1º Médio – 2022

Professor Sérgio Saragioto

1

Fatorial de um número natural

Dado um número natural n, definimos o fatorial de n (indicado por n!) através das relações:

1) $n! = n.(n-1).(n-2). \dots .3.2.1$ para $n \geq 2$.
2) Se $n = 1$, $1! = 1$.
3) Se $n = 0$, $0! = 1$.

Exemplos:

a) $3! = 3.2.1 = 6$
b) $5! = 5.4.3.2.1 = 120$
c) $2! = 2.1 = 2$

Exercícios:

1) Calcule:

a) $7!$

b) $4! + 3!$

c) $7! - 5!$

d) $5 + 4!$

e) $6! - 20$

ETEC ZL - ENSINO MÉDIO- MATEMÁTICA

Exercícios:

1) Calcule:

a) 7! = 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 5040

b) 4! + 3! = 4 . 3 . 2 . 1 + 3 . 2 . 1 = 24 + 6 = 30

c) 7! – 5! = 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 - 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 5040 -120 = 4920

d) 5 + 4! = 5 + 24 = 29

e) 6! – 20 = 720 – 20 = 700

f) 5! + 3! = 5. 4 . 3! + 3 ! = 3!(20 + 1) = 3! . 21 = 6 . 21 = 126

Prof. Cláudia Vecchio / Sérgio Saragioto

ETEC ZL - ENSINO MÉDIO- MATEMÁTICA

Exercícios resolvido

$$\frac{8!+7!}{6!}$$

$$\frac{8.7.6! + 7.6!}{6!}$$

$$\frac{6!(56+7)}{6!}$$

63

$$\frac{8!+7!}{6!}$$

$$\frac{8.7.6! + 7.6!}{6!}$$

$$\frac{8.7.\cancel{6}!}{\cancel{6}!} + \frac{7.\cancel{6}!}{\cancel{6}!}$$

56 + 7

63

$$\frac{7!+5!}{5!}$$

$$\frac{7.6.5! + 5!}{5!}$$

$$\frac{7.6.\cancel{5}!}{\cancel{5}!} + \frac{\cancel{5!}}{\cancel{5}!}$$

7 . 6 + 1

43

Prof. Cláudia Vecchio / Sérgio Saragioto

6

Decomposição de números fatoriais

7! = 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 5040

7! = 7 . 6! = 5040

7! = 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 5040

7! = 7 . 6 . **5!** = 5040

7! = 7 . 6 . **5 . 4 . 3 . 2 . 1** = 5040

7! = 7 . 6 . 5 **. 4!** = 5040

7! = 7 . 6 . 5 . 4 . 3! = 5040

7! = 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2! = 5040

Prof. Cláudia Vecchio / Sérgio Saragiato

Exercícios:

1) Calcule:

$a)\ \frac{6!}{5!} =$

c) $\frac{6! - 5!}{5!} =$

$b)\ \frac{4!}{6!} =$

d) $\frac{10! + 9!}{11!} =$

c) $\frac{3.\ 2!}{6!} =$

f) $\frac{7!}{6!} + \frac{6!}{7!}$:

Prof. Cláudia Vecchio / Sérgio Saragiato

Por que 0! =1?

Dado um número natural n, definimos o fatorial de n (indicado por n!) através das relações:

n! = n. (n – 1)!

$\frac{n!}{n}$ = (n – 1)!

n! = n. (n – 1)!

5! = 5 . 4 . 3 .2 . 1

5! = 5 . 4!

$\frac{5!}{5} = 4! = 24$

n! = n. (n – 1)!

4! = 4 . 3 . 2 . 1 = 24

4! = 4 . 3!

$\frac{4!}{4}$ = 3! = 3 . 2 . 1 = 6

n! = n. (n – 1)!

3! = 3 . 2 . 1 = 6

3! = 3 . 2!

