从 MRI 到 PMRI 的数学论证

Huaiyuan Teng (Danis Teng)

1. 什么是定义了基本权利的多体交通系统

有 n 个物体 $A_1, A_2, A_3 \dots . A_n$，各自拥有时间离散的状态转移方程$f_i$:

$$x_i^*(t+1) = f_i\left(x_i^*(t), u_i^*(t)\right),\ \forall\ i \in [1, n] \tag{1.1}$$

状态与控制信号的采样空间记为X_i, U_i:

$$x_i \in X_i,\ u_i \in U_i, \forall\ i \in [1, n] \tag{1.2}$$

n 个物体两两之间定义了碰撞函数C_{ij} ($i \neq j$)

$C_{ij}\left(x_i, x_j\right)$ tells whether A_i, A_j crush when they are at state x_i, x_j

这样的一个系统我们称之为一个多体交通系统。

在多体交通系统的基础上， 进一步定义每个物体 的基本控制思路 B_i:

$B_i(x_i)$ is the basic right action of A_i at state x_i (1.3)

这样的一个系统称之为定义了基本权利的多体交通系统 ζ。它所包含的元素有 (这个式子比较土鳖):

$$\zeta = \{X_i, U_i,\ f_i,\ B_i\ \forall\, i \in [1, n]\} + \{C_{ij}\ \forall\, i \neq j\} \tag{1.4}$$

2. 安全函数

在定义了基本权利的多体交通系统中

给定物体A_i 状态x_i，物体的基本轨迹 $F_i^t(x_i)$ 定义为:

$$F_i^0(x_i) \triangleq x_i$$

$$F_i^1(x_i) \triangleq\ f_i\left(F_i^0(x_i), B_i\left(F_i^0(x_i)\right)\right)$$

$$F_i^2(x_i)\ \triangleq\ f_i\left(F_i^1(x_i), B_i\left(F_i^1(x_i)\right)\right)$$

...

$$F_i^{t+1}(x_i) \triangleq\ f_i\left(F_i^t(x_i), B_i\left(F_i^t(x_i)\right)\right) \tag{2.1.1}$$

或者表达为:

$F_i^t(x_i) \triangleq F_i^1(F_i^1(F_i^1(\dots F_i^1(x_i))))$ (F_i^1 over x for t times.) (2.1.2)

A_i 和 A_j 之间安全函数 $I_{ij}(x_i, x_j)$定义为:

$$I_{ij}\left(x_i, x_j\right) \triangleq\ \nexists\ t \geq 0,\ C_{ij}\left(F_i^t(x_i), F_j^t\left(x_j\right)\right) \tag{2.2}$$

注意I_{ij}具有交换性:

$$I_{ij}\left(x_i, x_j\right) \equiv I_{ji}\left(x_j, x_i\right) \tag{2.3}$$

引理 1， 当前安全的二体采取基本权利控制可确保下一步仍然安全:

$$\left(I_{ij}\left(x_i^*(t), x_j^*(t)\right) \& u_i^*(t) = B_i\left(x_i^*(t)\right) \&\ u_j^*(t) = B_j\left(x_j^*(t)\right)\right)$$

$$\to\ I_{ij}\left(x_i^*(t+1), x_j^*(t+1)\right) \tag{2.4.1}$$

$$I_{ij}(x_i, x_j) \to I_{ij}(F_i^1(x_i), F_j^1(x_j)) \tag{2.4.2}$$

（证明见附录 7.1）

定义 n 个物体完整的安全函数:

$$I(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)\ \triangleq \&_{\forall i \neq j}\, I_{ij}(x_i, x_j) \tag{2.5}$$

3. MRI 模型

MRI 模型旨在描述这 n 个物体的避撞机制，即从数学角度回答：每个物体采取怎样的策略，就可以不与其它物体发生碰撞。 MRI 追求的不变集(invariant-set) 是物体两两之间的安全函数 I_{ij} 一直成立 (或者说 I 一直成立)。

下面是 MRI 的具体内容:

先讨论二体A_i和A_j之间具有的联系。

定义道德函数$M_{ij}(x_i, x_j)$:

$$M_{ij}(x_i, x_j) \triangleq \{u_i | I_{ij}\left(f_i(x_i, u_i),\ F_j^1(x_j)\right)\} \tag{3.1}$$

定义行为约束函数 $R_{ij}(x_i, x_j)$:

$$R_{ij}(x_i, x_j) \triangleq \{u_i | \forall u_j \in M_{ji}(x_j, x_i), I_{ij}\left(f_i(x_i, u_i),\ f_j(x_j, u_j)\right)\} \tag{3.2}$$

