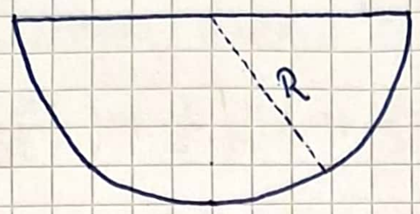
1. Calcule la frecuencia de pequeñas oscilaciones alrededor de los puntos de equilibrio de los siguientes cuerpos.

a) Una placa semicircular de masa M y radio R que se encuentra sobre una superficie plana.



→ La placa solo rota en un eje fijo, así que su energía cinética depende de una rotación

$$T = \frac{1}{2} \sum_a m_a \dot{r}_a^{2} \quad ; \quad r'_a \to \text{posición relativa al centro de masa}$$

$$T = \frac{1}{2} I_{cm} \dot{\theta}^2$$

→ La energía potencial se calcula alrededor de C. M.

$$U = Mg\Delta y \quad ; \quad \Delta y = y_{cm} - y_1 \quad \wedge \quad y_1 = y_{cm}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \Delta y = y_{cm}(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow U = Mg\, y_{cm}(1-\cos\theta)$$

→ Pero el centro de masa de una semiesfera está dado por

$$y_{cm} = \frac{4R}{3\pi}$$

→ Analizamos pequeñas oscilaciones de θ:

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow \Delta y \approx \frac{4R}{3\pi}\frac{\theta^2}{2} \approx \frac{2}{3}\frac{R}{\pi}\theta^2$$

→ Así, la energía potencial es

$$U = \frac{2}{3}\frac{R}{\pi} mg\theta^2 = \frac{1}{2}K\theta^2 \quad ; \quad K = \frac{4R}{3\pi}$$

→ Si establecemos el momento de inercia en el punto de apoyo por medio del teorema de Steiner, entonces

$$I_p = I_{cm} + md^2 \quad ; \quad I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2 \quad \wedge \quad d = R - \frac{4R}{3\pi}$$

$$I_p = \frac{1}{2}mR^2 + m\left(R - \frac{4R}{3\pi}\right)^2$$

$$I_p = m\left[\frac{R^2}{2} + \left(\frac{R(3\pi-4)}{3\pi}\right)^2\right] = mR^2\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{3\pi-4}{3\pi}\right)^2\right]$$

$$I_p \approx 0.83\,mR^2 = \frac{83}{100}mR^2$$

→ Proponiendo el Lagrangeano y las ecuaciones de movimiento

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}I_p\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k\theta^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = I_p\ddot{\theta} \quad \wedge \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -k\theta$$

$$\Rightarrow I_p\ddot{\theta} + k\theta = 0$$

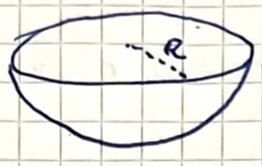
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{k}{I_p}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + w^2\theta = 0 \quad ; \quad w^2 = \frac{k}{I_p} = \frac{4R}{3\pi}\,\frac{100}{83mR^2} = \frac{400}{249\pi}\,\frac{1}{mR}$$

$$\Rightarrow \boxed{w = 20\sqrt{\frac{1}{249\pi mR}}}$$

D M A

b) Una hemiesfera de masa M y radio R.



Para una hemiesfera, tenemos lo siguiente

$$y_{cm} = \frac{3}{8} R \quad \wedge \quad I_{cm} = \frac{83}{320} mR^2$$

Analizando de manera análoga, tenemos que

$$I_p = I_{cm} + md^2 = \frac{83}{320} mR^2 + m\left(R - \frac{3}{8}R\right)^2$$

$$= m\left[\frac{83}{320}R^2 + \frac{25}{64}R^2\right]$$

$$= mR^2\left[\frac{83}{320} + \frac{25}{64}\right]$$

$$\Rightarrow I_p = \frac{13}{20} mR^2$$

Hallando las ecuaciones de movimiento

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} K \theta^2$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega^2 = \frac{K}{I_p} = \frac{3R}{8} \cdot \frac{20}{13} \cdot \frac{1}{mR^2} = \frac{15}{26} \frac{1}{mR}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{15}{26} \frac{1}{mR}}}$$

¿Cómo cambian las frecuencias en presencia o ausencia de la fuerza de roce?

