1. Considere un sistema con el Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}a\left(\dot{x}^2 \operatorname{sen}^2 y + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}b(\dot{x}\cos y + \dot{z})^2$$

donde a y b son constantes.

a) Derive las ecuaciones de movimiento del sistema.
b) Calcule e identifique las cantidades conservadas. ¿Es integrable este sistema?
c) Calcule la energía del sistema.
d) Suponga que $y(t) = y_o = $ cte. es una solución. ¿Cuáles son $x(t)$ y $z(t)$ en este caso?

a) Derivando las ec. de movimiento

• Coordenada $\dot{x}$ y x:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \, , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = a\dot{x}\operatorname{sen}^2 y + b\cos y(\dot{x}\cos y + \dot{z})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = a\ddot{x}\operatorname{sen}^2 y + 2a\dot{x}\dot{y}\operatorname{sen} y\cos y + b\ddot{x}\cos^2 y$$
$$-2b\dot{x}\dot{y}\operatorname{sen} y\cos y - b\dot{y}\dot{z}\operatorname{sen} y + b\ddot{z}\cos y$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x}(a\operatorname{sen}^2 y + b\cos^2 y) + 2\dot{x}\dot{y}\operatorname{sen} y\cos y(a-b) - b\dot{y}\dot{z}\operatorname{sen} y + b\ddot{z}\cos y = 0}$$

• Coordenadas $\dot{y}$ y y:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = a\dot{x}^2\operatorname{sen} y\cos y - b\dot{x}\operatorname{sen} y(\dot{x}\cos y + \dot{z})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = a\dot{y} \, , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = a\ddot{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{a\ddot{y} + \dot{x}^2\operatorname{sen} y\cos y\,(b-a) + b\dot{x}\dot{z}\operatorname{sen} y = 0}$$

• Coordenadas $\dot{z}$ y z:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \, , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = b(\dot{x}\cos y + \dot{z})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) = b(\ddot{x}\cos y - \dot{x}\dot{y}\operatorname{sen} y + \ddot{z})$$

$$\Rightarrow \boxed{b(\ddot{x}\cos y - \dot{x}\dot{y}\operatorname{sen} y + \ddot{z}) = 0}$$

b) Cantidades conservadas:

• Como x y z son cíclicas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_x = \text{cte}$$

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dot{x}(a\operatorname{sen}^2 y + b\cos^2 y) + b\dot{z}\cos y = \text{cte}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \Rightarrow p_z = \text{cte}$$

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = b(\dot{x}\cos y + \dot{z}) = \text{cte}$$

• Energía:

$$E = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathcal{L}$$

$$E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\dot{y} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\dot{z} - \mathcal{L} = \text{cte}$$

↳ La energía del sistema es constante porque la variable del tiempo no está explícita en $\mathcal{L}$

Por lo tanto, tenemos tres grados de libertad $s=3$ y tres cantidades conservadas $p_x = \text{cte}$, $p_z = \text{cte}$ y $E = \text{cte}$. Entonces, el sistema sí es integrable.

c) Energía del sistema:

$$E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\dot{y} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\dot{z} - \mathcal{L}$$

$$E = a\dot{x}^2\operatorname{sen}^2 y + b\cos y(\dot{x}^2\cos y + \dot{x}\dot{z})$$
$$+ a\dot{y}^2 + b\dot{x}\dot{z}\cos y + b\dot{z}^2$$
$$-\frac{1}{2}a(\dot{x}^2\operatorname{sen}^2 y + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}b(\dot{x}\cos y + \dot{z})^2$$

