

UNIVERSITATEA "ALEXANDRU-IOAN CUZA" DIN IAȘI

FACULTATEA DE INFORMATICĂ



LUCRARE DE LICENȚĂ

**Multicolorarea grafurilor pentru o aplicație de
planificare a joburilor**

propusă de

Denis-Gheorghe Hrițcu

Sesiunea: iulie, 2025

Coordonator științific

Lector dr. Olariu E. Florentin

UNIVERSITATEA "ALEXANDRU-IOAN CUZA" DIN IAȘI

FACULTATEA DE INFORMATICĂ

Multicolorarea grafurilor pentru o aplicație de planificare a joburilor

Denis-Gheorghe Hrițcu

Sesiunea: iulie, 2025

Coordonator științific

Lector dr. Olariu E. Florentin

Avizat,
Îndrumător lucrare de licență,
Lector dr. Olariu E. Florentin.

Data: Semnătura:

Declarație privind originalitatea conținutului lucrării de licență

Subsemnatul **Hrițcu Denis-Gheorghe** domiciliat în **România, jud. Suceava, com. Dumbrăveni, str. Nicolae Labiș, nr. 78**, născut la data de **23 aprilie 2003**, identificat prin CNP **5030423330265**, absolvent al Facultății de informatică, **Facultatea de informatică** specializarea **informatică**, promoția 2025, declar pe propria răspundere cunoscând consecințele falsului în declarații în sensul art. 326 din Noul Cod Penal și dispozițiile Legii Educației Naționale nr. 1/2011 art. 143 al. 4 și 5 referitoare la plagiat, că lucrarea de licență cu titlul **Multicolorarea grafurilor pentru o aplicație de planificare a joburilor** elaborată sub îndrumarea domnului **Lector dr. Olariu E. Florentin**, pe care urmează să o susțin în fața comisiei este originală, îmi aparține și îmi asum conținutul său în întregime.

De asemenea, declar că sunt de acord ca lucrarea mea de licență să fie verificată prin orice modalitate legală pentru confirmarea originalității, consimțind inclusiv la introducerea conținutului ei într-o bază de date în acest scop.

Am luat la cunoștință despre faptul că este interzisă comercializarea de lucrări științifice în vederea facilitării falsificării de către cumpărător a calității de autor al unei lucrări de licență, de diplomă sau de disertație și în acest sens, declar pe proprie răspundere că lucrarea de față nu a fost copiată ci reprezintă rodul cercetării pe care am întreprins-o.

Data:

Semnătura:

Declarație de consimțământ

Prin prezenta declar că sunt de acord ca lucrarea de licență cu titlul **Multicolorarea grafurilor pentru o aplicație de planificare a joburilor**, codul sursă al programelor și celelalte conținuturi (grafice, multimedia, date de test, etc.) care însoțesc această lucrare să fie utilizate în cadrul Facultății de informatică.

De asemenea, sunt de acord ca Facultatea de informatică de la Universitatea "Alexandru-Ioan Cuza" din Iași, să utilizeze, modifice, reproducă și să distribuie în scopuri necomerciale programele-calculator, format executabil și sursă, realizate de mine în cadrul prezentei lucrări de licență.

Absolvent **Denis-Gheorghe Hrițcu**

Data:

Semnătura:

Cuprins

Introducere	2
Motivație	3
1 Descrierea problemei	4
1.1 Problema colorării și multicolorării grafurilor	4
1.2 Diferențe între colorare clasică și multicolorare.	5
1.3 Aplicații relevante ale multicolorării	7
2 Multicolorarea în planificare joburilor	9
2.1 Modelarea problemei de job scheduling ca graf	9
2.2 Constrângerii de alocare a resurselor și timpului	10
2.3 Dificultatea problemei	12
3 Algoritmi implementați	14
3.1 Algoritmul Greedy	15
3.2 Algoritmul Descent	16
3.3 Algoritmul Tabu Search	18
4 Experimente și rezultate	22
4.1 Măsurători și metrici	22
4.2 Interpretarea rezultatelor și concluzii parțiale	25
5 Dezvoltarea aplicației web	26
5.1 Arhitectura generală a aplicației	26
5.2 Prelucrarea și introducerea datelor în aplicație	26
5.3 Modulul de multicolorare și interfața utilizator	26
5.4 Testare și funcționalități implementate	26

Concluzii	27
Bibliografie	28

Introducere

Introdusă inițial ca o problemă teoretică legată de colorarea hărților geografice, colorarea grafurilor a evoluat într-un mecanism esențial de modelare și rezolvare a unei game diverse de probleme practice. Această problemă are o importanță deosebită în teoria grafurilor, ramură a matematicii discrete, și ilustrează perfect modul în care conceptele teoretice pot fi extinse și aplicate în informatică, optimizare și numeroase alte domenii științifice.

