de premissas, e o consequente é a conclusão; então, para que o antecedente seja verdadeiro, é necessário que todas as premissas sejam verdadeiras, e para que o consequente seja falso, é necessário que a conclusão seja falsa.

Então, para mostrar que um argumento é inválido, é suficiente encontrar uma combinação de valores lógicos para as proposições simples envolvidas, de forma que torne cada premissa verdadeira, e a conclusão falsa.

Considere o seguinte argumento:

Se José comprar ações e o mercado baixar, ele perderá seu dinheiro. O mercado não vai baixar. Logo, ou José compra ações ou perderá seu dinheiro.

Simbolicamente, o argumento fica representado por

$$\frac{p \wedge q \rightarrow r \quad \neg q}{p \vee r}$$

onde:

p : José compra ações

q : o mercado baixa

r : José perde dinheiro

Para mostrar sua invalidade devemos fazer as premissas verdadeiras e a conclusão falsa; isto é:

a) $p \wedge q \rightarrow r : V$

b) $\neg q : V$

c) $p \vee r : F$

De (b) vem $q : F$; substituindo em (a), temos:

d) $p \wedge F \rightarrow r : V$

Como $p \wedge F : F$, qualquer que seja p , de (d), vem $r : F$; substituindo em (c), vem $p \vee F : F$

O que implica que $p : F$

Temos então que, para o conjunto de valores lógicos: $p : F, q : F, r : F$, a condicional é falsa, o que significa que o argumento é inválido.

Um outro exemplo; considere o argumento

Ou estudo ou trabalho ou vou à praia; se estudo sou aprovado; não trabalho. Logo, sou aprovado.

Se fizermos:

p : eu estudo

q : eu trabalho

r : eu vou à praia

s : eu sou aprovado

o argumento fica representado simbolicamente por:

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \vee r \\ p \rightarrow s \\ \neg q \end{array}}{s}$$

Para que o argumento seja inválido é necessário:

a) $p \vee q \vee r : V$

b) $p \rightarrow s : V$

c) $\neg q : V$

d) $s : F$

De (c) e (d) vem, imediatamente, $q : F$ e $s : F$; substituindo em (a) e (b), vem

e) $p \vee F \vee r : V$

f) $p \rightarrow F : V$

De (f), vem $p : F$; substituindo em (e), vem $r : V$.

Encontramos uma combinação de valores que satisfazem a condição de invalidade. O argumento é, portanto, inválido.

Capítulo 4

Cálculo de Predicados

4.1 Predicados e Termos

Nos capítulos anteriores examinamos uma parte da Lógica chamada Lógica das Proposições, ou Cálculo Proposicional, na qual aprendemos técnicas que nos permitiram verificar se um determinado tipo de argumento é válido ou inválido. Nos argumentos estudados, os enunciados simples eram combinados através dos conectivos, formando enunciados compostos, e a validade desses argumentos dependia, essencialmente, da forma pela qual os enunciados compostos se apresentavam.

Não é difícil, no entanto, encontrar argumentos de um tipo distinto; por exemplo, o argumento

Todos os humanos são mortais.

Sócrates é um humano.

Logo, Sócrates é mortal.

é claramente válido, mas sua validade não depende da forma pela qual os enunciados simples se compõem, uma vez que, neste argumento, não há enunciados compostos. Pode-se perceber que sua validade depende, na verdade, da estrutura interna dos enunciados que constituem o argumento. A construção de métodos para analisar argumentos como esse vai, portanto, exigir a criação de técnicas para descrever e simbolizar a estrutura interna dos enunciados.

Considere a premissa “Sócrates é humano”. Esse enunciado é uma declaração de que determinado indivíduo (Sócrates) possui uma propriedade específica (é humano). Na linguagem natural, o indivíduo que possui a propriedade é chamado *sujeito*, enquanto a propriedade descrita é chamada *predicado*.

O predicado, na verdade, explicita certas qualidades que o sujeito possui e que permite incluí-lo em uma categoria; por exemplo, quando dizemos “Sócrates é humano” queremos dizer que o objeto chamado “Sócrates” possui certas características que permitem incluí-lo no conceito que fazemos daquilo que chamamos “humano”.

Em Lógica Simbólica, podemos representar o predicado por sua inicial maiúscula, e o sujeito a seguir, entre parênteses. Assim, “Sócrates é humano” é representado por

$$H(\text{Sócrates})$$

A linguagem natural permite ainda a construção de um outro tipo de sentença, como “ele foi presidente do Brasil” na qual o sujeito não é um substantivo, mas um pronome, isto é, um *termo* que fica no lugar do nome.

Em Lógica Simbólica, também existem termos que ocupam o lugar dos nomes; são chamados *variáveis*, e costumam ser representados, como na Matemática, pelas últimas letras do alfabeto em minúsculas, x , y , z , w etc. Utilizando a variável x no lugar de “ele”, a sentença assume a forma

$$x \text{ foi presidente do Brasil}$$

Representando o predicado “foi presidente do Brasil” por P , e levando em conta que x é o sujeito, temos a a forma simbólica

$$P(x)$$

Em Lógica, portanto, um *enunciado* é simbolizado pelo predicado seguido por termos (constantes ou variáveis) entre parênteses.

Uma frase na qual o termo é uma constante, como “Sócrates é humano”, pode ser verdadeira ou falsa e, neste caso, trata-se de um *enunciado singular*. Mas se o termo for uma variável, como em “ele foi presidente do Brasil”, a frase não é verdadeira nem falsa e depende do nome que assuma o lugar do pronome, não sendo, portanto, um enunciado singular.

Os enunciados singulares são chamados *sentenças fechadas*, ou simplesmente, *fechados*, enquanto que frases como “ x foi presidente do Brasil”, “ y escreveu Os Lusíadas” e “ z viajou para os Estados Unidos” são chamadas *sentenças abertas*, ou, simplesmente, *abertos*.

Os abertos não são verdadeiros nem falsos; podemos dizer apenas que são satisfeitos para certos valores das variáveis, e não satisfeitos para outros. A substituição das variáveis de um aberto por

constantes chama-se *instanciação* ou especificação; a instanciação transforma um aberto em um enunciado singular, que, este sim, pode ser verdadeiro ou falso.

Chama-se *Conjunto-Universo* (U) de uma variável o conjunto de valores que ela pode assumir. Na linguagem corrente, o universo (às vezes chamado *universo do discurso*) não é, muitas vezes, explicitado; intuitivamente, incluímos os objetos que podem substituir o pronome e descartamos aqueles objetos que sabemos que não podem; por exemplo, na frase

“isto está verde.”

sabemos que “isto” pode ser uma fruta, ou uma parede, ou o mar, mas que dificilmente será um ser humano.

Em Lógica, o universo do discurso, quando não for explicitado, é definido pelo próprio contexto. Muitas vezes, a definição do universo pode afetar a satisfatoriedade do aberto; por exemplo, o aberto

x é feroz

pode ser satisfatível se o universo for o conjunto de animais, e não satisfatível se o universo for o conjunto de disciplinas de um curso.

Chama-se *Conjunto-Verdade* (V_P) de um aberto $P(x)$ o conjunto de elementos do Conjunto-Universo que, quando instanciam a variável, satisfazem (tornam verdadeiro) o enunciado; ou seja

$$V_P = \{x \in U \mid vl(P(x)) = V\}$$

Por exemplo, seja $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e a expressão “ x é primo” representada por $P(x)$. Temos então $V_P = \{2, 3, 5, 7\}$.

Relações

Os predicados podem ser monádicos (de um só termo), diádicos (de dois termos), triádicos (de três termos) ou poliádicos (de quatro ou mais termos). Muitos autores no entanto, preferem o chamar os predicados de dois ou mais termos de *relação*, reservando o nome predicado para os predicados monádicos.

Eis alguns exemplos de relações, e uma sugestão de forma simbólica:

x gosta de y : $G(x, y)$

João é casado com Maria: $C(\text{João}, \text{Maria})$

x está entre y e z : $E(x, y, z)$

Camões é o autor de Os Lusíadas: $A(\text{Camões}, \text{Os Lusíadas})$

Nas relações, a ordem das variáveis é importante; no exemplo dado, $G(x, y)$ significa “ x gosta de y ” mas não significa “ y gosta de x ”. Esse fato deve ser levado em conta mesmo em predicados que sabemos ser comutativos; no exemplo, $C(\text{João}, \text{Maria})$ significa “João é casado com Maria” mas não significa “Maria é casada com João”. O motivo para isso é que a Lógica Formal leva em conta apenas a forma das expressões, e não seu significado.

Na instanciação, variáveis iguais devem ser substituídas por nomes iguais; variáveis distintas, no entanto, podem ser substituídas por nomes iguais ou distintos. Por exemplo, o aberto

x é maior ou igual a y

permite tanto a instanciação “7 é maior ou igual a 3” como a instanciação “7 é maior ou igual a 7”.

Em relações com duas variáveis, o conjunto-universo é constituído pelo produto cartesiano dos universos das variáveis; o conjunto-verdade é constituído pelos pares ordenados dos valores que satisfazem a relação.

Por exemplo, considere o aberto $M(x, y)$ representando “ x é metade de y ”, onde $U_x = \{1, 2, 3\}$ e $U_y = \{4, 5, 6\}$. Então $V_M = \{(2, 4), (3, 6)\}$.

4.2 Operações Lógicas

Também no Cálculo de Predicados podemos definir as operações de conjunção, disjunção, negação, condicional e bicondicional, sobre enunciados e/ou abertos.