引理 2，安全时， 基本权利属于道德函数:

$$I_{ij}(x_i, x_j) \to\ B_i(x_i) \in M_{ij}(x_i, x_j) \tag{3.3}$$

（证明见附录 7.2）

引理 3，安全时，行为约束函数是道德函数的子集:

$$I_{ij}(x_i, x_j) \to\ R_{ij}(x_i, x_j) \subseteq\ M_{ij}(x_i, x_j) \tag{3.4}$$

（证明见附录 7.3）

引理 4，安全时，二体满足行为约束函数时， 安全函数具有不变性

$$I_{ij}(x_i, x_j) \to\ B_i(x_i) \in R_{ij}(x_i, x_j) \tag{3.5}$$

（证明见附录 7.4）

定义物体A_i的最终行为约束函数:

$$R_i(x_1, x_2, \dots x_n) \triangleq \cap_{\forall j \in [1,n], j \neq i}\, R_{ij}(x_i, x_j) \tag{3.6}$$

引理 5， 系统完整安全时，每一个物体的最终行为约束函数非空:

$$I(x_1^*(t), x_2^*(t), x_3^*(t), \dots x_n^*(t)) \to \forall i \in [1, n], R_i\left(x_1^*(t), x_2^*(t), x_3^*(t), \dots x_n^*(t)\right) \neq \emptyset \tag{3.7}$$

（证明见附录 7.5）

MRI 定理：当任意物体A_i的控制服从行为约束函数R_i时，安全函数I具有不变性:

$$\left(I\left(x_1^*(t), x_2^*(t), x_3^*(t), \dots x_n^*(t)\right) \&\forall i \in [1, n],\ u_i^*(t) \in R_i\left(x_1^*(t), x_2^*(t), x_3^*(t), \dots x_n^*(t)\right)\right)$$

$\rightarrow I\left(x_1^*(t+1), x_2^*(t+1), x_3^*(t+1), \ldots x_n^*(t+1)\right)$ (3.8)
（证明见附录 7.6）

通俗的讲， 就是如果当前时刻 t 世界是安全的（两两之间I_{ij}均为 true），则对于任意物体A_i而言存在一种控制约束思路R_i(非空)。 如果此刻 t 每个物体均服从这一约束， 那么可以确保下一时刻 t+1 时， 世界仍然是安全的。

4. MRI 模型应用的可操作性:

在 MRI 模型中，我们需要每个物体至少:

1, 任意时刻t，每个物体A_i 能够精确的观察到任意物体A_j 的状态x_j，有能力选择自身接下来一步的控制信号u_i。
2, A_i的基本控制思路B_i 被任意其它物体A_j所知晓。
3, 每个物体 A_i 知晓与任意其它物体A_j 之间的碰撞函数 C_{ij} 的定义（$i \neq j$）。

如果上述条件能实现， 则 n 个物体可以通过(3.8)式所述思路保障 I 的不变性， 从而实现一个自始至终无碰撞的交通环境。

可以看出两个难点: 1，精确观测其它物体。 2， B_i 的约定。

5. PMRI 模型

PMRI 模型是在 MRI 的基础上，为了克服第 4 节中提到的两个难点所设计的更加通用的避撞模型。 PMRI 追求的不变集(invariant-set) 依旧是物体两两之间的安全函数 I_{ij} 一直成立(或者说 I 一直成立)。

以下是 PMRI 的具体内容:
先讨论二体A_i和A_j之间具有的联系，在t时刻 A_i并不能精确的获悉A_j的状态$x_j^*(t)$，但它可以用一个观察集合$w_{ij}^{+*}(t) \subseteq X_j$，来表示它对$x_j^*(t)$ 的观测（成功观测时有 $x_j^*(t) \in w_{ij}^{+*}(t)$）。$A_i$亦无法确信自身的状态 $x_i^*(t)$ 被A_j所知晓，但是A_i有信心认为$w_{ji}^{-*}(t) \subseteq X_i$中所有的自身状态， 是被$A_j$观测到了的（成功被观测时，有$w_{ji}^{-*}(t) \subseteq w_{ji}^{+*}(t)$）。

记 A_i 对A_j 状态的观察为 $w_{ij}^{+*}(t) \subseteq X_j$，$A_i$认定$A_j$对于自身的观察至少为$w_{ji}^{-*}(t) \subseteq X_i$。注意这两个变量取决于物体自身的感知能力与对对方能力的判断。 此处我们仅要求这两个变量存在。

定义任意物体A_i的一步可达集:

$$Q_i(X, U) \triangleq \{x_i' \mid \exists x_i \in X,\ u_i \in U,\ x_i' = f_i(x_i, u_i)\} \tag{5.1}$$

定义物体A_i 对于自身受保护的状态的认知函数，简称受保护函数P_{ij}(protection).