Colorarea grafurilor poate avea aparența unui probleme simple, asignarea de culori unor noduri ale unui graf astfel încât nodurile vecine să nu aibă aceeași culoare. Ne-am înșela însă dacă am crede că este trivială, complexitatea acesteia este profundă și oferă o structură riguroasă pentru abordarea problemelor de alocare a resurselor, planificare și optimizare combinatorială.

În ultimele decenii, dezvoltarea tehnologiei și creșterea complexității sistemelor informatice au generat nevoia pentru extensii ale problemei clasice de colorare. Una dintre aceste extensii importante este multicolorarea grafurilor, care permite atribuirea mai multor culori unui singur vârf, reflectând astfel mai fidel realitatea problemelor din lumea reală unde o entitate poate necesita sau poate beneficia de multiple resurse simultan.

Motivație

Luând în considerare cerințele și scenariile tot mai complexe din lumea reală, se poate concluziona că planificarea tradițională, bazată pe colorarea clasică a grafurilor, nu mai este suficientă. Planificarea joburilor este considerată una dintre problemele centrale în domeniul sistemelor de calcul, al managementului de proiecte și al optimizării proceselor industriale. În toate aceste domenii, dificultatea principală constă în faptul că joburile nu mai pot fi tratate ca entități simple, care necesită o singură resursă la un anumit moment. Un job modern poate necesita simultan mai multe tipuri de resurse (procesor, memorie, rețea, stocare) și poate beneficia de paralelizare pe mai multe unități de procesare.

De ce este multicolorarea grafurilor un model mai potrivit? Răspunsul vine în mod natural: această metodă permite atribuirea mai multor „culori” (resurse) unui singur „vârf” (job). Astfel, se obține o modelare mai fidelă a cerințelor multiple ale fiecărui job și o gestionare mai flexibilă a constrângerilor de prioritate și dependență.

Capitolul 1

Descrierea problemei

1.1 Problema colorării și multicolorării grafurilor

Problema Colorării Grafurilor (GCP) Problema fundamentală în teoria grafurilor, constă în atribuirea de culori nodurilor unui graf astfel încât nodurile vecine să aibă culori diferite, folosind un număr minim de culori.

Definiția 1. Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat, unde:

- $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este mulțimea vârfurilor
- $E = \{e_{ij} \mid \text{există muchie între } v_i \text{ și } v_j\}$ este mulțimea muchiilor.

Formal problema constă în determinarea unei partiții a mulțimii V cu un număr minim de clase de culori C_1, C_2, \dots, C_k , astfel încât pentru fiecare muchie $e_{ij} \in E$, nodurile v_i și v_j să nu aparțină aceleași clase de culori.[9] O colorare validă a grafului G este o funcție $c : V \rightarrow 1, 2 \dots l$ ce atribuie fiecărui vârf o culoare (număr întreg pozitiv), respectând constrângerea:

$$\forall e_{ij} \in E, |c(v_i) - c(v_j)| > 0 \quad [3] \quad (1.1)$$

Numărul cromati $\chi(G)$ al grafului G este numărul minim de culori necesare pentru o colorare validă a grafului.

$$\chi(G) = \min\{k \mid \exists \text{ colorare validă } c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}\} \quad (1.2)$$

GCP este NP-hard, așadar de aici existența unor algoritmi euristici[1][2] și de aproximare.

Problema Multicolorării Grafurilor (MGCP) Reprezintă o generalizare a problemei clasice de colorare a grafurilor, diferența constând în faptul că fiecărui vârf i se

atribuie un număr prestabilit de culori diferite, menținând proprietatea că vârfurile adiacente nu pot împărtăși culori comune.

Definiția 2. Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat și $x : V \rightarrow \mathbb{N}^*$ o funcție care specifică numărul de culori necesare pentru fiecare vârf, unde:

- $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este mulțimea vârfurilor
- $E = \{e_{ij} \mid \text{există muchie între } v_i \text{ și } v_j\}$ este mulțimea muchiilor.
- $x(v_i)$ este numărul de culori distincte care trebuie atribuite vârfului v_i .

O multicolorare validă a grafului G este o funcție $c : V \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ care atribuie fiecărui vârf un set de culori, respectând constrângerile:

$$\forall v_i \in V, |c(v_i)| = x(v_i) \quad (1.3)$$

$$\forall e_{ij} \in E, |c(v_i) \cap c(v_j)| = 0 \quad (1.4)$$

unde $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ reprezintă mulțimea părților mulțimii numerelor naturale pozitive.

Pentru un vârf v_i cu $x(v_i) = k$, multicolorarea sa poate să fie reprezentată ca: $c(v_i) = \{c_1^i, c_2^i, \dots, c_k^i\}$, unde $c_1^i < c_2^i < \dots < c_k^i$ sunt culorile atribuite în ordine crescătoare.