Se introduce un término de fricción proporcional a la velocidad angular:

$$I_p \ddot{\theta} + b\dot{\theta} + K\theta = 0$$

Donde la nueva frecuencia del sistema

$$w = \sqrt{w_0 - \left(\frac{b}{2I}\right)^2}$$

Teniendo en cuenta que w_0 es la frecuencia hallada para cada problema. Por lo tanto, cuando aplicamos un roce o fricción, la frecuencia disminuye:

$$w < w_0$$

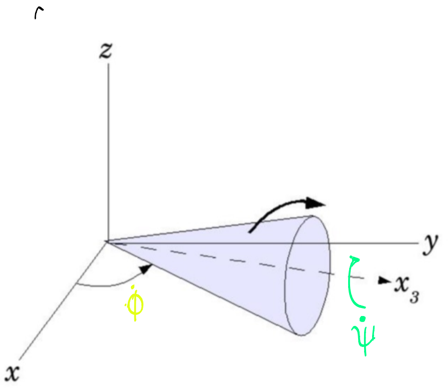
Problemas mecánica: Oscar Danilo López - Tomás Santiago Rocha

2. Un cono circular uniforme de altura h, ángulo de vértice α y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y).

a) Encuentre la energía cinética.

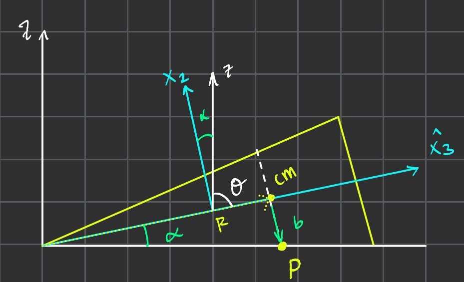
b) Calcule el tiempo requerido para retornar a la posición original del cono.

c) Calcule las componentes del momento angular del cono.



· Vamos a usar como coordenadas generalizadas los ángulos de euler (ϕ, ψ, θ)

· Analizaré mi movimiento con el S.C centrado en el cm



· $\dot{\theta}$ = Constante $\rightarrow$ el cono no hace nutación

· $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$ · $\tan\alpha = \frac{b}{\|\vec{R}\|}$ $\|\vec{R}\| \rightarrow$ La distancia del vertice al centro de masa del cono

Defino el vector de S.L al cm: $\rightarrow \|\vec{R}\| = \frac{3}{4}h$

$R = \frac{3}{4}h\,\hat{x}_3$

a) $T = T_{tr} + T_{rot}$

$$T = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}\vec{\tilde{\Omega}}\,\mathbb{I}\,\vec{\tilde{\Omega}}$$

Necesitamos encontrar la Velocidad del centro de masa.

Usamos la def: $\vec{V_p} = \vec{V_{cm}} + \vec{\Omega} \times \vec{r_p}$

· Como el cono no se desliza el punto p es un punto quieto. por lo tanto

$$\boxed{\vec{V_p} = 0 = \vec{V_{cm}} + \vec{\Omega} \times \vec{r_p}}$$

$\vec{r_p} = -b\,\hat{x}_2$

$$\vec{\Omega} \times \vec{r_p} = \begin{vmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ \tilde{\Omega}_1 & \tilde{\Omega}_2 & \tilde{\Omega}_3 \\ 0 & -b & 0 \end{vmatrix}$$

$$= b(\tilde{\Omega}_3\hat{x}_1 - \tilde{\Omega}_1\hat{x}_3)$$

$$0 = \vec{V_{cm}} + b(\tilde{\Omega}_3\hat{x}_1 - \tilde{\Omega}_1\hat{x}_3)$$

$$\vec{V_{cm}} = \frac{d\vec{R}}{dt} \longrightarrow \vec{R} = \frac{3}{4}h\,\hat{x}_3$$

Defino mi vector en el S.L pues es un sistema inercial.