$$P_{ij}^-\left(w_{ji}^-, w_{ij}^+\right) \triangleq \left\{x_i' \in w_{ji}^- \mid \forall x_j \in w_{ij}^+,\ I_{ij}\left(x_i', x_j\right)\right\} \tag{5.2}$$

$$P_{ij}\left(x_i, w_{ji}^-, w_{ij}^+\right) \triangleq P_{ij}^-\left(w_{ji}^-, w_{ij}^+\right) \cup \{x_i\} \tag{5.3}$$

在 t 时刻，记A_i对A_j的受保护函数结果为 $p_{ij}^*(t)$:

$$p_{ij}^*(t) \equiv P_{ij}\left(x_i^*(t), w_{ji}^{-*}(t), w_{ij}^{+*}(t)\right) \tag{5.4}$$

定义:

$$M_{ij}^{+}(p_{ij},w_{ij}^{+}) \triangleq \{x_j' \in Q_j(w_{ij}^{+},U_j) | \forall x_i \in p_{ij},\ I_{ij}(F_i^1(x_i),\ x_j')\} \tag{5.5}$$

M_{ij}^{+} 的含义是: A_i 假设 A_j会照顾到p_{ij}里所有的x_i，再根据对于A_j的观察 w_{ij}^{+}推断出的下一时刻所有可能的A_j状态的集合。我们称M_{ij}^{+}为A_i对于A_j的预判函数(anticipation)。

定义行为约束函数R_{ij}^{+}:

$$R_{ij}^{+}(x_i,p_{ij},w_{ij}^{+}) \triangleq \{u_i | \forall x_j' \in M_{ij}^{+}(p_{ij},w_{ij}^{+}), I_{ij}(f_i(x_i,u_i),x_j')\} \tag{5.6}$$

记物体受到的总约束:

$$R_i^{+*}(t) \equiv \cap_{j\neq i}\ R_{ij}^{+}(x_i^*(t),p_{ij}^*(t),w_{ij}^{+*}(t)) \tag{5.7}$$

定义保守观测条件 Ω_{ij}^{+}:

$$\Omega_{ij}^{+}(x_i,x_j,w_{ij}^{+},w_{ji}^{+}) \triangleq\ x_i \in w_{ji}^{+} \,\&\, x_j \in w_{ij}^{+} \tag{5.8}$$

定义保守被观测条件Ω_{ij}^{-}:

$$\Omega_{ij}^{-}(w_{ij}^{-},w_{ji}^{-},w_{ij}^{+},w_{ji}^{+}) \triangleq\ w_{ji}^{-} \in w_{ji}^{+} \,\&\, w_{ij}^{-} \in w_{ij}^{+} \tag{5.9}$$

记 t 时刻 n 个物体的总的保守观测条件:

$$\Omega^*(t)$$

$$\equiv \left(\&_{\forall i\neq j}\ \Omega_{ij}^{+}(x_i^*(t),x_j^*(t),w_{ij}^{+*}(t),w_{ji}^{+*}(t))\right) \& \left(\&_{\forall i\neq j}\ \Omega_{ij}^{-}\left(w_{ij}^{-*}(t),w_{ji}^{-*}(t),w_{ij}^{+*}(t),w_{ji}^{+*}(t)\right)\right) \tag{5.10}$$

引理 6. 安全且A_i保守观测A_j时，A_j做基本权利操作后的下一步状态被A_i 对A_j的预判函数所包含.

$$(I_{ij}(x_i,x_j) \,\&\, x_j \in w_{ij}^{+}) \to F_j^1(x_j) \in M_{ij}^{+}(P_{ij}(x_i,\ w_{ji}^{-},w_{ij}^{+}),w_{ij}^{+}) \tag{5.11}$$

（证明见附录 7.7）

引理 7. 安全且保守观测、保守被观测条件成立时，A_j保护函数P_{ji}所含全部状态经过一步基本操后的状态属于A_i对于A_j的预判函数。

$$\left(\Omega_{ij}^{+}(x_i,x_j,w_{ij}^{+},w_{ji}^{+}) \& \Omega_{ij}^{-}(w_{ij}^{-},w_{ji}^{-},w_{ij}^{+},w_{ji}^{+}) \,\&\, I_{ij}(x_i,x_j)\right) \to$$

$$(\forall x_j' \in\ P_{ji}(x_j,w_{ij}^{-},w_{ji}^{+}),\ F_j^1(x_j') \in\ M_{ij}^{+}(P_{ij}(x_i,\ w_{ji}^{-},w_{ij}^{+}),w_{ij}^{+})) \tag{5.12}$$