Considere, por exemplo, os abertos “ x é médico”, representado por $M(x)$, e “ x é professor”, representado por $P(x)$; podemos então representar “ x é médico e professor” $M(x) \wedge P(x)$.

Seja U o Conjunto-Universo de x ; os valores de U que satisfazem $M(x) \wedge P(x)$ devem satisfazer simultaneamente $M(x)$ e $P(x)$; conseqüentemente,

$$V_{M \wedge P} = V_M \cap V_P$$

Da mesma forma, podemos representar “ x é médico ou professor” por $M(x) \vee P(x)$. Este aberto é satisfeito por todos os elementos que são médicos e por todos que são professores; portanto,

$$V_{M \vee P} = V_M \cup V_P$$

Na operação de negação, podemos representar “ x não é médico” por $\neg M(x)$, e seu conjunto-verdade será constituído por todos os elementos do universo que não satisfazem $M(x)$, isto é, o complemento de V_M :

$$V_{\neg M} = U - V_M$$

Uma notação de uso generalizado para o complemento de V_M é $\overline{V_M}$.

Considere a expressão “se x trabalha, então x fica cansado”; representando “ x trabalha” por $T(x)$, e “ x fica cansado” por $C(x)$, temos que a expressão dada fica representada por $T(x) \rightarrow C(x)$. Seu conjunto-verdade é constituído por duas classes de elementos: pelos que trabalham e ficam cansados e pelos que não trabalham (uma vez que quando o antecedente é falso, a condicional é verdadeira).

Temos então que

$$\begin{aligned} V_{T \rightarrow C} &= (V_T \cap V_C) \cup V_{\neg T}, \text{ utilizando a propriedade distributiva} \\ V_{T \rightarrow C} &= (V_T \cup V_{\neg T}) \cap (V_C \cup V_{\neg T}), \text{ como } (V_T \cup V_{\neg T}) = U \\ V_{T \rightarrow C} &= U \cap (V_C \cup V_{\neg T}), \text{ ou seja} \\ V_{T \rightarrow C} &= (V_{\neg T} \cup V_C), \text{ ou ainda} \end{aligned}$$

$$V_{T \rightarrow C} = \overline{V_T} \cup V_C$$

Para a operação bicondicional, considere a expressão “ x trabalha se e somente se ganha dinheiro”; representando “ x trabalha” por $T(x)$, e “ x ganha dinheiro” por $G(x)$, temos $T(x) \leftrightarrow G(x)$. O conjunto de elementos que satisfazem a essa expressão é constituído pela união entre os conjuntos daqueles que trabalham e ganham dinheiro e daqueles que não trabalham e não ganham dinheiro; assim,

$$V_{T \leftrightarrow G} = (V_T \cap V_G) \cup (\overline{V_T} \cap \overline{V_G})$$

Forma Simbólica

Obter a forma simbólica de uma expressão em linguagem textual não é difícil, mas enquanto não se adquire uma certa habilidade, dá algum trabalho; muitas vezes, para facilitar, construímos uma forma intermediária, chamada forma lógica, obtida apenas por introdução de variáveis na forma textual.

Vamos ver alguns exemplos, obtendo a forma lógica e simbólica de expressões textuais, utilizando os predicados definidos:

1. Gatos caçam ratos. ($G(x)$: x é um gato; $R(x)$: x caça ratos)

Forma lógica: se x é um gato, x caça ratos.

Forma simbólica: $G(x) \rightarrow R(x)$

2. Chineses velhos são sábios. ($C(x)$: x é um chinês; $V(x)$: x é um velho; $S(x)$: x é um sábio)

Forma lógica: se x é um chinês e x é um velho, então x é um sábio.

Forma simbólica: $(C(x) \wedge V(x)) \rightarrow S(x)$

3. Abacates são deliciosos e nutritivos. ($A(x)$: x é um abacate; $D(x)$: x é delicioso; $N(x)$: x é nutritivo)

Forma lógica: se x é um abacate, então x é delicioso e x é nutritivo.

Forma simbólica: $A(x) \rightarrow (D(x) \wedge N(x))$

4. Abacates e laranjas são deliciosos e nutritivos. ($A(x)$: x é um abacate; $L(x)$: x é uma laranja; $D(x)$: x é delicioso; $N(x)$: x é nutritivo)

Forma lógica: se x é um abacate ou x é uma laranja, então x é delicioso e x é nutritivo.

Forma simbólica: $(A(x) \vee L(x)) \rightarrow (D(x) \wedge N(x))$

5. São raros os políticos que não mentem. ($R(x)$: x é raro; $P(x)$: x é político; $M(x)$: x mente)

Forma lógica: se x é político e x não mente, então x é raro.

Forma simbólica: $(P(x) \wedge \neg M(x)) \rightarrow R(x)$

6. Carros só se locomovem com gasolina. ($C(x)$: x é um carro; $L(x)$: x se locomove; $G(x)$: x tem gasolina)

Forma lógica: se x é um carro, então se x tem gasolina, x se locomove.

Forma simbólica: $C(x) \rightarrow (G(x) \rightarrow L(x))$ (ou $(C(x) \wedge G(x)) \rightarrow L(x)$, equivalência EI)

7. Estradas de terra são trafegáveis *unicamente* quando secas. ($E(x)$: x é uma estrada de terra; $T(x)$: x é trafegável; $S(x)$: x está seca)

Forma lógica: se x é uma estrada de terra, então x é trafegável se e somente se x está seca.

Forma simbólica: $E(x) \rightarrow (T(x) \leftrightarrow S(x))$

8. Homens *só* se casam com mulheres. ($H(x)$: x é um homem; $C(x, y)$: x é casado com y ; $M(x)$: x é uma mulher)

Forma lógica: se x é um homem, então se x é casado com y , y é uma mulher.

Forma simbólica: $(H(x) \rightarrow (C(x, y) \rightarrow M(y)))$ (ou $(H(x) \wedge C(x, y)) \rightarrow M(y)$, equivalência EI)

9. Gatos pretos são melhores caçadores que outros gatos. ($G(x)$: x é um gato; $P(x)$: x é preto; $C(x, y)$: x é melhor caçador que y)

Forma lógica: se x é um gato e x é preto e y é um gato e y não é preto, então x é melhor caçador que y .

Forma simbólica: $(G(x) \wedge P(x) \wedge G(y) \wedge \neg P(y)) \rightarrow C(x, y)$

4.3 Quantificadores

Dado um aberto $P(x)$ em um universo U , pode ocorrer:

- todos os x em U satisfazem P , isto é, $V_P = U$;
- alguns x em U satisfazem P , isto é, $V_P \neq \emptyset$;
- nenhum x em U satisfaz P , isto é, $V_P = \emptyset$.

Considere, por exemplo, $U = \{2, 4, 6, 8\}$. Se fizermos $P(x)$ representar “ x é par”, temos o primeiro caso: todos os elementos satisfazem P , e $V_P = U$. Para $P(x)$ representando “ x é múltiplo de 3”, temos apenas um elemento que satisfaz P , e $V_P = \{6\}$. Finalmente, se $P(x)$ representar “ x é maior que 10”, nenhum elemento de U satisfaz P , e, portanto, $V_P = \emptyset$.

No primeiro caso, dizemos que “para todo x em U , $P(x)$ é verdadeiro”, ou, simbolicamente,

$$(\forall x \in U)(P(x))$$

Às vezes, simplifica-se a notação, omitindo-se o domínio e/ou os parênteses; escrevemos

$$(\forall x)(P(x)) \text{ ou } \forall x P(x)$$

$P(x)$ é um aberto, mas $\forall x P(x)$ é um enunciado singular, e pode ser verdadeiro ou falso. A inserção do símbolo “ \forall ” em um aberto chama-se *quantificação universal* e o símbolo, *quantificador universal*. Às vezes, na linguagem textual, são utilizados sinônimos para a expressão “para todo x ”: “qualquer que seja x ”, “cada x ” etc. e todos são representados por $\forall x$.

A expressão $\forall x P(x)$ afirma que $P(x)$ é verdadeiro para cada $x \in U$; então, se $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, temos que a conjunção $P(u_1) \wedge P(u_2) \wedge \dots \wedge P(u_n)$ é verdadeira.

Consideremos agora um aberto $P(x)$ sobre U , para o qual $V_P \neq \emptyset$. Então existe pelo menos um x para o qual $P(x)$ é verdadeiro. Representamos tal fato por “existe um x em U tal que $P(x)$ é verdadeiro”, ou, simbolicamente,

$$(\exists x \in U)(P(x))$$

Simplificando a notação, omitindo o domínio e/ou os parênteses, temos

$$(\exists x)(P(x)) \text{ ou } \exists x P(x)$$

Da mesma forma que no caso anterior, $\exists x P(x)$ é um enunciado singular, e pode assumir os valores verdadeiro ou falso. A inserção do símbolo “ \exists ” em um aberto chama-se *quantificação existencial* e o símbolo, *quantificador existencial*. A linguagem textual, possui alguns sinônimos para a expressão “existe um x ”: “existe pelo menos um x ”, “algum (ou alguns) x ”, “para algum x ” etc. e todos são representados por $\exists x$.

A expressão $\exists x P(x)$ afirma que $P(x)$ é verdadeiro para pelo menos um $x \in U$; então, se $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, temos que a disjunção $P(u_1) \vee P(u_2) \vee \dots \vee P(u_n)$ é verdadeira.