$\frac{3!}{3}$ = 2! = 2 . 1 = 2

n! = n. (n – 1)!

2! = 2 . 1! = 2

2! = 2 . 1!

$\frac{2!}{2}$ = 1! = 1

n! = n. (n – 1)!

$\frac{n!}{n}$ = **(n – 1)!**

$\frac{1!}{1}$ = **(1 – 1)!**

1 = 0!

Prof. Cláudia Vecchio / Sérgio Saragioto

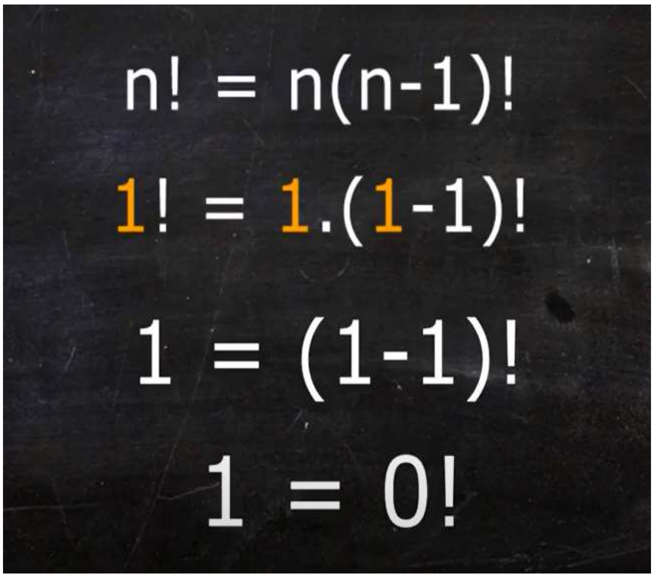
Por que 0! = 1

5! = 5 . 4 . 3 .2 . 1

5! = 5 . 4!

Logo:

n! = n. (n – 1)!



Prof. Cláudia Vecchio / Sérgio Saragioto

Exercícios:

Desenvolva os fatoriais seguintes

I) $$\frac{(\boldsymbol{n}+\mathbf{2})!}{(\boldsymbol{n}+\mathbf{3})!}$$

$$\frac{(n+2)\,.\,(n+1)\,.\,n}{(n+3)\,.\,(n+2).\ \ (n+1)\,.\ \ n}$$

$$\frac{\cancel{(n+2)\,.\,(n+1).\,n}}{(n+3)\,.\cancel{(n+2).\ \ (n+1)\,.\,n}}$$

$$\frac{1}{(n+3)}$$

II) $$\frac{(\boldsymbol{n}+\mathbf{2})!}{(\boldsymbol{n}+\mathbf{3})!}$$

$$\frac{(n+2)!}{(n+3)\,.\,(n+2)!}$$

$$\frac{\cancel{(n+2)!}}{(n+3)\,.\cancel{(n+2)!}}$$

$$\frac{1}{(n+3)}$$

ETEC ZL - ENSINO MÉDIO- MATEMÁTICA

Exercícios:

Desenvolva os fatoriais seguintes

I) $$\frac{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})!}{(\boldsymbol{n}+\mathbf{3})!}$$

$$\frac{(n+1)\,.\,n}{(n+3)\,.(n+2).\ \ (n+1)\,.\ n}$$

$$\frac{\cancel{(n+1)\,.\ n}}{(n+3)\,.(n+2).\ \ \cancel{(n+1)\,.\ n}}$$

$$\frac{1}{(n+3).(n+2)}$$

$$\frac{1}{n^2+2n+3n+6}$$

$$\frac{1}{n^2+5n+6}$$

II) $$\frac{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})!}{(\boldsymbol{n}+\mathbf{3})!}$$

$$\frac{(n+1)!}{(n+3)\,.(n+2).\ \ (n+1)\,.\ n}$$

$$\frac{\cancel{(n+1)!}}{(n+3)\,.(n+2).\ \ \cancel{(n+1)!}}$$

$$\frac{1}{(n+3).(n+2)}$$

$$\frac{1}{n^2+2n+3n+6}$$

$$\frac{1}{n^2+5n+6}$$

Princípio Fundamental da Contagem

(PFC)

Magali avistou dois carrinhos de comida e se aproximou, os vendedores rapidamente informaram a ela as seguintes opções:

O primeiro ofereceu:

- hot dog simples
- hot dog completo,

O segundo sugeriu sorvete de:

- chocolate,
- flocos
- morango.

