

Trabalho Final de Pesquisa Operacional

Problema da Mochila (Knapsack)

Bernardo Buhr Alves Mendonça

Danilo Ramos Costa

Felipe Gurgel Araujo

Pedro Francisco Staino Santayana

Centro Universitário Dom Helder

Dezembro 2025

Sumário

- 1 Introdução e Descrição do Problema
- 2 Modelo Matemático
- 3 Dados e Implementação
- 4 Resultados e Comparação
- 5 Análise de Sensibilidade
- 6 Interpretação Gerencial
- 7 Conclusão

Contexto do Trabalho

Objetivo da Disciplina

Desenvolver um modelo de Programação Linear (PL, PLI ou PLIM) para um problema real, implementar computacionalmente e analisar resultados com interpretação gerencial.

Tema Escolhido

Problema da Mochila (Knapsack Problem) - Tema 5 da lista sugerida

Requisitos Atendidos

- Modelo: Programação Linear Inteira Binária
- 10 itens com pesos e valores distintos
- Comparação de resultados variando a capacidade
- Análise de sensibilidade e interpretação gerencial

Descrição do Problema Real

- **Contexto:** Empresas de transporte leve, mensageiros ou equipes de campo precisam selecionar itens para transporte com capacidade limitada
- **Decisão:** Quais itens incluir na mochila para maximizar o valor total
- **Restrição:** Capacidade máxima de peso não pode ser excedida

Formulação do Problema

Para cada item i :

- v_i : valor (benefício, lucro)
- p_i : peso (ocupação, custo)
- x_i : decisão binária ($1 =$ levar, $0 =$ não levar)

Programação Linear Inteira Binária (PLI)

Justificativa:

- Variáveis de decisão assumem valores 0 ou 1 (item selecionado ou não)
- Função objetivo e restrições são lineares
- Adequado para problemas de seleção discreta
- Não há necessidade de variáveis contínuas ou mistas

Variáveis de Decisão

Para cada item $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o item } i \text{ for selecionado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- 10 variáveis binárias no total
- Cada x_i representa uma decisão de transporte

Parâmetros do Modelo

- v_i : valor do item i (R\$)
- p_i : peso do item i (kg)
- C : capacidade máxima da mochila (kg)

Capacidades Analisadas

- **Cenário A:** $C = 15$ kg
- **Cenário B:** $C = 18$ kg

Formulação Matemática Completa

Função Objetivo

$$\max Z = \sum_{i=1}^{10} v_i x_i$$

Maximizar o valor total dos itens transportados

Restrições

- **Capacidade:** $\sum_{i=1}^{10} p_i x_i \leq C$
- **Binariedade:** $x_i \in \{0, 1\}, \forall i \in \{1, \dots, 10\}$

Tabela de Itens - Dados do Problema

Item	Peso (kg)	Valor (R\$)	Razão V/P
1	3	24	8,00
2	2	13	6,50
3	4	28	7,00
4	1	6	6,00
5	5	33	6,60
6	2	14	7,00
7	6	40	6,67
8	3	19	6,33
9	7	45	6,43
10	4	26	6,50

Itens ordenados pela razão Valor/Peso (eficiência)

Ferramenta Utilizada

Excel Solver - Adequado para problemas de PLI de pequeno porte

Configuração do Solver

- **Objetivo:** Maximizar célula de valor total
- **Variáveis:** Intervalo das células binárias (x a x)
- **Restrições:**
 - Peso total Capacidade
 - Variáveis = binário
- **Método:** Simplex LP

Cenário A — Capacidade 15 kg

Solução Ótima

Itens selecionados: 1, 3, 6, 7

Item	Peso	Valor
1	3	24
3	4	28
6	2	14
7	6	40
Total	15	106

- Capacidade totalmente utilizada (15/15 kg)
- Valor total: R\$ 106,00
- Solução factível e ótima comprovada pelo Solver

Cenário B — Capacidade 18 kg

Solução Ótima

Itens selecionados: 1, 3, 5, 7

Item	Peso	Valor
1	3	24
3	4	28
5	5	33
7	6	40
Total	18	125

- Capacidade totalmente utilizada (18/18 kg)
- Valor total: R\$ 125,00
- Substituição do item 6 pelo item 5 (mais valioso)

