

Momento de inercia y autovalores

Tomás Santiago Rocha Mendoza*

Oscar Danilo Lopez Jaime**

Universidad Industrial de Santander

Cra 27 Calle 9 Ciudad Universitaria

24 de mayo de 2025

Índice

1. Introducción	1
2. Metodología	2
3. El experimento y los resultados	3
4. Conclusiones	9

Resumen

Este trabajo presenta el análisis computacional del momento de inercia y sus autovalores para un sistema discreto de partículas en dos y tres dimensiones. A partir de un conjunto de datos que incluye posiciones y masas, se calculan el momento de orden cero (masa total), el centro de masa y el tensor de inercia, utilizando un algoritmo implementado en Python. Posteriormente, se resuelve el problema de autovalores y autovectores del tensor de inercia para identificar los ejes principales del sistema, aquellos en los que el comportamiento rotacional se simplifica. Se visualizan los resultados mediante gráficos que permiten interpretar la distribución espacial de las partículas y la orientación de los ejes principales.

1. Introducción

A diario nos encontramos con objetos que rotan, desde la rueda de un automóvil hasta las hélices de un avión. De hecho, todo a nuestro alrededor tiene algún tipo de rotación y cada cuerpo (incluyéndonos) contiene ejes, pero es algo en lo que nadie se pone a pensar. Así que una de las ramas primordiales de la física se ha dedicado a estudiar dichas rotaciones y qué tan complejas pueden ser.

* e-mail: tomas2230672@correo.uis.edu.co

** e-mail: oscar2230659@correo.uis.edu.co

De esta manera, en mecánica clásica, el estudio de los momentos de inercia es fundamental para comprender la dinámica rotacional de sistemas físicos. Estos momentos, son representados por los elementos de la diagonal del *tensor de inercia*, que se trata de un tensor de segundo orden [1]. A partir del problema de autovectores y autovalores, es posible hallar los ejes principales de un cuerpo, en torno a los cuales el sistema presenta un comportamiento rotacional simplificado [2].

En este trabajo, se discute el cálculo de los tres primeros momentos (masa total, centro de masa y el tensor de inercia) para una distribución discreta en dos y tres dimensiones. Mediante herramientas computacionales, se ha propuesto un problema de autovalores para analizar el tensor de inercia y los respectivos momentos, que nos determinan si la base cartesiana constituye una base propia para esta distribución de masa. Finalmente, se construye la matriz de transformación a la base de autovectores, revelando los ejes principales del sistema y facilitando su interpretación.

2. Metodología

Para el estudio del sistema de masas distribuidas y el análisis de sus momentos de inercia, se ha construido un código computacional en Python que permite calcular los tres primeros momentos y realizar una descomposición del tensor de inercia en sus autovalores y autovectores. El procedimiento se ha dividido en dos partes: análisis en dos dimensiones y análisis en tres dimensiones. A continuación, se describen las etapas principales para resolver el problema.

Procesamiento de datos: Se utilizó el archivo de datos dado, que contiene información acerca de las posiciones (coordenadas) y las masas de partículas en el espacio. Gracias a la librería "pandas", se han cargado los datos en el código para ser manipulados y poder acceder a cada columna correspondiente a masas y coordenadas.

Cálculo de momentos en dos dimensiones: Primero, se calculó el momento de orden cero referente a las masas, mediante la suma total de ellas. Después, se calculó el momento de orden uno referente al centro de masa mediante un promedio de las coordenadas x e y , utilizando como pesos las masas respectivas. Siguiendo a ello, se calculó el momento de orden dos referente al tensor de inercia, en el cual, se construyó una matriz 2×2 del tensor de inercia considerando las distancias relativas al centro de masa. Finalmente, se calcularon los autovalores y autovectores del tensor utilizando funciones de la biblioteca "numpy". Los autovalores representan los momentos principales de inercia, y los autovectores, los ejes principales, sobre los cuales la matriz de inercia se diagonaliza. La matriz de transformación desde la base cartesiana a la base propia del sistema se construyó a partir de dichos autovectores.

Cálculo de momentos en tres dimensiones: Se repitió el mismo procedimiento anterior, ahora considerando también la coordenada z . El tensor de inercia se construyó como una matriz 3×3 con las componentes I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} , I_{xy} , I_{xz} , I_{yz} , calculadas en función de las coordenadas relativas al centro de masa. Asimismo, se efectuó nuevamente el desarrollo de los autovalores y autovectores del tensor de inercia para encontrar los momentos principales y los ejes principales de inercia en el espacio tridimensional.