Magali, entretanto, surpreendeu os vendedores, informando-lhes que acabara de almoçar e estava sem fome. Iria apenas “forrar o estômago”, servindo-se de um sanduíche e de uma bola de sorvete.

De quantos modos distintos Magali pôde fazer sua “refeição”?

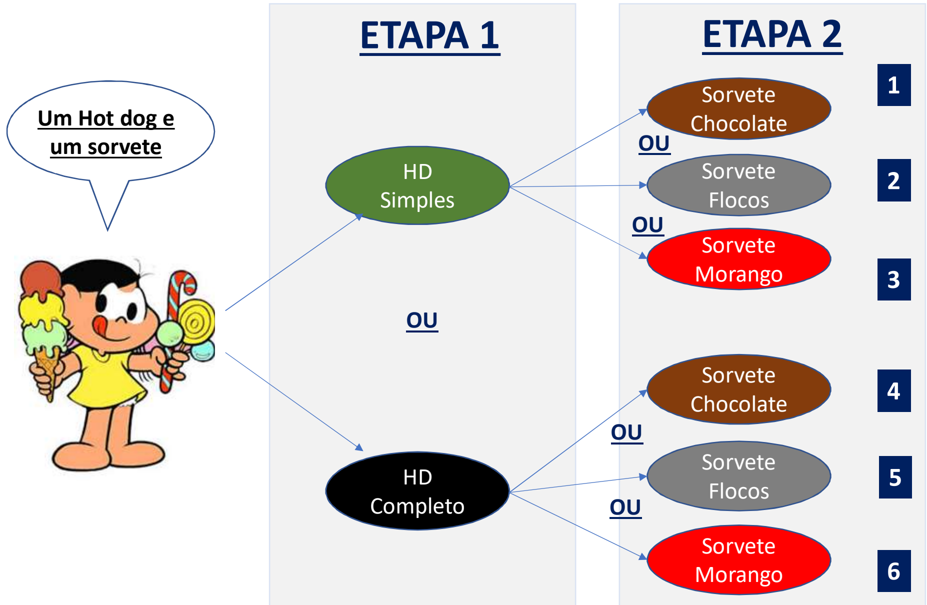
De quantos modos distintos Magali pôde fazer sua “refeição”?

De acordo com o problema, podemos ter as seguintes refeições
:

refeição 1: **hot dog simples** e sorvete de chocolate;
refeição 2: **hot dog simples** e sorvete de flocos;
refeição 3: **hot dog simples** e sorvete de morango;

refeição 4: **hot dog completo** e sorvete de chocolate;
refeição 5: **hot dog completo** e sorvete de flocos;
refeição 6: **hot dog completo** e sorvete de morango.

Prof. Cláudia Vecchio / Sérgio Saragioto



Prof. Cláudia Vecchio / Sérgio Saragioto

Notemos que fazer uma refeição completa representa uma ação constituída de duas etapas sucessivas.

A primeira é a escolha do tipo de hot dog: há duas possibilidades de fazer tal escolha.

