Glava 1

Funkcije više promenljivih

1.1 Uvodni pojmovi

Neka je $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbb{R}$ sa uobičajenim operacijama sabiranja vektora i množenja vektora skalarom:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \quad \alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1,\ \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

za svako $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$.

• *Rastojanje* između tačaka $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ se izračunava kao

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\ .$$

• *Otvorena kugla* sa centrom u tački $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ i poluprečnikom ε je skup

$$K_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \varepsilon\}.$$

• Tačka $\mathbf{x} \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$, je *unutrašnja tačka* skupa D ako postoji otvorena kugla $K_\varepsilon(\mathbf{x})$ takva da je $K_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset D$.

• Tačka $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je *rubna tačka* skupa $D \subset \mathbb{R}^n$ ako svaka otvorena kugla $K_\varepsilon(\mathbf{x})$ sadrži tačke iz skupa D i iz skupa $\mathbb{R}^n \setminus D$. Skup rubnih tačaka zove se *rub* skupa D.

• Skup je $D \subset \mathbb{R}^n$ je *otvoren* ako je svaka tačka tog skupa unutrašnja tačka.

• Skup $U \subset \mathbb{R}^n$ je *okolina tačke* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ako postoji otvoren skup $D \subset \mathbb{R}^n$ takav da $\mathbf{x} \in D \subset U$.[1]

[1] Može se pokazati da je svaka otvorena kugla otvoren skup. Zato, ne umanjujući opštost, često pod okolinom tačke $\mathbf{x}$ smatramo otvorenu kuglu $K_\varepsilon(\mathbf{x})$.

• Skup je $D \subset \mathbb{R}^n$ je *zatvoren* ako je $\mathbb{R}^n \setminus D$ otvoren.

• Skup je $D \subset \mathbb{R}^n$ je *ograničen* ako postoji otvorena kugla $K_M(\mathbf{0})$ takva da je $D \subset K_M(\mathbf{0})$.

• Skup je $D \subset \mathbb{R}^n$ je *kompaktan* ako je zatvoren i ograničen.

• Pod pojmom *kriva* ili *put u* $\mathbb{R}^n$ podrazumeva se geometrijsko mesto tačaka $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ čije su koordinate definisane kao funkcije $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, koje su neprekidne na nekom segmentu $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. Tačke $\mathbf{x}(\alpha)$ i $\mathbf{x}(\beta)$ su početak i kraj krive redom.

• Skup je $D \subset \mathbb{R}^n$ je *povezan* ako se ne može predstaviti kao unija dva neprazna disjunktna otvorena skupa. Skup $D \subset \mathbb{R}^n$ je *put–povezan* ako za svake dve tačke $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ postoji kriva sa početkom u $\mathbf{x}$ i krajem u $\mathbf{y}$ koja cela pripada D. Ako je skup $D \subset \mathbb{R}^n$ otvoren, on je povezan ako i samo ako je put–povezan.

• Skup je $D \subset \mathbb{R}^n$ je *oblast* ako je otvoren i (put–)povezan.

• Elementima $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mogu da se pridruže njihovi vektori položaja $[x_1 \;\; x_2 \;\; \cdots \;\; x_n]^T$. Zbog obostrane jednoznačnosti pridruživanja, bez opasnosti od zabune, označavaćemo ih na isti način:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = [x_1 \;\; x_2 \;\; \cdots \;\; x_n]^T.$$

• Skalarni proizvod dva vektora definiše se i označava na sledeći način:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \; .$$

• Uobičajena euklidska norma (intenzitet) vektora $\mathbf{x}$ je

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \; ,$$

a ugao između njih je definisan sa

$$\cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{x}}{|\mathbf{x}| \; |\mathbf{y}|} \; .$$

• Vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ su *ortogonalni* ako je $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

1.2 Definicija, primeri i načini predstavljanja

Neka je $D \subset \mathbb{R}^n$. Funkcija $f : D \mapsto \mathbb{R}$, $z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, zove se *realna funkcija n realnih nezavisno promenljivih.* Ako domen D nije posebno opisan, pod oblašću definisanosti podrazumevaće se najobuhvatniji skup $D_f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}\}$.

Primer 1.2.1.

Funkcija dveju nezavisno promenljivih koja je eksplicitno zadata jednačinom $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ definisana je u svim tačkama $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ za koje važi $x^2 + y^2 \leq 1$. Geometrijski posmatrano u $Oxyz$ Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu, oblast definisanosti ove funkcije je krug u Oxy koordinatnoj ravni sa centrom u koordinatnom početku O i poluprečnikom 1, a tačke $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, gde je $z = f(x, y)$, pripadaju gornjoj polusferi sa centrom u koordinatnom početku O i poluprečnikom 1.

Primer 1.2.2.

U vremenskim prognozama često se uz temperaturu vazduha prikazuje i subjektivni osećaj temperature. On zavisi od trenutne temperature vazduha, relativne vlažnosti i brzine vetra. Na osnovu podataka dobijenih merenjem pri vlažnosti vazduha 80% u zimskom periodu, u sledećoj tabeli je subjektivni osećaj temperature predstavljen kao funkcija W koja zavisi od trenutne temperature T i brzine vetra v:

Brzina vetra (km/h)

Trenutna temperatura (°C) T \ v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	-1	-1	-2	-2	-3
0	-2	-3	-4	-5	-6	-6	-7	-8	-9	-9	-10
-5	-7	-9	-11	-12	-12	-13	-14	-15	-16	-16	-17
-10	-13	-15	-17	-18	-19	-20	-21	-22	-23	-23	-24
-15	-19	-21	-23	-24	-25	-26	-27	-29	-30	-30	-31
-20	-24	-27	-29	-30	-32	-33	-34	-35	-36	-37	-38
-25	-30	-33	-35	-37	-38	-39	-41	-42	-43	-44	-45
-30	-36	-39	-41	-43	-44	-46	-48	-49	-50	-51	-52
-35	-41	-45	-48	-49	-51	-52	-54	-56	-57	-58	-60
-40	-47	-51	-54	-56	-57	-59	-61	-63	-64	-65	-67

Primer 1.2.3.

Neka je $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \neq 0$ proizvoljan vektor iz $\mathbb{R}^n$. Funkcija

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n, \; \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

je linearna funkcija u skupu $\mathbb{R}^n$. Koristeći vektorsku reprezentaciju, ona se često predstavlja na sledeći način:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}.$$

Napomenimo da je linearna funkcija specijalni oblik afine funkcije $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + D \quad (D \in \mathbb{R})$. Kada naglasak nije na vektorskoj prirodi prostora $\mathbb{R}^n$, kao što je slučaj u matematičkoj analizi, često se ne pravi razlika između afine i linearne funkcije.

U daljem razmatranju pojmove vezane za funkcije više promenljivih uvodićemo uglavnom kroz primere funkcija koje zavise od dve ili tri nezavisno promenljive. Zato najpre uvodimo pojmove važne za njihovu geometrijsku interpretaciju.

Definicija 1.2.1.

Graf funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je skup

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_f\}.$$

Nivo-linije[a] funkcije $f(x, y)$ su krive u $\mathbb{R}^2$ definisane jednačinama

$$f(x, y) = c, \qquad (x, y) \in D_f,$$

gde je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta.
Nivo-površi[b] funkcije $f(x, y, z)$ su površi u $\mathbb{R}^3$ definisane jednačinama

$$f(x, y, z) = c, \qquad (x, y, z) \in D_f,$$

gde je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta.

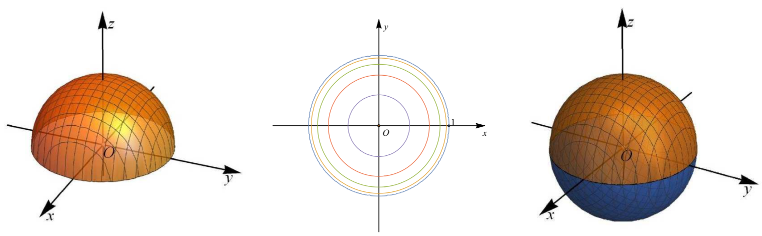
[a] level curves
[b] level surfaces

Za funkciju $f(x, y)$ definisanu u $D_f \subset \mathbb{R}^2$ graf predstavlja površ u prostoru $\mathbb{R}^3$, čija je jednačina $z = f(x, y)$. Grafovi funkcija tri i više nezavisno promenljivih nemaju geometrijsku interpretaciju.[2]

[2] Prateći geometrijske termine, jednačinom $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definisana je hiperpovrš u $\mathbb{R}^{n+1}$.

Primer 1.2.4.

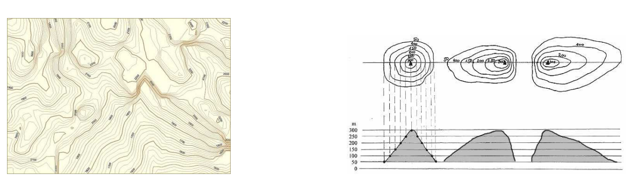
Za funkciju $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ iz Primera 1.2.1 graf i nivo-linije predstavljeni su na Slici 1.1.
Primetimo da je sfera čija je jednačina $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sastavljena od grafova dveju funkcija, $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ i $f_1(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Nivo-linije obeju funkcija su iste.



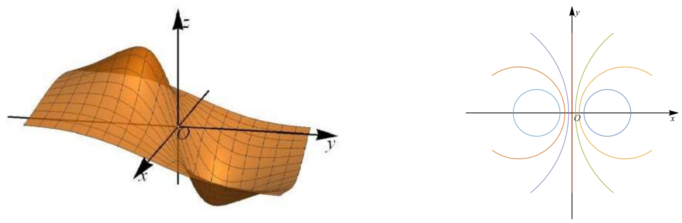
Slika 1.1: Graf i nivo-linije funkcije $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Primer 1.2.5.

Reprezentativni primer predstavljanja površi nivo-linijama su geografske karte reljefa, gde su izohipsama povezane tačke sa istom nadmorskom visinom (Slika 1.2). Primećuje se da je veća "gustina" nivo-linija neposredna posledica većeg nagiba površi. To je uočljivo i na Slici 1.3, gde su prikazani graf i nivo-linije funkcije $f(x, y) = \dfrac{-4x}{x^2 + y^2 + 1}$.



Slika 1.2: Izohipse



Slika 1.3: $f(x,y) = \dfrac{-4x}{x^2+y^2+1}$

Primer 1.2.6.

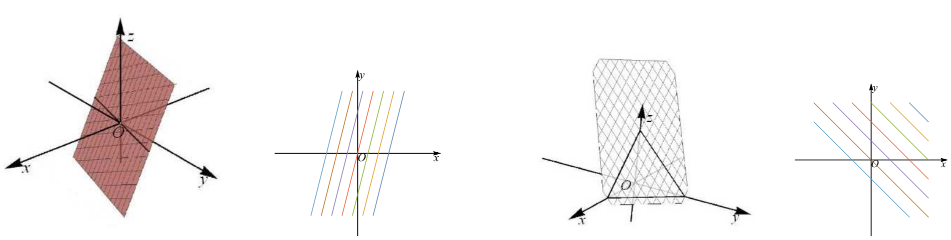
Graf linearne funkcije $f(x,y) = ax + by$, gde su $a, b \in \mathbb{R}$ konstante, predstavlja ravan u prostoru $\mathbb{R}^3$. Međutim, proizvoljna ravan u prostoru $\mathbb{R}^3$ ima jednačinu

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

i predstavlja graf afine funkcije. Za $C \neq 0$ ta afina funkcija je

$$z = f(x,y) = ax + by + c, \qquad a = -\frac{A}{C},\ b = -\frac{B}{C},\ c = -\frac{D}{C}.$$

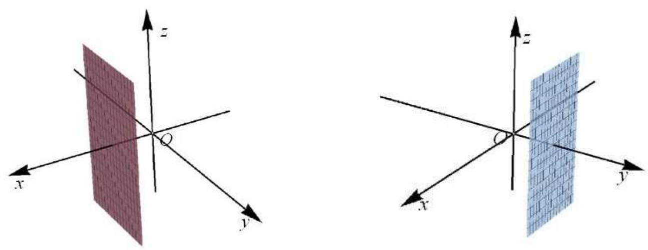
Na Slici 1.4 predstavljene su ravni $z = -2x + 0.5y$ (graf funkcije $f(x,y) = -2x + 0.5y$) i $x + y + z = 2$ (graf funkcije $f(x,y) = 2 - x - y$) i njihove nivo-linije $f(x,y) = c$ za $c \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$. Nivo-linije su paralelne prave na jednakom rastojanju, iz čega se vidi da je nagib konstantan.



Slika 1.4: Ravni $z = -2x + 0.5y$ i $x + y + z = 2$

Slika 1.5 prikazuje ravni koje nisu grafovi nijedne funkcije oblika $z = f(x, y)$, ali jesu grafovi afinih funkcija

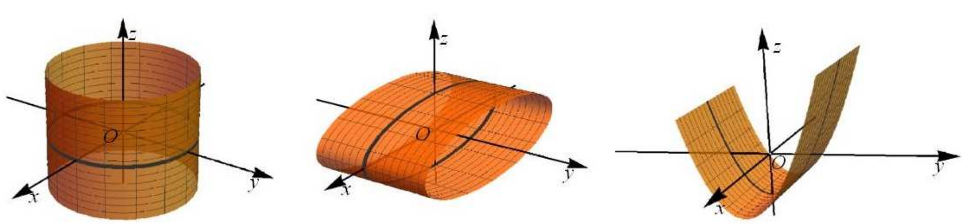
$$x = f_1(y, z) = 0 \cdot y + 0 \cdot z + c \quad \text{i} \quad y = f_2(x, z) = 0 \cdot x + 0 \cdot z + c$$



Slika 1.5: Ravni $x = c$ i $y = c$ ($c \in \mathbb{R}$)

Primer 1.2.7.