（证明见附录 7.8）

引理 8. 安全且保守观测、保守被观测条件成立时，A_i按照行为约束函数R_{ij}^{+}控制所得的下一步状态属于A_j的预判函数。

$$\left(\Omega_{ij}^{+}(x_i,x_j,w_{ij}^{+},w_{ji}^{+}) \& \Omega_{ij}^{-}(w_{ij}^{-},w_{ji}^{-},w_{ij}^{+},w_{ji}^{+}) \,\&\, I_{ij}(x_i,x_j)\right)$$

$$\to \left(Q_i\left(\{x_i\},\ R_{ij}^{+}(x_i,P_{ij}(x_i,w_{ji}^{-},w_{ij}^{+}),w_{ij}^{+})\right) \subseteq M_{ji}^{+}(P_{ji}(x_j,w_{ij}^{-},w_{ji}^{+}),w_{ji}^{+})\right) \tag{5.13}$$

（证明见附录 7.9）

引理 9. 行为约束函数 R_{ij}^{+} 包含基本操作:

$$B_i(x_i) \in R_{ij}^{+}(x_i,P_{ij}(x_i,w_{ji}^{-},w_{ij}^{+}),w_{ij}^{+}) \tag{5.14}$$

（证明见附录 7.10）

引理 10. 对于二体A_i， A_j， 安全且保守观测、保守被观测条件成立时，若其均按照行为约束函数行动，则两两之间的安全函数具有不变性。

$$I_{ij}\left(x_i^*(t), x_j^*(t)\right) \ \&$$

$$\Omega_{ij}^+\left(x_i^*(t), x_j^*(t), w_{ij}^{+*}(t), w_{ji}^{+*}(t)\right) \& \Omega_{ij}^-\left(w_{ij}^{-*}(t), w_{ji}^{-*}(t), w_{ij}^{+*}(t), w_{ji}^{+*}(t)\right) \ \&$$

$$u_i^*(t) \in R_{ij}^+\left(x_i^*(t), p_{ij}^*(t), w_{ij}^{+*}(t)\right) \ \&$$

$$u_j^*(t) \in R_{ji}^+\left(x_j^*(t), p_{ji}^*(t), w_{ji}^{+*}(t)\right)$$

$$\rightarrow I_{ij}\left(x_i^*(t+1), x_j^*(t+1)\right) \quad (5.15)$$

（证明见附录 7.11）

PMRI 定理: 当总的保守条件Ω^*成立，且任意物体A_i的控制服从行为约束函数R_i^{+*}时，**安全函数I具有不变性**:

$$\Omega^*(t) \ \& \left(\forall i \in [1,n],\ u_i^*(t) \in R_i^{+*}(t)\right) \& \ I\left(x_1^*(t), x_2^*(t), x_3^*(t), \ldots x_n^*(t)\right) \rightarrow$$

$$I\left(x_1^*(t+1), x_2^*(t+1), x_3^*(t+1), \ldots x_n^*(t+1)\right) \quad (5.16)$$

（证明见附录 7.12）

通俗的讲，就是如果当前时刻 t 世界是安全的 (两两之间I_{ij}均为 true)且保守观测条件成立，则:

若任意物体A_i服从控制约束$R_i^{+*}(t)$(非空)， 则可以确保下一时刻 t+1 时世界仍然是安全的。

6. PMRI 定理应用的可操作性:

从（15） 式左侧的条件来分析， 我们要求每个物体至少:

1. 任意时刻t，每个物体A_i 能够高估任意物体A_j 的状态x_j.
2. A_i的基本控制思路B_i 被任意其它物体A_j所知晓。
3. 每个物体 A_i 知晓与任意其它物体A_j 之间的碰撞函数 C_{ij} 的定义 ($i \neq j$)。

如果上述条件能实现， 则 n 个物体可以通（5.6）式所述思路保障 I 的不变性， 从而实现一个自始至终无碰撞的交通环境。

第二条所强求的特性， 可以通过将基本控制路径纳入到状态中来规避: *在 A_i眼中，* 具有不确定性的A_j变量全部被x_j 覆盖，比如基本操作时的“制动路径”和制动的力度等。

4. 附录

7.1

Proof of:

$$I_{ij}(x_i, x_j) \rightarrow I_{ij}(F_i^1(x_i), F_j^1(x_j))$$

From definition of F_i^t (2.1.2).

$$F_i^t(x_i) = F_i^{t-1}\left(F_i^1(x_i)\right), \forall t \geq 1 \quad (7.1.1)$$

From definition of I_{ij} (2.2):

$$I_{ij}(x_i, x_j) = \nexists\, t \geq 0, C_{ij}\left(F_i^t(x_i), F_j^t(x_j)\right)$$

Together with (7.1.1).

$$I_{ij}(x_i, x_j) \rightarrow \nexists\, t \geq 0, C_{ij}\left(F_i^{t-1}\left(F_i^1(x_i)\right), F_j^{t-1}\left(F_j^1(x_j)\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad I_{ij}(x_i, x_j) \rightarrow \nexists\, t-1 \geq 0, C_{ij}\left(F_i^{t-1}\left(F_i^1(x_i)\right), F_j^{t-1}\left(F_j^1(x_j)\right)\right)$$