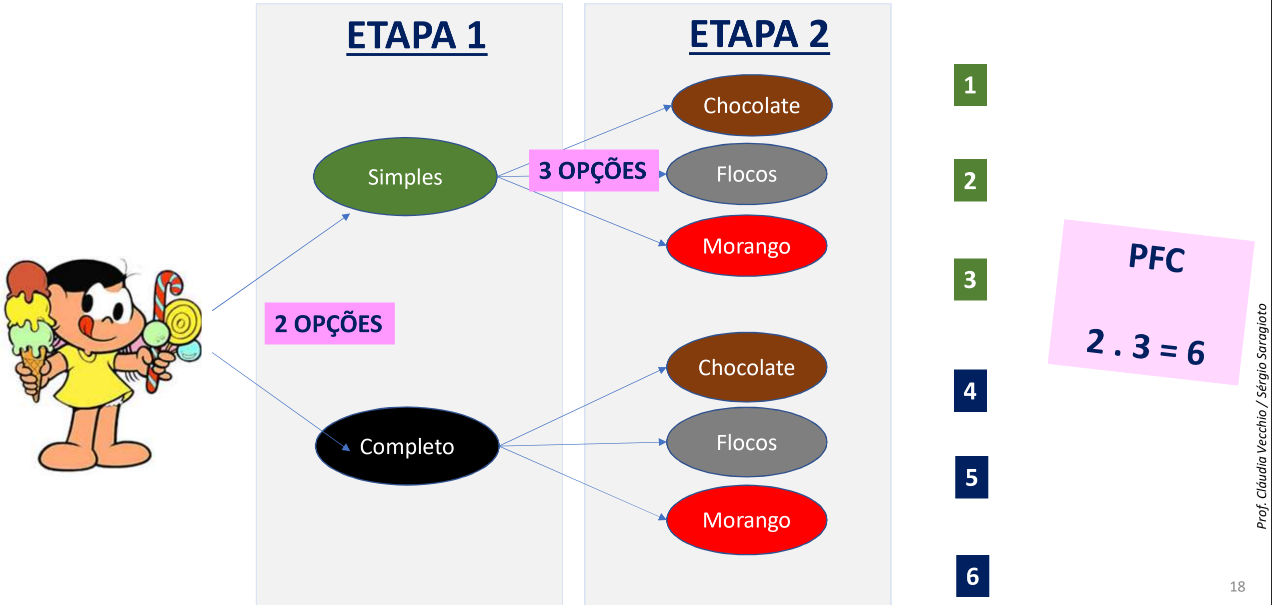
A segunda é a escolha do sabor do sorvete: para cada uma das possibilidades anteriores, há três maneiras de escolher o sabor da bola de sorvete.

Assim, a realização da ação (duas etapas sucessivas) pode ser feita de

$$2 \times 3 = 6 \text{ maneiras distintas.}$$

Prof. Cláudia Vecchio / Sérgio Saragioto

ETEC ZL - ENSINO MÉDIO- MATEMÁTICA



Prof. Cláudia Vecchio / Sérgio Saragioto

Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Suponhamos que uma ação seja constituída de duas etapas sucessivas.

A 1ª etapa pode ser realizada de n maneiras distintas. Para cada uma dessas possibilidades,

A 2ª etapa pode ser realizada de m maneiras distintas.

Então, o número de possibilidades de efetuar a ação completa é dado por n x m.

Este princípio pode ser generalizado para ações constituídas de mais de duas etapas sucessivas.

ETEC ZL - ENSINO MÉDIO- MATEMÁTICA

Exemplo I

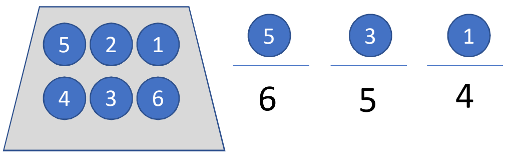
1) Com os algarismos 1, 2,3,4, 5 e 6, quantos números de três algarismos distintos podemos formar?