Cilindrična površ je površ koju opisuje prava (izvodnica, generatrisa) koja se translatorno kreće duž neke krive u ravni (direktrise). Ako je direktrisa u Oxy ravni, tj. u ravni $z = 0$, zadata jednačinom $g(x, y) = 0$, tada je istom jednačinom $g(x, y) = 0$ definisana cilindrična površ čije su izvodnice paralelne Oz osi.



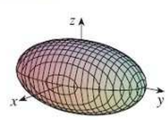
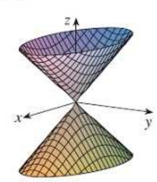
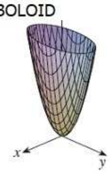
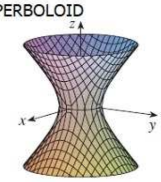
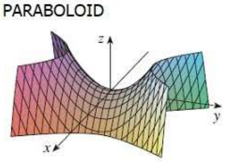
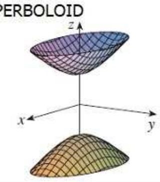
Slika 1.6: Cilindrične površi $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + 9z^2 = 9$ i $z = y^2 - 1$.

Na Slici 1.6 predstavljene su cilindrične površi:
$x^2 + y^2 = 1$, čije su izvodnice paralelne Oz osi, a direktrisa je kružnica u ravni Oxy;
$x^2 + 9z^2 = 9$, čije su izvodnice paralelne Oy osi, a direktrisa je elipsa u ravni Oxz;
$z = y^2 - 1$, čije su izvodnice paralelne Ox osi, a direktrisa je parabola u ravni Oyz.

Primer 1.2.8.

Pri predstavljanju površi u $Oxyz$ koordinatnom sistemu korisno je posmatrati linije na površi koje se dobijaju u preseku ravnima paralelnim koordinatnim ravnima[a]. U sledećoj tabeli predstavljene su površi drugog reda sa svojim jednačinama i podacima koji su korisni za njihovo prepoznavanje.

[a] traces

Površ	Jednačina	Površ	Jednačina
ELIPSOID 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ All traces are ellipses. If $a = b = c$, the ellipsoid is a sphere.	KONUS 	$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces in the planes $x = k$ and $y = k$ are hyperbolas if $k \neq 0$ but are pairs of lines if $k = 0$.
ELIPTIČKI PARABOLOID 	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces are parabolas. The variable raised to the first power indicates the axis of the paraboloid.	JEDNOGRANI HIPERBOLOID 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces are hyperbolas. The axis of symmetry corresponds to the variable whose coefficient is negative.
HIPERBOLIČKI PARABOLOID 	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are hyperbolas. Vertical traces are parabolas. The case where $c < 0$ is illustrated.	DVOGRANI HIPERBOLOID 	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Horizontal traces in $z = k$ are ellipses if $k > c$ or $k < -c$. Vertical traces are hyperbolas. The two minus signs indicate two sheets.

ZADACI ZA VEŽBANJE

1. Odrediti i skicirati oblast definisanosti funkcija:

a) $f(x,y)=\sqrt{x+y}$; **b)** $f(x,y)=\sqrt{xy}$;

c) $f(x,y)=\log(9-x^2-9y^2)$; **d)** $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$;

e) $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-z^2}$; **f)** $f(x,y,z)=\log(4-2x^2-2y^2-z^2)$.

2. Skicirati grafove funkcija:

a) $f(x,y)=2x-5y$; **b)** $f(x,y)=9x^2+y^2+1$;

c) $f(x,y)=9-x^2-9y^2$; **d)** $f(x,y)=y$;

e) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$; **f)** $f(x,y)=x^2+y^2-6x+4y-1$.

3. Koristeći odgovarajući softver predstaviti grafove funkcija i njihove nivo-linije:

a) $f(x,y)=xy^2-x^3$; **b)** $f(x,y)=xy^3-x^3y$;

c) $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$; **d)** $f(x,y)=(1-3x^2+y^2)e^{1-x^2-y^2}$;

e) $f(x,y)=|x|+|y|$; **f)** $f(x,y)=\sin x-\sin y$.

1.3 Granična vrednost i neprekidnost

Kao i kod funkcije jedne nezavisno promenljive, problem graničnih vrednosti odnosi se na ponašanje funkcije u okolini neke tačke. Zbog složenije prirode prostora u kojima su funkcije više promenljivih definisane, u njihovom slučaju je rešavanje ovog problema znatno složenije.

Definicija 1.3.1.

Neka je funkcija $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definisana u nekoj okolini tačke $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, osim, možda u samoj tački $\mathbf{a}$. Vrednost $L \in \mathbb{R}$ je granična vrednost funkcije $f(\mathbf{x})$ kad $\mathbf{x}$ teži $\mathbf{a}$, tj.

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L,$$

ako važi

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big) \quad 0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta \ \Rightarrow\ |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon,$$

gde je $d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2}$ rastojanje između tačaka $\mathbf{x}$ i $\mathbf{a}$.

Za funkcije dveju promenljivih $f(x, y)$ prethodna definicija dobija oblik:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = L$$

ako važi

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big) \quad 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta \ \Rightarrow\ |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Primer 1.3.1.

Pokažimo da je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Pronađimo $\delta > 0$ tako da kadgod je ispunjeno $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, važi i

$$\left| \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{2|x|y^2}{x^2 + y^2} < \varepsilon.$$

Kako je $\dfrac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1$, to je

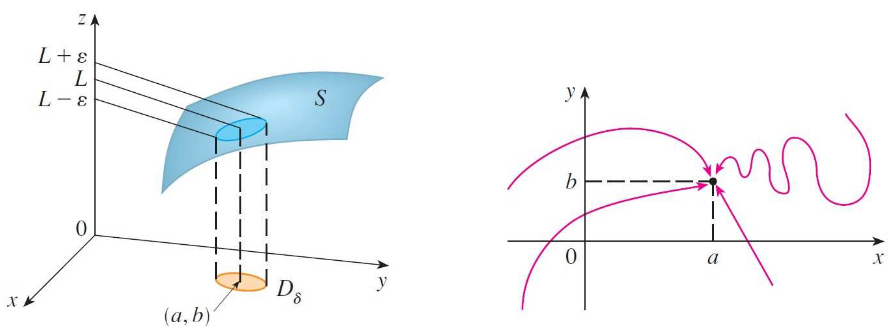
$$\frac{2|x|y^2}{x^2 + y^2} \leq 2|x| = 2\sqrt{x^2} \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Prema tome, ako je $\delta = \varepsilon/2$ i $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, tada važi

$$\left| \frac{2xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| \leq 2\sqrt{x^2+y^2} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Graf funkcije predstavljen je na Slici 1.8, levo.

Geometrijska interpretacija granične vrednosti funkcije dveju promenljivih predstavljena je na Slici 1.7, levo.



Slika 1.7: Granična vrednost funkcije dveju promenljivih

Prisetimo se da se u slučaju funkcije jedne nezavisno promenljive jednoj tački $a \in \mathbb{R}$ može prići samo sa dve strane, preko manjih ili preko većih vrednosti, pa $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ postoji ako i samo ako postoje leva i desna granična vrednost i jednake su. U $\mathbb{R}^2$, međutim, tački (a,b) tačka (x,y) može da se približava na beskonačno mnogo načina, duž beskonačno mnogo krivih u ravni Oxy koje sadrže tačku (a,b) (Slika 1.7, desno). U tom smislu, može se formulisati sledeće tvrđenje, koje može da se koristi kao kriterijum za egzistenciju granične vrednosti.

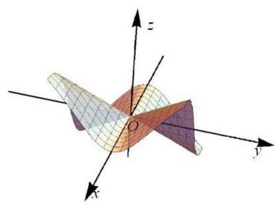
Stav 1.3.1.

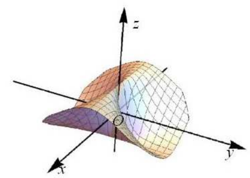
Granična vrednost

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

postoji ako i samo ako postoji odgovarajuća granična vrednost kada (x,y) teži ka (a,b) duž bilo koje krive koja prolazi kroz (a,b), i jednaka je L.

Navedeno tvrđenje je efikasno kada treba pokazati da granična vrednost ne postoji.





Slika 1.8: $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}$ $\qquad f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Primer 1.3.2.

Pokažimo da ne postoji granična vrednost

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Zaista, ako tačka (x,y) teži tački $(0,0)$ duž ose Ox, tj. prave $y=0$, tada je

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-0}{x^2+0} = 1.$$

Ako, međutim, tačka (x,y) teži tački $(0,0)$ duž ose Oy, tj. prave $x=0$, tada je

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0-y^2}{0+y^2} = -1.$$

Graf funkcije predstavljen je na Slici 1.8, desno.

Primer 1.3.3.

Ne postoji ni granična vrednost

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

U ovom slučaju, ako tačka (x, y) teži tački $(0, 0)$ duž bilo koje koordinatne ose, dobija se ista vrednost:

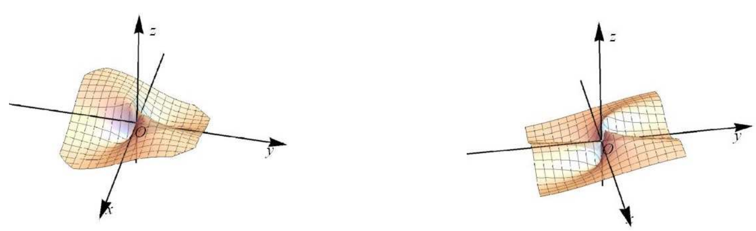
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2+0} = 0,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y}{0+y^2} = 0.$$

Ipak, ako tačka (x, y) teži tački $(0, 0)$ duž prave $y = x$, dobija se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot x}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Graf funkcije predstavljen je na Slici 1.9, levo.



Slika 1.9: $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $\qquad$ $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

Primer 1.3.4.

Ispitajmo egzistenciju granične vrednosti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}.$$

Ako tačka (x, y) teži tački $(0, 0)$ duž koordinatnih osa ili bilo koje prave $y = kx$, $k \neq 0$, koja prolazi kroz $(0, 0)$ dobija se ista vrednost:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot kx}{x^4+(kx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2+k^2} = 0.$$

Ako tačka (x, y) teži tački $(0, 0)$ duž parabole $y = x^2$, dobija se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot x^2}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

što znači da granična vrednost ne postoji. Graf funkcije predstavljen je na Slici 1.9, desno.

Jedna od najvažnijih korisnih osobina funkcija je njihova neprekidnost, tj. svojstvo da se za malu promenu nezavisno promenljivih ni vrednost funkcije ne menja drastično. Neprekidnost funkcije je lokalno svojstvo, vezano za tačke iz oblasti definisanosti.

Definicija 1.3.2.

Funkcija $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definisana u nekoj okolini tačke $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, je neprekidna u tački $\mathbf{a}$ ako postoji

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}).$$

Funkcija $f(\mathbf{x})$ je neprekidna u skupu $D \subset D_f$ ako je neprekidna u svakoj tački tog skupa.

Poznato je da su sve elementarne funkcije neprekidne u svojim oblastima definisanosti. Neprekidni su zbirovi, razlike, proizvodi i količnici (ako su definisani) neprekidnih funkcija. Može se pokazati da je i kompozicija neprekidnih funkcija takođe neprekidna funkcija. Ove činjenice omogućuju da se aparatom usvojenim za funkcije jedne nezavisno promenljive može efektivno ispitivati neprekidnost funkcija više nezavisno promenljivih.

Primer 1.3.5.

Polinomske funkcije n nezavisno promenljivih su neprekidne u celom prostoru $\mathbb{R}^n$. Racionalne funkcije su neprekidne u celoj oblasti definisanosti, ali nisu neprekidne u tačkama koje su nule polinoma–imenioca, jer u njima nisu definisane. Funkcije iz Primera 1.3.1–1.3.4 neprekidne su u svim tačkama $(x, y) \neq (0, 0)$. U tački $(0, 0)$ one nisu neprekidne, jer u njoj nisu definisane.

Primer 1.3.6.

Funkcija

$$f(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}$$

je definisana za $(x, y) \neq (0, 0)$ i kao kompozicija neprekidnih funkcija, neprekidna je u celoj oblasti definisanosti. Posmatrajmo funkciju

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

koja je definisana u celom prostoru $\mathbb{R}^2$. Neprekidnost funkcije $g(x, y)$ u tačkama $(x, y) \neq (0, 0)$ sledi iz činjenice da je u njima $g(x, y) = f(x, y)$. Kako je još i

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} = 0,$$

(videti Primer 1.3.1), to je ona neprekidna i u tački $(0, 0)$. Prema tome, funkcija $g(x, y)$ je neprekidna u $\mathbb{R}^2$ i ona predstavlja neprekidno produženje funkcije $f(x, y)$.

Primer 1.3.7.

Funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

definisana je celoj ravni $\mathbb{R}^2$ i neprekidna u svim tačkama $(x,y) \neq (0,0)$. Ona nije neprekidna u tački $(0,0)$ jer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

ne postoji, što je pokazano u Primeru 1.3.2.

Primer 1.3.8.

Funkcija

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

definisana je i neprekidna u svim tačkama $(x,y) \neq (0,0)$. Kako ne postoji

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2},$$

(videti Primer 1.3.4), funkcija $f(x,y)$ nema svoje neprekidno produženje u $\mathbb{R}^2$.