Let $\tau \equiv t - 1$:

$$I_{ij}(x_i, x_j) \rightarrow \nexists\, \tau \geq 0, C_{ij}\left(F_i^\tau\left(F_i^1(x_i)\right), F_j^\tau\left(F_j^1(x_j)\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad I_{ij}(x_i, x_j) \rightarrow I_{ij}(F_i^1(x_i), F_j^1(x_j))$$

7.2

Proof of:

$$I_{ij}(x_i, x_j) \rightarrow \quad B_i(x_i) \in M_{ij}(x_i, x_j)$$

Given left hand-side

From lemma 1 (2.4.2)

$$\because\ I_{ij}(x_i, x_j), \therefore I_{ij}\left(F_i^1(x_i), F_j^1(x_j)\right) \tag{7.2.1}$$

From definition of M_{ij} (3.1):

$$M_{ij}(x_i, x_j) = \{u_i | I_{ij}\left(f_i(x_i, u_i), F_j^1(x_j)\right)\}$$

Together with (7.2.1), obviously $B_i(x_i) \in M_{ij}(x_i, x_j)$. Right-hand side obtained, proof complete.

7.3

Proof of

$$I_{ij}(x_i, x_j) \rightarrow \quad R_{ij}(x_i, x_j) \subseteq \ M_{ij}(x_i, x_j)$$

Given left hand-side, use lemma 2 (3.3).

$$\because\ I_{ij}(x_i, x_j),\ \therefore B_j(x_j) \in M_{ji}(x_j, x_i) \tag{7.3.1}$$

From definition of R_{ij} (3.2) and M_{ij} (3.1):

$$M_{ij}(x_i, x_j) = \{u_i | \forall u_j \in \{B_j(x_j)\}, I_{ij}\left(f_i(x_i, u_i),\ \ f_j(x_j, u_j)\right)\}$$

$$R_{ij}(x_i, x_j) = \{u_i | \forall u_j \in M_{ji}(x_j, x_i), I_{ij}\left(f_i(x_i, u_i),\ f_j(x_j, u_j)\right)\} \tag{7.3.2}$$

Combine (7.3.1) and (7.3.2), we get the right-hand side:

$$R_{ij}(x_i, x_j) \subseteq \ M_{ij}(x_i, x_j)$$

Proof complete.

7.4

TODO()

7.5

TODO()

7.6

TODO()

7.7

Proof of:

$$\left(I_{ij}(x_i, x_j)\ \&\ x_j \in w_{ij}^+\right) \rightarrow\ F_j^1(x_j) \in\ M_{ij}^+\left(P_{ij}(x_i,\ w_{ji}^-, w_{ij}^+), w_{ij}^+\right)$$

Given the left-hand side, from (5.1) and (2.1)

$\because x_j \in w_{ij}^+,\ \therefore F_j^1(x_j) \in Q_j(w_{ij}^+, U_j).$ (7.7.1)

From (2.4.1). $\because I_{ij}(x_i, x_j), \therefore I_{ij}\left(F_i^1(x_i), F_j^1(x_j)\right),\ \therefore F_j^1(x_j) \in \{x_j' | I_{ij}(F_i^1(x_i),\ x_j')\}$ (7.7.2)

From P_{ij}^- definition (5.2):

$$x_i' \in\ P_{ij}^-(w_{ji}^-, w_{ij}^+)\ \rightarrow\ \forall x_j' \in w_{ij}^+, I_{ij}(x_i', x_j{}')$$

$$\Rightarrow\ x_i' \in\ P_{ij}^-(w_{ji}^-, w_{ij}^+) \rightarrow\ I_{ij}(x_i', x_j)$$

$$\Rightarrow\ x_i' \in\ P_{ij}^-(w_{ji}^-, w_{ij}^+) \rightarrow I_{ij}(F_i^1(x_i{}'), F_j^1(x_j))$$

$$\Rightarrow\ \forall x_i' \in\ P_{ij}^-(w_{ji}^-, w_{ij}^+),\ I_{ij}(F_i^1(x_i{}'), F_j^1(x_j))$$

$$\Rightarrow\ F_j^1(x_j) \in \{x_j' | \forall\ x_i' \in\ P_{ij}^-(w_{ji}^-, w_{ij}^+), I_{ij}(F_i^1(x_i{}'),\ x_j')\} \tag{7.7.3}$$

By definition of M_{ij}^+ (5.5) and P_{ij} (5.3):

$$M_{ij}^+\left(P_{ij}(x_i,\ w_{ji}^-, w_{ij}^+), w_{ij}^+\right) = Q_j(w_{ij}^+, U_j)\ \cap\ \{x_j' | I_{ij}(F_i^1(x_i),\ x_j')\} \cap \{x_j' | \forall\ x_i' \in P_{ij}^-(w_{ji}^-, w_{ij}^+), I_{ij}(F_i^1(x_i{}'),\ x_j')\}$$

Together with (7.7.1), (7.7.2), (7.7.3), the right-hand side can be obtained. Proof complete.