Formar um número de três algarismos pode ser considerada uma ação constituída de três etapas sucessivas, a saber:

1ª) escolha do algarismo das centenas: temos seis possibilidades;

2ª) escolha do algarismo das dezenas: como não pode haver repetição de algarismo, devemos ter um algarismo diferente do algarismo escolhido para a centena. Assim, há cinco possibilidades;

3ª) escolha do algarismo das unidades: devemos ter um algarismo diferente dos dois anteriores (centena e dezena). Assim, há apenas quatro possibilidades.



Pelo PFC,

o resultado procurado é
6 x 5 x 4 = 120 números.

Simplificando a linguagem, podemos usar a notação:
6 . 5 . 4 = 120

ETEC ZL - ENSINO MÉDIO- MATEMÁTICA

Exemplo II

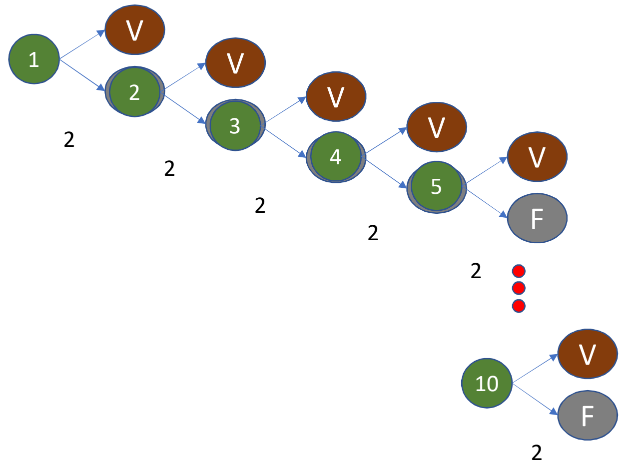
2) Uma prova consta de 10 questões do tipo V ou F. De quantas maneiras distintas ela pode ser resolvida?

Resolver a prova representa uma ação constituída de 10 etapas sucessivas, que correspondem à resolução das 10 questões propostas.

Para cada questão, há duas possibilidades de escolha de resposta V ou F.

$2 \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} = 1024$

possibilidades ou $2^{10} = 1024$



Prof. Cláudia Vecchio / Sérgio Saragioto

21

ETEC ZL - ENSINO MÉDIO- MATEMÁTICA

Exemplo III

3) Quantos números de três algarismos podemos formar com os algarismos **0, 1, 9, 8, 4, 5, 6 e 7?**

-algarismo das centenas: com exceção do zero, qualquer um dos algarismos dados pode ser escolhido, havendo então, sete possibilidades.

-algarismo das dezenas: não há restrição alguma, pois pode haver repetição de algarismos. Assim, há oito possibilidades;

-algarismo das unidades: analogamente ao anterior há oito possibilidades.

-Logo, pelo PFC, o total de números é $7 \times 8 \times 8 = 448$

0, 9, 8, 3, 4, 5, 6, 7

~~0~~, 9, 8, 3, 4, 5, 6, 7 7 8 8 0, 9, 8, 3, 4, 5, 6, 7

Prof. Cláudia Vecchio / Sérgio Saragioto

22

ETEC ZL - ENSINO MÉDIO- MATEMÁTICA

Exemplo III

4) Quantos números ímpares de três **ALGARISMOS DISTINTOS** podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?

Lembrando que um número é ímpar quando termina por algarismo ímpar, vamos começar o problema analisando o algarismo da unidade:

-algarismo das unidades: há quatro possibilidades de escolha (1, 3, 5 ou 7)

-algarismo das centenas: há seis possibilidades – devemos excluir o zero e o algarismo escolhido para as unidades;

-algarismo das dezenas: há seis possibilidade – devemos escolher um algarismo diferente dos algarismos escolhidos para centena e unidade.