Muitas vezes, precisaremos representar, simbolicamente, a negação de uma expressão quantificada, mas que, com os cuidados apropriados, não apresentará dificuldades. Seja por exemplo, a expressão “todos são alunos”. Se representarmos “ x é um aluno” por $A(x)$, temos que “todos são alunos” pode ser escrito

$$\forall x A(x)$$

Claramente, a negação de “todos são alunos” é “nem todos são alunos” (e não “nenhum é aluno”, como pode parecer à primeira vista), ou, simbolicamente,

$$\neg \forall x A(x)$$

Mas dizer que “nem todos são alunos” é o mesmo que dizer que “existe alguém que não é aluno”, ou seja, “existe um x tal que x não é um aluno”, ou, simbolicamente,

$$\exists x \neg A(x)$$

Concluimos então que as expressões $\neg \forall x A(x)$ e $\exists x \neg A(x)$ são equivalentes.

Da mesma forma, como podemos afirmar que as expressões “não existem alunos” e “todos não são alunos” descrevem o mesmo fato, podemos concluir que suas representações simbólicas $\neg \exists x A(x)$ e $\forall x \neg A(x)$ são equivalentes.

Esses fatos são decorrência imediata das leis de De Morgan:

$$\begin{aligned}\neg \forall x A(x) &\equiv \neg (A(u_1) \wedge \dots \wedge A(u_n)) \equiv \neg A(u_1) \vee \dots \vee \neg A(u_n) \equiv \exists x \neg A(x) \\ \neg \exists x A(x) &\equiv \neg (A(u_1) \vee \dots \vee A(u_n)) \equiv \neg A(u_1) \wedge \dots \wedge \neg A(u_n) \equiv \forall x \neg A(x)\end{aligned}$$

Dessas equivalências decorre que para mostrar que uma expressão do tipo $\forall x P(x)$ é falsa, basta mostrar que sua negação $\exists x \neg P(x)$ é verdadeira, ou seja, exibir um elemento k tal que $P(k)$ seja falsa.

Por esse motivo, de uma proposição do tipo $\forall x P(x)$ não decorre que exista um x para o qual $P(x)$ seja verdadeiro. Por exemplo, se não existem marcianos, então a expressão

Todos os marcianos têm olhos verdes.

é verdadeira, pois, para que fosse falsa, seria necessário exibir um marciano que não tivesse olhos verdes.

Se uma expressão possuir mais de uma variável, pode ocorrer que nem todas estejam quantificadas; nesse caso, a expressão é um aberto. As variáveis quantificadas recebem o nome de *variáveis ligadas* (também chamadas *aparentes* ou *mudas*), enquanto as não quantificadas são chamadas *variáveis livres*.

Por exemplo, considere o aberto $P(x, y) = (\forall x)(x + y < 10)$, sobre o universo $U = \{3, 5, 7, 9\}$. Seu conjunto verdade é formado por todos os valores de U que podem substituir y , e para o qual

existe pelo menos um x que satisfaz a desigualdade. Então, $V_P = \{3, 5\}$. A variável x é ligada, enquanto y é livre.

Quantificar uma sentença leva, da mesma forma que a instanciação, a um enunciado, a uma frase que pode ser verdadeira ou falsa. Costumamos chamar esses enunciados de proposições gerais, em contraposição às proposições singulares, pois não contêm nomes. Assim, o enunciado “Maria foi à praia” é uma proposição singular, enquanto “Todos foram à praia” é uma proposição geral.

Relações

Vejamos agora um exemplo com quantificadores em relações.

Considere os conjuntos $H = \{\text{Carlos, Pedro, Mário}\}$ e $M = \{\text{Claudia, Lilian}\}$ e o predicado $I(x, y)$: x é irmão de y , onde H é o universo de x , e M o universo de y . Suponha que Carlos e Pedro sejam irmãos de Claudia, e que Mário seja irmão de Lilian. Examine a validade dos seguintes enunciados:

$\forall x \in H, \exists y \in M, I(x, y)$ (“Todo homem é irmão de alguma mulher”)

$\exists x \in H, \forall y \in M, I(x, y)$ (“Algum homem é irmão de todas as mulheres”)

$\forall x \in H, \forall y \in M, I(x, y)$ (“Todo homem é irmão de todas as mulheres”)

$\exists x \in H, \exists y \in M, I(x, y)$ (“Algum homem é irmão de alguma mulher”)

É fácil perceber que o primeiro e o último são verdadeiros, e os demais, falsos.

Quando se obtém a forma simbólica de uma expressão, a ordem dos quantificadores pode ser importante; por exemplo, trocando a ordem dos enunciados do exemplo anterior, temos:

$\exists y \in M, \forall x \in H, I(x, y)$ (“Alguma mulher tem todos os homens como irmãos”)

$\forall y \in M, \exists x \in H, I(x, y)$ (“Toda mulher tem algum homem como irmão”)

$\forall y \in M, \forall x \in H, I(x, y)$ (“Toda mulher tem todos os homens como irmãos”)

$\exists y \in M, \exists x \in H, I(x, y)$ (“Alguma mulher tem algum homem como irmão”)

Agora, o segundo e o quarto enunciados são verdadeiros, enquanto o primeiro e o terceiro são falsos; observe que apenas os dois primeiros enunciados, nos quais os quantificadores são distintos, trocaram a validade. É possível mostrar que quantificadores de mesma espécie podem ser permutados, enquanto que, em geral, quantificadores de espécies distintas, não podem.

A negação de enunciados com mais de um quantificador pode ser obtido pela aplicação sucessiva das leis de De Morgan; por exemplo,

$$\begin{aligned}\neg \forall x \forall y P(x, y) &\equiv \exists x \neg \forall y P(x, y) \equiv \exists x \exists y \neg P(x, y) \\ \neg \exists x \exists y P(x, y) &\equiv \forall x \neg \exists y P(x, y) \equiv \forall x \forall y \neg P(x, y) \\ \neg \forall x \exists y P(x, y) &\equiv \exists x \neg \exists y P(x, y) \equiv \exists x \forall y \neg P(x, y) \\ \neg \exists x \forall y P(x, y) &\equiv \forall x \neg \forall y P(x, y) \equiv \forall x \exists y \neg P(x, y)\end{aligned}$$

Chama-se *escopo* de um quantificador a parte da frase sobre a qual ele atua; em geral o escopo de um quantificador é indicado pelos parênteses que o seguem. Se não houver parênteses, o escopo do quantificador é limitado ao predicado que o segue. Veja os exemplos abaixo:

$\exists x (P(x) \vee Q(x))$: escopo de $\exists x$: $P(x) \vee Q(x)$

$\exists x P(x) \vee Q(x)$: escopo de $\exists x$: $P(x)$

$\exists y (P(x, y) \wedge \forall x Q(x))$: escopo de $\exists y$: $P(x, y) \wedge \forall x Q(x)$, escopo de $\forall x$: $Q(x)$

Podemos agora voltar ao problema de construir as formas simbólicas, desta vez com a utilização de quantificadores; tal como fizemos anteriormente, vamos exemplificar o processo, obtendo a forma lógica e simbólica de expressões textuais, utilizando os predicados definidos.

Forma Simbólica com Quantificadores

Expressões com um quantificador e predicados monádicos

1. Existem sábios. ($S(x)$: x é sábio)

existe um x tal que x é sábio.

$$\exists x S(x)$$

2. Todos são sábios. ($S(x)$: x é sábio)

para todo x , x é sábio.

$$\forall x S(x)$$

3. Não existem marcianos. ($M(x)$: x é marciano)

não existe x tal que x seja um marciano. – ou – para todo x , x não é um marciano.

$$\neg \exists x M(x) \text{ – ou – } \forall x \neg M(x)$$

4. Nem todos são sábios ($S(x)$: x é sábio)

para nem todo x , x é sábio. – ou – existe um x tal que x não é sábio.

$$\neg \forall x S(x) \text{ – ou – } \exists x \neg S(x)$$

5. Algumas senhoras estão presentes. ($S(x)$: x é uma senhora; $P(x)$: x está presente)

existe um x tal que x é uma senhora e x está presente.

$$\exists x (S(x) \wedge P(x))$$

6. Os morcegos são mamíferos. ($C(x)$: x é morcego; $M(x)$: x é um mamífero)

para todo x , se x é um morcego, x é um mamífero.

$$\forall x (C(x) \rightarrow M(x))$$

7. Existe um mamífero que voa. ($M(x)$: x é mamífero; $V(x)$: x voa)

existe um x tal que x é mamífero e x voa.

$$\exists x (M(x) \wedge V(x))$$

8. Todo livro deve ser lido. ($L(x)$: x é um livro; $D(x)$: x deve ser lido)

para todo x , se x é um livro, x deve ser lido x .

$$\forall x (L(x) \rightarrow D(x))$$

9. Os cavalheiros não são sempre ricos. ($C(x)$: x é um cavalheiro; $R(x)$: x é rico)

para nem todo x , se x é um cavalheiro então x é rico x .

$$\neg \forall x (C(x) \rightarrow R(x))$$

ou, equivalentemente,

existe um x tal que x é um cavalheiro e x não é rico x .

$$\exists x (C(x) \wedge \neg R(x))$$

10. Somente os médicos podem cobrar por tratamento clínico. ($M(x)$: x é médico; $C(x)$: x pode cobrar por tratamento clínico)

para todo x , se x pode cobrar por tratamento clínico, então x é médico x .

$$\forall x (C(x) \rightarrow M(x))$$

11. Ninguém, senão os corajosos, merece medalha. ($C(x)$: x é corajoso; $M(x)$: x merece medalha)

para todo x , se x merece medalha, então x é corajoso.