$$\vec{R} = \frac{3}{4}h(\cos\phi\cos\alpha\,\hat{x} + \operatorname{Sen}\phi\cos\alpha\,\hat{y} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{z})$$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ $\quad \cos\alpha = \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin\theta$ $\rightarrow \cos\alpha = \sin\theta$, $\sin\alpha = \cos\theta$

$$\boxed{\vec{R} = \frac{3}{4}h[\cos\phi\sin\theta\,\hat{x} + \sin\phi\operatorname{sen}\theta\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}]}$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{3}{4}h\left[\frac{d}{dt}(\cos\phi\sin\theta)\hat{x} + \frac{d}{dt}(\sin\phi\sin\theta)\hat{y} + \frac{d}{dt}(\cos\theta)\hat{z}\right]$$

· θ = cte $\downarrow$ $\dot{\theta} = 0$

$$= \frac{3}{4}h\left[-\dot{\phi}\sin\phi\sin\theta\,\hat{x} + \dot{\phi}\cos\phi\sin\theta\,\hat{y}\right]$$

$$\boxed{\vec{V_{cm}} = \frac{3}{4}h\dot{\phi}[-\sin\phi\sin\theta\,\hat{x} + \cos\phi\sin\theta\,\hat{y}]}$$

$$\mathbb{I}^{cm} = \begin{pmatrix} I_1^{cm} & 0 & 0 \\ 0 & I_2^{cm} & 0 \\ 0 & 0 & I_3^{cm} \end{pmatrix} \qquad I_1 = I_2$$

ya que el S.C esta sobre los ejes principales.

La energía cinetica sera:

$$T = T_{tr} + T_{rot}$$

$$T_{tr} = \frac{1}{2}M\left[\frac{3}{4}h\dot{\phi}[-\sin\phi\sin\theta\,\hat{x} + \cos\phi\sin\theta\,\hat{y}]\right]^2$$

$\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi$
$\tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi$
$\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$

$$T_{rot} = \frac{1}{2}[I_1\tilde{\Omega}_1^2 + I_2\tilde{\Omega}_2^2 + I_3\tilde{\Omega}_3^2]$$

$$= \frac{1}{2}[I_1(\tilde{\Omega}_1^2 + \tilde{\Omega}_2^2) + I_3\tilde{\Omega}_3^2$$

$$= \frac{1}{2}[I_1(\dot{\phi}^2 s^2\theta\, \underbrace{s^2\psi} + \dot{\phi}^2 s^2\theta\, \underbrace{c^2\psi}) + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}c\theta)^2$$

$$= \frac{1}{2}[I_1\dot{\phi}^2 s^2\theta + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}c\theta)^2]$$

Lo dejo en términos α

$$= \frac{1}{2}[I_1\dot{\phi}^2 c^2\alpha + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}s\alpha)^2]$$

Finalmente la energía cinetica será:

$$T = T_{tr} + T_{rot}$$

a)

R/

$$\boxed{T = \frac{1}{2}M\left[\frac{9}{16}h^2\dot{\phi}^2[-\sin^2\phi\sin^2\theta + \cos^2\phi\sin^2\theta]\right] + \frac{1}{2}[I_1\dot{\phi}^2 c^2\alpha + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}s\alpha)^2]}$$

b)

$$0 = \vec{V_{cm}} + \vec{\tilde{\Omega}} \times \vec{r_p}$$

$\rightarrow$ Usamos la ligadura que no desliza en el punto p.

$$0 = \frac{3}{4}h\dot{\phi}[-\sin\phi\sin\theta\,\hat{x} + \cos\phi\sin\theta\,\hat{y}] + b(\tilde{\Omega}_3\hat{x}_1 - \tilde{\Omega}_1\hat{x}_3)$$

Analizamos por componentes:

$\hat{x}$:

$$0 = \frac{3}{4}h\dot{\phi}(-\sin\phi\sin\theta)\hat{x} + \underbrace{b(\tilde{\Omega}_3\hat{x}_1 - \tilde{\Omega}_1\hat{x}_3)}_{\text{Proyecto esto sobre } \hat{x}}$$

$\hat{x}\cdot\hat{x}_1 = \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi$ $\quad \tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \cancel{\dot{\theta}\cos\psi}^{0}$