Comparação Entre Cenários

Cenário	Capacidade	Valor Máximo	Itens Selecionados
A	15 kg	R\$ 106	1, 3, 6, 7
B	18 kg	R\$ 125	1, 3, 5, 7
Variação	+17,9%		Substituição: 6 → 5

Análise da Comparação

- Aumento de 20% na capacidade ($15 \rightarrow 18$ kg) gera aumento de 17,9% no valor
- Item 6 (2kg, R\$14) substituído pelo item 5 (5kg, R\$33)
- Ganho líquido: +3kg de capacidade \rightarrow +R\$19 de valor

Sensibilidade — Capacidade da Mochila

Conceito

Analisar como mudanças na capacidade afetam a solução ótima

Resultados Observados

- **Ponto de virada:** Pequenas mudanças na capacidade podem alterar completamente a seleção de itens
- **Exemplo:** Aumento de 15kg para 18kg muda a solução ótima
- **Impacto real:** +3kg (20%) → +R\$19 (17,9%) no valor

Interpretação Gerencial

Investir em maior capacidade pode ser altamente lucrativo quando permite incluir itens de alto valor

Comportamento Observado

- **Itens leves e valiosos:** Extremamente sensíveis
 - Pequenos aumentos (ex: +5%) podem colocá-los no topo da lista
 - Alta razão valor/peso = maior sensibilidade
- **Itens pesados:** Menos sensíveis
 - Precisam de aumentos maiores (ex: +25%) para entrar na solução
 - Baixa razão valor/peso = menor sensibilidade

Exemplo Prático

- Item leve (2kg, R\$30→R\$33): razão 15→16,5 → sobe no ranking
- Item pesado (10kg, R\$40→R\$48): razão 4→4,8 → ainda não compensa

Interpretação Gerencial - Conceito

O que é?

Transformar resultados matemáticos em decisões reais para áreas como:

- Logística e transporte
- Alocação de recursos
- Priorização de produtos
- Planejamento operacional

Importância

Evitar decisões baseadas em "achismo" e substituir por:

- Decisões racionais
- Soluções otimizadas
- Resultados repetíveis

Recomendações Gerenciais

1. Priorização Estratégica

- Itens com maior valor por peso devem ser priorizados
- Entregam maior retorno por unidade de capacidade
- Pequenos aumentos de eficiência geram grandes ganhos

2. Gestão de Capacidade

- Avaliar custo-benefício de aumentar capacidade vs. otimizar itens atuais
- Exemplo: +3kg de capacidade → +33% no valor total
- Investimento baixo pode ter retorno alto

Aplicação de Trade-offs

Conceito de Trade-off

Trocar um item por outro para aumentar o valor total usando o mesmo peso

Exemplo Prático

- **Remover:** Item B (8kg, R\$20)
- **Adicionar:** Itens D + E (total 8kg, R\$35)
- **Ganho:** +75% de valor usando o mesmo peso

Benefício do Modelo

Mostra o custo real de cada escolha, evitando decisões intuitivas e imprecisas

Conclusões do Trabalho

Adequação do Modelo

- PLI binária mostrou-se perfeita para o problema da mochila
- Modelo simples, eficiente e alinhado aos conceitos de PO
- Solução implementável com ferramentas acessíveis (Excel Solver)

Resultados Obtidos

- Solução ótima depende criticamente da capacidade disponível
- Análise de sensibilidade identificou parâmetros-chave
- Interpretação gerencial fornece insights açãoáveis

Contribuições e Aprendizados

Para a Organização

- Metodologia para otimização de cargas sob restrição
- Ferramental para avaliação de trade-offs operacionais
- Base para decisões de investimento em capacidade

Para a Formação Acadêmica

- Aplicação prática de conceitos de Programação Linear
- Desenvolvimento de modelo matemático para problema real
- Análise crítica de resultados e sensibilidade
- Comunicação de insights gerenciais

Obrigado!

Perguntas?