Numărul cromatic al multicolorării $\chi(G, x)$ este numărul minim de culori necesare pentru o multicolorare validă:

$$\chi_m(G, x) = \min \left\{ k \mid \exists \text{ multicolorare validă } c \text{ cu } \bigcup_{v \in V} c(v) \subseteq \{1, 2, \dots, k\} \right\} \quad (1.5)$$

Ca și GCP, problema multicolorării grafurilor este NP-hard, necesitând algoritmi euristici și de aproximare pentru instanțe mari.

1.2 Diferențe între colorare clasică și multicolorare.

Vom analiza în continuare comparația dintre colorarea clasică și multicolorarea grafurilor din mai multe perspective relevante pentru planificarea sarcinilor. Dincolo de observația deja binecunoscută conform căreia, în colorarea clasică, unui vârf i se atribuie o singură culoare, în timp ce în multicolorare se atribuie un set de culori, există și alte diferențe semnificative:

- Concepte de preempțiune și Non-preempțiune:

- Colorarea clasică: Nu include noțiuni de preempțiune, deoarece fiecărui vârf i se alocă o singură culoare, deci execuția echivalentă a sarcinii este considerată continuă și indivizibilă.
- Multicolorarea: Introduce noțiunile de:
 - * Preempțiune: culorile (resursele) atribuite unei sarcini pot fi distribuite în timp, ceea ce înseamnă că sarcina poate fi întreruptă și reluată ulterior.
 - * Non-preempțiune: culorile trebuie să formeze un interval contiguu, reflectând faptul că sarcina trebuie să fie executată fără întrerupere.
- Obiectivele funcției de cost:
 - Colorarea clasică: Obiectivul principal este minimizarea numărului de culori folosite, ceea ce echivalează cu utilizarea eficientă a resurselor fără conflicte.
 - Multicolorarea: Pe lângă minimizarea culorilor, apar și alte obiective multiple și ierarhizate, specifice problemelor reale de planificare:
 - * Maximizarea câștigului (de exemplu prin prioritizarea sarcinilor mai importante),
 - * Minimizarea preempțiunii (reducerea fragmentării execuției),
 - * Minimizarea intervalului de culori (reducerea timpului total de execuție pentru o sarcină).
- Restricții privind resursele și acceptarea sarcinilor:
 - Colorarea clasică: De obicei, nu implică restricții de capacitate pentru fiecare culoare (adică, un număr nelimitat de vârfuri pot primi aceeași culoare dacă nu sunt adiacente).
 - Multicolorarea: În aplicațiile de planificare, adesea se confruntă cu un număr fix de “mașini” sau resurse partajate, limitând câte vârfuri pot avea aceeași culoare la un moment dat. De asemenea, introduce problema acceptării/respingerii sarcinilor, unde nu toate sarcinile pot fi programate.
- Complexitate în clase specifice de grafuri: Deși ambele probleme sunt NP-hard în general, complexitatea lor poate diferi semnificativ chiar și pentru clase de grafuri considerate “ușoare” în colorarea clasică.[8]

- Drumuri (Paths): Colorarea unitară și problemele de makespan sunt triviale, dar multicolorarea sumă preemptivă este considerată dificilă.[8]
- Arbori (Trees): Multicolorarea sumă preemptivă este puternic NP-hard, în timp ce colorarea sumă este ușor de rezolvat.[8]
- Grafuri Interval: Multicolorarea makespan non-preemptivă este NP-hard și APX-hard, în timp ce colorarea clasică este ușor de rezolvat printr-o metodă greedy.[8]

1.3 Aplicații relevante ale multicolorării

Problema multicolorării grafurilor este deosebit de importantă în contextul planificării joburilor (job scheduling) și alocării resurselor, extinzând aplicațiile clasice ale colorării grafurilor prin abordarea unor scenarii mai complexe. Următoarele aplicații exemplifică perfect această relevanță:

- **Planificarea Joburilor (Job Scheduling)** Multicolorarea oferă un cadru natural pentru modelarea problemelor de planificare din producție, unde:
 - Joburile cu durate variate necesită multiple unități de timp consecutive (culori)
 - Resursele partajate limitează numărul de joburi care pot rula simultan.
 - Resursele critice creează incompatibilități între anumite joburi
 - Preempția controlată permite întreruperea și reluarea joburilor.

Limita așadar a colorării clasice constă în faptul că consideră doar scenariile simplificate unde toate taskurile au durată unitară, multicolorarea pe de altă parte poate surprinde durată variabilă a joburilor și necesitatea de alocare a unor intervale de timp consecutive. Mai multe detalii despre această aplicație vor fi prezentate în capitolul 2.