$$\forall x (M(x) \rightarrow C(x))$$

12. Nenhum carro é seguro, a menos que tenha bons freios. ($C(x)$: x é um carro; $S(x)$: x é seguro; $F(x)$: x tem bons freios)

para todo x , se x é um carro, então x é seguro se e somente se x tiver bons freios.

$$\forall x (C(x) \rightarrow (S(x) \leftrightarrow F(x)))$$

Expressões com mais de um quantificador e predicados monádicos

1. Se existem marcianos, existem não-terráqueos. ($M(x)$: x é marciano; $T(x)$: x é terráqueo)
se existe x tal que x seja marciano, então existe y tal que y não é terráqueo.

$$\exists x M(x) \rightarrow \exists y \neg T(y)$$

2. Alguns são espertos, outros não. ($E(x)$: x é esperto)
existe x tal que x é esperto, e existe y tal que y não é esperto.

$$\exists x E(x) \wedge \exists y \neg E(y)$$

3. Existem políticos honestos e desonestos. ($P(x)$: x é político; $H(x)$: x é honesto)
existe x tal que x é político e x é honesto, e existe y tal que y é político e y não é honesto.

$$\exists x (P(x) \wedge H(x)) \wedge \exists y (P(y) \wedge \neg H(y))$$

Expressões com relações

1. João é casado com alguém. ($C(x, y)$: x é casado com y)
existe x tal que João é casado com x .

$$\exists x C(\text{João}, x)$$

2. Todos têm pai. ($P(x, y)$: x é pai de y)
para todo x existe y tal que y é pai de x .

$$\forall x \exists y P(y, x)$$

3. Existe um ancestral comum a todas as pessoas. ($P(x)$: x é uma pessoa; $A(x, y)$: x é ancestral de y)

existe um x tal que para todo y , se y é uma pessoa, x é ancestral de y .

$$\exists x \forall y (P(y) \rightarrow A(x, y))$$

Note que o quantificador universal (\forall) e o conectivo lógico da condicional (\rightarrow) estão quase sempre juntos. Da mesma forma, o quantificador existencial (\exists) e o conectivo lógico da conjunção (\wedge) também aparecem quase sempre juntos.

Por exemplo, considere os predicados $C(x)$: x é chinês e $S(x)$: x é sábio. A expressão “*Todo chinês é sábio*” é representada simbolicamente como $\forall x(C(x) \rightarrow S(x))$. Representar esta expressão como $\forall x(C(x) \wedge S(x))$ significa dizer que todos no conjunto universo, subentendido com sendo todo o mundo, são chineses sábios. Isso é uma declaração muito mais forte do que a proposição original. Por outro lado, a expressão “*Existe chinês sábio*” é representada como $\exists x(C(x) \wedge S(x))$. A representação desta expressão como $\exists x(C(x) \rightarrow S(x))$ está incorreta; ela é verdadeira se existir alguém, que chamaremos de x , no conjunto universo (o mundo inteiro) que não seja um chinês, porque aí $C(x)$ é falsa e a condicional é verdadeira. De fato, essa representação seria verdadeira se não existissem chineses no mundo!

As expressões com os advérbios “só”, “somente” e “apenas” são todas do tipo “se/então”, o que significa que serão representadas por uma implicação, **onde o consequente é a palavra que vem após o “somente” da sentença em português**. Por exemplo, a expressão “*Somente os médicos podem cobrar por tratamento clínico*” é representada por $\forall x(C(x) \rightarrow M(x))$, onde $C(x)$: x pode cobrar por tratamento clínico e $M(x)$: x é médico.

Um bom exercício para a construção de relações é o estabelecimento de formas de parentesco em uma família; excetuando-se o parentesco de pai, mãe, e filho, que são biológicos, todos os demais são estabelecidos através de uma ou mais pessoas. Podemos exemplificar com um parentesco simples, o de genro:

se x é casado com a filha de y , então x é genro de y

ou, mais precisamente:

se existir z tal que x seja casado com z , e z seja filha de y , então x é genro de y

Como o relacionamento é válido para todo x e para todo y , a forma simbólica ficaria:

$$\forall x \forall y (\exists z (C(x, z) \wedge F(z, y)) \rightarrow G(x, y))$$

onde $C(x, z)$: x é casado com z , $F(z, y)$: z é filha de y , $G(x, y)$: x é genro de y .

Observe que o predicado “filha” exige que z seja do sexo feminino; se utilizássemos o predicado $P(y, z)$ (y é pai de z), ao invés de $F(z, y)$, a forma simbólica incluiria a construção do relacionamento “nora”.

Veja, nos exemplos abaixo, a construção de outras formas de parentesco:

Avô: se x é pai do pai de y , então x é avô de y ($P(x, y)$: x é pai de y ; $A(x, y)$: x é avô de y)

$$\forall x \forall y (\exists z (P(x, z) \wedge P(z, y)) \rightarrow A(x, y))$$

Observe que a expressão acima não define o parentesco “avô”, pois, para isso, deveria incluir a possibilidade de x ser pai da mãe de y ; também por esse motivo, não podemos utilizar a operação bicondicional. O mesmo ocorre com os demais parentescos.

Irmão: se o pai de x for também pai de y , x é irmão de y ($P(x, y)$: x é pai de y ; $I(x, y)$: x é irmão de y)

$$\forall x \forall y (\exists z (P(z, x) \wedge P(z, y)) \rightarrow I(x, y))$$

Primo: se o pai de x for tio de y , então x é primo de y ($P(x, y)$: x é pai de y ; $T(x, y)$: x é tio de y ; $R(x, y)$: x é primo de y)

$$\forall x \forall y (\exists z (P(z, x) \wedge T(z, y)) \rightarrow R(x, y))$$

Madrasta: se x for casada com o pai de y e não for mãe de y , então x é madrastra de y ($C(x, y)$: x é casada com y ; $P(x, y)$: x é pai de y ; $M(x, y)$: x é mãe de y ; $D(x, y)$: x é madrastra de y)

$$\forall x \forall y (\exists z (C(x, z) \wedge P(z, y)) \wedge \neg M(x, y) \rightarrow D(x, y))$$

4.4 Símbolos funcionais

A Lógica de Predicados estende a Lógica Proposicional não apenas com quantificadores, mas com o conceito de *símbolos funcionais*. Considere a frase declarativa:

Toda criança é mais jovem do que sua mãe.

Usando predicados, poderíamos expressar essa frase como:

$$\forall x \forall y (C(x) \wedge M(y, x) \rightarrow J(x, y))$$

onde $C(x)$ significa que x é uma criança, $M(x, y)$ significa que x é a mãe de y e $J(x, y)$ significa que x é mais jovem do que y .

Da maneira com a frase foi codificada, podemos interpretá-la como: para todas as crianças x e todas as mães y de x , x é mais jovem que y . Entretanto, não é muito elegante falar sobre “todas as mães de x ”.

Outro exemplo que torna isto mais evidente é:

André e Paulo têm a mesma avó materna.

Usando os predicados definidos anteriormente e as constantes a e p para representar André e Paulo, respectivamente, temos a seguinte codificação:

$$\forall x \forall y \forall u \forall v (M(x, y) \wedge M(y, a) \wedge M(u, v) \wedge M(v, p) \rightarrow x = u)$$

Esta fórmula diz que, para todo y e v , se y e v são as mães de André e Paulo, respectivamente, e para todo x e u , se x e u são suas mães (isto é, as avós maternas de André e Paulo, respectivamente), então x e u são a mesma pessoa.

Note que aqui foi usado um predicado especial na Lógica de Predicados, a igualdade (“=”); ele é um predicado binário (precisa de dois argumentos) e, ao contrário dos outros predicados, ele foi escrito entre as suas variáveis, ou seja, $x = y$ ao invés de $=(x, y)$ para dizer que x e y são iguais. Outros predicados binários semelhantes, como os que representam as operações relacionais da matemática ($>$, $<$, \geq , \leq), também costumam ser escritos na notação infixa ($x > y$, $x < y$, $x \geq y$, $x \leq y$).

Os símbolos funcionais da Lógica de Predicados nos dão um modo de evitar essa codificação deselegante, já que nos permitem representar a mãe de y de maneira mais direta. No lugar de escrever $M(x, y)$ para dizer que x é a mãe de y , podemos escrever simplesmente $m(y)$ para significar a mãe de y . O símbolo m é um símbolo funcional: pega uma variável e retorna a mãe daquela variável. Usando m , as duas frases anteriores ficam com codificações mais simples do que quando usamos M . Por exemplo:

$$\forall x(C(x) \rightarrow J(x, m(x)))$$

agora expressa o fato de que toda criança é mais jovem do que sua mãe. Note que precisamos apenas de uma variável ao invés de duas.

A representação de que André e Paulo têm a mesma avó materna é ainda mais simples:

$$m(m(a)) = m(m(p))$$

dizendo diretamente que a avó materna (a mãe da mãe) de André é a mesma pessoa que a avó materna de Paulo.

É sempre possível não usar símbolos funcionais, e em vez disso, usar apenas predicados. No entanto, em geral é mais elegante usar símbolos funcionais sempre que possível, pois obtemos codificações mais compactas. Entretanto, símbolos funcionais podem ser usados apenas em *situações nas quais queremos denotar um único objeto*¹.