Iako se pojam neprekidnosti funkcije definiše lokalno, u tački, važno je proširiti ga na skupove. O osobinama funkcija neprekidnih na skupovima koje su od posebnog značaja sa stanovišta optimizacija govori poznata *Vajerštrasova teorema*.

Teorema 1.3.1.

Neka je funkcija neprekidna na kompaktnom skupu $D \subset \mathbb{R}^n$. Tada je ona ograničena i postoje tačke $\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_M \in D$ u kojima ona dostiže svoju najmanju i najveću vrednost.

ZADACI ZA VEŽBANJE

1. Ispitati da li sledeće granične vrednosti postoje i proveriti na grafovima funkcija dobijenih primenom odgovarajućeg softvera:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{4-xy}{x^2+3y^2}$; **b)** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} e^{-xy}\cos(x+y)$;

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2ye^y}{x^4+4y^2}$; **d)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$;

2. Primenom polarnih koordinata odrediti sledeće granične vrednosti, ako postoje:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$; **b)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{-x^2-y^2}-1}{x^2+y^2}$;

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2)$; **d)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

3. Ako postoji, odrediti neprekidno produženje sledećih funkcija:

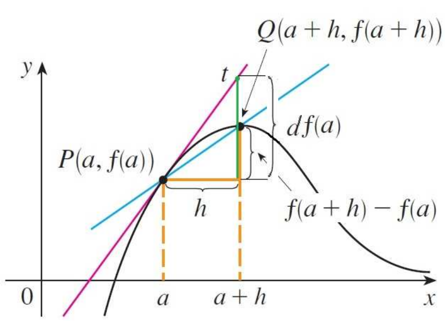
a) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}$; **b)** $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}$;

c) $f(x,y)=\dfrac{\arctan(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$; **d)** $f(x,y)=\dfrac{x^4\sin y}{x^4+3y^4}$.

1.4 Parcijalni izvodi

Prisetimo se da izvod u tački $a\in\mathbb{R}$ funkcije jedne nezavisno promenljive $f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, predstavlja odnos između priraštaja funkcije i priraštaja promenljive, kad se priraštaj promenljive beskonačno smanjuje:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$



Kao što se vidi na slici, $f'(a)$ pokazuje brzinu rasta funkcije u tački a, tj. predstavlja koeficijent pravca tangente na krivu $y=f(x)$ u tački $(a,f(a))$. Diferencijal funkcije u tački a,

$$df(a)=f'(a)\cdot h,$$

predstavlja priraštaj tangente u toj tački. Primetimo da je diferencijal funkcija promenljive $h=\Delta a=da$.

Takođe, funkcija $f(x)$ je diferencijabilna u tački a ako i samo ako postoji konačan izvod $f'(a)$.

U slučaju funkcija više promenljivih situacija je komplikovanija. Neka je $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funkcija definisana u okolini tačke $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$. Ako se fiksiraju sve promenljive osim x_j, dobija se funkcija jedne nezavisno promenljive

$$g(x_j) = f(a_1, \ldots a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Izvod funkcije $g(x_j)$ u tački a_j, tj. $g'(a_j)$, predstavlja parcijalni izvod funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ po promenljivoj x_j u tački $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Definicija 1.4.1.

Parcijalni izvod funkcije $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ po promenljivoj x_j je

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, \ldots x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)}{h}.$$

Za označavanje parcijalnih izvoda funkcije $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koriste se različite oznake:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial z}{\partial x_j} = f_{x_j} = f_{x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = D_{x_j} f.$$

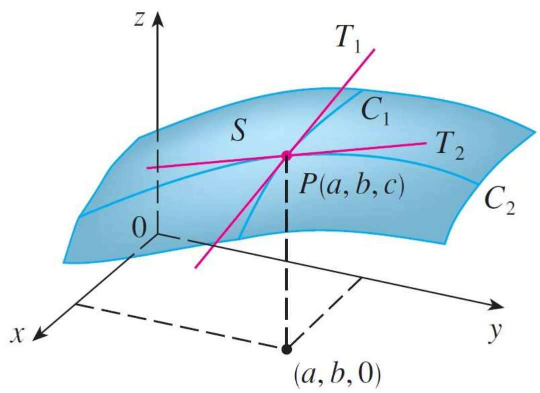
Ako je $z = f(x, y)$, tada su parcijalni izvodi po promenljivima x i y redom

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h},$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}.$$

Geometrijska interpretacija parcijalnih izvoda funkcije dveju nezavisno promenljivih bazirana je na geometrijskoj interpretaciji izvoda funkcije jedne nezavisno promenljive. Površ S zadata jednačinom $z = f(x, y)$ je graf funkcije $f(x, y)$ (Slika 1.10). Neka je $c = f(a, b)$. Tada se tačka $P(a, b, c)$ nalazi na površi. Ako fiksiramo $y = b$, tada je jednačinom $z = f(x, b) = g_1(x)$ zadata kriva C_1 na datoj površi, koja prolazi kroz tačku P. Tangenta T_1 na krivu C_1 u tački P ima koeficijent pravca $g_1'(a)$, a to je isto što i $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$.

Slično, ako se fiksira $x = a$, tada je na površi opisana kriva C_2 jednačinom $z = f(a, y)$, čija tangenta T_2 u tački P ima koeficijent pravca jednak $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$. Prema tome, parcijalni izvod po jednoj promenljivoj pokazuje brzinu rasta (promene) funkcije kada se menja ta promenljiva, pri čemu druga ima konstantnu vrednost.



Slika 1.10: Geometrijska interpretacija parcijalnih izvoda

Parcijalni izvodi funkcije po zadatoj promenljivoj određuju se kao obični izvodi funkcije te (jedne) promenljive, smatrajući ostale promenljive konstantnim. Ilustrujmo određivanje parcijalnih izvoda kroz sledeće primere.

Primer 1.4.1.

Za funkciju

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 - y^2 + x + 1$$

parcijalni izvodi su

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2 + 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - 2y.$$

Specijalno, u tački $(2, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = 11, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 0) = 0.$$

Slično, ako je $f(x,y)=x^y$, tada je $\dfrac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^y\log x$.

Primer 1.4.2.

Funkcija $f(x,y,z)=x^2e^{xy}\sin z$ ima parcijalne izvode

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\big(2x+x^2y\big)e^{xy}\sin z,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^3e^{xy}\sin z,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=x^2e^{xy}\cos z.$$

Primer 1.4.3.

Neka je funkcija $z=z(x,y)$ implicitno zadata jednačinom

$$x^3+y^3+z^3+xyz=1.$$

Parcijalni izvod po x određuje se diferenciranjem jednačine po x, smatrajući y konstantom:

$$3x^2+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

odakle se dobija

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{3x^2+yz}{3z^2+xy}.$$

Slično, diferenciranjem jednačine po y dobija se

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3y^2+xz}{3z^2+xy}.$$

Neprekidnost funkcije nije neophodan uslov za postojanje njenih parcijalnih izvoda, što pokazuje sledeći primer.

Primer 1.4.4.

Posmatrajmo funkciju

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

U Primeru 1.3.3 pokazano je da $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne postoji, pa ona nije neprekidna u tački $(0,0)$. Njeni parcijalni izvodi u toj tački ipak postoje:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Kao i kod funkcija jedne promenljive, diferenciranjem parcijalnih izvoda dobijaju se viši parcijalni izvodi.

Definicija 1.4.2.

Parcijalni izvodi drugog reda funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ su

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right).$$

Za funkciju dveju promenljivih $f(x,y)$ parcijalni izvodi drugog reda su

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Izvodi $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ zovu se *mešoviti parcijalni izvodi* drugog reda.

Primer 1.4.5.

Za funkciju $f(x,y) = x^3 + xy^2 - y^2 + x + 1$ iz Primera 1.4.1 drugi parcijalni izvodi su

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 + y^2 + 1\right) = 6x,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + y^2 + 1\right) = 2y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - 2y) = 2y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - 2y) = 2x - 2.$$

Primer 1.4.6.

Data je funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

Koristeći pravila diferenciranja za $(x,y) \neq (0,0)$ i definiciju za $(x,y) = (0,0)$, posle glomaznih izračunavanja koja prevazilaze potrebe ovog kursa, može se pokazati da mešoviti parcijalni izvodi drugog reda postoje u svakoj tački:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3}, & (x,y) \neq (0,0), \\ -1, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

Primetimo da su u prethodnim primerima mešoviti parcijalni izvodi jednaki, tj. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, u svim tačkama u kojima su neprekidni.

U Primeru 1.4.6 tačka u kojoj se mešoviti izvodi razlikuju je tačka $(0,0)$ u kojoj je narušena njihova neprekidnost (dokazati!). Ovo upućuje na opšte pravilo o jednakosti mešovitih izvoda, koje je formulisano sledećom teoremom.

Teorema 1.4.1.

Neka je u okolini tačke (a,b) definisana funkcija $f(x,y)$ i njeni prvi i mešoviti drugi parcijalni izvodi. Ako su funkcije $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ neprekidne u tački (a,b), tada je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b).$$

Sukcesivnim diferenciranjem se dobijaju parcijalni izvodi višeg reda. Tako su, na primer, za funkciju $f(x,y)$ neki parcijalni izvodi trećeg reda:

$$f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \qquad f_{yyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right),$$
$$f_{yxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \qquad f_{xyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

Jasno, među izvodima f_{xyy}, f_{yxy} i f_{yyx} (kao i f_{xxy}, f_{xyx} i f_{yxx}) važi jednakost pod uslovom da su oni neprekidne funkcije.

U daljem tekstu radiće se samo sa funkcijama koje imaju jednake mešovite izvode.

ZADACI ZA VEŽBANJE

1. Odrediti prve i druge parcijalne izvode sledećih funkcija:

a) $f(x,y) = x^3y^5 + 6x^4y$; **b)** $f(x,y) = \log(e^x + e^y)$;

c) $f(x,y) = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}$; **d)** $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$;

e) $f(x,y,z) = x^3y^5z + 6x^3y^6 - xyz^7$; **f)** $f(r,\theta) = e^{r\theta}\sin\theta$.

2. Ispitati koja je od sledećih funkcija rešenje Laplasove parcijalne diferencijalne jednačine $u_{xx} + u_{yy} = 0$:

a) $u = x^2 - y^2$; **b)** $u = \sin x \cosh y + \cos x \sinh y$;

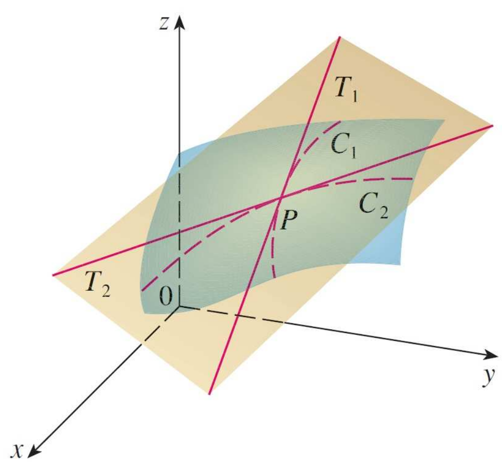
c) $u = \log\sqrt{x^2+y^2}$; **d)** $u = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$.

3. Pokazati da je funkcija $z = \log(e^x + e^y)$ rešenje parcijalne diferencijalne jednačine

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$$

1.5 Diferencijabilnost

Već je rečeno da parcijalni izvodi funkcije $f(x, y)$ u tački (a, b) predstavljaju koeficijente pravaca tangenti krivih na površi $z = f(x, y)$ u tački (a, b, c), $c = f(a, b)$, koje se dobijaju u preseku sa ravnima $x = a$ odnosno $y = b$. Te tangente određuju tangentnu ravan površi u tački (a, b, c) (Slika 1.11). Kao što se vidi, tangentna ravan najbolje od svih ravni aproksimira funkciju u okolini tačke (a, b, c).



Slika 1.11: Tangentna ravan površi

Odredimo jednačinu tangentne ravni površi $S: \quad z = f(x, y)$ u tački $P(a, b, c)$:

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0,$$

ili, u transformisanom obliku,

$$z - c = k_1(x - a) + k_2(y - b), \qquad k_1 = -\frac{A}{C}, \quad k_2 = -\frac{B}{C}.$$

U preseku ove ravni i ravni $y = b$ nalazi se tangenta T_1 presečne krive C_1 površi S i ravni $y = b$. Koeficijent pravca tangente T_1 je $k_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$. Slično, presek tangentne ravni i ravni $x = a$ je tangenta T_2 zajedničke krive C_2 površi S i ravni $x = a$, čiji je koeficijent pravca $k_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$. Konačno, tangentna ravan površi S u tački $P(a, b, c)$ je:

$$z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

U okolini tačke P površ S i njena tangentna ravan su vrlo bliske, tj.

$$f(x, y) - f(a, b) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b),$$

pa priraštaj funkcije $f(x, y)$ može da se aproksimira linearnom funkcijom priraštaja promenljivih.

Označimo priraštaje nezavisno promenljivih i funkcije sa

$$x - a = \Delta x, \quad y - b = \Delta y, \quad f(x, y) - f(a, b) = \Delta f(x, y).$$

Definicija 1.5.1.