3. El experimento y los resultados

Los primeros cálculos fueron sobre el modelo de dos dimensiones, teniendo en cuenta únicamente las posiciones en x y y . El primer cálculo fue del momento de orden cero, el cual hallamos realizando la suma de la masa de todas las partículas, esto nos dio como resultado:

$$\mu_0 = 4627,0.$$

El momento de orden uno lo hallamos calculando el centro de masa del sistema. Para ello usamos las siguientes ecuaciones:

$$x_{cm} = \frac{\sum(m \cdot x)}{\text{masa_total}}, \quad y_{cm} = \frac{\sum(m \cdot y)}{\text{masa_total}}.$$

Aplicamos esta ecuación sobre todas las coordenadas de las posiciones de todas las partículas del sistema. Finalmente encontramos que el centro de masas se encuentra en la siguiente posición:

$$\mu_1 = Cm = (825,8152, 776,9185).$$

En la figura 1 se ve un gráfico en el cual se puede observar la distribución de las partículas del sistema en el espacio de dos dimensiones. En este gráfico se referenció el centro de masa con una estrella roja.

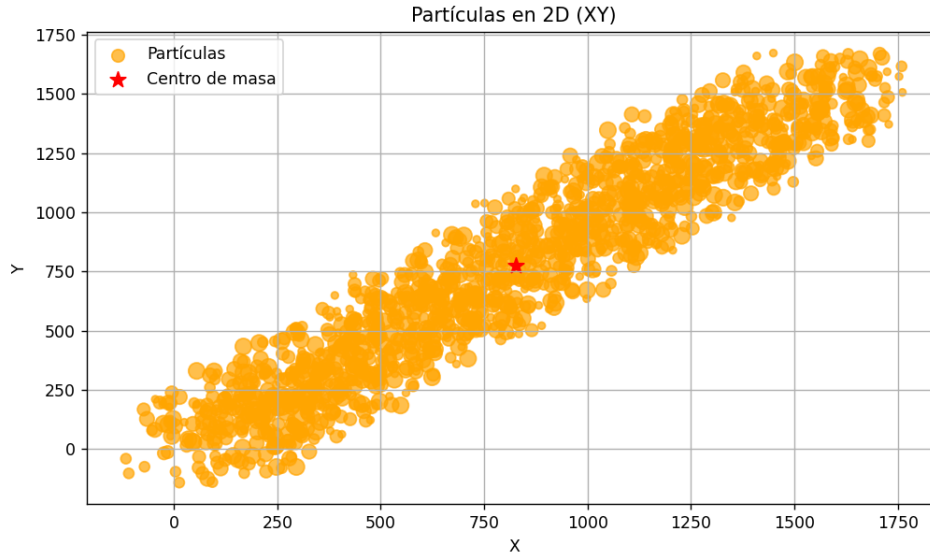


Figura 1: Gráfico de la distribución de las partículas en dos dimensiones.

Finalmente el momento de orden dos, lo encontramos calculando el tensor de inercia del sistema respecto a los ejes originales, con los cuales se midieron las posiciones de las partículas. Para esto

se calcularon primero las posiciones relativas, las cuales se hallaban restando la posición del centro de masa a las coordenadas originales de cada partícula.

$$x_{rel} = x - x_{cm},$$

$$y_{rel} = y - y_{cm}.$$

Con estas posiciones relativas continuamos aplicando la ecuación para calcular el tensor de inercia. Como estamos analizando en un primer instante el caso bidimensional, nuestro tensor de inercia tendrá una dimensión 2x2. Definiendo cada componente del tensor de la siguiente manera:

$$I_{xx} = \sum (m \cdot y_{rel}^2), \quad I_{yy} = \sum (m \cdot x_{rel}^2), \quad I_{xy} = - \sum (m \cdot x_{rel} \cdot y_{rel}).$$

Realizando estos cálculos para cada partícula del sistema obtenemos el siguiente resultado para el tensor de inercia:

$$\mu_2 = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 9,63660148 \times 10^8 & -9,11747911 \times 10^8 \\ -9,11747911 \times 10^8 & 9,58535589 \times 10^8 \end{bmatrix}.$$

Con este resultado podemos de inmediato percatarnos que los ejes cartesianos no son ejes principales de nuestro sistema, pues el tensor de inercia no es diagonal. Por esto mismo no son autovectores de nuestro tensor de inercia. Ya que una de las propiedades de los ejes principales de un sistema, es que sobre estos el tensor de inercia es diagonal (Todos los elementos fuera de la diagonal son igual a 0).