7.8

Proof of:

$$\left(\Omega_{ij}^+(x_i, x_j, w_{ij}^+, w_{ji}^+) \& \Omega_{ij}^-(w_{ij}^-, w_{ji}^-, w_{ij}^+, w_{ji}^+)\ \& I_{ij}(x_i, x_j)\right) \rightarrow$$

$$(\forall\ x_j' \in\ P_{ji}\ (x_j, w_{ij}^-, w_{ji}^+),\ F_j^1(x_j') \in\ M_{ij}^+(P_{ij}(x_i,\ w_{ji}^-, w_{ij}^+), w_{ij}^+))$$

Given left-hand side,

By definition of P_{ji}^- (5.2):

$$P_{ji}^-(w_{ij}^-, w_{ji}^+) = \{x_j{}' \in w_{ij}^-\ | \forall x_i' \in w_{ji}^+,\ I_{ij}(x_i',\ x_j')\}$$

$$\because w_{ij}^- \subseteq\ w_{ij}^+,\ \therefore\ P_{ji}^-\ (w_{ij}^-, w_{ji}^+) \subseteq w_{ij}^+ \tag{7.8.1}$$

$$\because x_i \in\ w_{ji}^+,\ \therefore \left(x_j' \in\ P_{ji}^-\ (w_{ij}^-, w_{ji}^+) \rightarrow I_{ij}(x_i, x_j')\ \right) \tag{7.8.2}$$

From (7.8.1) and (7.8.2):

$$\Rightarrow\ x_j' \in\ P_{ji}^-\ (w_{ij}^-, w_{ji}^+) \rightarrow\ I_{ij}(x_i, x_j')\ \&\ x_j' \in w_{ij}^+$$

By lemma 6 (5.11).

$$\Rightarrow\ x_j' \in\ P_{ji}^-\ (w_{ij}^-, w_{ji}^+) \rightarrow\ F_j^1(x_j') \in\ M_{ij}^+(P_{ij}(x_i,\ w_{ji}^-, w_{ij}^+), w_{ij}^+) \tag{7.8.3}$$

Again, use lemma 6 (5.11).

$$\because I_{ij}(x_i, x_j)\ \&\ x_j \in w_{ij}^+\ \therefore\ x_j' \in \{x_j\} \rightarrow\ F_j^1(x_j') \in\ M_{ij}^+(P_{ij}(x_i, w_{ji}^-, w_{ij}^+), w_{ij}^+) \tag{7.8.4}$$

Combine (7.8.3) and (7.8.4):

$$\Rightarrow\ x_j' \in\ P_{ji}\ (x_j, w_{ij}^-, w_{ji}^+) \rightarrow\ F_j^1(x_j') \in\ M_{ij}^+(P_{ij}(x_i,\ w_{ji}^-, w_{ij}^+), w_{ij}^+)$$

Right-hand side obtained. Proof complete.

7.9

Proof of:

$$\left(\Omega^+_{ij}(x_i, x_j, w^+_{ij}, w^+_{ji})\&\Omega^-_{ij}(w^-_{ij}, w^-_{ji}, w^+_{ij}, w^+_{ji})\ \& I_{ij}(x_i, x_j)\right)$$

$$\rightarrow \left(Q_i\left(\{x_i\},\ R^+_{ij}(x_i, P_{ij}(x_i, w^-_{ji}, w^+_{ij}), w^+_{ij})\right) \subseteq M^+_{ji}(P_{ji}\ (x_j, w^-_{ij}, w^+_{ji})\ , w^+_{ji})\right)$$

Given left-hand side:

By definition of Q_i (5.1):

$$\because\ x_i \in\ w^+_{ji},\ R^+_{ij}(x_i, P_{ij}(x_i, w^-_{ji}, w^+_{ij}), w^+_{ij}) \subseteq U_i$$

$$\therefore\ Q_i\left(\{x_i\},\ R^+_{ij}(x_i, P_{ij}(x_i, w^-_{ji}, w^+_{ij}), w^+_{ij})\right) \subseteq Q_i(w^+_{ji}, U_i) \tag{7.9.1}$$

By lemma 7 (5.12):

$$\left(\exists x''_j \in P_{ji}\ (x_j, w^-_{ij}, w^+_{ji})\ ,\qquad !\, I_{ij}\left(f_i(x_i, u_i), F^1_j(x''_j)\right)\right) \rightarrow$$

$$\left(\exists\ x'_j \in M^+_{ij}(P_{ij}(x_i, w^-_{ji}, w^+_{ij}), w^+_{ij}),\ !\, I_{ij}(f_i(x_i, u_i), x'_j)\right) \tag{7.9.2}$$

To show right-hand side of (7.9.2) using its left-hand side, simply take $x'_j = F^1_j(x''_j)$ as the example.