Funkcija $f(x, y)$ je diferencijabilna u tački (a, b) ako njen totalni priraštaj $\Delta f(a, b) = f(x, y) - f(a, b)$ može da se predstavi na sledeći način:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad (1.1)$$

pri čemu $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ teži nuli kad $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Može se pokazati da se uslovi u jednakosti (1.1) mogu zapisati i na drugi način:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

pri čemu $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ i $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ teže nuli kad $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Na osnovu svega izloženog vidi se da je funkcija diferencijabilna u tački (a, b) ako u blizini tačke (a, b) može dobro da se aproksimira linearnom funkcijom koja definiše tangentnu ravan, tj. ako je razlika između vrednosti funkcije

$f(x,y)$ i linearne funkcije koja opisuje tangentnu ravan beskonačno mala veličina višeg reda u odnosu na $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ kad $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$:

$$\Delta f(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y=o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),\quad \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0.$$

Ispitivanje diferencijabilnosti funkcije po definiciji je komplikovano. Sledeća teorema daje dovoljne uslove diferencijabilnosti i omogućuje efektivan način za njeno ispitivanje.

Teorema 1.5.1.

Neka je funkcija $f(x,y)$ definisana u nekoj okolini tačke (a,b) i ima parcijalne izvode u okolini te tačke. Ako su ti izvodi neprekidne funkcije u (a,b), tada je funkcija $f(x,y)$ diferencijabilna u tački (a,b).

Primer 1.5.1.

Funkcija

$$f(x,y)=x^3-y^3+3xy$$

je diferencijabilna u svakoj tački, jer su njeni parcijalni izvodi

$$f_x(x,y)=3x^2+3y,\qquad f_y(x,y)=-3y^2+3x$$

neprekidne funkcije.

Setimo se da za funkciju jedne promenljive $f(x)$ priraštaj tangente (odnosno linearne aproksimacije funkcije $f(x)$) predstavlja diferencijal

$$df(x)=f'(x)dx,$$

gde je $dx=\Delta x$ priraštaj nezavisno promenljive. Na sličan način definiše se i diferencijal funkcije više promenljivih.

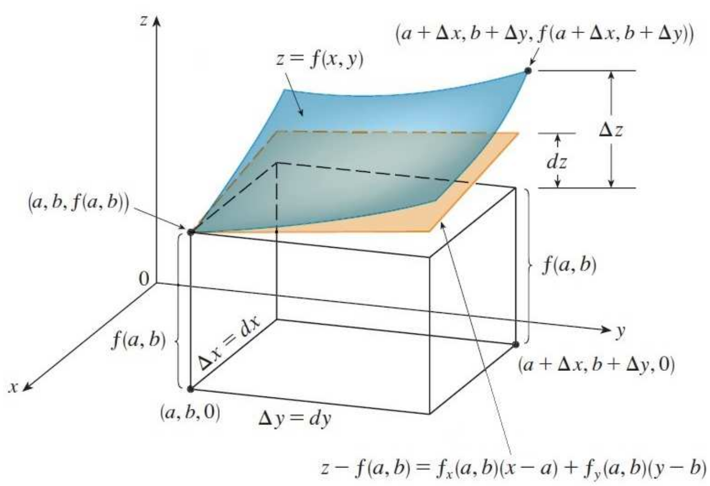
Ako u jednakosti (1.1) priraštaje nezavisno promenljivih Δx i Δy označimo sa dx i dy redom, tada je

$$\Delta f(x,y)\approx\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Definicija 1.5.2.

Izraz
$$dz = df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$$
zove se totalni diferencijal funkcije $f(x,y)$.

Odnos priraštaja nezavisno promenljivih, priraštaja funkcije i diferencijala predstavljen je na Slici 1.12.



Slika 1.12: Diferencijal funkcije $f(x,y)$

Totalni diferencijal i diferencijabilnost funkcije na isti način definišu se i za funkcije proizvoljnog broja promenljivih.

Definicija 1.5.3.

Totalni diferencijal funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je izraz
$$dz = df(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

Definicija 1.5.4.

Funkcija f je diferencijabilna u tački $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ako njen priraštaj $\Delta f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \ldots, x_n + dx_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ može da se predstavi kao

$$\Delta f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = df(x_1, x_2, \ldots, x_n) + o(\rho), \qquad \rho \to 0,$$

gde je $\rho = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2}$.

Iako za egzistenciju parcijalnih izvoda neprekidnost funkcije nije neophodan uslov (videti Primer 1.4.4), za diferencijabilnost jeste.

Teorema 1.5.2.

Ako je funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ diferencijabilna u nekoj tački, ona je i neprekidna u toj tački.

Funkcija koja ima neprekidne parcijalne izvode zove se *neprekidno diferencijabilna funkcija.*

1.6 Izvod složene funkcije

Dobro je poznato da ako su $y = f(x)$ i $x = g(t)$ diferencijabilne funkcije, tada je i njihova kompozicija $z = f(g(t))$ diferencijabilna i važi

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}.$$

Slična pravila za diferenciranje složenih funkcija[3] važe i u slučaju više promenljivih.

Teorema 1.6.1.

Neka je $z = f(x, y)$ diferencijabilna funkcija dveju nezavisno promenljivih i $x = g(t)$ i $y = h(t)$ diferencijabilne funkcije jedne promenljive. Tada je i $z = f(g(t), h(t))$ diferencijabilna funkcija jedne nezavisno promenljive i važi

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{dy}{dt}.$$

[3] chain rule

Primer 1.6.1.

Neka je $z = f(x, y) = x^2y^3 - 2xy + y$ i $x = \cos t,\ y = \sin t$. Kako je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 - 2y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2 - 2x + 1,\quad \frac{dx}{dt} = -\sin t,\ \frac{dy}{dt} = \cos t,$$

važi :

$$\frac{dz}{dt} = (2xy^3 - 2y)(-\sin t) + (3x^2y^2 - 2x + 1)\cos t.$$

Na primer, za $t = 0$ dobija se $\frac{dz}{dt}(0) = -1$, što predstavlja brzinu promene vrednosti funkcije $f(x, y)$ u tački $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ duž kruga čije su parametarske jednačine $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

Primer 1.6.2.

Neka je funkcijom $T = f(x, y)$ opisana temperatura u tački sa koordinatama (x, y) na kvadrantnoj ploči stranice 1m. Opišimo brzinu promene temperature ako se tačka (x, y) kreće duž krive C, čije su parametarske jednačine $\begin{cases} x = 2te^{-t}, \\ y = t^2e^{-t}. \end{cases}$ Kako je

$$\frac{dx}{dt} = 2(1-t)e^{-t},\quad \frac{dy}{dt} = (2t - t^2)e^{-t},$$

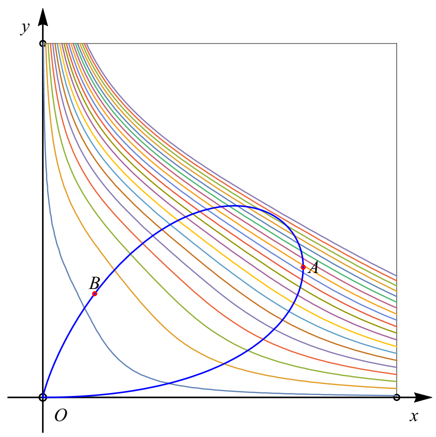
to je

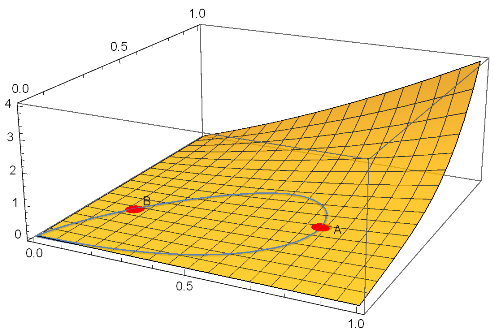
$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial T}{\partial x}\, 2(1-t)e^{-t} + \frac{\partial T}{\partial y}\, (2t - t^2)e^{-t}. \end{aligned}$$

Ako je, na primer, $T = x^2y + 3xy^4$ (Slika 1.13), tada je

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2xy + 3y^4,\qquad \frac{\partial T}{\partial y} = x^2 + 12xy^3,$$

$$\frac{dT}{dt} = 2(2xy + 3y^4)(1-t)e^{-t} + (x^2 + 12xy^3)(2t - t^2)e^{-t}.$$





Slika 1.13: Nivo-linije funkcije $T = x^2y + 3xy^4$ i kriva C

Specijalno, za $t = 1$ dobija se tačka $A\left(\frac{2}{e}, \frac{1}{e}\right)$, a $\frac{dT}{dt}(1) \approx 0.361$ pokazuje brzinu promene vrednosti funkcije T u tački A duž krive C. Za $t = 4$ dobija se tačka $B\left(\frac{8}{e^4}, \frac{16}{e^4}\right)$ i $\frac{dT}{dt}(4) \approx -0.021$.

Primetimo da prolaskom kroz tačku A funkcija raste, a kroz B opada, što pokazuju i znak prvog izvoda i uzajamni položaj krive C i nivo-linija. Takođe, gustina nivo-linija je u skladu sa veličinom nagiba u okolini tačaka A i B, koji pokazuje veličina (apsolutna vrednost) prvog izvoda u tim tačkama.

Teorema 1.6.2.

Neka su $z = f(x, y)$, $x = g(u, v)$ i $y = h(u, v)$ diferencijabilne funkcije dveju promenljivih. Tada je i $z = f(g(u, v), h(u, v))$ diferencijabilna funkcija dveju nezavisno promenljivih i važi

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Primer 1.6.3.

Neka je $z = f(x,y)$, diferencijabilna funkcija promenljivih x i y, rešenje parcijalne diferencijalne jednačine

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Ako se uvedu nove promenljive $x = u + v$, $y = u - v$, tada i $z = f(u+v, u-v) = g(u,v)$ postaje funkcija promenljivih u i v. Odredimo parcijalnu diferencijalnu jednačinu čije je rešenje funkcija $z = g(u,v)$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Sabiranjem, odnosno oduzimanjem prethodnih jednakosti dobija se

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

pa transformisana jednačina ima oblik

$$\frac{u-v}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right) + \frac{u+v}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) = 0,$$

tj.

$$u\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Isti oblik jednačine može da se dobije i na drugi način. Ako umesto zadate veze između starih i novih promenljivih $x = u+v$, $y = u - v$, koristimo inverznu, $u = \dfrac{x+y}{2}$, $v = \dfrac{x-y}{2}$, po pravilu diferenciranja složene funkcije neposredno dobijamo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial v},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Zamena u polaznoj jednačini daje njen transformisani oblik.

Primer 1.6.4.

Transformišimo parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{z}$$

uzimajući za nove promenljive $u=2x-z^2$ i $v=\dfrac{y}{z}$.
Po pravilima diferenciranja složene funkcije imamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\left(2-2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(-\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right),\\
\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\left(-2z\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{1}{z}-\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right),
\end{aligned}$$

to jest

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2\dfrac{\partial z}{\partial u}}{1+2z\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{y}{z^2}\dfrac{\partial z}{\partial v}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\dfrac{1}{z}\,\dfrac{\partial z}{\partial v}}{1+2z\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{y}{z^2}\dfrac{\partial z}{\partial v}}.$$

Zamenom u polaznoj jednačini dobijamo

$$\frac{2x\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{y}{z}\,\dfrac{\partial z}{\partial v}}{1+2z\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{y}{z^2}\dfrac{\partial z}{\partial v}}=\frac{x}{z},$$

ili, u sređenijem obliku,

$$2x\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z}\,\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{x}{z}+2x\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{xy}{z^3}\,\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Kako je $2x=u+z^2$ i $y=vz$, dobijamo transformisanu jednačinu u obliku

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u+z}{v(1-u)}.$$

Primer 1.6.5.

Potražimo parcijalnu diferencijalnu jednačinu koja se dobija transformacijom jednačine

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$$

prelaskom na polarne koordinate $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Odredimo najpre

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta.$$

Zato je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta,\\
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta.
\end{aligned}$$

Ako poslednju jednakost podelimo sa r i kvadriramo obe jednakosti, dobijamo

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\sin\theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta,\\
\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\sin^2\theta - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\sin\theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta
\end{aligned}$$

Sabiranjem ovih jednakosti imamo

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

pa je transformisana jednačina

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = 0.$$

Sukcesivnom primenom pravila diferenciranja složenih funkcija mogu se transformisati i izrazi koji sadrže parcijalne izvode višeg reda.

Primer 1.6.6.

Transformišimo parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

uvođenjem polarnih koordinata $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.
U prethodnom primeru odredili smo prve parcijalne izvode $\frac{\partial x}{\partial r}$, $\frac{\partial x}{\partial \theta}$, $\frac{\partial y}{\partial r}$, $\frac{\partial y}{\partial \theta}$, $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \theta}$. Daljim diferenciranjem dobijamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\sin\theta \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r}\right)\cos\theta \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r}\right)\sin\theta \\
&= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\sin\theta\right)\cos\theta \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin\theta\right)\sin\theta \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)r\sin\theta - \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)r\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial \theta}(r\cos\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) r\sin\theta - \frac{\partial z}{\partial x}\ r\cos\theta \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) r\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial y}\ r\sin\theta \\
&= -\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-r\sin\theta) + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} r\cos\theta\right) r\sin\theta - \frac{\partial z}{\partial x}\ r\cos\theta \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-r\sin\theta) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} r\cos\theta\right) r\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial y}\ r\sin\theta \\
&= r^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin^2\theta - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\theta\right) \\
&\quad - r\left(\frac{\partial z}{\partial x}\ \cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\ \sin\theta\right).
\end{aligned}$$

Ako prvu jednakost pomnožimo sa r^2 i saberemo sa drugom,

$$r^2\ \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = r^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - r\left(\frac{\partial z}{\partial x}\ \cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\ \sin\theta\right).$$

Konačno, transformisana jednačina je

$$r^2\ \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + r\ \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = 0.$$

Opšte pravilo diferenciranja složenih funkcija više promenljivih dato je na sledeći način.