Para encontrar el par de ejes principales lo único que debemos hacer es calcular el problema de valores y vectores propios sobre nuestra matriz del tensor de inercia. De esta manera los vectores propios de dicha matriz corresponderán a los ejes principales del sistema. Realizando estos cálculos sobre nuestra matriz, encontramos que los ejes principales de nuestro sistema son:

$$\text{Autovector 1: } \begin{bmatrix} -0,7061125 \\ -0,7089967 \end{bmatrix}, \quad \text{Autovector 2: } \begin{bmatrix} -0,7089967 \\ 0,7061125 \end{bmatrix}.$$

En la figura 2 podemos observar este resultado de forma gráfica. Graficamos sobre la distribución de nuestras partículas los dos ejes principales que hallamos, a partir de los autovectores de nuestro tensor de inercia.

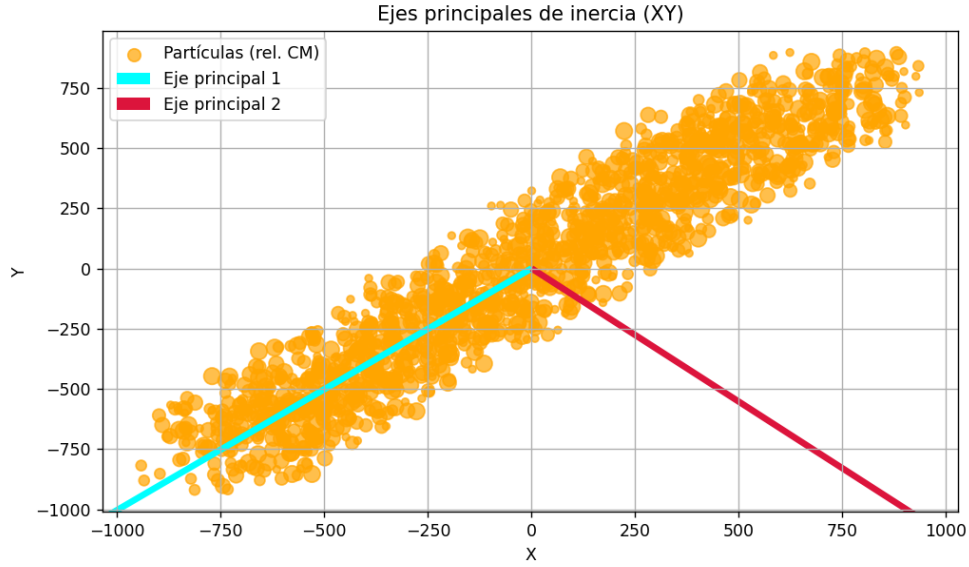


Figura 2: Gráfico de los dos ejes principales para la distribución de las partículas en dos dimensiones.

Además con estos autovectores podemos construir nuestra matriz de transformación de la base cartesiana a la base de autovectores conformada por los ejes principales. La matriz de transformación se construye con los autovectores porque estos definen los nuevos ejes ortogonales del sistema, alineados con los momentos principales de inercia. Por lo que nuestra matriz de transformación será la siguiente:

$$\text{Matriz de transformación} = \begin{bmatrix} -0,7061125 & -0,7089967 \\ -0,7089967 & 0,7061125 \end{bmatrix}.$$

Para nuestra segunda simulación analizamos el caso tridimensional, este caso tuvimos en cuenta las tres coordenadas de las posiciones de cada partícula. En este nuevo caso el momento de orden cero sigue siendo el mismo, ya que las masas de las partículas no ha cambiado, por lo que no hace falta volver a calcularlo.

El momento de orden uno se debe re calcular, pues el centro de masa de nuestro sistema ahora tiene una coordenada adicional, ya que estamos trabajando en un espacio tridimensional. Lo calculamos de la misma forma que lo hicimos para las primeras dos coordenadas, pero ahora le agregamos la siguiente componente:

$$z_{cm} = \frac{\sum(m \cdot z)}{\text{masa_total}}.$$

A partir de esto logramos encontrar el momento de orden uno, el cual corresponde a la siguiente posición:

$$\mu'_1 = Cm' = (825,8152, 776,9185, 15,5033).$$

En la figura 3 podemos observar este resultado, esta gráfica a diferencia de las anteriores cuenta con tres coordenadas, lo que emula un espacio tridimensional. Podemos observar la distribución de las partículas en todo el espacio, y en medio de todas ellas podemos observar el centro de masas de nuestro sistema, el cual está resaltado de color rojo.