Antes, usamos o fato de que todo indivíduo tem uma mãe unicamente definida, de modo que podemos falar sobre a mãe de x sem arriscar nenhuma ambiguidade (por exemplo, se x pudesse ter duas mães ou nenhuma). Por essa razão, não podemos ter um símbolo funcional $i(.)$ para “irmão”. Pode não fazer sentido falar sobre o irmão de x , já que x pode não ter irmão, ou pode ter vários irmãos. “Irmão” tem que ser codificado como um predicado binário. Por exemplo, se Maria tiver diversos irmãos, então a afirmação de que “Ana gosta do irmão de Maria” é ambígua. Pode-se que Ana goste de um dos irmãos de Maria, que escreveríamos como:

$$\exists x(I(x, m) \wedge G(a, x))$$

onde I e G significam que “é irmão de” e “gosta”, e a e m significam Ana e Maria, respectivamente. Essa frase diz que existe um x que é irmão de Maria e de quem Ana gosta.

De maneira alternativa, se Ana gosta de todos os irmãos de Maria, escrevemos como:

$$\forall x(I(x, m) \rightarrow G(a, x))$$

que diz que Ana gosta de qualquer irmão de Maria.

Símbolos funcionais diferentes podem ter um número diferente de variáveis. Por exemplo,

¹Os resultados das interpretações dos predicados são valores verdade, já os resultados das interpretações das funções são objetos.

em um domínio envolvendo estudantes e suas notas em diversas disciplinas, poderíamos ter um símbolo funcional binário $n(x, y)$ que se refere à nota obtida pelo aluno x na disciplina y .

Funções que não têm variáveis são chamadas de *constantes*, por exemplo, a e p são constantes para André e Paulo, respectivamente.

4.5 Fórmulas Bem Formadas

Vimos, então, que a linguagem do Cálculo de Predicados utiliza, para representar frases de uma linguagem natural, constantes, variáveis, predicados, símbolos funcionais, conectivos, quantificadores e parênteses. No entanto, da mesma forma que no Cálculo Proposicional, nem toda sequência constituída por esses elementos é válida, isto é, representa uma frase da linguagem natural.

Uma *fórmula atômica* ou *átomo* é qualquer predicado $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, onde t_1, t_2, \dots, t_n são termos.

Termos são definidos da seguinte maneira:

- Qualquer variável é um termo
- Se c é uma função 0-ária (constante), então c é um termo
- Se t_1, t_2, \dots, t_n são termos e f é uma função n -ária, com $n > 0$, então $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ é um termo
- Nada mais é um termo

As fórmulas atômicas são as fórmulas mais simples da linguagem. As sequências válidas são chamadas *fórmulas bem formadas* (*fbf*), ou, simplesmente, *fórmulas*.

Uma *fbf* é uma fórmula atômica, ou uma fórmula que assume alguma das seguintes configurações: $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$, $\forall X(A)$ e $\exists X(A)$, onde A e B são fórmulas e X é um conjunto de variáveis.

Capítulo 5

Dedução no Cálculo de Predicados

5.1 Eliminação e Inserção de Quantificadores

No Cálculo Proposicional podíamos decidir, pelo menos teoricamente, a validade ou invalidade de um argumento, utilizando-se tabelas-verdade. Mas para o Cálculo de Predicados, o matemático e lógico americano A. CHURCH mostrou, em 1936, que quando são envolvidas nas premissas expressões como $P(x, y)$, $Q(x, y, z)$ etc., não existe nenhum processo sistemático para estabelecer a validade dos argumentos.

Os conceitos de argumento, regra de inferência, dedução etc., permanecem válidos no Cálculo de Predicados, mas a presença de quantificadores, variáveis e predicados nos enunciados, no entanto, traz complicações adicionais.

Uma das formas de se contornar esse problema é definir regras adicionais de inferência, que permitam inserir e/ou eliminar os quantificadores das premissas. Vamos definir quatro novas regras de inferência, duas para eliminar os quantificadores, transformando as expressões em enunciados do Cálculo Proposicional, de forma que possamos utilizar as equivalências e inferências já conhecidas, e duas para inserir novamente os quantificadores. Dessa forma, temos um método geral para deduzir os argumentos do Cálculo de Predicados:

1. Elimine os quantificadores das premissas.
2. Deduza a conclusão com as equivalências e inferências do Cálculo Proposicional.
3. Insira (se for o caso) os quantificadores na conclusão.

Essas quatro regras são descritas a seguir.

5.1.1 Instanciação Universal

A primeira regra de inferência é chamada Instanciação Universal (IU), e pode ser enunciada da seguinte forma:

“Se todos os objetos de um dado universo possuem uma dada propriedade, então um objeto particular desse universo também possui essa propriedade.”

Em outras palavras, estamos dizendo que

$$\frac{\forall x P(x)}{P(x/t)}$$

onde $P(x/t)$ é uma fórmula que resulta da substituição de cada ocorrência livre da variável x por um termo t . Se o novo termo t que substituirá a variável x em P também for uma variável, então esta nova variável deve ser livre dentro da fórmula P original.

A aplicação dessa regra pode ser exemplificada no seguinte argumento:

Todos os homens são mortais.
Sócrates é um homem.
Logo, Sócrates é mortal.

Representando simbolicamente:

$$\begin{aligned} &\forall x (H(x) \rightarrow M(x)) \\ &H(Socrates) \\ &\vdash M(Socrates) \end{aligned}$$

Com a dedução:

$$\begin{array}{ll} 1 & \forall x (H(x) \rightarrow M(x)) & P_1 \\ 2 & H(Socrates) & P_2 \\ 3 & H(Socrates) \rightarrow M(Socrates) & 1, IU \\ 4 & M(Socrates) & 2, 3, MP \end{array}$$

No passo 3, a Instanciação Universal consistiu em substituir, na premissa 1, x por *Socrates*.

5.1.2 Generalização Universal

A segunda regra de inferência, Generalização Universal (GU), tem o seguinte enunciado:

“Se um objeto, arbitrariamente escolhido dentre um universo, tiver uma certa propriedade, todos os objetos desse universo terão essa propriedade.”

Em termos simbólicos, podemos escrever que

$$\frac{P(t)}{\forall x P(x)}$$

onde $P(t)$ é uma fórmula e t um objeto arbitrariamente escolhido.

Qual o significado desta regra? Como podemos garantir que todos os elementos de um universo possuem dada propriedade? A resposta está na expressão *arbitrariamente escolhido*.

Suponha que um matemático queira provar certa propriedade a respeito dos triângulos; digamos que ele inicia pela frase “seja um triângulo ABC” e prove a propriedade para o triângulo ABC. Se ele não tiver feito nenhuma outra suposição sobre ABC, exceto que se trata de um triângulo, então ABC foi arbitrariamente escolhido e pode ser qualquer triângulo; se a propriedade vale para qualquer triângulo, vale para todos os triângulos.

Podemos ilustrar a aplicação da regra GU através do seguinte argumento:

Todos os humanos são mortais.

Todos os gregos são humanos.

Logo, todos os gregos são mortais.

Em termos simbólicos:

$$\begin{aligned} &\forall x(H(x) \rightarrow M(x)) \\ &\forall x(G(x) \rightarrow H(x)) \\ &\vdash \forall x(G(x) \rightarrow M(x)) \end{aligned}$$

Com a dedução:

$$\begin{array}{ll} 1 & \forall x(H(x) \rightarrow M(x)) \quad P_1 \\ 2 & \forall x(G(x) \rightarrow H(x)) \quad P_2 \\ 3 & H(k) \rightarrow M(k) \quad 1, IU \\ 4 & G(k) \rightarrow H(k) \quad 2, IU \\ 5 & G(k) \rightarrow M(k) \quad 3, 4, SH \\ 6 & \forall x(G(x) \rightarrow M(x)) \quad 5, GU \end{array}$$

Nos passos 3 e 4, a Instanciação Universal consistiu em substituir x pelo mesmo elemento k ; como as premissas são verdadeiras “para todo x ”, são verdadeiras para $x = k$.

No passo 5, $G(k) \rightarrow M(k)$ diz que “se determinado k é grego, então k é mortal”. Mas esse k é qualquer objeto do universo; não houve nenhuma imposição sobre sua escolha; a regra Generalização Universal, aplicada no passo 6 diz então que podemos afirmar “se qualquer objeto do universo é grego, então esse objeto é mortal”, que é a conclusão que procurávamos.

5.1.3 Generalização Existencial

A terceira regra de inferência, Generalização Existencial (GE), afirma que:

“O que é verdadeiro para um dado objeto, é verdadeiro para algum objeto.”

Em formulação simbólica, a Generalização Existencial pode ser escrita:

$$\frac{P(t)}{\exists x P(x)}$$

onde t é um termo constante ou variável, x é variável. Se o termo t da fórmula original $P(t)$ for um símbolo de uma constante do domínio, então a nova variável x que o substituirá não pode ter aparecido anteriormente na fórmula $P(t)$.

Vamos exemplificar a utilização da regra GE através da dedução do argumento abaixo:

Todos os tigres são animais ferozes.

Sheeta é um tigre.

Logo, existem animais ferozes.

Na forma simbólica

$$\begin{aligned} &\forall x (T(x) \rightarrow F(x)) \\ &T(\textit{Sheeta}) \\ &\vdash \exists x F(x) \end{aligned}$$

Com a seguinte dedução:

1	$\forall x(T(x) \rightarrow F(x))$	P_1
2	$T(Sheeta)$	P_2
3	$T(Sheeta) \rightarrow F(Sheeta)$	1, IU
4	$F(Sheeta)$	2, 3, MP
5	$\exists x F(x)$	4, GE

No passo 5, a Generalização Existencial afirma que já que *Sheeta* é um animal feroz, obtido no passo 4, então existe pelo menos um animal feroz (*Sheeta*, por exemplo).

5.1.4 Instanciação Existencial

Finalmente, a quarta regra de inferência, Instanciação Existencial (IE), tem o seguinte enunciado:

“O que é verdadeiro para algum objeto, é verdadeiro para um dado objeto, desde que esse objeto não tenha sido utilizado anteriormente na dedução.”