$$E = a\dot{x}^2\operatorname{sen}^2 y + b\dot{x}^2\cos^2 y + \cancel{b\dot{x}\dot{z}\cos y} + a\dot{y}^2$$
$$+ b\dot{x}\dot{z}\cos y + b\dot{z}^2 - \frac{1}{2}a\dot{x}^2\operatorname{sen}^2 y - \frac{1}{2}a\dot{y}^2$$
$$-\frac{1}{2}b\dot{x}^2\cos^2 y - \cancel{b\dot{x}\dot{z}\cos y} - \frac{1}{2}b\dot{z}^2$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\dot{x}^2(a\operatorname{sen}^2 y + b\cos^2 y) + \frac{1}{2}a\dot{y}^2 + \frac{1}{2}b\dot{z}^2 + b\dot{x}\dot{z}\cos y}$$

d) Supongo que $y = y_0$. $x(t) = ?$, $z(t) = ?$

$$y = y_0 \longrightarrow \dot{y} = 0 \longrightarrow \ddot{y} = 0$$

→ Reemplazando en las ecuaciones de movimiento de x y z:

① $\ddot{x}(a\operatorname{sen}^2 y_0 + b\cos^2 y_0) + b\ddot{z}\cos y_0 = 0$

② $b\ddot{x}\cos y_0 + b\ddot{z} = 0$

Despejando ②: $\ddot{z} = -\ddot{x}\cos y_0$ en ①:

$$\ddot{x}(a\operatorname{sen}^2 y_0 + b\cos^2 y_0) - b\ddot{x}\cos^2 y_0 = 0$$

$$\ddot{x}(a\operatorname{sen}^2 y_0) = 0$$

$$\ddot{x} = 0 \rightarrow \dot{x} = c_1 \rightarrow \boxed{x(t) = c_1 t + c_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = v_x t + x_0}$$

Teniendo en cuenta que $\ddot{x} = 0$, en ②:

$$b\ddot{z} = 0 \rightarrow \ddot{z} = 0 \rightarrow \dot{z} = c_3 \rightarrow \boxed{z(t) = c_3 t + c_4}$$

$$\Rightarrow \boxed{z(t) = v_z t + z_0}$$

Problemas: Semana 3

- Oscar Danilo López
- Tomás Santiago Rocha

2. Una partícula de masa m se mueve en el potencial unidimensional

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$$

a) Encuentre el lagrangeano y las ecuaciones de movimiento del sistema

La energía cinetica de una partícula es:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

Sabemos que el Lagrangeano es:

$$\mathcal{L} = T - V$$

Remplazamos lo que conocemos:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}} \rightarrow \text{Lagrangeano.}$$

Ahora usaremos la ecuación de Euler-Lagrange para encontrar la ecuación de movimiento:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -2V_0 \alpha \frac{\sinh \alpha x}{\cosh^3 \alpha x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$$

Remplazamos todo en la ecuación:

$$m\ddot{x} + 2V_0 \alpha \frac{\sinh \alpha x}{\cosh^3 \alpha x} = 0$$

$$\boxed{m\ddot{x} = -2V_0 \alpha \frac{\sinh \alpha x}{\cosh^3 \alpha x}}$$

Ecuación de movimiento

b) ¿Existen cantidades conservadas?

el Lagrangeano depende de x. Por lo que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \neq 0$$

Lo lo que rompe la simetría traslacional, por lo que el momento lineal no es una cantidad conservada. y x no es una coordenada cíclica.

Por otro lado el Lagrangeano no depende explícitamente de t:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

A a partir de esto podemos decir automaticamente que la función energía es una constante, es decir una cantidad conservada.

c) Muestre que el movimiento de la partícula es finito si su energía $E < 0$, y es infinito si $E \geq 0$.

- Como el potencial no depende de la velocidad, automáticamente la función energía es igual a la energía mecanica total, por lo que podemos definir E como:

$$E = T + V$$

$$\underbrace{T}_{\text{Energía Cinética}} \quad \underbrace{V}_{\text{Energía Potencial}}$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$V = -\frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}} \rightarrow \text{Energía Total}$$

$E < 0$: - La energía cinética $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$, es siempre no negativa.

- Por lo que para $E < 0$, V debe ser suficientemente negativa, para que la energía sea negativa.