Assim, temos: 6. 6. 4 = 144 números

0, ~~1~~, 2, 3, ~~4~~, 5, 6, 7

4 0 1

~~0~~, ~~1~~, 2, 3, 4, 5, 6, 7 — 6 6 4 — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Prof. Cláudia Vecchio / Sérgio Saragioto

23

ETEC ZL - ENSINO MÉDIO- MATEMÁTICA

Exercícios:

1) Para ir ao clube, Júnior deseja usar uma camiseta, uma bermuda e um par de tênis. Sabendo que ele dispõe de seis camiseta, quatro bermudas e três pares de tênis, responda: de quantas maneira distintas poderá vestir-se?

2) Um jantar constará de três partes: entrada, prato principal e sobremesa. De quantas maneiras distintas ele poderá ser composto, se há como opção oito entradas, cinco pratos principais e quatro sobremesas?

3) O vagão de um trem possui seis portas. De quantas maneiras distintas um passageiro pode entrar no trem e sair dele por uma porta diferente da que usou para entrar?

4) Com os algarismos 1, 2, 4, 6, 8 e 9:

a) quantos números de quatro algarismos podemos formar?

b) quantos números de quatro algarismos distintos podemos formar?

5) Com os algarismos 2, 3, 4, 5, 6 e 7:

a) quantos números de quatro algarismos distintos podemos formar começando por 3?

b) quantos números pares de quatro algarismos distintos podemos formar?

6) Quantos números de três algarismos distintos existem?

7) Deseja-se formar números divisíveis por 5, compostos de quatro algarismos distintos.

Quantas são as possibilidades dispondo-se dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6? (sugestão: analise dois casos: quando o número termina por zero e quando ele termina por 5).

8) Com os algarismos de 0 a 9, quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar?

9) Com os algarismos 1, 2, ... 9 formam-se números de quatro algarismos distintos. Quantos são maiores que 4 326?

10) Um ladrão sabe que o segredo de um cofre é formado por uma sequência de três algarismos distintos. Além disso, ele sabe que o algarismo das centenas é igual a 4. Se em média, o ladrão leva três minutos para testar uma possível sequência, qual o tempo máximo para o ladrão abrir o cofre?

Prof. Cláudia Vecchio / Sérgio Saragioto

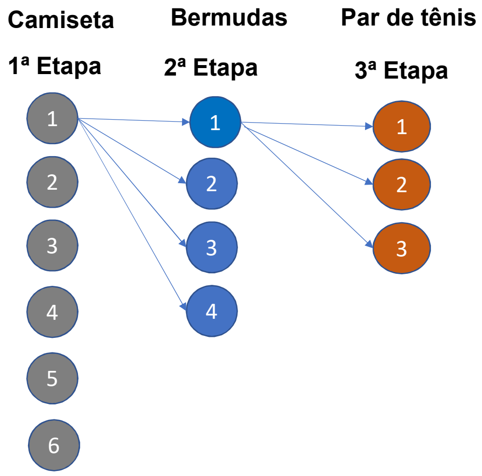
24

1° Exercício - correção

1) Para ir ao clube, Júnior deseja usar uma camiseta, uma bermuda e um par de tênis. Sabendo que ele dispõe de seis camisetas, quatro bermudas e três pares de tênis, responda: de quantas maneira distintas poderá vestir-se?

6 camisetas,
4 bermudas
3 pares de tênis

6. 4. 3 = 72 maneiras

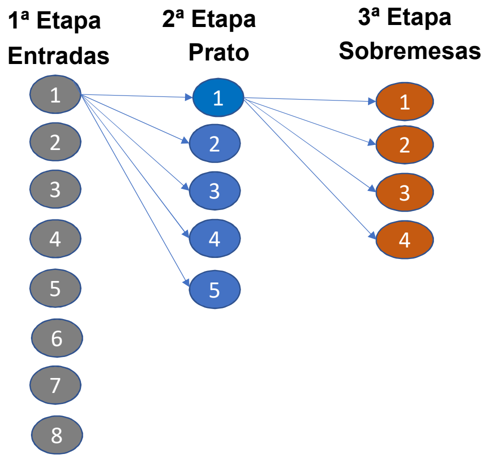


2° Exercício - correção

2) Um jantar constará de três partes: entrada, prato principal e sobremesa. De quantas maneiras distintas ele poderá ser composto, se há como opção oito entradas, cinco pratos principais e quatro sobremesas?

