



"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"

Universidad de Sonora

Departamento de Física

Licenciatura en Física

Física Computacional-1

2016-2

## Actividad 7: Descomposición de las mareas;Análisis de Fourier

Danira Rios Quijada

Profesor: Carlos Lizárraga Celaya

18 de Noviembre de 2016

## Resumen

En el reporte que se presenta a continuación, se resumen los pasos a seguir para poder hacer análisis de Fourier, con datos del pronóstico de las mareas de la Isla Tiburón, descomponiéndola en sus principales armónicos, para así en actividades posteriores, una vez identificados los modos, poder preveer que influencias astronómicas los generan.

Es importante recalcar que sólo se hizo análisis de Fourier a cinco días, dado que esta es una versión preliminar del análisis al mes completo.

## 1. Introducción

### 1.1. Teoría de las mareas [2]

La teoría de las mareas es la aplicación de la mecánica de medios continuos para interpretar y predecir las deformaciones en las mareas de cuerpos planetarios y satélites (especialmente de la Tierra), defromaciones causadas por la gravedad de otros cuerpos astronómicos (especialmente la Luna).

Johannes Kepler, en 1609 sugirió que la gravedad de la Luna era la causante de las mareas; en 1616 Galileo Galilei trató de explicar las mareas como el resultado de la rotación de la Tierra alrededor del Sol, la teoría de Galileo estaba errónea.

Newton, en el Principia, describió una explicación correcta de la fuerza de las mareas, pero sólo era aplicable a un planeta cubierto por un océano uniforme, no era el modelo ideal para la Tierra. Por otro lado Pierre-Simon Laplace en 1775 describió de una forma más precisa la reacción del océano a las fuerzas de la marea, Laplace formuló un grupo de ecuaciones difrenciales parciales, para el flujo de la marea, como un flujo barotrópico, en estas ecuaciones se introdujeron los efectos de la fuerza de Coriolis. Estas ecuaciones se pueden obtener a partir de las ecuaciones de Lagrange, aunque Laplace las obtuvo simplificando las ecuciones de fluido dinámico.

Para una hoja de fluido de grosor promedio  $D$ , de elevación vertical de la marea  $\zeta$ , y componentes de la velocidad horizontal  $v$  y  $u$ , (en la latitud  $\psi$  y longitud  $\lambda$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{a \cos(\varphi)} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (uD) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (vD \cos(\varphi)) \right] &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} - v(2\Omega \sin(\varphi)) + \frac{1}{a \cos(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \lambda} (g\zeta + U) &= 0 \quad \text{and} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u(2\Omega \sin(\varphi)) + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} (g\zeta + U) &= 0, \end{aligned}$$

Donde  $\Omega$  es la frecuencia angular de la rotación del planeta,  $g$  es el valor de la gravedad,  $a$  es el radio planetario y  $U$  es el potencial de la fuerza externa gravitacional.

## 1.2. Análisis armónico: Transformada de Fourier [3]

Los aportes de Laplace fueron más que substanciales, sin embargo la aproximación aún estaba en un estado intermedio, en 1860 William Thompson aplicó análisis de Fourier a los movimientos de las mareas; análisis armónico: el trabajo de Thompson fue extendido por George Darwin, los símbolos de los constituyentes armónicos de Darwin aún se utilizan.

El desarrollo de Darwin fue mejorado por A.T Doodson, quien aplicó la teoría lunar de E.W Brown, y distingió 388 frecuencias de marea. Se han desarrollado muchos más términos que los de Doodson, sin embargo son suficientes 62 constituyentes para la predicción de mareas, la mayoría de las veces muchos menos, para una predicción bastante precisa.

El análisis armónico es una rama de las matemáticas que se enfoca en la representación de funciones, como la superposición de ondas básicas y en el estudio y la generalización del análisis de Fourier.

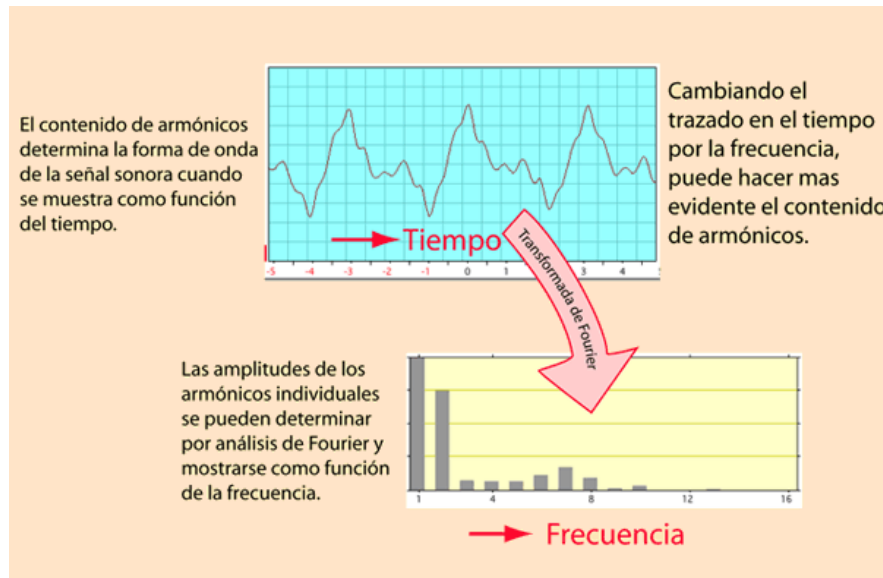
El análisis de Fourier, consiste en el estudio de como funciones generales pueden ser aproximadas con la suma de simples funciones trigonométricas; es el proceso de descomponer una función periódica en sus constituyentes trigonométricos (senos y cosenos), la función se puede caracterizar en términos de las amplitudes de las ondas básicas o "armónicos", y con que frecuencia aparece cada uno de estos armónicos, la serie de Fourier se puede representar de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T} + \phi_n\right) \quad (1)$$