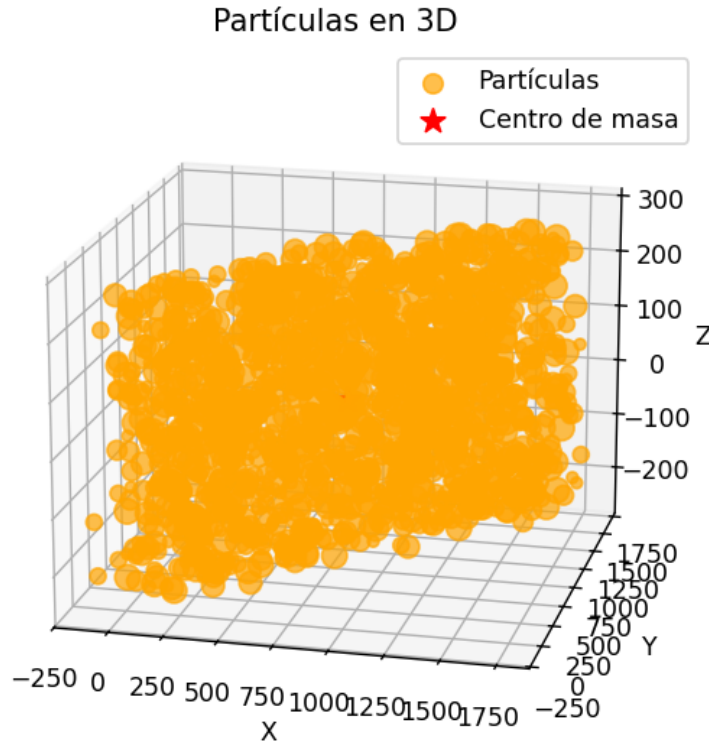


Figura 3: Gráfico de la distribución de las partículas y su centro de masa en tres dimensiones.

Ahora, para hallar el momento de orden dos en tres dimensiones, lo encontramos calculando el tensor de inercia del sistema respecto a los ejes desde los cuales se midieron las posiciones de las partículas. Para ello, se calcularon primero las posiciones relativas, las cuales se hallaban restando la posición del centro de masa a las coordenadas originales de cada partícula.

$$x_{rel} = x - x_{cm},$$

$$y_{rel} = y - y_{cm}.$$

$$z_{rel} = z - z_{cm}.$$

A partir de dichas posiciones relativas, se aplica la ecuación para calcular el tensor de inercia. En este caso, para el problema tridimensional, nuestro tensor de inercia tendrá una dimensión 3x3.

Definiendo cada componente del tensor de esta manera:

$$I_{xx} = \sum m \cdot (y_{\text{rel}}^2 + z_{\text{rel}}^2),$$

$$I_{yy} = \sum m \cdot (x_{\text{rel}}^2 + z_{\text{rel}}^2),$$

$$I_{zz} = \sum m \cdot (x_{\text{rel}}^2 + y_{\text{rel}}^2),$$

$$I_{xy} = - \sum m \cdot x_{\text{rel}} \cdot y_{\text{rel}},$$

$$I_{xz} = - \sum m \cdot x_{\text{rel}} \cdot z_{\text{rel}},$$

$$I_{yz} = - \sum m \cdot y_{\text{rel}} \cdot z_{\text{rel}}.$$

El tensor de inercia se forma como:

$$\mathbf{I}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}.$$

Realizando estos cálculos para cada una de las partículas del sistema, obtenemos el siguiente tensor de inercia:

$$\mu_2 = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1,06550347 \times 10^9 & -9,11747911 \times 10^8 & 7,14204864 \times 10^6 \\ -9,11747911 \times 10^8 & 1,06037891 \times 10^9 & 1,92959724 \times 10^6 \\ 7,14204864 \times 10^6 & 1,92959724 \times 10^6 & 1,92219574 \times 10^9 \end{bmatrix}.$$

En base a estos datos encontrados, nos damos cuenta de que el tensor de inercia no es diagonal. Lo que significa que no estamos sobre los ejes principales de nuestro sistema. Para hallar estos ejes principales primero debemos calcular el problema de valores y vectores propios para la matriz del tensor de inercia. Así, al hallar estos autovectores, hemos encontrado igualmente los vectores que describen a los ejes principales del sistema. Dichos cálculos arrojaron que los ejes principales del sistema son:

$$\text{Autovector 1} = \begin{pmatrix} -0,70611307 \\ -0,70808985 \\ 0,00361904 \end{pmatrix},$$

$$\text{Autovector 2} = \begin{pmatrix} 0,04694255 \\ -0,05190995 \\ -0,99754787 \end{pmatrix},$$

$$\text{Autovector 3} = \begin{pmatrix} 0,70654139 \\ -0,7042117 \\ 0,06989384 \end{pmatrix}.$$

En la figura 4 se representan dichos ejes principales del sistema en base a los autovectores encontrados, para la distribución de partículas en tres dimensiones.