- **Planificarea Orare (Timetabling)** Dacă am presupune că toate cursurile au aceeași durată (o singură oră) colorarea clasică ar fi suficientă, însă realitate academică este mult mai complexă. Multicolorarea așadar poate permite:
 - Cursuri cu durate diferite – unele cursuri se rezumă la o oră, altele 2–3 ore.

- Cursuri cu apariții multiple – același curs poate avea mai multe sesiuni pe săptămână.
- Alocarea de intervale consecutive pentru cursurile de lungă durată.
- **Alocarea Frecvențelor în Comunicațiile Fără Fir .** În rețelele celulare, problema alocării canalelor ilustrează perfect necesitatea multicolorării:
 - Stațiile de bază (noduri) trebuie să gestioneze multiple apeluri simultan.
 - Fiecare apel necesită un canal de frecvență dedicat.
 - Interferența geografică între stații adiacente interzice folosirea aceluiași frecvențe.
 - Numărul de canale per stație variază în funcție de traficul de apeluri.

Deci graful nostru ar reprezenta stațiile de bază prin noduri, iar muchiile ar reprezenta adiacența geografică. Fiecare nod necesită atribuirea unui număr de culori (canale) egal cu numărul de apeluri care se conectează la acea stație de bază. Colorarea tradițională nu poate surprinde acest trafic care necesită multiple canale simultan, limitându-se la o singură frecvență per stație.

Capitolul 2

Multicolorarea în planificare joburilor

2.1 Modelarea problemei de job scheduling ca graf

În acest capitol vom începe discuția multicolorării într-un context precis, anume planificarea joburilor. Voi prezenta întâi un exemplu din viața reală pe baza căruia vom construi modelul problemei.

Problema noastră este întâlnită într-o companie internațională de produse cosmetice cu sediul în Geneva. Producția acestor loțiuni de înfrumusețare este caracterizată de cantități mari vândute și de o gamă largă de produse. Sistemul de producție utilizează un flux continuu și este foarte flexibil, așadar ușor de reconfigurat. Este clar că pentru fiecare tip de loțiune este necesară utilizarea simultană a mai multor resurse, cum ar fi: rezervoare cu diferite materii prime, mixere, angajați pentru operare și supervizare, chimiști pentru controlul calității și siguranței. Totuși datorită caracteristicilor lor tehnice, vom numi rezervoarele și chimiștii resurse critice, două produse ce necesită o resursă critică nu pot fi procesate concomitent. Fiecare “job” se referă la o cantitate (în unități de rezervor) dintr-un anumit tip de produs (loțiune) care trebuie livrată la un centru de distribuție. Fiecare job are un timp de procesare proporțional cu cantitatea de produs și de asemenea are asociat un câștig. Este important de menționat că nu există câștig pentru un job finalizat parțial.[10]

Acestea fiind spuse, definim formal:

- Graful neorientat de incompatibilitate $G = (V, E)$, unde:
 - $V = 1, 2, \dots, n$ reprezintă mulțimea joburilor (produse de fabricat)
 - $E \subseteq V \times V$ reprezintă mulțimea muchiilor de incompatibilitate

- $(i, j) \in E$ dacă și numai dacă joburile i și j necesită aceeași resursă critică

Parametrii temporali:

- $D \in \mathbb{N}^*$ – numărul total de unități de timp disponibile (deadline global)
- $p_i \in \mathbb{N}^*$ – timpul de procesare al jobului i (numărul de unități de timp necesare)
- $C = 1, 2, \dots, D$ – mulțimea culorilor disponibile (unități temporale)

• Parametrii de resurse:

- $l \in \mathbb{N}^*$ – numărul de unități de resurse partajate disponibile
- $g_i \in \mathbb{R}^+$ – profitul asociat jobului i (marja brută)

2.2 Constrângerii de alocare a resurselor și timpului

Un aspect Problema P așadar constă în colorarea unui subset al grafului astfel încât să nu existe două vârfuri colorate identice optimizând simultan următoarele obiectivele în ordine lexicografică:

- f1: maximizarea câștigului total al joburilor în favoarea vârfurilor colorate. Cel mai important obiectiv, fiind direct legat de venitul total.
- f2: minimizarea numărului total de întreruperi ale joburilor. Ne dorim să nu avem întârziere și munca să fie productivă
- f3: minimizarea timpului total de flux. Ne dorim reducerea costurilor de inventar, prin acest obiectiv se reduce volumul de “muncă în curs de desfășurare”

Spre deosebire de colorarea clasică, care nu include noțiuni de preempțiune, multicolorarea introduce explicit această noțiune, permițând ca sarcinile să fie întrerupte la puncte de timp întregi și reluate ulterior. Această flexibilitate este crucială în planificare, unde resursele pot fi realocate dinamic. Deși, în general, preempțiunea poate facilita rezolvarea problemelor de planificare, în medii de producție, aceasta poate duce la întreruperi costisitoare (ca întârzieri și muncă neproductivă). De aceea, în multe aplicații practice cum se întâmplă în cazul nostru, se urmărește minimizarea numărului de întreruperi, chiar dacă preempțiunea este permisă.