8 entradas,
5 pratos
4 sobremesas

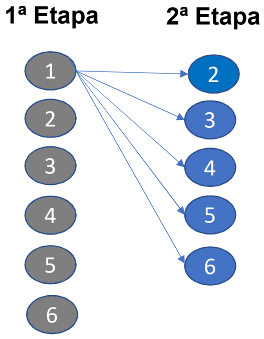
8. 5. 4 = 160 maneiras



3° Exercício - correção

3) O vagão de um trem possui seis portas. De quantas maneiras distintas um passageiro pode entrar no trem e sair dele por uma porta diferente da que usou para entrar?

$\underline{6} . \underline{5} = 30$ maneiras



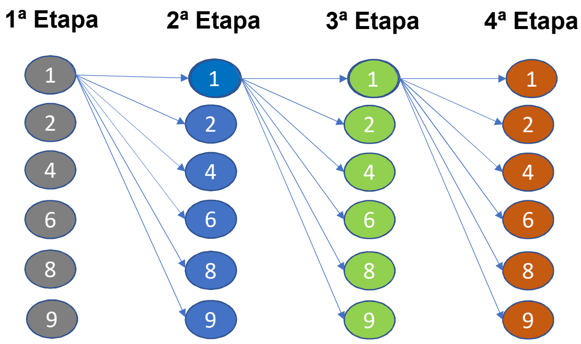
Prof. Cláudia Vecchio / Sérgio Saragioto

4° Exercício - correção

4) Com os algarismos 1, 2, 4, 6, 8 e 9:

a) quantos números de quatro algarismos podemos formar?

$\underline{6} . \underline{6} . \underline{6} . \underline{6} = 1296$ números



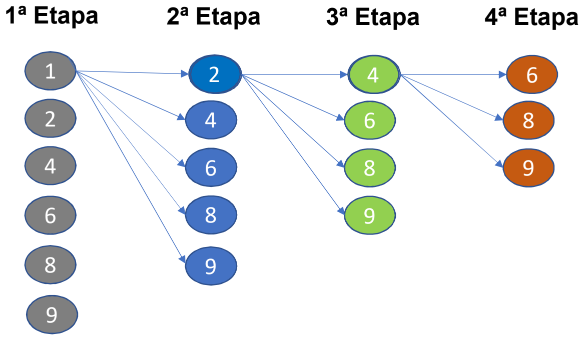
Prof. Cláudia Vecchio / Sérgio Saragioto

4° Exercício - correção

4) Com os algarismos 1, 2, 4, 6, 8 e 9:

b) quantos números de quatro **ALGARISMOS DISTINTOS** podemos formar?

1, 2, 4, 6, 8 e 9



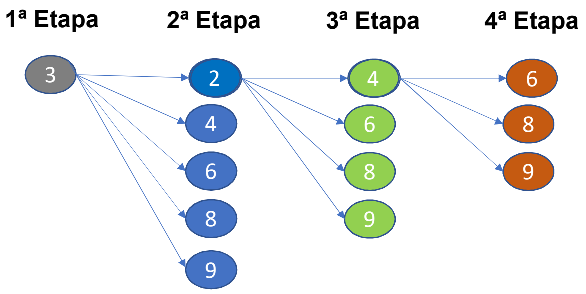
6 . 5 . 4 . 3 = 360 números

ETEC ZL - ENSINO MÉDIO- MATEMÁTICA

5° Exercício - correção

5) Com os algarismos 2, 3, 4, 5, 6 e 7:

a) quantos números de quatro **algarismos distintos** podemos formar começando por 3?