By contrapositive of (7.9.2):

$$\left(\forall\ x'_j \in M^+_{ij}(P_{ij}(x_i, w^-_{ji}, w^+_{ij}), w^+_{ij}), I_{ij}(f_i(x_i, u_i), x'_j)\right) \rightarrow$$

$$\left(\forall x''_j \in P_{ji}\ (x_j, w^-_{ij}, w^+_{ji})\ \ , I_{ij}\left(f_i(x_i, u_i), F^1_j(x''_j)\right)\right) \tag{7.9.3}$$

From definition of R^+_{ij} (5.6):

$$R^+_{ij}(x_i, P_{ij}(x_i, w^-_{ji}, w^+_{ij}), w^+_{ij}) = \{u_i\ |\forall\ x'_j \in M^+_{ij}(P_{ij}(x_i, w^-_{ji}, w^+_{ij}), w^+_{ij}), I_{ij}(f_i(x_i, u_i), x'_j)\}$$

Use (7.9.3):

$$R^+_{ij}(x_i, P_{ij}(x_i, w^-_{ji}, w^+_{ij}), w^+_{ij}) \subseteq \left\{u_i\ |\forall x''_j \in P_{ji}\ (x_j, w^-_{ij}, w^+_{ji})\ \ , I_{ij}\left(f_i(x_i, u_i), F^1_j(x''_j)\right)\right\} \tag{7.9.4}$$

By definition of Q_i (5.1) and (7.9.4):

$$Q_i\left(\{x_i\},\ R^+_{ij}(x_i, P_{ij}(x_i, w^-_{ji}, w^+_{ij}), w^+_{ij})\right) \subseteq$$

$$\left\{x'_i\ |\forall x''_j \in P_{ji}\ (x_j, w^-_{ij}, w^+_{ji})\ \ , I_{ij}\left(x'_i,\ F^1_j(x''_j)\right)\right\} \tag{7.9.5}$$

By definition of M^+_{ji} (5.5):

$$M^+_{ji}(P_{ji}(x_i, w^-_{ij}, w^+_{ji})\ , w^+_{ji}) = \left\{x'_i \in Q_i(w^+_{ji}, U_i)|\ \forall x''_j \in P_{ji}(x_j, w^-_{ij}, w^+_{ji})\ \ , I_{ij}\left(x'_i, F^1_j(x''_j)\right)\right\}$$

Combine (7.9.1) and (7.9.5), right-hand side is obtained. Proof complete.

7.10

Proof of:

$$B_i(x_i) \in R_{ij}^{+}\big(x_i, P_{ij}(x_i, w_{ji}^{-}, w_{ij}^{+}), w_{ij}^{+}\big)$$

From definition of M_{ij}^{+} (5.5):

$$M_{ij}^{+}\big(P_{ij}(x_i, w_{ji}^{-}, w_{ij}^{+}), w_{ij}^{+}\big) = \{x_j' \in Q_j(w_{ij}^{+}, U_j) \big| \forall x_i \in P_{ij}(x_i, w_{ji}^{-}, w_{ij}^{+}),\ I_{ij}(F_i^{1}(x_i),\ x_j')\}$$

$$\Rightarrow\ \forall x_j' \in M_{ij}^{+}\big(P_{ij}(x_i, w_{ji}^{-}, w_{ij}^{+}), w_{ij}^{+}\big), I_{ij}\big(F_i^{1}(x_i), x_j'\big)$$

$$\Rightarrow\ \forall x_j' \in M_{ij}^{+}\big(P_{ij}(x_i, w_{ji}^{-}, w_{ij}^{+}), w_{ij}^{+}\big), I_{ij}\big(f_i(x_i, B_i(x_i)), x_j'\big) \qquad (7.10.1)$$

From definition of R_{ij}^{+} (5.6):

$$R_{ij}^{+}\big(x_i, P_{ij}(x_i, w_{ji}^{-}, w_{ij}^{+}), w_{ij}^{+}\big) = \{u_i \mid \forall\, x_j' \in M_{ij}^{+}\big(P_{ij}(x_i, w_{ji}^{-}, w_{ij}^{+}), w_{ij}^{+}\big), I_{ij}\big(f_i(x_i, u_i), x_j'\big)\} \qquad (7.10.2)$$

Together with (7.10.1):

$$\Rightarrow\ B_i(x_i) \in R_{ij}^{+}\big(x_i, P_{ij}(x_i, w_{ji}^{-}, w_{ij}^{+}), w_{ij}^{+}\big)$$

Proof complete.