Teorema 1.6.3.

Neka je $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ diferencijabilna funkcija n nezavisno promenljivih i $x_i = g_i(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, diferencijabilne funkcije m nezavisno promenljivih. Tada je i

$$z = f(x_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), x_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots, x_n(t_1, t_2, \ldots, t_m))$$

diferencijabilna funkcija m nezavisno promenljivih i važi

$$\frac{\partial z}{\partial t_j} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\ \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\ \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\ \frac{\partial x_n}{\partial t_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Pravila za izvode složenih funkcija koriste se i za diferenciranje implicitnih funkcija. Izuzetno su važni, naravno, uslovi egzistencije implicitno zadatih funkcija.

Ako je funkcija $F(x,y)$ definisana u okolini tačke (a,b), pri čemu je $F(a,b)=0$ i ako postoje neprekidni parcijalni izvodi F_x i F_y, pri čemu je $F_y(a,b)\neq 0$, tada je u okolini tačke a jednačinom

$$F(x,y)=0$$

definisana funkcija $y=f(x)$, koja je neprekidna u a. Diferenciranjem te jednačine dobija se

$$dF(x,y)=F_x\,dx+F_y\,dy=0,$$

odakle je izvod implicitne funkcije:

$$\frac{df}{dx}=\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

Slično, ako je funkcija $F(x,y,z)$ definisana u okolini tačke (a,b,c), pri čemu je $F(a,b,c)=0$ i ako postoje neprekidni parcijalni izvodi F_x, F_y i F_z, pri čemu je $F_z(a,b,c)\neq 0$, tada je u okolini tačke (a,b) jednačinom

$$F(x,y,z)=0$$

definisana funkcija $z=f(x,y)$, koja je neprekidna u (a,b). Njeni parcijalni izvodi su

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

ZADACI ZA VEŽBANJE

1. Odrediti jednačine tangentnih ravni sledećih površi u zadatim tačkama:

a) $z=4x^2-y^2+2y,\quad(-1,2,4)$; **b)** $z=y\log x,\quad(1,4,0)$;

c) $z=\sqrt{xy},\quad(1,1,1)$; **d)** $z=y\cos(x-y),\quad(2,2,2)$;

e) $z=e^{x^2-y^2},\quad(1,-1,1)$; **f)** $z=\arctan(xy^2),\quad(1,1,\pi/4)$.

2. Dokazati:

a) $\dfrac{2x+3}{4y+1}-2x+12y-3=o(\sqrt{x^2+y^2}),\qquad(x,y)\to(0,0)$;

b) $\sqrt{y+\cos^2 x}-\dfrac{y}{2}-1=o(\sqrt{x^2+y^2}),\qquad(x,y)\to(0,0)$.

3. Ako je $f(t)$ diferencijabilna funkcija i $z = f(x-y)$, dokazati da je

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

4. Neka su $f(t)$ i $g(t)$ diferencijabilne funkcije. Pokazati da sledeće funkcije zadovoljavaju navedene parcijalne diferencijalne jednačine:

a) $z = f\left(x + g(y)\right)$, $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2};$

b) $z = f(x+ay) + g(x-ay)$, $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

5. Ako je $f(x,y)$ diferencijabilna funkcija, $z = f(x,y)$ i $x = u+v$, $y = u-v$, dokazati da važi:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

6. Uvođenjem novih promenljivih $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$ transformisati parcijalne diferencijalne jednačine:

a) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0;\qquad$ **b)** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

1.7 Izvod u pravcu, gradijent, hesijan

Podsetimo se da parcijalni izvodi funkcije $f(x,y)$ pokazuju brzinu promene vrednosti funkcije u pravcima koordinatnih osa, tj. u pracima vektora $\mathbf{i} = (1,0)$ i $\mathbf{j} = (0,1)$. Naravno, od interesa je i brzina promene funkcije u proizvoljnom pravcu.

Definicija 1.7.1.

Neka je funkcija $f(x,y)$ definisana u nekoj okolini tačke (a,b) i $\mathbf{n} = (p,q)$ jedinični vektor. Izvod funkcije $f(x,y)$ u tački (a,b) u pravcu vektora $\mathbf{n}$ je

$$\frac{df}{d\mathbf{n}}(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+hp, b+hq) - f(a,b)}{h}.$$

Teorema 1.7.1.

Ako je funkcija $f(x, y)$ diferencijabilna u tački (a, b), tada u toj tački postoji izvod funkcije u pravcu proizvoljnog jediničnog vektora $\mathbf{n} = (p, q)$ i važi

$$\frac{df}{d\mathbf{n}}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)p + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)q.$$

Poznato je da koordinate jediničnog vektora mogu biti date u funkciji uglova koje taj vektor zaklapa sa koordinatnim osama:

$$\mathbf{n} = (p, q) = (\cos\alpha, \cos\beta), \qquad \alpha = \angle(\mathbf{n}, \mathbf{i}), \quad \beta = \angle(\mathbf{n}, \mathbf{j}) = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

pa je izvod funkcije u pravcu jediničnog vektora koji sa Ox–osom zaklapa ugao α jednak

$$\frac{df}{d\mathbf{n}}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\sin\alpha.$$

Primer 1.7.1.

Neka je funkcijom $T = x^2y + 3xy^4$ opisana temperatura u tački (x, y) kvadratne ploče stranice 1m. U Primeru 1.6.2 računali smo brzinu promene funkcije kada se tačka kreće duž neke krive. Izračunajmo sada kako se menja temperatura u tački $C(0.4, 0.4)$ u pravcima prema temenima ploče (Slika 1.14). Odredimo najpre

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2xy + 3y^4, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = x^2 + 12xy^3,$$
$$\frac{\partial T}{\partial x}(0.4, 0.4) \approx 0.397, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(0.4, 0.4) \approx 0.467.$$

Pravce prema temenima $(1, 1)$ i $(0, 0)$ određuju suprotni jedinični vektori $\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ i $\mathbf{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1)$, a izvodi funkcije u tim pravcima su

$$\frac{dT}{d\mathbf{n}_1} \approx 0.397 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0.467 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.661, \qquad \frac{dT}{d\mathbf{n}_3} \approx -0.661.$$

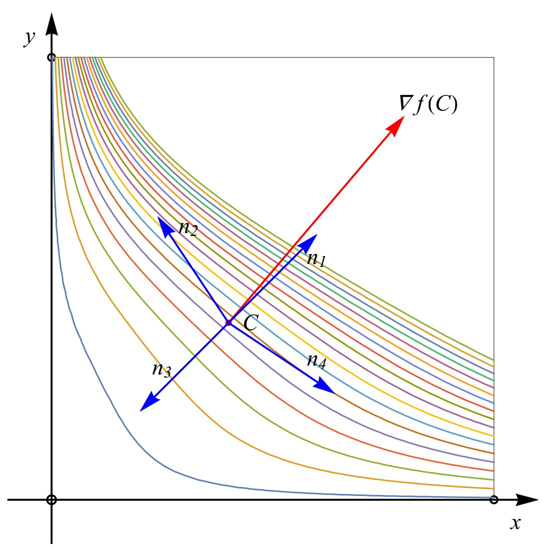
Izvod funkcije T u pravcu prema temenu $(0, 1)$ koji je određen jediničnim vektorom $\mathbf{n}_2 = \mathrm{ort}((0, 1) - (0.4, 0.4)) = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3)$ je

$$\frac{dT}{d\mathbf{n}_2} \approx 0.397 \cdot \frac{-2}{\sqrt{13}} + 0.467 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} \approx 0.169.$$

Slično, pravac prema temenu $(1,0)$ određuje jedinični vektor $\mathbf{n}_4 = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(3,-2)$, a izvod funkcije T u pravcu tog vektora je

$$\frac{dT}{d\mathbf{n}_4} \approx 0.397 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} + 0.467 \cdot \frac{-2}{\sqrt{13}} \approx 0.071.$$

Primećujemo da funkcija najbrže raste u smeru vektora $\mathbf{n}_1$, sporije u smeru vektora $\mathbf{n}_2$ i $\mathbf{n}_4$, a opada u smeru vektora $\mathbf{n}_3$.



Slika 1.14: Funkcija $T = x^2y + 3xy^4$, pravci izvoda i gradijent

Izraz za izvod funkcije u pravcu vektora $\mathbf{n} = (p,q)$ može da se predstavi i potpunim korišćenjem vektorske notacije, kao skalarni proizvod dva vektora:

$$\frac{df}{d\mathbf{n}} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)p + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)q = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) \cdot (p,q).$$

Vektor čije su koordinate parcijalni izvodi funkcije zove se gradijent i može da se definiše za funkcije proizvoljnog broja promenljivih.

Definicija 1.7.2.

Gradijent funkcije $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je vektor

$$\mathbf{grad}\ f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})^{a} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}^T.$$

[a] nabla

Primer 1.7.2.

Gradijent funkcije $T(x, y) = x^2y + 3xy^4$ iz Primera 1.7.1 je vektor

$$\nabla T(x, y) = (2xy + 3y^4,\ x^2 + 12xy^3).$$

Specijalno, u tački $(0.4, 0.4)$ je $\nabla T(0.4, 0.4) \approx (0.397, 0.467)$. Na Slici 1.14 prikazan je uzajamni položaj vektora u čijim su pravcima traženi izvodi i gradijenta. Indikativno je da funkcija najbrže raste upravo u pravcu i smeru onog vektora koji je najbliži pravcu i smeru gradijenta.

Gradijent funkcije ima ključnu ulogu u optimizacijama upravo zbog svojstva da ukazuje na pravac i smer najbržeg rasta funkcije.

Teorema 1.7.2.

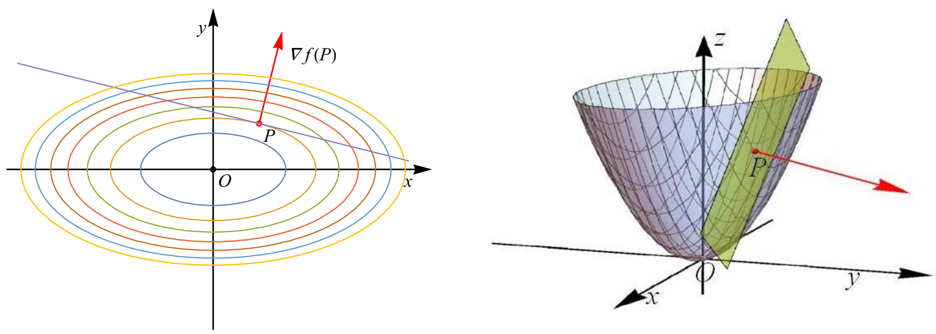
Neka je $f(x, y)$ diferencijabilna funkcija. Najveća vrednost izvoda funkcije u pravcu je $|\nabla f(x, y)|$ i dostiže se upravo u pravcu vektora $\nabla f(x, y)$.

Pomenimo još i važnu činjenicu da je $\nabla f(a, b)$ vektor koji je ortogonalan sa nivo-linijom $f(x, y) = c$, $c = f(a, b)$, površi $z = f(x, y)$, odnosno sa njenom tangentom u tački (a, b). Zaista, ako je $y = y(x)$ funkcija koja je implicitno zadata jednačinom $f(x, y) = c$, tada je

$$\frac{dy}{dx}(a) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)},$$

pa jednačina tangente u tački (a, b) ima oblik

$$y - b = \frac{dy}{dx}(a)(x - a), \qquad \text{tj.} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) = 0.$$



Slika 1.15: Gradijent funkcije, tangenta i tangentna ravan

Slično, ako je površ u prostoru zadata implicitno jednačinom $F(x, y, z) = 0$, tada je vektor $\nabla F(a, b, c)$ ortogonalan sa tangentnom ravni površi u tački (a, b, c), čija je jednačina

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)(y-b) + \frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)(z-c) = 0.$$

Ako je $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$, gornja jednačina dobija poznati oblik

$$z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b).$$

Koristeći pojam gradijenta i skalarnog proizvoda vektora može da se redefiniše i pojam diferencijala funkcije. Zaista, ako vektor diferencijala nezavisno promenljivih označimo sa $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$, tada je

$$df(\mathbf{x}) = df(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

Uopštavanjem pojma pravca vektora u n-dimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^n$, vektor $\nabla f(\mathbf{x})$ zadržava svojstvo pravca najbržeg rasta funkcije $f(\mathbf{x})$.

Iz vektorskog predstavljanja diferencijala funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ primećujemo da gradijent – vektor čije su koordinate prvi parcijalni izvodi – uzima ulogu koju prvi izvod ima u slučaju funkcije jedne nezavisno promenljive. Ulogu drugog izvoda uzima matrica čiji su elementi drugi parcijalni izvodi.

Definicija 1.7.3.