Em notação simbólica

$$\frac{\exists x P(x)}{P(x/t)}$$

onde $P(x/t)$ é uma fórmula e t não tenha ocorrência livre anterior (t não pode ter sido usado anteriormente na dedução).

Vamos exemplificar a aplicação dessa regra, construindo a dedução do seguinte argumento:

Todos os tigres são ferozes.

Alguns animais são tigres.

Logo, alguns animais são ferozes.

Na forma simbólica:

$$\begin{aligned} &\forall x(T(x) \rightarrow F(x)) \\ &\exists x(A(x) \wedge T(x)) \\ &\vdash \exists x(A(x) \wedge F(x)) \end{aligned}$$

Com a seguinte dedução:

1	$\forall x(T(x) \rightarrow F(x))$	P_1
2	$\exists x(A(x) \wedge T(x))$	P_2
3	$A(k) \wedge T(k)$	2, IE
4	$T(k) \rightarrow F(k)$	1, IU
5	$A(k)$	3, $SIMP$
6	$T(k)$	3, $SIMP$
7	$F(k)$	4, 6, MP
8	$A(k) \wedge F(k)$	5, 7, $CONJ$
9	$\exists x(A(x) \wedge F(x))$	8, GE

A premissa 2 diz que “existe um x que é animal e é tigre”; a Instanciação Existencial, no passo 3, consiste em nomear esse elemento como k ; como a premissa 1 afirma que a propriedade $T(x) \rightarrow F(x)$ vale para todo x , a Instanciação Universal, no passo 4, consiste em dizer que essa propriedade vale também para $x = k$.

5.2 Cuidados na aplicação das regras

A aplicação dessas regras de inferência exige certos cuidados, sem os quais podemos obter resultados absurdos.

1. Ao aplicar a Instanciação Existencial, certifique-se que o termo a ser utilizado não tenha sido utilizado anteriormente na dedução; observe o argumento abaixo:

Alguns cães são ferozes.

Alguns gatos são ferozes.

Logo, alguns cães são gatos.

com a seguinte representação simbólica:

$$\begin{aligned}
 &\exists x(C(x) \wedge F(x)) \\
 &\exists x(G(x) \wedge F(x)) \\
 &\vdash \exists x(C(x) \wedge G(x))
 \end{aligned}$$

Poderíamos construir, então, a seguinte dedução:

1	$\exists x(C(x) \wedge F(x))$	P_1
2	$\exists x(G(x) \wedge F(x))$	P_2
3	$C(k) \wedge F(k)$	1, IE
4	$G(k) \wedge F(k)$	2, IE
5	$C(k)$	3, $SIMP$
6	$G(k)$	4, $SIMP$
7	$C(k) \wedge G(k)$	5, 6, $CONJ$
8	$\exists x(C(x) \wedge G(x))$	7, GE

Na dedução acima, utilizamos, no passo 3, o termo k na Instanciação Existencial da premissa 1, ou seja, k é o nome do cão feroz; em seguida utilizamos o mesmo k na Instanciação Existencial da premissa 2, isto é, demos o mesmo nome k ao gato feroz. Daí decorre a conclusão de que existe alguém que é, simultaneamente, cão e gato.

2. Também são necessários alguns cuidados na aplicação da Generalização Existencial. Observe o argumento abaixo:

Todo animal é feroz.

Para todo animal feroz, existe um não feroz.

Logo, existe um animal feroz e não feroz.

Em termos simbólicos:

$$\begin{aligned}
 &\forall x F(x) \\
 &\forall x F(x) \rightarrow \exists y \neg F(y) \\
 &\vdash \exists x (F(x) \wedge \neg F(x))
 \end{aligned}$$

Com a seguinte dedução:

1	$\forall xF(x)$	P
2	$\forall xF(x) \rightarrow \exists y\neg F(y)$	P
3	$\exists y\neg F(y)$	1, 2, MP
4	$F(k)$	1, IU
5	$\neg F(j)$	3, IE
6	$F(k) \wedge \neg F(j)$	4, 5, $CONJ$
4	$\exists x(F(x) \wedge \neg F(x))$	6, GE

Onde está o erro? A expressão obtida em 3 diz que “se existe um animal feroz (k) existe um não feroz (j)”; o passo seguinte, a Generalização Existencial, substituiu ambos por x , o que não deve ser feito; a forma de se evitar isso, é observar a possibilidade de volta da Generalização Existencial, a Instanciação Existencial. No exemplo, a aplicação de IE sobre a expressão obtida em 4 nunca poderia produzir a obtida no passo 3, pois ambas as ocorrências de x deveriam ser substituídas pelo mesmo termo.

- Um terceiro cuidado a ser tomado em uma inferência é não aplicar Generalização Universal às variáveis introduzidas por Instanciação Existencial. Isso decorre do fato de que não se pode generalizar um fato verdadeiro apenas para algum elemento; isto é, de $\exists xF(x)$ não podemos inferir $\forall xF(x)$.

Capítulo 6

Método de prova por Resolução

6.1 Resolução

A *Resolução* é um procedimento de inferência baseada em uma única regra de inferência de mesmo nome que generaliza outras regras. Este procedimento foi criado por ROBINSON em 1965 e é a base da Programação em Lógica e, em particular, de todas as aplicações da Lógica em Inteligência Artificial: PROLOG, geração de planos etc.

A Resolução utiliza um subconjunto da linguagem de primeira ordem que é a *linguagem das cláusulas*.

Uma *cláusula* é uma disjunção de literais onde todas as variáveis são quantificadas universalmente. Uma cláusula tem a forma:

$$\forall x_1 \dots \forall x_m (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n)$$

onde cada L_i , $i = 1, \dots, n$ é um literal e os x_j , $j = 1, \dots, m$ são as variáveis que ocorrem na cláusula.

Um *literal* é uma fórmula atômica (*literal positivo*) ou a negação de uma fórmula atômica (*literal negativo*).

A *regra de resolução* toma duas cláusulas contendo literais complementares (um positivo e outro negativo) e produz uma nova cláusula com todos os literais de ambos, excluídos estes complementares.

A cláusula produzida pela regra de resolução é chamada de *resolvente* das duas cláusulas iniciais. Quando as duas cláusulas contêm mais de um par de literais complementares, a regra

de resolução pode ser aplicada (independentemente) para cada par. Entretanto, apenas o par de literais resolvidos pode ser removido - todos os outros pares de literais permanecem na cláusula resolvente. Esta regra pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\begin{array}{l} C_1 = (a_1 \vee \dots \vee a_{i-1} \vee a_i \vee a_{i+1} \vee \dots \vee a_n) \\ C_2 = (b_1 \vee \dots \vee b_{j-1} \vee b_j \vee b_{j+1} \vee \dots \vee b_m) \end{array}}{R = (a_1 \vee \dots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \dots \vee a_n \vee b_1 \vee \dots \vee b_{j-1} \vee b_{j+1} \vee \dots \vee b_m)}$$

onde a_i and b_j são literais complementares.

O procedimento de resolução inicia selecionando duas cláusulas da base de conhecimento que satisfaçam o modelo da Regra de Resolução, isto é, duas cláusulas que possuam um literal em comum sendo um deles positivo e outro negativo.

Ao aplicar a Regra de Resolução, uma nova proposição é gerada e adicionada à base de conhecimento para uso posterior. Esta nova proposição, se não for o que se deseja concluir, é utilizada como uma das cláusulas na aplicação seguinte da regra.

O processo se repete até que se encontre a proposição objetivo – assim mostrando que ela é verdadeira ou deduzida logicamente da base de conhecimento – ou até que não seja mais possível aplicar a Resolução. Neste caso, pode-se voltar uma a uma as aplicações da regra em busca de outras cláusulas que gerem outros fatos verdadeiros, ou até mesmo reiniciar o procedimento com outras cláusulas.

6.1.1 Representação clausal

Para aplicar o método de resolução, as fórmulas precisam estar representadas na forma de cláusulas. Precisamos então transformar uma fórmula qualquer do Cálculo de Predicados para a sua equivalente em cláusula. Isto é feito através do procedimento abaixo:

1. eliminar as bicondicionais e condicionais utilizando as equivalências de mesmo nome;
2. reduzir o escopo das negações à sentenças simples utilizando as equivalências Dupla Negação e De Morgan;
3. renomear as variáveis de modo que cada quantificador esteja associado a uma variável exclusiva;
4. mover os quantificadores para frente;

5. eliminar os quantificadores existenciais e substituir sua variável associada por uma função cujos argumentos sejam as variáveis universalmente quantificadas que a utilizam em suas definições; no caso mais simples, basta utilizar uma constante; abaixo seguem alguns exemplos de transformações:

5.1 substituição de $\exists x P(x)$ por $P(c)$, em que c é chamada *constante de Skolem*

5.2 substituição de $\forall x \exists y P(x, y)$ por $\forall x P(x, f(x))$, em que $y = f(x)$ é chamada *função de Skolem*

5.3 substituição de $\forall x \forall y \exists z P(x, y, z)$ por $\forall x \forall y P(x, y, f(x, y))$

5.4 substituição de $\forall x \forall y \exists z \forall w P(x, y, z, w)$ por $\forall x \forall y \forall w P(x, y, f(x, y), w)$

6. eliminar os quantificadores universais pois assume-se que todas as variáveis estão quantificadas universalmente;
7. converter para a Forma Normal Conjuntiva (FNC);
8. realizar a separação das cláusulas de todas as FNC produzidas, tornando-as independentes.