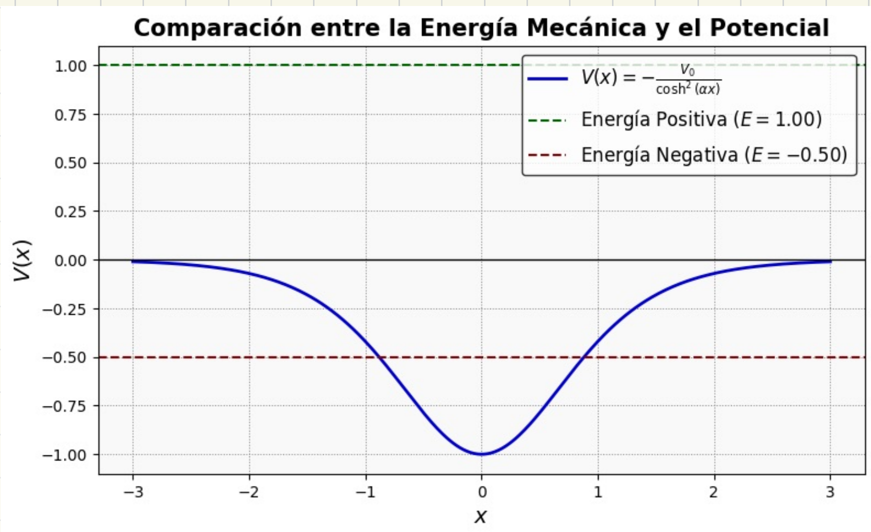
- Por lo que en esta situación, la partícula está confinada a una región donde el potencial es lo suficientemente profundo para atraparla.

- Por lo tanto, el movimiento es finito.

$E \geq 0$.

- En este caso la energía cinética va ser mayor que el potencial, por lo que supera el potencial. Esto le permite seguir moviendose hacia el infinito.

- Realizamos una grafica la cual nos ayuda al analisis.



d) Encuentre los puntos de retorno y el mínimo valor posible de E.

- El punto de retorno es cuando $\dot{x} = 0$. $\rightarrow$ Por lo tanto en esos puntos: $E = V(r)$

$$E = -\frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$$

$$\cosh^2 \alpha x = -\frac{V_0}{E}$$

$$\cosh \alpha x = \sqrt{-\frac{V_0}{E}}$$

E debe ser negativo, para que hayan puntos de retorno.

$$\alpha x = \pm \cosh^{-1}\left(\sqrt{-\frac{V_0}{E}}\right)$$

$$\boxed{x = \pm \frac{1}{\alpha} \cosh^{-1}\left(\sqrt{-\frac{V_0}{E}}\right)}$$

Estos serian los puntos de retorno.

- El mínimo valor posible para E, esta en el mínimo potencial

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)} \longrightarrow \text{en } x=0 \quad \cosh^2(0) = 1$$

En $x = 0$

$$V_{min} = -\frac{V_0}{1} = -V_0$$

$$E = \frac{1}{2} m \cancel{\dot{x}^2}^{0} - \frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$$

$$\boxed{E_{min} = -V_0} \rightarrow \text{Energía mínima.}$$

$e)$ Para el movimiento finito, encuentre el período en función de E.

Sabemos que el período de oscilación entre los puntos de retorno es dos veces el intervalo de tiempo del movimiento entre esos puntos.

$$T(E) = 2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$$

$$T(E) = 2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E - \frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}}}$$

Esta es la integral que nos permite el periodo en función de E, donde x_1 y x_2, son los puntos retorno.

$$x_1 = -\frac{1}{\alpha}\cosh^{-1}\left(\sqrt{-\frac{V_0}{E}}\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{\alpha}\cosh^{-1}\left(\sqrt{-\frac{V_0}{E}}\right)$$

- Ahora le hallamos una solución a esta expresión, por métodos númericos con ayuda de un código.