$\hat{x}\cdot\hat{x}_3 = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$ $\quad \tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$

$$0 = \frac{3}{4}h\dot{\phi}(-\sin\phi\sin\theta)\hat{x} + \underline{b[(\dot{\psi} + \dot{\phi}c\theta)(c\psi c\phi - s\psi c\theta s\phi) - (\dot{\phi}s\theta s\psi)(s\theta s\phi)]}$$

$$\downarrow$$

$$\dot{\psi}c\psi c\phi - \dot{\psi}s\psi c\theta s\phi + \dot{\phi}c\theta c\psi c\phi - \dot{\phi}\underbrace{c^2\theta}s\psi s\phi - \dot{\phi}\underbrace{s^2\theta}s\psi s\phi$$

$$= \dot{\psi}c\psi c\phi - \dot{\psi}s\psi c\theta s\phi + \dot{\phi}c\theta c\psi c\phi - \dot{\phi}s\psi s\phi$$

$$= \dot{\psi}(c\psi c\phi - s\psi c\theta s\phi) + \dot{\phi}(c\theta c\psi c\phi - s\psi s\phi)$$

Reorganizando nuestra ecuación obtenemos:

$$\boxed{0 = \frac{3}{4}h\dot{\phi}(-s\phi s\theta) + b\dot{\phi}c\phi c\theta + b\dot{\psi}c\phi = 0}$$

$\hat{y}$:

$$0 = \frac{3}{4} h \dot{\phi} \left(\cos\phi \sin\theta \hat{y} \right) \hat{y} + b \left(\tilde{\Omega}_3 \hat{x}_1 - \tilde{\Omega}_1 \hat{x}_3 \right)$$

Usando las equivalencias para $\tilde{\Omega}_3$, $\tilde{\Omega}_1$, proyectamos todo sobre $\hat{y}$

$$\hat{y} \cdot \hat{x}_1 = \cos\psi \sin\phi + \sin\psi \cos\theta \cos\phi$$

$$\hat{y} \cdot \hat{x}_3 = -\sin\theta \cos\phi$$

finalmente obtenemos:

$$\boxed{0 = \frac{3}{4} h \dot{\phi} \left(\cos\phi \sin\theta \hat{y} \right) + b\dot{\phi} \sin\phi \cos\theta + b\dot{\psi} \sin\phi}$$

Para calcular el periodo simplemente necesitaremos conocer $\dot{\phi}$, la cual es una condición inicial del problema. Finalmente el periodo será:

R/ $\boxed{T = \frac{2\pi}{\dot{\phi}}}$

Ahora vamos a calcular los momentos angulares:

$$\vec{L} = \mathbb{I} \vec{\tilde{\Omega}}$$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_1 \\ \tilde{\Omega}_2 \\ \tilde{\Omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \tilde{\Omega}_1 \\ I_2 \tilde{\Omega}_2 \\ I_3 \tilde{\Omega}_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_1 \tilde{\Omega}_1 \\ I_2 \tilde{\Omega}_2 \\ I_3 \Omega_3 \end{pmatrix}$$

Tensor de inercia del cono respecto al centro de masa: (S.C)

$r \to$ radio de la base

$$\mathbb{I}^{cm} = \begin{pmatrix} \frac{3}{20} m r^2 + \frac{9}{16} m h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20} m r^2 + \frac{9}{16} m h^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10} m r^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tilde{\Omega}} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi \\ \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \cos\alpha \sin\psi \\ \dot{\phi} \cos\alpha \cos\psi \\ \dot{\psi} + \phi \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{20} m r^2 + \frac{9}{16} m h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20} m r^2 + \frac{9}{16} m h^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10} m r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \cos\alpha \sin\psi \\ \dot{\phi} \cos\alpha \cos\psi \\ \dot{\psi} + \phi \cos\theta \end{pmatrix}$$

R/ $$\boxed{\vec{L} = \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{20} m r^2 + \frac{9}{16} m h^2 \right) \left(\dot{\phi} \cos\alpha \sin\psi \right) \\ \left(\frac{3}{20} m r^2 + \frac{9}{16} m h^2 \right) \left(\dot{\phi} \cos\alpha \cos\psi \right) \\ \left(\frac{3}{10} m r^2 \right) \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta \right) \end{pmatrix}}$$