Exemplo

Achar a representação clausal da fórmula:

$$\forall x((A(x) \wedge B(x)) \rightarrow (C(x, c) \wedge \exists y(\exists z C(y, z) \rightarrow D(x, y))) \vee \forall x E(x))$$

Seguindo o procedimento acima, passo a passo (as alterações realizadas em cada passo estão destacadas em vermelho):

1. $\forall x(\neg(A(x) \wedge B(x)) \vee (C(x, c) \wedge \exists y(\neg \exists z C(y, z) \vee D(x, y))) \vee \forall x E(x))$
2. $\forall x((\neg A(x) \vee \neg B(x)) \vee (C(x, c) \wedge \exists y(\forall z \neg C(y, z) \vee D(x, y))) \vee \forall x E(x))$
3. $\forall x((\neg A(x) \vee \neg B(x)) \vee (C(x, c) \wedge \exists y(\forall z \neg C(y, z) \vee D(x, y))) \vee \forall w E(w))$
4. $\forall x \exists y \forall z \forall w((\neg A(x) \vee \neg B(x)) \vee (C(x, c) \wedge (\neg C(y, z) \vee D(x, y))) \vee E(w))$
5. $\forall x \forall z \forall w((\neg A(x) \vee \neg B(x)) \vee (C(x, c) \wedge (\neg C(f(x), z) \vee D(x, f(x)))) \vee E(w))$
6. $(\neg A(x) \vee \neg B(x)) \vee (C(x, c) \wedge (\neg C(f(x), z) \vee D(x, f(x)))) \vee E(w)$

7. $(\neg A(x) \vee \neg B(x)) \vee (C(x, c) \vee E(w)) \wedge (\neg C(f(x), z) \vee D(x, f(x)) \vee E(w))$
 $(\neg A(x) \vee \neg B(x) \vee C(x, c) \vee E(w)) \wedge (\neg A(x) \vee \neg B(x) \vee \neg C(f(x), z) \vee D(x, f(x)) \vee E(w))$
8. $(\neg A(x) \vee \neg B(x) \vee C(x, c) \vee E(w))$
 $(\neg A(x) \vee \neg B(x) \vee \neg C(f(x), z) \vee D(x, f(x)) \vee E(w))$

Na base de conhecimento as variáveis são renomeadas de forma que as cláusulas não fiquem com variáveis repetidas (o escopo da variável é a própria cláusula). No exemplo acima as cláusulas ficariam:

$$(\neg A(x) \vee \neg B(x) \vee C(x, c) \vee E(w))$$

$$(\neg A(y) \vee \neg B(y) \vee \neg C(f(y), z) \vee D(y, f(y)) \vee E(v))$$

6.1.2 Unificação

Para aplicarmos as regras de inferência é preciso “casar” certas expressões entre si. Por exemplo, considere as duas cláusulas a seguir:

$$c_1 : \neg P(x) \vee Q(x)$$

$$c_2 : P(a)$$

Para que a resolução possa ser aplicada, a variável x da c_1 deve ser substituída pelo valor a . Este procedimento de casamento é chamado *unificação* sendo muito importante na mecanização da Lógica. Assim, o $P(x)$ da c_1 é unificado a c_2 , ou seja, ele é tornado idêntico a c_2 . O $Q(x)$ também tem sua variável x instanciada com o valor a pois ela é a mesma utilizada durante a unificação.

As substituições são representadas pelo conjunto de pares $s = \{x_1/t_1, x_2/t_2, \dots, x_n/t_n\}$. Por exemplo, $P(x, f(y), z)$ pode ser transformado em $P(a, f(b), c)$ pela substituição $s = \{x/a, y/b, z/c\}$.

Dizemos que um conjunto de expressões é *unificável* se existe uma substituição que os unifica; por exemplo, $\{P(x, f(y), b), P(x, f(c), b)\}$ é unificável em $P(a, f(c), b)$ pela substituição $s = \{x/a, y/c\}$.

Existem muitos algoritmos de unificação, a seguir será apresentado um deles:

função Unifica(E1,E2):

(* Esta função retorna sucesso e uma substituição que unifica E1 e E2
se estas expressões forem unificáveis e retorna falha caso contrário *)

```

início
  caso:
    E1 e E2 são vazios ou constates:
      se E1=E2 então retorna {} (* substituição vazia *)
      senão retorna Falha

    E1 é uma variável:
      se E1 ocorre em E2 então retorna Falha
      senão retorna {E1/E2}

    E2 é uma variável:
      se E2 ocorre em E1 então retorna Falha
      senão retorna {E2/E1}

  caso_contrário: (* E1 e E2 não são nem variável nem constante *)
    F1 := primeiro elemento de E1; R1 := resto de E1
    F2 := primeiro elemento de E2; R2 := resto de E2

    SUBS1 := Unifica(F1,F2)
    se SUBS1 = Falha então retorna Falha

    R1 := aplica SUBS1 a R1;
    R2 := aplica SUBS1 a R2;

    SUBS2 := Unifica(R1,R2)
    se SUBS2 = Falha então retorna Falha
    senão retorna a composição de SUBS1 e SUBS2.
fim.

```

Exemplo:

$unifica(Pais(x, pai(x), mae(João)), Pais(João, pai(João), Y))$

Resposta: $x/João, y/mae(João)$

Exemplos

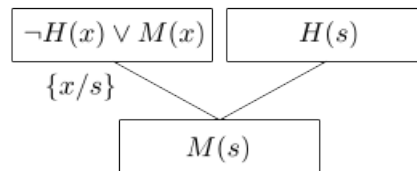
1. Todo humano é mortal. Sócrates é humano. Logo, Sócrates é mortal.

$$\frac{\forall x(H(x) \rightarrow M(x)) \quad H(s)}{M(s)}$$

Representação clausal:

$$\frac{\neg H(x) \vee M(x) \quad H(s)}{M(s)}$$

Árvore de prova:



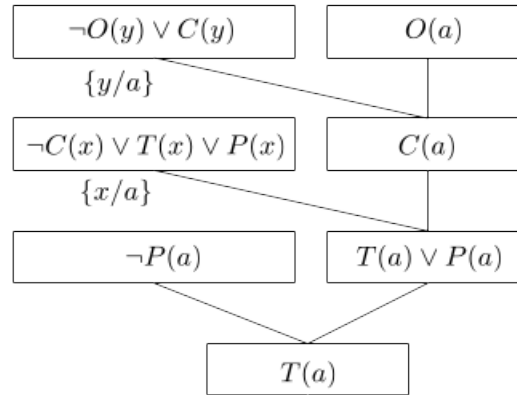
2. Todos os cidadãos que não são traidores estão presentes. Todos os oficiais são cidadãos. Alguns oficiais não estão presentes. Logo, há traidores.

$$\frac{\forall x(C(x) \wedge \neg T(x) \rightarrow P(x)) \quad \forall x(O(x) \rightarrow C(x)) \quad \exists x(O(x) \wedge \neg P(x))}{\exists x T(x)}$$

Representação clausal:

$$\frac{\neg C(x) \vee T(x) \vee P(x) \quad \neg O(y) \vee C(y) \quad O(a) \quad \neg P(a)}{T(a)}$$

Árvore de prova:



6.2 Resolução por Refutação

Os procedimentos de inferência que deduzem sentenças verdadeiras a partir de uma base de conhecimento (assumida como verdadeira) são chamados de *consistentes* ou *confiáveis*. Se um procedimento é capaz de produzir todas as possíveis conclusões verdadeiras a partir de um subconjunto da base de conhecimento, então ele é chamado de *completo*.

A resolução é um procedimento de inferência confiável, porém não é completo. Por exemplo, ela não é capaz de deduzir a proposição $p \wedge q$ a partir de uma base de conhecimento formada apenas pelas proposições p e q . Então, a resolução não pode ser utilizada para encontrar todas as possíveis deduções a partir de uma base de conhecimento.

Uma refutação ou prova por absurdo é uma prova na qual partimos da negação do que queremos provar e mostramos que isto nos leva a um absurdo. Ao ser combinada com a técnica de demonstração por absurdo, a resolução torna-se completa e recebe o nome de *Resolução por Refutação* ou somente *Refutação*. A demonstração por absurdo adiciona às premissas de um argumento a negação da conclusão e procura mostrar uma contradição nos fatos. Se isto for conseguido, então o argumento é válido, ou seja, a conclusão é deduzida das premissas.

Assim, a base de conhecimento receberá a negação da proposição que se quer deduzir e, através da resolução, o objetivo passa a ser uma contradição, chamada *cláusula vazia* (representada por “ \square ”). A seguir, os exemplos anteriores serão abordados pela Refutação, sendo aproveitadas as transformações em FNC realizadas na seção anterior.

Exemplos

1. Todo ser racional aprende a ler. Dálmatas não aprendem a ler. Alguns dálmatas são inteligentes. Logo, existe alguém que é inteligente e não é racional.