Donde:

- $T$ : es el período de la función original.
- $\sin(\frac{2\pi n t}{T})$ : representa a las componentes trigonométricas.
- $A_n$ : son los coeficientes que las componentes trigonométricas.
- $\phi_n$ : es el ángulo de fase de la componente trigonométrica.

A continuación, en la imagen se presenta un ejemplo, con una onda sonora.



## 2. Preparación de los datos (de nuevo)

Utilizé los mismos datos de la actividad pasada, los datos de la Isla Tiburón, llevé a cabo los mismos pasos para darle un formato adecuado al archivo, para poder trabajar adecuadamente. Al principio trate de aplicar la transformada de Fourier a todos los datos de un mes, sin embargo no me resultó, por lo cual sólo se lo aplique a los primeros cinco días del mes de enero, dejando como pendiente hacer la transformada de Fourier al mes entero. Creé un data frame nuevo, sólo con la información de estos cinco días, (primero el mes de enero, y después los días):

```
df_short['month']=pd.DatetimeIndex(df_short[u'date']).month

df_short['day']=pd.DatetimeIndex(df_short[u'date']).day

df_enero=df_short.loc[df_short[u'month'] == 1]

df_dias=df_enero.loc[df_enero[u'day'] <6]
```

### 3. Creación del arreglo de tiempo

Después, para poder graficar en términos de las horas de la medición, cree una serie de tiempo (en horas), con el siguiente código:

```
import pandas as pd
time_range = pd.date_range('2016-01-01 00:00:00',
'2016-01-05 23:00:00', freq='H')
hours = time_range.hour
days = time_range.day
# Podemos calcular el número de horas transcurridas
desde la fecha inicial
time_since_beginning = (days-1)*24+hours
time_since_beginning
```

Agregué la columna de horas, al data frame df dias:

```
df_dias['hour']=time_since_beginning
```

Resultando un data frame, como el que sigue:

	altura(mm)	date	month	day	hour
0	979	2016-01-01 00:00:00	1	1	0
1	982	2016-01-01 01:00:00	1	1	1
2	948	2016-01-01 02:00:00	1	1	2
3	889	2016-01-01 03:00:00	1	1	3
4	820	2016-01-01 04:00:00	1	1	4
5	761	2016-01-01 05:00:00	1	1	5
6	736	2016-01-01 06:00:00	1	1	6
7	757	2016-01-01 07:00:00	1	1	7
8	828	2016-01-01 08:00:00	1	1	8

...

Después suprimí las columnas de 'date', 'month' y 'day', para quedarme sólo con la sucesión de tiempo y las alturas correspondientes a cada medición:

	altura(mm)	hour
0	979	0
1	982	1
2	948	2
3	889	3
4	820	4
5	761	5
6	736	6
7	757	7
8	828	8
9	955	9

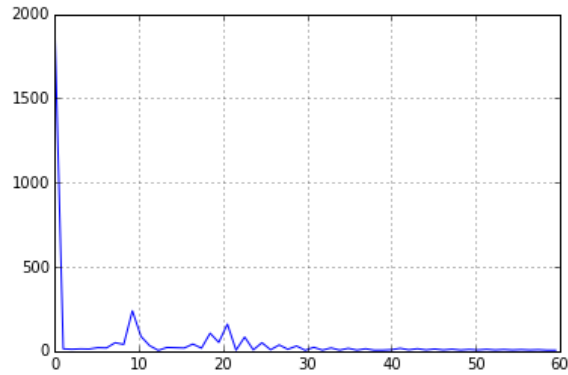
·  
·  
·

## 4. Aplicación de Fourier

Una vez que los datos contaban con una estructura correcta, pasé a aplicar la transformada de Fourier, con el siguiente código:

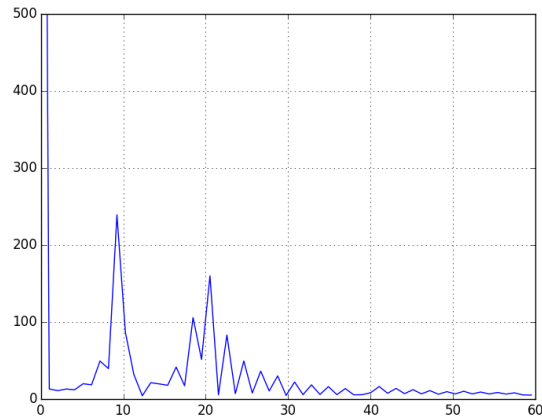
```
%matplotlib inline
import numpy as np
from scipy.fftpack import rfft
# Number of samplepoints
N = 119
# sample spacing
T = 1.0 / 119
x = df_dias[u'hour']
y = df_dias[u'altura(mm)']
yf = rfft(y)
xf = np.linspace(0.0, 1.0/(2.0*T), N/2)
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(xf, 2.0/N * np.abs(yf[0:N/2]))
plt.grid()
plt.show()
```

Con el cual obtuve el siguiente resultado:



#### 4.1. Analicemos el resultado

- En la gráfica que obtuvimos con la aplicación de Fourier, primeramente podemos notar que el primer pico nos muestra el nivel de mar sin mareas, el cuál es aproximadamente 1800mm, y representa el valor del coeficiente  $A_0$  en la serie de Fourier.
- Después, como se puede observar en la siguiente gráfica, más detallada:



Aparecen otros dos picos bastante significativos, uno en la posición nueve y el otro en la posición veintiuno, estos valores nos indican el valor de  $119/T$  en la sumatoria (se multiplica por 119, porque  $T$  en el código está definido como  $T = 1/119$ ):

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T} + \phi_n\right)$$

por otro lado el valor del pico en el eje vertical nos indica cuanto es que vale el coeficiente  $A_n$ ; con esta información podemos decir que tenemos dos modos significativos que podrían aproximar bastante bien la función que describe la marea en este período de 5 días.  
A partir de lo descrito antriormente, podemos identificar fácilmente el período, pudiendo así clasificar los modos.

## 5. Identificación de los Modos

Como ya se mencionó, en las gráficas pudimos identificar dos picos significativos, los cuales representan dos modos constituyentes de la serie de Fourier para aproximar la función, encontremos los períodos en horas, para poder caracterizarlos:

- El primer pico significativo, está en la posción nueve, y la amplitud es aproximadamente de 250mm, por lo tanto:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + 250\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \sum_{n=2}^N A_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T} + \phi_n\right)$$

pasamos igualar:

$$\frac{2\pi t}{T} = (9)2\pi t$$

por tanto:

$$\frac{119}{T} = 9$$

y

$$T_1 \approx 13,33h$$

período aproximado al modo principal lunar simidiurno  $M_2$  ( $T = 12,42h$ ).

- El segundo pico significativo, está en la posción veintiuno, y la amplitud es aproximadamente de 160mm, por lo tanto:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + 250\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + 160\sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) + \sum_{n=3}^N A_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T} + \phi_n\right)$$

pasamos igualar:

$$\frac{4\pi t}{T} = (21)4\pi t$$

por tanto:

$$\frac{119}{T} = 21$$

y

$$T_2 \approx 5,66h$$

período aproximado al Shallow water overtides of principal lunar  $M_4$  ( $T = 6,21h$ ).



Con lo anterior podemos aproximar la función  $f(t)$ , de la siguiente manera:

$$f(t) \approx \frac{1800}{2} + 250\sin\left(\frac{2\pi t}{T_1}\right) + 160\sin\left(\frac{4\pi t}{T_2}\right)$$

## 6. Conclusiones

Por el momento el análisis, fue sólo a una fracción de los datos con los que contamos, así que muchos modos importantísimos quedaron fuera del análisis, sin embargo una vez que corobremos que todo se realizó exitosamente, pasaremos a hacer el análisis a todos los datos, para poder observar todos los modos principales.

## 7. Bibliografía

### Referencias

- [1] Carlos Lizárraga Celaya, *Actividad siete, curso de Física Computacional 1*, (2016, 07 de Noviembre).Recuperado (2016, 15 de Noviembre), Desde: <http://computacional1.pbworks.com/w/page/112597261/Actividad20720282016-229>
- [2] Wikipedia la enciclopedia libre, *Theory of tides*, (2016, 13 de Octubre), recuperado (2016, 15 de Noviembre). Desde: [https://en.wikipedia.org/wiki/Theory\\_of\\_tides](https://en.wikipedia.org/wiki/Theory_of_tides)
- [3] Wikipedia la enciclopedia libre, *Fourier analysis*, (2016, 21 de septiembre). Recuperado (2016,15 de Noviembre), Desde: [https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier\\_analysis](https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_analysis)