Pentru a defini complet problema P, este necesar să specificăm constrângerile matematice care modelează alocarea resurselor și timpului în cadrul problemei noastre. Ne vom folosi de modelul de graf definit anterior și de următoarele definiții a variabilelor de decizie necesare pentru construirea modelului matematic:

Definiția 3. • $z_i = 1$ dacă vârful i este colorat complet, 0 altfel

- $Max_i =$ cea mai mare culoare atribuită vârfului i , 0 în cazul în care nu este colorat
- $Min_i =$ cea mai mică culoare atribuită vârfului i , 0 în cazul în care nu este colorat
- $s_{ic} = 1$ dacă secvența de culori atribuită lui i începe sau este continuată (după o întrerupere) cu culoarea c
- $x_{ic} = 1$ dacă vârful i are culoarea c , 0 altfel
- $x_{ic}, z_i, s_{ic} \in \{0, 1\}, c \in C, i \in V$
- $Min_i, Max_i \geq 0, i \in V$

Constrângerile fundamentale:

- Constrângerea de completare a colorării:

$$\sum_{c=1}^D x_{ic} = p_i \cdot z_i, \forall i \in V \quad (2.1)$$

Asigură că fiecare vârf complet colorat primește exact p_i culori distincte.

- Constrângerea de capacitate a resurselor partajate:

$$\sum_{i \in V} x_{ic} \leq l, \forall c \in C \quad (2.2)$$

Limitează numărul de joburi care pot fi executate simultan la numărul disponibil de resurse partajate l .

- Constrângerea de incompatibilitate:

$$x_{ic} + x_{jc} \leq 1, \forall c \in C, \forall (i, j) \in E \quad (2.3)$$

Muchia (i, j) reprezintă cum am menționat anterior incompatibilitatea dintre joburile i și j . Prin această constrângere ne asigurăm ca joburile incompatibile nu pot fi executate în aceeași unitate de timp.

Constrângerile obiectivelor:

1. Obiectivul f2(minimizarea numărului de întreruperi):

- Detectarea începutului de secvență:

$$s_{ic} \geq x_{ic} - x_{i(c-1)}, \forall c \in C, \forall i \in V \quad (2.4)$$

Această constrângere identifică fiecare reluare a execuției unui job și este folosită pentru a calcula numărul total de întreruperi.

2. Obiectivul f3(minimizarea timpului total de flux):

- Valoarea maximă:

$$c \cdot x_{ic} \leq Max_i, \forall c \in C, \forall i \in V \quad (2.5)$$

- Valoarea minimă:

$$c \cdot x_{ic} + D \cdot (1 - x_{ic}) \geq Min_i, \forall c \in C, \forall i \in V \quad (2.6)$$

- Validarea minimului pentru joburile colorate:

$$D \cdot z_i \geq Min_i, \forall i \in V \quad (2.7)$$

Prin aceste constrângeri se determină poziția primei și ultimei unități planificate pentru fiecare job

Ținând cont de toate definițiile și constrângerile enumerate până în acest punct, putem defini modelul matematic al problemei astfel:

Definiția 4.

$$\max \alpha_1 \cdot \sum_{i \in V} (z_i \cdot g_i) - \alpha_2 \cdot \sum_{i \in V} \sum_{c=1}^D s_{ic} - \alpha_3 \cdot \sum_{i \in V} (Max_i - Min_i + z_i) \quad (2.8)$$

Unde fiecare termen al sumei corespunde obiectivelor f1,f2,f3 și $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sunt coeficienți pozitivi care definesc importanța fiecărui obiectiv în raport cu celelalte.

2.3 Dificultatea problemei

Problema multicolorării grafurilor, inclusiv varianta specifică pentru planficarea joburilor (problema P), este o problemă NP-hard. Această clasificare indică faptul că, pentru instanțe de dimensiuni mari, găsirea unui soluții optime într-un timp rezonabil (polinomial) este imposibilă din punct de vedere computațional. Cum putem demonstra caracterul NP-hard al problemei? Prin reducere acesteia la problema k-colorării,

care este recunoscută ca fiind NP-completă[7][4][5][6], iar rezolvarea problemei P ar însemna o rezolvare și a problemei k-colorării, lucru ce ar contrazice cunoștințele din teoria complexității.