Heseova matrica ili hesijan funkcije $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je

$$Hf(\mathbf{x}) = Hf(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{n\times n}$$
$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Gradijent i hesijan funkcije mogu da se opišu i operatorskim pristupom, koji omogućuje generalizacije geometrijskih tumačenja u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$. Primetimo da je gradijent $\nabla f(\mathbf{x})$ dobijen primenom vektorskog diferencijalnog operatora

$$\nabla = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}^T$$

na skalarnu funkciju $f(\mathbf{x})$. Hesijan se dobija sukcesivnom primenom operatora ∇ na funkciju $f(\mathbf{x})$:

$$Hf(\mathbf{x}) = (\nabla \nabla^T) f(\mathbf{x}) = \left(\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \right) f(\mathbf{x})$$
$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} & & \dfrac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_2} & & \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} f(\mathbf{x}).$$

Koristeći operatorski pristup, totalni diferencijal funkcije je

$$\begin{aligned} df(\mathbf{x}) &= \nabla f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = (d\mathbf{x} \cdot \nabla) f(\mathbf{x}) = (\nabla^T d\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \\ &= \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Drugi diferencijal je

$$\begin{aligned} d^2 f(\mathbf{x}) &= d(df(\mathbf{x})) = (\nabla^T d\mathbf{x}) \big((\nabla^T d\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \big) = \big((\nabla^T d\mathbf{x}) \cdot (\nabla^T d\mathbf{x}) \big) f(\mathbf{x}) \\ &= (\nabla^T d\mathbf{x})^T (\nabla^T d\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) = (d\mathbf{x}^T \nabla \nabla^T d\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) = (d\mathbf{x}^T H d\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

ili, drugačije zapisano,

$$d^2 f(\mathbf{x}) = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 f(\mathbf{x}),$$

pri čemu se izložilac 2 ponaša kao stepen za parcijalne diferencijale, ali kao red za parcijalne izvode.

Na sličan način se definišu i diferencijali proizvoljnog reda $k \in \mathbb{N}$:

$$d^k f(\mathbf{x}) = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f(\mathbf{x}).$$

1.8 Tejlorova formula

Kao što je rečeno u samoj definiciji, diferencijabilnu funkciju je u okolini neke tačke moguće aproksimirati polinomom prvog stepena. Ako funkcija u okolini te tačke ima neprekidne parcijalne izvode višeg reda, nju je moguće aproksimirati i polinomom većeg stepena, što je predstavljeno Tejlorovom formulom.

Teorema 1.8.1.

Neka je funkcija $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definisana u okolini tačke $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ i neka u toj okolini ima neprekidne sve parcijalne izvode zaključno sa izvodima reda $m+1$. Tada važi

$$f(\mathbf{x}) = T_m(\mathbf{x}) + R_m(\mathbf{x}),$$

gde je

$$T_m(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k f(\mathbf{a})}{k!}$$

Tejlorov polinom stepena m funkcije $f(\mathbf{x})$ u okolini tačke $\mathbf{a}$, a

$$R_m(\mathbf{x}) = \frac{d^{m+1} f(\mathbf{a} + \theta d\mathbf{x})}{(m+1)!}, \quad 0 < \theta < 1,$$

ostatak u Tejlorovoj formuli.

Ostatak $R_m(\mathbf{x})$ predstavlja grešku koja se pravi aproksimacijom funkcije njenim Tejlorovim polinomom i može se pokazati da je

$$R_m(\mathbf{x}) = o\left(|d\mathbf{x}|^m\right), \qquad |d\mathbf{x}| \to 0.$$

Za funkciju dveju promenljivih $f(x,y)$ Tejlorov polinom drugog stepena u okolini tačke (a,b) je

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right), \end{aligned}$$

a ostatak je

$$R_2(x,y) = o\left((x-a)^2 + (y-b)^2\right), \qquad (x,y) \to (a,b).$$

Koristeći vektorsko-matričnu notaciju, Tejlorov polinom drugog stepena u okolini tačke $\mathbf{0}$ može da se zapiše na sledeći način:

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) + \left(\nabla^T \mathbf{x}\right) f(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}^T H \mathbf{x}\right) f(\mathbf{0}).$$

ZADACI ZA VEŽBANJE

1. Odrediti izvode sledećih funkcija u navedenim tačkama u pravcima zadatim navedenim vektorima:

a) $f(x,y) = \sin(2x+3y), \quad P(-6,4), \quad \mathbf{u} = (\sqrt{3}, 1);$

b) $f(x,y) = \arctan(xy^2), \quad P(1,1), \quad \angle(\mathbf{u}, \mathbf{i}) = -\pi/4;$

c) $f(x,y,z) = z^2 e^{x^2-y^2}, \quad P(1,-1,1), \quad \mathbf{u} = (1,1,1).$

2. Odrediti pravce najbržeg rasta sledećih funkcija i izvode u tim pravcima u navedenim tačkama.:

a) $f(x,y) = ye^{-x} + xe^{-y}, \qquad P(0,0);$

b) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+4y^2+9z^2}, \quad P(3,6,-2).$

3. Planinar se penje uz brdo čija je površina opisana jednačinom $z = 1000 - 0.005x^2 - 0.01y^2$ (Ox-osa je usmerena prema istoku, a Oy- osa prema zapadu). U tački sa koordinatama $(60, 40, 966)$ on se zaustavlja i odlučuje o nastavku puta.

a) Ako krene prema jugu, da li će se peti prema vrhu ili spuštati u podnožje brda?

b) Ako krene severozapadno, da li će se peti prema vrhu ili spuštati u podnožje brda?

c) U kom pravcu je uspon najveći? Kolika je brzina rasta uspona u tom pravcu?

4. Odrediti gradijente i hesijane sledećih funkcija:

a) $f(x, y) = e^{3x+4y}$; **b)** $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.

5. Za sledeće funkcije odrediti Tejlorove polinome drugog stepena u okolini tačke $\mathbf{0}$:

a) $f(x, y) = (x + 1)e^y$; **b)** $f(x, y, z) = xy + \ln(1 + x + y)$.

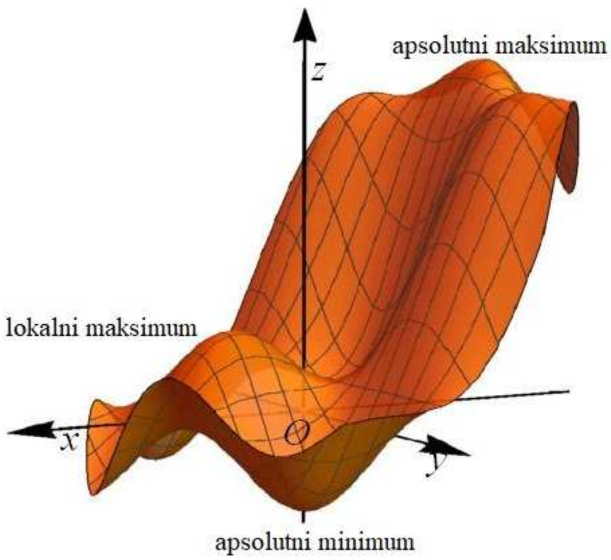
1.9 Lokalne ekstremne vrednosti

Kao i kod funkcija jedne nezavisno promenljive, diferencijalni račun je osnovni alat za određivanje tačaka u kojima funkcija $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dostiže najveću ili najmanju vrednost na skupu na kome je definisana, ili delu tog skupa.

Definicija 1.9.1.

Ako postoji okolina $U_\mathbf{a}$ tačke $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ takva da je $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$ za svako $\mathbf{x} \in U_\mathbf{a}$, tada je $\mathbf{a}$ tačka lokalnog minimuma, a $f(\mathbf{a})$ vrednost lokalnog minimuma.
Ako postoji okolina $U_\mathbf{a}$ tačke $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ takva da je $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ za svako $\mathbf{x} \in U_\mathbf{a}$, tada je $\mathbf{a}$ tačka lokalnog maksimuma, a $f(\mathbf{a})$ vrednost lokalnog maksimuma.

U svojoj oblasti definisanosti funkcija može da ima više lokalnih minimuma i maksimuma, kao što se vidi na Slici 1.16. Ako je $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$ $(f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}))$ za svako $\mathbf{x} \in D_f$, tada je $\mathbf{a}$ tačka apsolutnog minimuma (maksimuma).



Slika 1.16: Lokalne i apsolutne ekstremne vrednosti

Potrebni uslovi za egzistenciju lokalnih ekstremuma funkcije dati su u sledećoj teoremi.

Teorema 1.9.1.

Ako funkcija $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ u tački $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ima lokalni minimum ili maksimum i u toj tački ima parcijalne izvode prvog reda, tada je

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

Kao i u jednodimenzionalnom slučaju, lokalne ekstremne vrednosti funkcije tražimo u nulama prvih izvoda. Tačke u kojima su svi prvi parcijalni izvodi jednaki 0 zovu se *stacionarne tačke*[4].

Primer 1.9.1.

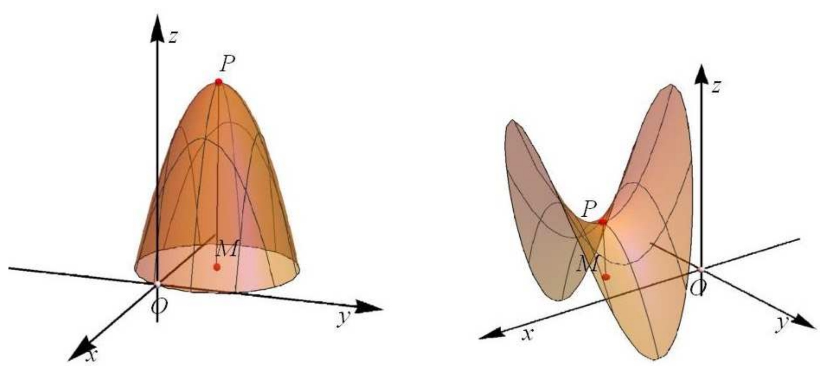
Funkcija $f(x, y) = 5 - (x+2)^2 - (y-1)^2$ ima lokalni maksimum u tački $M(-2, 1)$ i njegova vrednost je $f(-2, 1) = 5$ (Slika 1.17, levo).

[4] critical points

Koordinate tačke maksimuma mogu da se dobiju rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -2(x+2) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2(y-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Tačka M je i tačka apsolutnog maksimuma.



Slika 1.17: $f(x,y) = 5-(x+2)^2-(y-1)^2$ $\quad f(x,y) = (x-2)^2-(y+1)^2+2$

Primer 1.9.2.

Funkcija $f(x,y) = (x-2)^2-(y+1)^2+2$ (Slika 1.17, desno) ima parcijalne izvode

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2(y+1).$$

Jedina stacionarna tačka je $M(2,-1)$, ali to nije tačka u kojoj funkcija dostiže ekstremnu vrednost. Zaista, u svakoj okolini tačke M postoje tačke $(2+\varepsilon,-1)$ u kojima je vrednost funkcije veća od $f(2,-1)=2$, ali i tačke $(2,-1+\varepsilon)$ u kojima je vrednost funkcije manja od $f(2,-1)$.

Prethodni primer pokazuje da uslovi vezani za prve parcijalne izvode nisu dovoljni za egzistenciju ekstremuma u nekoj tački. U svakoj stacionarnoj tački tangentna ravan je paralelna Oxy ravni. Ako se u okolini stacionarne tačke površ nalazi samo sa jedne strane tangentne ravni, u pitanju je tačka ekstremuma. Ako se, naprotiv, u okolini stacionarne tačke površ prostire sa obe strane tangentne ravni, ona se zove *sedlasta tačka*.

Dovoljni uslovi egzistencije ekstremnih vrednosti koriste druge parcijalne izvode funkcije, odnosno njen hesijan. Najpre ćemo navesti neke pojmove i činjenice neophodne za njihovo formulisanje.

Ako su parcijalni izvodi drugog reda neprekidne funkcije, hesijan je simetrična matrica.

Simetrična matrica $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ je:
- pozitivno definitna, ako je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ za svako $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$,
- pozitivno semidefinitna, ako je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0$ za svako $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
- negativno definitna, ako je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$ za svako $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$,
- negativno semidefinitna, ako je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leq 0$ za svako $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
- nedefinitna, ako je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ promenljivog znaka u $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.9.2.

Neka je $\mathbf{a}$ *stacionarna tačka funkcije* $f(\mathbf{x})$ *i* $H_f = \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})\right]_{n\times n}$ *hesijan u toj tački. Tada važi:*
- *Ako je* H_f *pozitivno definitna matrica, tada u tački* $\mathbf{a}$ *funkcija dostiže lokalni minimum.*
- *Ako je* H_f *negativno definitna matrica, tada u tački* $\mathbf{a}$ *funkcija dostiže lokalni maksimum.*
- *Ako* H_f *nije definitna matrica, tada u tački* $\mathbf{a}$ *funkcija ne dostiže ekstremnu vrednost.*

Ispitivanje definitnosti matrice, odnosno kavadratne forme

$$\mathbf{x}^T H_f \mathbf{x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}x_n\right)^2 f(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j$$

koristeći samo definiciju je vrlo komplikovano. Zato se po potrebi primenjuju različiti kriterijumi, od kojih će ovde biti pomenuta dva.

Silvesterov kriterijum koristi glavne minore matrice H_f. Ako su svi glavni minori $\det \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})\right]_{k\times k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, pozitivni, matrica H_f je pozitivno definitna. Ako glavni minori det $\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})\right]_{k\times k}$ imaju znak $(-1)^k$, tada je matrica H_f negativno definitna.

Drugi kriterijum koristi sopstvene vrednosti matrice H_f. Ako su sve sopstvene vrednosti matrice H_f pozitivne (negativne), matrica H_f je pozitivno definitna (negativno definitna).

Za funkciju $f(x,y)$ hesijan u tački (a,b) je

$$H_f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{bmatrix},$$

a glavni minori

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b),$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{vmatrix} = .\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2.$$

Na osnovu toga mogu da se konkretizuju dovoljni uslovi za egzistenciju ekstremnih vrednosti funkcije dveju nezavisno promenljivih.

Teorema 1.9.3.

Neka je (a,b) stacionarna tačka funkcije $f(x,y)$ i neka je

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2.$$

Tada važi:

Ako je $D > 0$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$, tada u tački (a,b) funkcija dostiže minimum.