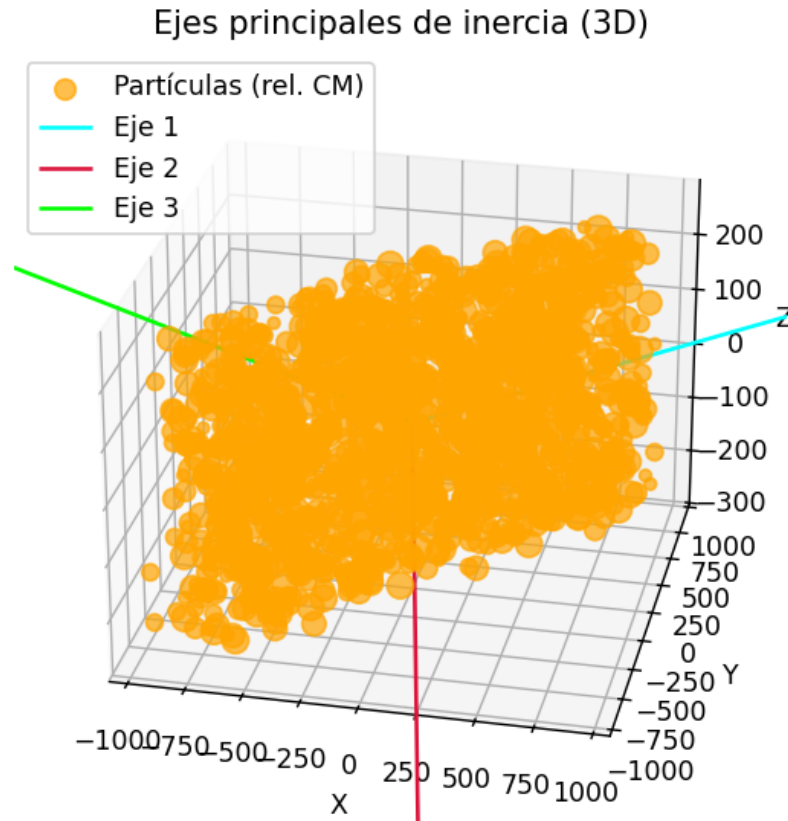


Figura 4: Gráfico de los tres ejes principales para la distribución de partículas en tres dimensiones.

Finalmente, con los autovectores se construye la matriz de transformación de la base cartesiana a la base conformada por los autovectores (ejes principales del sistema). Como mencionamos anteriormente, dichos autovectores definen los nuevos ejes del sistema alineados a los momentos principales de inercia. Nuestra matriz de transformación es la siguiente:

$$\text{Matriz de transformación} = \begin{bmatrix} -0,70611307 & 0,04694255 & 0,70654139 \\ -0,70808985 & -0,05190995 & -0,7042117 \\ 0,00361904 & -0,99754787 & 0,06989384 \end{bmatrix}.$$

4. Conclusiones

A lo largo del trabajo se comprobó que, al calcular los autovalores y autovectores del tensor de inercia, se pueden identificar los ejes principales de un sistema de partículas, lo cual permite simplificar su análisis rotacional. En ambos casos estudiados (2D y 3D), los resultados mostraron que la base cartesiana original no coincidía con la base propia del sistema, evidenciado por la presencia de componentes no nulas fuera de la diagonal del tensor de inercia.

En el caso bidimensional, se logró determinar de manera clara los ejes principales a partir del análisis matricial. En el espacio tridimensional, aunque el cálculo fue más complejo, el procedimiento fue igualmente efectivo y permitió construir la matriz de transformación que lleva de la base cartesiana a la base de autovectores.

Referencias

- [1] Herbert Goldstein and Julian Fernandez Ferrer. *Mecánica clásica*. Editorial Reverte, Barcelona, 1987.
- [2] John R Taylor, J. Ildefonso Diaz Diaz, and Alberto Casal Grau. *Mecánica clásica*. Editorial Reverte, Barcelona, nueva edición revisada. edition, 2013.