Este clar așadar că datorită dificultății acestei probleme, formulările de programare liniară cu numere întregi (ILP) ar putea să fie de folos doar pentru instanțele de dimensiuni mici. Pentru instanțele mai mari, devine necesară adoptarea unor abordări alternative. Aceste metode sunt reprezentate de metodele euristice și metaheuristice, ce oferă un soluții rezonabile ca calitate și timp de calcul necesar. În următorul capitol vom vorbi mai amănunțit despre aceste metode, împreună cu o implementare a acestora.

Capitolul 3

Algoritmi implementați

Pentru rezolvarea problemei P , am dezvoltat 3 algoritmi: Greedy (constructiv), Descent (căutare locală), Tabu Search (metaeuristic avansat). Voi parcurge în ordine fiecare algoritm oferind pseudocodul corespunzător, urmat de o descriere intuitivă a logicii și principiului de funcționare. De asemenea, este de menționat că fiecare algoritm primește ca parametri de bază graful $G = (V, E)$, vectorul de culori p , numărul total de unități de timp/culori D , limita numărului de unități de resurse partajate/culori l și vectorul de câștig g . Mai multe detalii despre metoda prin care acești parametri au fost aleși vor fi prezentate în capitolul următor.

3.1 Algoritmul Greedy

Algorithm 1 Greedy

```
1:  $s \leftarrow$  soluție inițială goală
2:  $V' \leftarrow V$ 
3: while  $V' \neq \emptyset$  do
4:    $i \leftarrow \max_{v' \in V'} g[v']$ 
5:    $V' \leftarrow V' \setminus \{v'\}$ 
6:    $A_i \leftarrow$  culorile admisibile pentru  $i$ 
7:   if  $|A_i| < p[i]$  then
8:     continue
9:    $B_i \leftarrow$  cel mai mare subset consecutiv din  $A_i$ 
10:  if  $|B_i| \geq p[i]$  then
11:    Atribue  $p[i]$  culori consecutive aleatorii din  $B_i$ 
12:  else
13:    Atribue toate culorile din  $B_i$ 
14:    Completează cu culori din  $A_i \setminus B_i$  minimizând întreruperile și dacă este cazul
    diferența maximă dintre culori (range-ul)
15:  actualizează soluția  $s$ 
16: return  $s$ 
```

Această euristică constructivă pornește de la graful de incompatibilitate și se bazează pe alegerea, la fiecare pas, a nodului cu cel mai mare câștig. Din mulțimea de culori C sunt selectate doar acele culori care respectă constrângerile fundamentale specifice nodului respectiv, notate cu A_i . Un nod poate fi colorat complet sau deloc; dacă în mulțimea A_i nu există cel puțin $p[i]$ culori admisibile, nodul este exclus din colorare.

Pentru a minimiza întreruperile și diferențele dintre culorile alocate, se caută cel mai mare subset consecutiv de culori din A_i , denumit B_i . Dacă dimensiunea lui B_i este suficientă pentru a acoperi cerința $p[i]$, nodului i i se atribuie $p[i]$ culori consecutive, alese aleatoriu, din B_i . În caz contrar, se atribuie toate culorile din B_i , iar restul necesar este completat cu culori din $A_i \setminus B_i$. Completarea se face astfel încât să se minimizeze întreruperile — considerate binar: 0 dacă noile culori sunt consecutive cu cele deja atribuite, 1 în caz contrar. Atunci când întreruperile nu pot fi complet evitate, se preferă culorile aflate cât mai aproape de capătul superior al lui p_i , pentru a menține diferențele dintre culori cât mai mici. Această alegere are ca scop secundar reducerea timpului

total de flux, asociat obiectivului f_3 .

3.2 Algoritmul Descent

Algorithm 2 Descent

```
1: while numărul de restarturi  $> 0$  do
2:    $s \leftarrow$  soluție inițială generată cu Greedy (vezi Secțiunea 1)
3:   while nu este îndeplinită o condiție de oprire do
4:     for all  $i \in V$  do
5:       if  $|A_i| \geq p[i]$  then
6:         generează o nouă soluție  $s_i$  aplicând  $R^{SD}$  în  $i$ 
7:       else
8:         generează o nouă soluție  $s_i$  aplicând  $R^{Enf}$  în  $i$ 
9:       păstrează cea mai bună soluție din vecinătatea  $N(s)$ 
10:    if s-a găsit o soluție mai bună then
11:       $s \leftarrow$  soluția îmbunătățită
12: return  $s$ 
```

Algoritmul Descent este o metodă de căutare locală cu restarturi multiple. Acesta pornește de la o soluție inițială construită cu o euristică greedy și o îmbunătățește iterativ prin aplicarea unor mutări asupra vârfurilor, în funcție de culorile disponibile. Deoarece problema nu permite colorarea parțială (fiecare vârf trebuie colorat complet cu exact p_i culori), mutările aplicate recolorează/colorează complet un vârf. Procesul continuă până când nu se mai pot obține îmbunătățiri (optimum local) sau până la atingerea unui număr maxim de iterații. La finalul fiecărei runde, dacă soluția curentă este mai bună decât cea optimă cunoscută, aceasta este salvată. Alegerea mutării depinde de numărul de culori admisibile $|A_i|$ pentru un vârf i . Dacă $|A_i| \geq p_i$ se aplică R^{SD} , în caz contrar se aplică R^{Enf} .