1 . 5 . 4 . 3 = 60 números

Prof. Cláudia Vecchio / Sérgio Saragioto

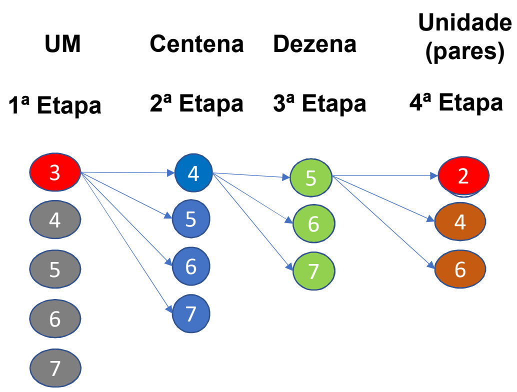
5° Exercício - correção

5) Com os algarismos 2, 3, 4, 5, 6 e 7:

b) quantos números pares de quatro **ALGARISMOS DISTINTOS** podemos formar?

2, 3, 4, 5, 6 e 7

5 . 4 . 3 . 3 = 180 números



Prof. Cláudia Vecchio / Sérgio Saragioto

6° Exercício - correção

6) Quantos números de três algarismos **distintos** existem?

0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

9 . 9 . 8 = 648 números

Na centena não poderemos considerar o algarismo 0, pois o uso do zero fará que o numero se torne dezena

1ª Etapa 9 algarismos Restrição ao zero Imagine adotarmos o valor 5	2ª Etapa 9 algarismos (Exceto o 5) Imagine adotarmos o valor 7	3ª Etapa 8 algarismos (Exceto o 5 e 7) Imagine adotarmos o valor 9
~~0~~	0	0
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	~~5~~	~~5~~
6	6	6
7	7	7
8	8	8
9	9	9

Prof. Cláudia Vecchio / Sérgio Saragioto

7° Exercício - correção

7) Deseja-se formar números divisíveis por 5, compostos de quatro algarismos distintos.

Quantas são as possibilidades dispondo-se dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6? (sugestão: analise dois casos: quando o número termina por zero e quando ele termina por 5).

0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6

ATENÇÃO:

Só ZERO tem restrições em duas posições diferentes

- Uma na ordem unidade
- Outra na ordem milhar

Final 5 5 . 5 . 4 . 1 = 100

Final zero 6 . 5 . 4 . 1 = 120

Final 5 e Final zero

100 + 120 = 220 números

5	M	C	D	U	
	1	0		5	
Quantidade	5	5	4	1	100
POSSIBIILDADE	1,2,3,4,6	0,2,3,4,6	2,3,4,6	só 5	
RESTRIÇÃO	0 e U	M e U	M,C e U	0,1,2,3,4,6	

0	M	C	D	U	
	2	3		1	
Quantidade	6	5	4	1	120
POSSIBIILDADE	1,2,3,4,5,6	1 ,3,4,5,6	1,4,5,6	só 0	
RESTRIÇÃO	0 e U	M e U	M, C e U	1,2,3,4,5,6	
					220

Prof. Cláudia Vecchio / Sérgio Saragioto

33

8° Exercício - correção

8) Com os algarismos de 0 a 9, quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar?

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Atenção:

Só o ZERO tem duas restrições diferentes,

- **uma na ordem da unidade**
- **outra na ordem da centena**

Final (2, 4, 6, 8) 8 . 8 . 4 = 256

Final zero 9 . 8 . 1 = 72

Final (2, 4, 6, 8) e Final zero

256 + 72 = 328 números

2, 4 , 6 , 8	C	D	U	
Quantidade	8	8	4	256
POSSIBIILDADE			2,4,6,8	
RESTRIÇÃO	0 e 2		1,3,5,7,9	

0	C	D	U	
Quantidade	9	8	1	72
POSSIBIILDADE			0	
RESTRIÇÃO	0			
				328

Prof. Cláudia Vecchio / Sérgio Saragioto

34