Em LPO:

$$\frac{\begin{array}{l} \forall x(R(x) \rightarrow L(x)) \\ \forall x(D(x) \rightarrow \neg L(x)) \\ \exists x(D(x) \wedge I(x)) \end{array}}{\exists x(I(x) \wedge \neg R(x))}$$

Negação da conclusão:

$$\begin{aligned} \neg \exists x(I(x) \wedge \neg R(x)) &\equiv \\ \forall x \neg(I(x) \wedge \neg R(x)) &\equiv \\ \forall x(\neg I(x) \vee R(x)) \end{aligned}$$

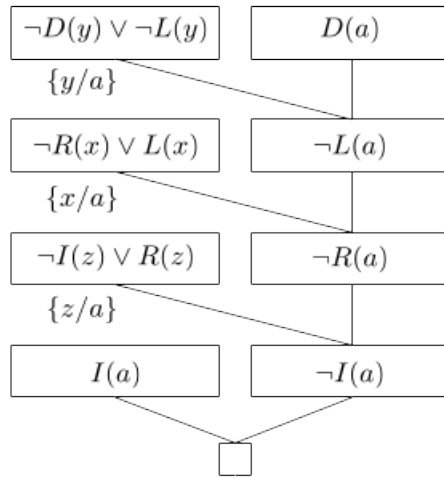
Refutação:

$$\frac{\begin{array}{l} \forall x(R(x) \rightarrow L(x)) \\ \forall x(D(x) \rightarrow \neg L(x)) \\ \exists x(D(x) \wedge I(x)) \\ \forall x(\neg I(x) \vee R(x)) \end{array}}{\square}$$

Representação clausal:

$$\frac{\begin{array}{l} \neg R(x) \vee L(x) \\ \neg D(y) \vee \neg L(y) \\ D(a) \\ I(a) \\ \neg I(z) \vee R(z) \end{array}}{\square}$$

Árvore de prova:



2. Se alguém cometer um erro e ninguém se acusar, todos serão punidos. Todos cometeram erros. Logo, se alguém não foi punido, alguém se acusou.

Em LPO:

$$\frac{\begin{array}{c} \exists x E(x) \wedge \forall x \neg A(x) \rightarrow \forall x P(x) \\ \forall x E(x) \end{array}}{\exists x \neg P(x) \rightarrow \exists x A(x)}$$

Negação da conclusão:

$$\begin{aligned} \neg(\exists x \neg P(x) \rightarrow \exists x A(x)) &\equiv \\ \neg(\neg \exists x \neg P(x) \vee \exists x A(x)) &\equiv \\ \exists x \neg P(x) \wedge \neg \exists x A(x) &\equiv \\ \exists x \neg P(x) \wedge \forall x \neg A(x) & \end{aligned}$$

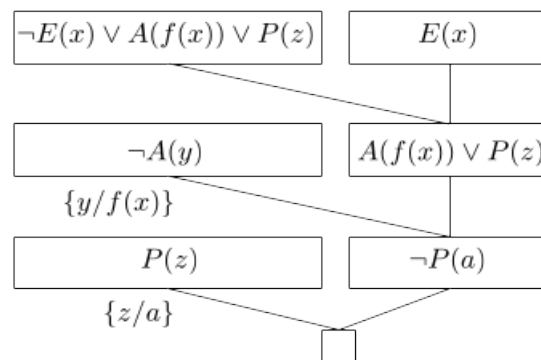
Refutação:

$$\frac{\begin{array}{c} \exists x E(x) \wedge \forall x \neg A(x) \rightarrow \forall x P(x) \\ \forall x E(x) \\ \exists x \neg P(x) \wedge \forall x \neg A(x) \end{array}}{\square}$$

Representação clausal:

$$\begin{array}{c}
 \neg E(x) \vee A(f(x)) \vee P(z) \\
 E(x) \\
 \neg P(a) \\
 \neg A(y) \\
 \hline
 \square
 \end{array}$$

Árvore de prova:



Apêndice A

Equivalências e Inferências fundamentais

A.1 Leis de Equivalência

$$\text{Idempotência (ID): } \begin{cases} A \equiv A \wedge A \\ A \equiv A \vee A \end{cases}$$

$$\text{Equivalências com tautologias (ET): } \begin{cases} A \vee \neg A \equiv V \\ A \wedge V \equiv A \end{cases}$$

$$\text{Equivalências com contradições (EC): } \begin{cases} A \wedge \neg A \equiv F \\ A \vee F \equiv A \end{cases}$$

$$\text{Conjunção (CONJ): } A, B \equiv A \wedge B$$

$$\text{Comutação (COM): } \begin{cases} A \wedge B \equiv B \wedge A \\ A \vee B \equiv B \vee A \end{cases}$$

$$\text{Associação (ASSOC): } \begin{cases} A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C \\ A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C \end{cases}$$

$$\text{Distribuição (DIST): } \begin{cases} A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{cases}$$

$$\text{Dupla Negação (DN): } \neg\neg A \equiv A$$

$$\text{De Morgan (DM): } \begin{cases} \neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \\ \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \end{cases}$$

Condicional (COND): $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

Contraposição (CP): $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$

Exportação-Importação (EI): $(A \wedge B) \rightarrow C \equiv A \rightarrow (B \rightarrow C)$

Bicondicional (BICOND):
$$\begin{cases} A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \\ A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \\ A \leftrightarrow B \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) \end{cases}$$

A.2 Regras de Inferência

Adição (AD): $A \models A \vee B$

Simplificação (SIMP):
$$\begin{cases} A \wedge B \models A \\ A \wedge B \models B \end{cases}$$

Simplificação Disjuntiva (SIMPD): $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \models A$

Absorção (ABS): $A \rightarrow B \models A \rightarrow (A \wedge B)$

Modus Ponens (MP): $(A \rightarrow B), A \models B$

Modus Tollens (MT): $(A \rightarrow B), \neg B \models \neg A$

Silogismo Disjuntivo (SD):
$$\begin{cases} (A \vee B), \neg A \models B \\ (A \vee B), \neg B \models A \end{cases}$$

Silogismo Hipotético (SH): $(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \models (A \rightarrow C)$

Dilema Construtivo (DC): $(A \rightarrow B), (C \rightarrow D), (A \vee C) \models (B \vee D)$

Dilema Destrutivo (DD): $(A \rightarrow B), (C \rightarrow D), (\neg B \vee \neg D) \models (\neg A \vee \neg C)$

A.3 Equivalências e Inferências com Quantificadores

Equivalências

$$\text{De Morgan (DM): } \begin{cases} \neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \\ \neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x) \end{cases}$$

$$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$$

$$\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

Inferências

Instanciação Universal (IU) (Eliminação do \forall): $\forall x P(x) \models P(x/t)$

Generalização Universal (GU) (Introdução do \forall): $P(t) \models \forall x P(x)$, onde t é um objeto arbitrariamente escolhido

Generalização Existencial (GE) (Introdução do \exists): $P(t) \models \exists x P(x)$

Instanciação Existencial (IE) (Eliminação de \exists): $\exists x P(x) \models P(x/t)$

Referências Bibliográficas

- [1] ABE, J. M., SCALZITTI, A., SILVA FILHO, J. A. I. D., *Introdução à Lógica para a Ciência da Computação*. São Paulo, Ed. Arte & Ciência, 2001.
- [2] ALENCAR FILHO, E., *Iniciação à Lógica Matemática*. São Paulo, Ed. Nobel, 1995.
- [3] COPI, I. M., *Introdução à Lógica*. 3 ed. São Paulo, Ed. Mestre Jou, 1981.
- [4] DAGHLIAN, J., *Lógica e Álgebra de Boole*. 4 ed. São Paulo, Ed. Atlas, 1995.
- [5] PINHO, A. D. A., “Introdução à Lógica Matemática”. Apostila de aula (registro MEC 191240), Rio de Janeiro, 1999.
- [6] SILVA, F. S. C. D., FINGER, M., MELO, A. C. V. D., *Lógica para Computação*. São Paulo, Ed. Cengage Learning, 2006.
- [7] SOUZA, J. N. D., *Lógica para Ciência da Computação*. 2 ed. Rio de Janeiro, Ed. Elsevier, 2008.

Índice Remissivo

- abertos, 50, 57
- argumento, 33
 - dedutivo, 5
 - indutivo, 5
 - inválido, 4, 34
 - válido, 4, 34
- bicondicional, 22
- Cálculo de Predicados, 6
- Cálculo Proposicional, 6
- cláusulas, 75
- condicional, 21
 - proposição associada (contrapositiva, recíproca e inversa), 27
- conectivos, 10
- conjunção, 19
- conjunto-universo, 51
- conjunto-verdade, 51
- Dedução da Condicional, 40
- Dedução por Absurdo, 45
- demonstração por absurdo, 81
- disjunção, 20
- equivalência lógica, 26
- escopo, 59
- expressão
 - contingência, 26
 - contradição (insatisfatível), 26
 - inválida, 26
 - satisfatível, 25
 - tautologia (válida), 25
- fórmula, 16
 - atômica, átomo, 66
 - fórmula bem formada, fbf, 66
- falácia, 4
- fechados, 50
- Formas normais
 - Forma normal conjuntiva (FNC), 28
 - Forma normal disjuntiva (FND), 30
- instanciação, 51
- interpretação, 24
- Lógica
 - Clássica, 6
 - de Primeira Ordem, 7
 - de Segunda Ordem, 7
 - Formal, 4, 7
 - Matemática, 6
 - Não-Clássica, 8
 - Simbólica, 6
- letra sentencial, 9
- meta-variável, 16

- negação, 19
- notação infixa, 64

- predicado, 6, 49
- Princípio de Indução Matemática, 7
- proposição, enunciado, sentença, 6, 50
 - composta, molecular, 10
 - simples, atômica, 9
 - singular, 6, 50, 56

- quantificador, 6
 - existencial, 56
 - universal, 56

- relação, 51
- Resolução, 75
 - por Refutação, 81

- símbolos funcionais, funções, 64
- silogismo, 36
- Skolemização*, 77
- sofisma, 4

- termo, 50

- unificação, 78

- valor lógico, 18
- variável, 6, 50
 - ligada, 57
 - livre, 57