Ako je $D > 0$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, tada u tački (a,b) funkcija dostiže maksimum.

Ako je $D < 0$, tada je (a,b) sedlasta tačka.

Primetimo da u slučaju $D = 0$ prethodna teorema ne daje odgovor na pitanje o egzistenciji ekstremne vrednosti, pa se priroda stacionarne tačke ispituje na drugi način.

Primer 1.9.3.

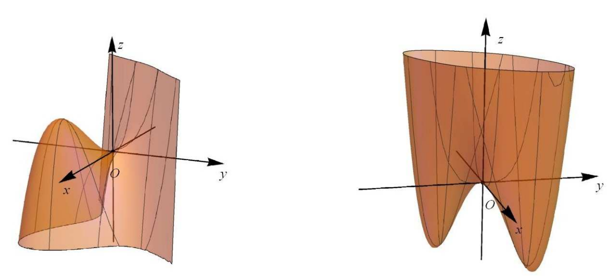
Odredimo ekstremne vrednosti funkcije $f(x,y) = y^3 - x^3 - 3xy$ (Slika 1.18, levo).
Rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 - 3y = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = -x^2, \\ x^4 - x = 0, \end{cases}$$

dobijamo stacionarne tačke $M_1(0,0)$ i $M_2(1,-1)$. Drugi parcijalni izvodi su

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

Za $x = 0$, $y = 0$ je $D = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$, pa je $M_1(0,0)$ sedlasta tačka. Za $x = 1$, $y = -1$ je $D = (-6) \cdot (-6) - (-3)^2 = 27 > 0$, $f_x = -6 < 0$, pa u tački $M_2(1,-1)$ funkcija dostiže maksimum $f(1,-1) = 1$.



Slika 1.18: $f(x,y) = y^3 - x^3 - 3xy$ $\qquad f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

Primer 1.9.4.

Ekstremne vrednosti funkcije $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ (Slika 1.18, desno) određuju se kao u prethodnom primeru. Stacionarne tačke $M_1(0,0)$, $M_2(1,1)$ i $M_3(-1,-1)$ dobijaju se rešavanjem sistema jednačina

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x = 0.$$

Imajući u vidu druge parcijalne izvode

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y,$$

zaključujemo da je $M_1(0,0)$ sedlasta tačka, a u tačkama $M_2(1,1)$ i $M_3(-1,-1)$ funkcija ima lokalne minimume $f(1,1) = f(-1,-1) = -2$.

1.10 Uslovni ekstremumi

U praksi se često postavlja problem određivanja najmanje ili najveće vrednosti funkcije uz izvesna ograničenja, odnosno uslove koje nezavisno promenljive zadovoljavaju. Ako su ograničenja zadata jednakostima, u pitanju je problem određivanja uslovnih ekstremuma.

Neka je funkcija $f(x,y)$ definisana u $D_f \subset \mathbb{R}^2$ i jednačinom $h(x,y) = 0$ zadata kriva C u $\mathbb{R}^2$. Tačke uslovnih ekstremuma funkcije $f(x,y)$ pod uslovom $h(x,y) = 0$ su one tačke na krivoj C u kojima funkcija dostiže najmanju ili najveću vrednost kada tačka (x,y) prolazi krivom C.

U slučaju funkcije $f(x,y,z)$, čija je oblast definisanosti $D_f \subset \mathbb{R}^3$, neka je jednačinom $h(x,y,z) = 0$ implicitno zadata površ S, a sistemom jednačina $h_1(x,y,z) = 0,\ h_2(x,y,z) = 0$ kriva C (presek dveju površi) u $\mathbb{R}^3$. Tako, uslovni ekstremum funkcije $f(x,y,z)$ pod uslovom $h(x,y,z) = 0$ predstavlja ekstremum te funkcije kada tačka (x,y,z) pripada površi S, a pod uslovima $h_1(x,y,z) = 0,\ h_2(x,y,z) = 0$ ekstremum kada tačka (x,y,z) pripada krivoj C.

I u opštem slučaju, kada je funkcija $f(\mathbf{x})$ definisana u $D_f \subset \mathbb{R}^n$, jednakostima $h_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, je opisan neki skup u $\mathbb{R}^n$. Ako funkcije $h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, imaju parcijalne izvode, matrica

$$J(\mathbf{x}) = J(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right]_{m \times n}$$

se zove *Jakobijeva matrica* preslikavanja $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \ldots, h_m(\mathbf{x}))$, a njen rang zove se rang preslikavanja. U daljem izlaganju pretpostavljaćemo da je $m < n$ i da je rang preslikavanja jednak m.

Definicija 1.10.1.

Neka je funkcija $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definisana u oblasti D_f i jednakostima $h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, definisan skup E takav da $D_f \cap E \neq \emptyset$. Funkcija u tački $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D_f \cap E$ dostiže uslovni minimum (uslovni maksimum) ako postoji okolina $U_{\mathbf{a}}$ takva da je $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$ ($f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$) za svako $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}} \cap E$.

Problem određivanja uslovnih ekstremuma se bazira na rešavanju problema određivanja lokalnih ekstremuma nekih modifikovanih funkcija.

Jedna od najjednostavnijih ideja za rešavanje problema uslovnih ekstremuma realizovana je kroz *metod eliminacije promenljivih*. Pod navedenim pretpostavkama za funkcije uslova, iz sistema jednačina

$$h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, m,$$

može da se m promenljivih izrazi u funkciji od preostalih $n - m$, tj.

$$x_i = \phi_i(x_{m+1}, \ldots, x_n), \qquad i = 1, \ldots, m,$$

Zamenom u polaznoj funkciji dobija se

$$\begin{aligned} & f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots x_n) \\ & \quad = f\left(\phi_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, \phi_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots x_n\right) \\ & \quad = F(x_{m+1}, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Tada lokalni ekstremumi funkcije $F(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ daju uslovne ekstremume funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

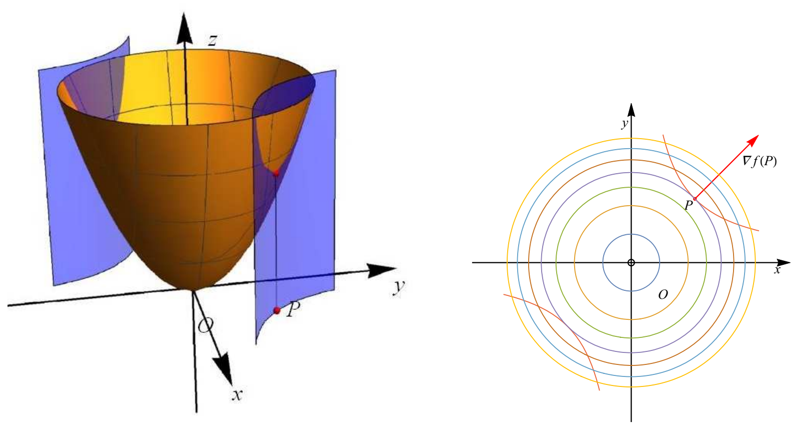
Primer 1.10.1.

Odredimo uslovne ekstremne vrednosti funkcije (Slika 1.19)

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad \text{uz uslov} \qquad h(x, y) = xy - 1 = 0.$$

Ako iz jednačine kojom je definisan uslov izrazimo $y = 1/x$ i zamenimo u polaznoj funkciji, dobijamo funkciju jedne promenljive

$F(x) = f\left(x, \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$. Ona dostiže minimum u tačkama $x = 1$ i $x = -1$, što znači da funkcija $f(x, y)$ u tačkama $P(1, 1)$ i $Q(-1, -1)$ dostiže uslovni minimum $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$. Napomenimo da tačke P i Q nisu tačke lokalnih ekstremuma funkcije $f(x, y)$. Jedina tačka lokalnog ekstremuma ove funkcije je $O(0, 0)$, u kojoj ona dostiže lokalni minimum $f(0, 0) = 0$, ali nije zadovoljen zadati uslov.



Slika 1.19: Uslovni ekstremum

Iako ima jednostavnu ideju, realizacija metoda eliminacije promenljivih je često komplikovana i u opštem slučaju nije prihvatljiva. Zato se za određivanje uslovnih ekstremuma najčešće koristi *metod Lagranžovih množitelja*. Logiku ovog metoda objasnićemo na problemu iz Primera 1.10.1.

Na Slici 1.19 levo predstavljen je graf funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ u kontekstu uslova pod kojim se traže ekstremne vrednosti. Desna strana Slike 1.19 prikazuje nivo-linije te površi, implicitno zadate jednačinama $f(x, y) = c$, i krivu koja je definisana uslovom $h(x, y) = xy - 1 = 0$. Odrediti uslovnu ekstremnu vrednost funkcije $f(x, y)$ pod zadatim uslovom u stvari znači odrediti najmanju (najveću) vrednost konstante c za koju nivo-linija $f(x, y) = c$ ima zajedničku tačku sa krivom $h(x, y) = 0$. Ta najmanja (najveća) vrednost konstante c dobija se kada se nivo-linija i kriva dodiruju, tj. imaju zajedničku tangentu. To znači da gradijenti funkcija $f(x, y)$ i $h(x, y)$ u dodirnoj tački moraju da budu paralelni, tj. mora da važi

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla h(x,y),$$

ili, drugačije zapisano,

$$\nabla f(x,y) - \lambda \nabla h(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial h}{\partial y} = 0.$$

Osim toga, u toj tački je $h(x,y) = 0$, što znači da ona zadovoljava zahtevani uslov, i $f(x,y) = c$, što znači da funkcija upravo u njoj dostiže najmanju (najveću) vrednost pod zahtevanim uslovom. Iz svega rečenog može da se zaključi da je egzistencija uslovnog ekstremuma funkcije $f(x,y)$ pod uslovom $h(x,y) = 0$ vezana za egzistenciju lokalnog ekstremuma funkcije

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda h(x,y).$$

Zaista, potrebni uslovi za egzistenciju njenih lokalnih ekstremuma

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= h(x,y) = 0, \end{aligned}$$

isti su kao upravo izvedeni uslovi za egzistenciju uslovnih ekstremuma funkcije $f(x,y)$ pod uslovom $h(x,y) = 0$.

Opisana razmatranja mogu se uopštiti i za funkcije n promenljivih sa m ($m < n$) uslova zadatih jednakostima. Potrebni uslovi za egzistenciju uslovnog ekstremuma dati su u sledećoj teoremi.

Teorema 1.10.1.

Neka su funkcije $f(\mathbf{x}), h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \ldots, h_m(\mathbf{x})$ ($m < n$) *neprekidno diferencijabilne u okolini tačke* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *i neka je rang preslikavanja* $(h_1(\mathbf{x}), h_1(\mathbf{x}), \ldots, h_1(\mathbf{x}))$ *jednak* m. *Ako u tački* $\mathbf{a}$ *funkcija* $f(\mathbf{x})$ *dostiže uslovni ekstremum pod uslovima* $h_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, *tada postoje konstante* λ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, *tako da je* $(a_1, \ldots, a_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *stacionarna tačka funkcije*

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j(x_1, \ldots, x_n).$$

Funkcija

$$F(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = f(x_1,\ldots,x_n) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j(x_1,\ldots,x_n)$$

zove se Lagranžova funkcija, a konstante λ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ Lagranžovi množitelji.

Prema navedenom, uslovne stacionarne tačke funkcije $f(\mathbf{x})$ određuju se kao stacionarne tačke Lagranžove funkcije. Da li u njima funkcija zaista dostiže uslovni ekstremum ispituje se preko drugog diferencijala Lagranžove funkcije. Ako je u stacionarnoj tački $d^2F > 0$, funkcija dostiže uslovni minimum, a ako je $d^2F < 0$, funkcija dostiže uslovni maksimum. Ako d^2F nije konstantnog znaka, u toj stacionarnoj tački nema uslovnog ekstremuma.

Primetimo da se λ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, ne pojavljuje ni u jednom prvom parcijalnom izvodu, pa su svi drugi parcijalni izvodi u kojima se bar jednom diferencira po nekom λ_j jednaki nuli. Zato je drugi diferencijal Lagranžove funkcije

$$\begin{aligned}
&d^2F(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\\
&\quad= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}d\lambda_1 + \cdots \frac{\partial F}{\partial \lambda_m}d\lambda_m\right)^2\\
&\quad= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n\right)^2.
\end{aligned}$$

Primer 1.10.2.

Rešimo problem uslovnog ekstremuma iz Primera 1.10.1 metodom Lagranžovih množitelja. Za funkciju $f(x,y) = x^2 + y^2$ i uslov $h(x,y) = xy - 1 = 0$ Lagranžova funkcija je

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(xy - 1),$$

a njene stacionarne tačke se određuju rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x - \lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y - \lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -xy + 1 = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{\lambda y}{2} \\ 2y - \dfrac{\lambda^2 y}{2} = 0 \\ xy = 1 \end{cases}$$

Iz druge jednačine $y(4-\lambda^2) = 0$ dobija se $y = 0$, $\lambda = 2$ ili $\lambda = -2$. Ako je $y = 0$ ili $\lambda = -2$, preostale dve jednačine nisu zadovoljene. Jedina mogućnost je $\lambda = 2$, $x = y$, $xy = 1$, pa se za istu vrednost $\lambda = 2$ dobijaju dve stacionarne tačke, $(x, y) = (1, 1)$ i $(x, y) = (-1, -1)$.
Drugi diferencijal Lagranžove funkcije je

$$\begin{aligned} d^2F(x, y, \lambda) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy\right)^2 \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dx\ dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 \\ &= 2dx^2 - \lambda dx\ dy + 2dy^2. \end{aligned}$$

Obe stacionarne tačke dobijaju se za $\lambda = 2$, pa je

$$d^2F(\pm 1, \pm 1, 2) = 2(dx^2 + dxdy + dy^2).$$

Diferenciranjem jednačine uslova $xy - 1 = 0$ dobijamo

$$d(xy-1) = \frac{\partial}{\partial x}(xy-1)dx + \frac{\partial}{\partial y}(xy-1)dy = ydx + xdy = 0,$$

tj. $ydx = -xdy$, odakle zaključujemo da je u obema stacionarnim tačkama $dx = -dy$. Zato je

$$d^2F(\pm 1, \pm 1, 2) = 2(dx^2 + dxdy + dy^2) = 2(dx^2 - dx^2 + dx^2) = 2dx^2.$$

Kako je $d^2F(\pm 1, \pm 1, 2) > 0$, u tačkama $(1, 1)$ i $(-1, -1)$ funkcija dostiže lokalne minimume.