Algorithm 3 R^{SD}

```
1:  $s' \leftarrow s$ 
2: while nodul  $i$  nu este colorat complet do
3:    $Z_i \leftarrow \{j \in Vecini(i) \mid j \text{ necolorat}\}$ 
4:    $c \leftarrow \max_{c \in A_i} \sum_{j \in Z_i} u_c(j)$ 
5:   Atribue culoarea  $c$  nodului  $i$  în  $s'$ 
6:    $A_i \leftarrow A_i \setminus \{c\}$ 
7: return  $s'$ 
```

R^{SD} are ca scop minimizarea gradului de saturație al vecinilor necolorați ai lui i (numărul de culori diferite utilizate de vecinii săi). La fiecare pas alegem o culoare $c \in A_i$ care maximizează suma $\sum_{j \in Z_i} u_c(j)$, unde Z_i este mulțimea vecinilor necolorați ai nodului i și $u_c(j) = 1$ dacă culoarea este prezentă în vecinii lui j , 0 altfel. Pe scurt, sunt preferate culorile deja „vizibile” în vecinătatea vecinilor lui i , pentru a evita creșterea gradului de saturație și, implicit, restrângerea opțiunilor de colorare în pașii următori.

Algorithm 4 R^{Enf}

```
1:  $s' \leftarrow s$ 
2:  $s'[i] \leftarrow A_i$ 
3:  $C_{nesaturate} \leftarrow \{c \in C \setminus A_i \mid \text{count}(c) < l\}$ 
4: for all  $c' \in C_{nesaturate}$  do
5:    $pierdere_{c'} \leftarrow \sum_{j \in Vecini(i), c' \in p[j]} g[j]$ 
6: Sortează  $C_{nesaturate}$  descrescător după  $pierdere_{c'}$ 
7: while  $p_i - |A_i| > 0$  do
8:   for all  $c' \in C_{nesaturate}$  do
9:     Decolorează toți vecinii nodului  $i$  ce conțin culoare  $c'$ 
10:   Atribue culoarea nodului  $i$  în  $s'$ 
11: return  $s'$ 
```

R^{Enf} începe prin a atribui toate culorile admisibile vârfului ($|A_i| < p_i$). Pentru culorile lipsă, identifică culori “ne-saturate”, adică culori ce respectă constrângerea de capacitate (apar în mai puțin de l vârfuri). Apoi, se estimează pierderea de câștig (în funcție de ponderea vecinilor afectați) pentru eliminarea acestor culori din vecini. Se selectează culorile cu pierdere minimă și se decolorează vecinii care le folosesc, pentru

a permite „furtul” acestor culori și completarea colorației vârfului i .

3.3 Algoritmul Tabu Search

Algorithm 5 Tabu Search

```
1:  $s \leftarrow$  soluție inițială generată cu Greedy (vezi Secțiunea 1)
2:  $s^* \leftarrow s$ 
3:  $I \leftarrow 0$ 
4: while nu este îndeplinită condiția de oprire do
5:   Generează vecinătatea  $N(s)$  conform strategiei alese
6:   Selectează  $(v, s') \in N(s)$ , cea mai bună soluție non-tabu
7:   Actualizează lista tabu pentru nodul  $v$  pentru  $tab$  iterații
8:    $s \leftarrow s'$ 
9:   if  $f(s) < f(s^*)$  then  $\triangleright$  funcția  $f$  returnează valorile obiectivelor  $f_1, f_2, f_3$  pentru soluția  $s$ 
10:      $s^* \leftarrow s, I \leftarrow 0$ 
11:   else
12:      $I \leftarrow I + 1$ 
13:   if  $I \geq I_{\max}$  then
14:     Decolorează  $b\%$  din vârfuri
15:      $I \leftarrow 0$ 
16: return  $s^*$ 
```

Tabu Search este un algoritm de căutare locală, similar cu algoritmul Descent, care pornește de la o soluție inițială generată prin metodă euristică Greedy (vezi Secțiunea 1). La fiecare iterație, se generează vecinătatea soluției curente $N(s)$, adică mulțimea soluțiilor obținute prin modificarea culorii atribuite unui singur vârf din s , respectând constrângerile problemei. Din această vecinătate, se selectează cea mai bună soluție non-tabu, adică o soluție care nu implică mutări interzise temporare. Mutările interzise sunt gestionate printr-o listă tabu, care stochează nodurile modificate (recoloreate/colorate) recent, împiedicând revenirea pentru un interval de timp la soluții anterioare și astfel evitând ciclurile sau blocarea în minime locale. Pentru fiecare nod v afectat, lista tabu este actualizată și îi interzice modificarea pentru un număr fix de iterații tab .