7.11

Proof of:

$$I_{ij}\left(x_i^{*}(t), x_j^{*}(t)\right)\ \&$$

$$\Omega_{ij}^{+}\big(x_i^{*}(t), x_j^{*}(t), w_{ij}^{+*}(t)\ , w_{ji}^{+*}(t)\ \big)\ \&\ \Omega_{ij}^{-}\left(w_{ij}^{-*}(t)\ , w_{ji}^{-*}(t), w_{ij}^{+*}(t)\ , w_{ji}^{+*}(t)\right)\ \&$$

$$u_i^{*}(t) \in\ R_{ij}^{+}\big(x_i^{*}(t), p_{ij}^{*}(t), w_{ij}^{+*}(t)\big)\ \&$$

$$u_j^{*}(t) \in\ R_{ji}^{+}\big(x_j^{*}(t), p_{ji}^{*}(t), w_{ji}^{+*}(t)\big)$$

$$\rightarrow\ I_{ij}\left(x_i^{*}(t+1), x_j^{*}(t+1)\right)$$

Given the left-hand side,

$$\because I_{ij}\left(x_i^{*}(t), x_j^{*}(t)\right)\ \&\ x_j^{*}(t) \in w_{ij}^{+*}(t)$$

From lemma 8 (5.13)

$$\therefore Q_i\left(\{x_i^{*}(t)\},\ R_{ij}^{+}\left(x_i^{*}(t), P_{ij}\left(x_i^{*}(t), w_{ji}^{-*}(t), w_{ij}^{+*}(t)\right), w_{ij}^{+*}(t)\right)\right)$$

$$\subseteq M_{ji}^{+}\big(P_{ji}\left(x_j^{*}(t), w_{ij}^{-*}(t), w_{ji}^{+*}(t)\right), w_{ji}^{+*}(t)\big)$$

$$\therefore Q_i\left(\{x_i^{*}(t)\},\ R_{ij}^{+}\big(x_i^{*}(t), p_{ij}^{*}(t), w_{ij}^{+*}(t)\big)\right) \subseteq M_{ji}^{+}\big(\ p_{ji}^{*}(t)\ , w_{ji}^{+*}(t)\big) \qquad (7.11.1)$$

By definition of Q_i (5.1):

$$\because u_i^{*}(t) \in\ R_{ij}^{+}\left(x_i^{*}(t), p_{ij}^{*}(t), w_{ij}^{+*}(t)\right)$$

$$\therefore\ x_i^{*}(t+1) \in Q_i\left(\{x_i^{*}(t)\},\ R_{ij}^{+}\left(x_i^{*}(t), p_{ij}^{*}(t), w_{ij}^{+*}(t)\right)\right)$$

Together with (7.11.1).

$$\therefore x_i^{*}(t+1) \in M_{ji}^{+}\big(\ p_{ji}^{*}(t)\ , w_{ji}^{+*}(t)\big) \qquad (7.11.2)$$

(Which means A_j's anticipation of A_i is correct)

From definition of R_{ji}^{+} (5.6):

$$R_{ji}^{+}\left(x_j^*(t), p_{ji}^*(t), w_{ji}^{+*}(t)\right) = \left\{u_j \mid \forall\, x_i' \in M_{ji}^{+}\left(p_{ji}^*(t), w_{ji}^{+*}(t)\right), I_{ij}\left(x_i', f_j\left(x_j^*(t), u_j\right)\right)\right\}$$

$$\because u_j^*(t) \in R_{ji}^{+}\left(x_j^*(t), p_{ji}^*(t), w_{ji}^{+*}(t)\right)$$

$$\therefore \forall\, x_i' \in M_{ji}^{+}\left(p_{ji}^*(t), w_{ji}^{+*}(t)\right), I_{ij}\left(x_i', f_j\left(x_j^*(t), u_j^*(t)\right)\right)$$

$$\therefore \forall\, x_i' \in M_{ji}^{+}\left(p_{ji}^*(t), w_{ji}^{+*}(t)\right), I_{ij}\left(x_i', x_j^*(t+1)\right) \tag{7.11.3}$$

Combine (7.11.2) and (7.11.3):

$$\Rightarrow \quad I_{ij}\left(x_i^*(t+1), x_j^*(t+1)\right)$$

Right-hand side get, proof complete.

7.12

Proof of:

$$\Omega^*(t)\ \&\ \left(\forall i \in [1, n],\ u_i^*(t) \in R_i^{+*}(t)\right)\ \&\ I\left(x_1^*(t), x_2^*(t), x_3^*(t), \ldots x_n^*(t)\right) \rightarrow I\left(x_1^*(t+1), x_2^*(t+1), x_3^*(t+1), \ldots x_n^*(t+1)\right)$$

The formula above is just a joint version of lemma 10 (5.15).
Proof shall be obvious.