Primer 1.10.3.

Funkcija $f(x, y) = 1 - x^2 + y^2$ nema lokalne ekstremume, a jedina stacionarna tačka $(0, 0)$ je sedlasta tačka. Potražimo uslovne ekstremume ove funkcije pod uslovom $x^2 + y^2 = 1$.
Lagranžova funkcija je

$$F(x, y, \lambda) = 1 - x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

a sistem jednačina za određivanje njenih stacionarnih tačaka je

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = -2x - 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 - 1) = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x(-1 - \lambda) = 0 \\ 2y(1 - \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Rešavanjem sistema dobijaju se uslovne stacionarne tačke $(0, 1)$ i $(0, -1)$ za $\lambda = 1$ i $(1, 0)$ i $(-1, 0)$ za $\lambda = -1$.
Drugi parcijalni izvodi Lagranžove funkcije su

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2 - 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 - 2\lambda,$$

pa je drugi diferencijal

$$d^2F(x, y, \lambda) = 2\left((-1 - \lambda)dx^2 + (1 - \lambda)dy^2\right).$$

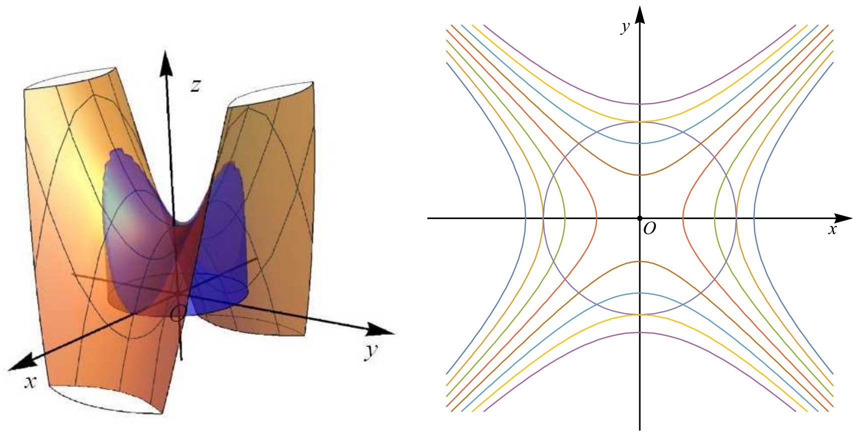
Tako, u stacionarnim tačkama $(0, 1)$ i $(0, -1)$ za $\lambda = 1$ je

$$d^2F(0, \pm 1, 1) = -4dx^2 < 0,$$

pa u njima funkcija dostiže uslovni maksimum $f(0, \pm 1) = 2$. Slično, u $(1, 0)$ i $(-1, 0)$ za $\lambda = -1$ važi

$$d^2F(\pm 1, 0, -1) = 4dy^2 > 0,$$

pa u njima funkcija dostiže uslovni minimum $f(\pm 1, 0) = 0$.
Graf i nivo-linije funkcije $f(x, y) = 1 - x^2 + y^2$ predstavljeni su na Slici 1.20.



Slika 1.20: Uslovni ekstremum funkcije $f(x,y) = 1 - x^2 + y^2$ pod uslovom $x^2 + y^2 = 1$.

Primer 1.10.4.

Odredimo uslovne ekstremume funkcije $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ pod uslovima $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$.
Lagranžova funkcija je

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = x + 2y + 3z - \lambda(x^2 + y^2 - 2) - \mu(y + z - 2),$$

a sistem za određivanje stacionarnih tačaka

$$F_x = 1 - 2\lambda x = 0,\ F_y = 2 - 2\lambda y - \mu = 0,\ F_z = 3 - \mu = 0,$$
$$F_\lambda = -(x^2 + y^2 - 2) = 0, \quad F_\mu = -(y + z - 2) = 0.$$

Rešavanjem sistema dobijaju se stacionarne tačke $(1,-1,3)$ za $\lambda = 1/2,\ \mu = 3$ i $(-1,1,1)$ za $\lambda = -1/2,\ \mu = 3$. Drugi diferencijal je

$$\begin{aligned} d^2F &= F_{xx}dx^2 + F_{yy}dy^2 + F_{zz}dz^2 \\ &\quad + 2\,(F_{xy}dx\,dy + F_{xz}dx\,dz + F_{yz}dy\,dz) \\ &= -2\lambda(dx^2 + dy^2). \end{aligned}$$

Stoga, u tački $(1,-1,3)$ funkcija dostiže uslovni maksimum $f(1,-1,3) = 8$, a u $(-1,1,1)$ uslovni minimum $f(-1,1,1) = 4$.

1.11 Apsolutne ekstremne vrednosti

U prethodnom izlaganju predstavljeni su uslovi za egzistenciju lokalnih i uslovnih ekstremnih vrednosti funkcija više promenljivih, kao i načini za njihovo određivanje. Matematički modeli ovih problema su

$$\min / \max f(\mathbf{x})$$

za lokalne, odnosno

$$\begin{gathered} \min / \max f(\mathbf{x}) \\ h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots m \end{gathered}$$

za uslovne ekstremume. U praksi se, međutim, često postavlja opštiji problem: odrediti najmanju i najveću vrednost funkcije na nekom skupu $D \subset \mathbb{R}^n$ koji je opisan nejednakostima, tj.

$$\begin{gathered} \min / \max f(\mathbf{x}) \\ h_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \ldots m, \end{gathered}$$

kao i tačke u kojima se te vrednosti dostižu. Ovako definisan problem je, u stvari, određivanje apsolutnih ekstremuma na skupu D.

Ako je skup D zatvoren i ograničen, na osnovu Vajerštrasove teoreme (Teorema 1.3.1) postoje tačke u D u kojima funkcija dostiže svoju najmanju i najveću vrednost. Teorijski, postupak određivanja tih tačaka može da se opiše na sledeći način:

- Odrediti stacionarne tačke koje se nalaze u unutrašnjosti skupa D, tj. one koje zadovoljavaju stroge nejednakosti

$$h_j(\mathbf{x}) < 0, \quad j = 1, 2, \ldots m.$$

- Odrediti ekstremume funkcije na rubu skupa D, tj. uslovne ekstremume pod uslovom

$$h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots m.$$

- Uporediti sve dobijene vrednosti. Najmanja dobijena vrednost funkcije je njen apsolutni minimum, a najveća njen apsolutni maksimum na skupu D.

Primer 1.11.1.

Odredimo najmanju i najveću vrednost funkcije

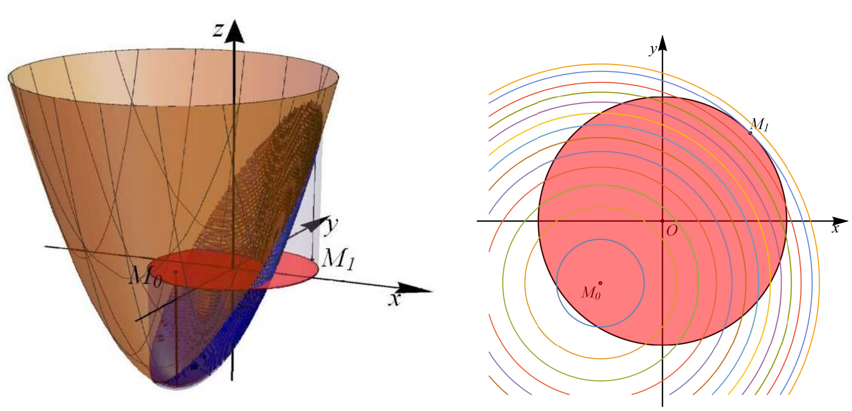
$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3$$

na krugu $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ (Slika 1.21).
Kako je $f_x = 2x + 2$, $f_y = 2y + 2$, jedina stacionarna tačka funkcije je $M_0(-1, -1)$ i ona se nalazi u skupu D. U tački M_0 funkcija uzima vrednost $f(-1, -1) = -5$.
Za određivanje uslovnih ekstremuma funkcije na rubu oblasti, tj. na krivoj $C: \ x^2 + y^2 = 4$, primenićemo metod eliminacije promenljivih. Primetimo da koordinate proizvoljne tačke krive C zadovoljavaju jednakosti $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \leq t < 2\pi$, pa funkcija dobija oblik

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 \\ &= 4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 4\cos t + 4\sin t - 3 \\ &= 1 + 4(\sin t + \cos t) = g(t). \end{aligned}$$

Njene ekstremne vrednosti određujemo kao nule prvog izvoda:

$$g'(t) = 4(\cos t - \sin t) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad t = \pi/4 \quad \text{ili} \quad t = 3\pi/4.$$



Slika 1.21: Apsolutni ekstremumi funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3$

Kako je $g''(t) = -4(\sin t + \cos t)$,

$$g''(\pi/4) = -4\sqrt{2} < 0, \qquad g''(3\pi/4) = 4\sqrt{2} > 0,$$

funkcija $g(t)$ dostiže maksimum za $t = \pi/4$, a minimum za $t = 3\pi/4$. To znači da funkcija $f(x,y)$ u tački dostiže uslovni maksimum $f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = 1 + 4\sqrt{2}$, a u tački $M_2(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ dostiže uslovni minimum $f(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 1 - 4\sqrt{2}$.
Upoređivanjem dobijene tri vrednosti funkcije zaključujemo da ona na skupu D dostiže apsolutni minimum $f_{\min} = -5$ u tački $M_0(-1,-1)$ i apsolutni maksimum $f_{\max} = 1 + 4\sqrt{2}$ u tački $M_1(\sqrt{2},\sqrt{2})$.

Predstavljeni načini određivanja lokalnih ili apsolutnih ekstremuma su teorijski i retko mogu da se primene u praksi. Najpre, funkcije nisu uvek zadate analitički, već samo diskretnim skupom tačaka kao rezultati eksperimenata ili merenja. Zatim, za sve predstavljene metode podrazumeva se postojanje parcijalnih izvoda, što može da bude strog zahtev. I, konačno, jednačine za određivanje stacionarnih tačaka su, po pravilu, nelinearne, čija tačna rešenja ne mogu da se odrede.

U nastavku će biti predstavljeni metodi za praktično određivanje minimalnih ili maksimalnih vrednosti funkcija, kao i tačaka u kojima se one dostižu. Ovi metodi zovu se *metodi optimizacije*.

ZADACI ZA VEŽBANJE

1. Odrediti lokalne ekstremne vrednosti i sedlaste tačke sledećih funkcija:

a) $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$; **b)** $f(x,y) = (1+xy)(x+y)$;

c) $f(x,y) = x^3y + 12x^2 - 8y$; **d)** $f(x,y) = e^{4y-x^2-y^2}$;

e) $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$; **f)** $f(x,y) = e^x \cos y$.

2. Dokazati da funkcija $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2$ ima beskonačno mnogo stacionarnih tačaka. Koristeći drugi diferencijal funkcije $f(x,y)$ dokazati da su sve one tačke lokalnih minimuma.

3. Odrediti uslovne ekstremume sledećih funkcija pod navedenim uslovima:

a) $f(x,y) = 4x + 6y,\qquad x^2 + y^2 = 13;$

b) $f(x,y) = x^2y,\qquad x^2 + 2y^2 = 6;$

c) $f(x,y) = e^{xy},\qquad x^3 + y^3 = 16;$

d) $f(x,y,z) = 2x + 6y + 10z,\qquad x^2 + y^2 + z^2 = 35;$

e) $f(x,y,z) = x + 2y,\qquad x + y + z = 1,\ y^2 + z^2 = 4.$

4. Odrediti apsolutne ekstremume sledećih funkcija na navedenim skupovima:

a) $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5,\qquad x^2 + y^2 \le 16;$

b) $f(x,y) = e^{-xy},\qquad x^2 + 4y^2 \le 1.$

5. Odrediti tačku na ravni $\alpha:\ x + 2y + z = 4$ koja je najbliža tački $A(1,0,-2)$, kao i najkraće rastojanje tačke A od ravni α.

6. Odrediti tačku na površi $y^2 = 9 + xz$ koja je na najkraćem rastojanju od koordinatnog početka, kao i to najkraće rastojanje.

7. Od kartona površine $12\mathrm{m}^2$ treba napraviti kutiju bez poklopca oblika kvadra. Odrediti dimenzije kutije tako da zapremina bude maksimalna.

8. Od kartona treba napraviti kutiju bez poklopca oblika kvadra zapremine $32000\mathrm{cm}^3$. Odrediti dimenzije kutije tako da utrošak materijala bude minimalan.

9. Odrediti jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $(1,2,3)$ i u prvom oktantu odseca tetraedar minimalne zapremine.