3. El Lagrangiano de un sistema se puede expresar como

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2\right) - \frac{k}{2}\left(ax^2 + 2bxy + cy^2\right)$$

donde a, b, y c son constantes, pero sujetas a la condición $b^2 - ac \neq 0$.

a) Encuentre las ecuaciones de movimiento para este sistema.
b) Calcule e identifique las cantidades conservadas
c) ¿El sistema es integrable?

a) Ecuaciones de movimiento:

• Coordenadas $\dot{x}$ y x:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -k(ax+by) \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m(a\dot{x}+b\dot{y})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = m(a\ddot{x}+b\ddot{y})$$

$$\Rightarrow \boxed{m(a\ddot{x}+b\ddot{y}) + k(ax+by) = 0}$$

• Coordenadas $\dot{y}$ y y:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -k(bx+cy) \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m(b\dot{x}+c\dot{y})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = m(b\ddot{x}+c\ddot{y})$$

$$\Rightarrow \boxed{m(b\ddot{x}+c\ddot{y}) + k(bx+cy) = 0}$$

b) Cantidades conservadas:

La energía se conserva porque no aparece el tiempo de manera explícita.

$$E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\dot{y} - \mathcal{L} = cte$$

$$E = m\dot{x}(a\dot{x}+b\dot{y}) + m\dot{y}(b\dot{x}+c\dot{y}) - \frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) + \frac{k}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = cte$$

$$E = \frac{1}{2}am\dot{x}^2 + bm\dot{x}\dot{y} + \frac{1}{2}cm\dot{y}^2 - \frac{k}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = cte$$

c) El sistema no es integrable porque cuenta con dos grados de libertad $s=2$ y una cantidad conservada: $E = cte$.

4. Una partícula se mueve en un plano sujeta a una fuerza central de magnitud

$$F = \frac{1}{r^2}\left[1 - \frac{(\dot{r}^2 - 2r\ddot{r})}{c^2}\right]$$

donde r es la distancia de la partícula al centro de fuerza y c es una constante. Halle el potencial generalizado que resulta de tal fuerza y, a partir de éste, el Lagrangiano del sistema.

El potencial asociado a una fuerza central se obtiene:

$$F = -\nabla V$$

- La fuerza es central, por lo que solo tiene componente $\hat{e_r}$.

- Por lo que la igualamos a la componente radial del gradiente.

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{e_\phi} \longrightarrow \text{Gradiente del potencial}$$

· Igualamos ambas cosas, como la fuerza solo tiene componente radial, quedamos con lo siguiente

$$\frac{1}{r^2}\left[1 - \frac{(\dot{r}^2 - 2r\ddot{r})}{c^2}\right]\hat{e_r} = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{e_r}$$

$$\frac{1}{r^2} - \frac{\dot{r}^2}{c^2 r^2} + \frac{2\ddot{r}r}{r^2c^2} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\int \frac{1}{r^2} - \frac{\dot{r}^2}{c^2r^2} + \frac{2\ddot{r}r}{r^2c^2}\,dr = -\int \frac{\partial V}{\partial r}\,dr$$

$$-\frac{1}{r} + \frac{\dot{r}^2}{c^2 r} + \frac{2\ddot{r}\ln(r)}{c^2} + \underbrace{K}_{\text{Constante}} = -V$$

$$\boxed{V(r) = \frac{1}{r} - \frac{\dot{r}^2}{c^2 r} - \frac{2\ddot{r}\ln(r)}{c^2} + K}$$

Este es nuestro potencial generalizado.

· Ahora expresamos la velocidad en coordenadas polares:

$$V = \dot{r}\hat{e_r} + r\dot{\theta}\hat{e_\theta}$$

El modulo al cuadrado de la velocidad:

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \,//$$

· Continuo describiendo la energía cinetica:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

· Con esto podemos plantear el Lagrangiano de nuestro sistema:

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{r} + \frac{\dot{r}^2}{c^2 r} + \frac{2\ddot{r}\ln(r)}{c^2} + K}$$

Este es el Lagrangeano del sistema.