Algoritmul include și un mecanism de diversificare. Dacă în I_{\max} iterații consecutive nu se obține nicio îmbunătățire privind cele trei obiective, se decolorează un

procentaj $b\%$ din vârfurile soluției curente. Scopul esențial este a de a permite algoritmului explorarea altor regiuni din spațiul soluțiilor.

Algorithm 6 Generarea vecinătății $N(s)$

```

1:  $N(s) \leftarrow \emptyset, Q \leftarrow \emptyset$ 
2: if strategia = 2 then
3:   Setează  $R \in \{R^{Exact}, R^{SD}\}$  cu probabilități  $\gamma$  și  $1 - \gamma$ 
4: for all  $i \in V'$  do ▷  $V'$  reprezintă un procentaj de vârfuri alese aleatoriu din  $V$ 
5:   if  $i$  este complet colorat și prob < 0.25 then
6:     Aplică  $R^{Drop}(i)$ 
7:   if prob < 0.25 then
8:     if  $|A_i| < p[i]$  then
9:       Aplică  $R^{Enf}(i)$ 
10:    else
11:      if strategia = 1 then
12:        Aplică  $R^{SD}(i)$  și adaugă  $i$  în  $Q$ 
13:      else
14:        Aplică  $R(i)$  ▷ selectat anterior între  $R^{Exact}$  și  $R^{SD}$ 
15: if strategia = 1 și  $Q \neq \emptyset$  then
16:   Sortează  $Q$  descrescător după câștig
17:   Aplică  $R^{Exact}$  la 25% dintre primii  $q$  din  $Q$  (aleator)
18: return  $N(s)$ 

```

Vecinătatea unei soluții curente s este generată prin aplicarea unor mișcări specifice asupra unui subset aleatoriu de vârfuri dintr-un procentaj prestabilit al mulțimii V , notat cu V' (strategie utilizată pentru a reduce timpul de execuție).

Pentru fiecare $i \in V'$, se aplică una dintre următoarele mișcări, în funcție de strategia selectată și de condițiile locale:

- $R^{Drop}(i)$, cu probabilitate de 25%, dacă nodul i este complet colorat. Această acțiune elimină toate culorile asociate nodului i .
- Tot cu o probabilitate de 25%, se aplică una dintre următoarele:
 - $R^{Enf}(i)$, dacă $|A_i| < p[i]$, adică numărul de culori admisibile este insuficient pentru colorarea completă a nodului.

- **Strategia 1:** Dacă $|A_i| \geq p[i]$, se aplică $R^{SD}(i)$, iar nodul i este adăugat în lista Q . După parcurgerea tuturor vârfurilor, lista Q este sortată descrescător după câștig, iar R^{Exact} este aplicată pentru 25% dintre primele q noduri (selectate aleatoriu).
- **Strategia 2:** Dacă $|A_i| \geq p[i]$, se aplică fie $R^{SD}(i)$, fie $R^{Exact}(i)$, cu probabilități γ și $1 - \gamma$, respectiv.

În urma aplicării acestor mișcări, mulțimea soluțiilor obținute formează vecinătatea $N(s)$ a soluției curente s , care este apoi returnată și utilizată în cadrul algoritmului Tabu Search 5.

Algorithm 7 R_{exact}

```

1: for  $q = 1$  to  $p_i$  do
2:   for all  $c \in A_i$  do
3:     if  $q = 1$  then
4:        $BestS(q, c) \leftarrow \{c\}, \quad Lint(q, c) \leftarrow 0, \quad Lrg(q, c) \leftarrow 1$ 
5:     else
6:        $Best_{int} \leftarrow \infty, Best_{rg} \leftarrow \infty, B \leftarrow \emptyset$ 
7:       for fiecare  $c' \in A_i$  cu  $c' < c$  do
8:         if  $c - c' = 1$  then
9:            $Int \leftarrow Lint(q-1, c')$ 
10:        else
11:           $Int \leftarrow Lint(q-1, c') + 1$ 
12:        if  $Int = Best_{int}$  then
13:           $B \leftarrow B \cup \{c'\}$ 
14:        else if  $Int < Best_{int}$  then
15:           $Best_{int} \leftarrow Int, B \leftarrow \{c'\}$ 
16:        for all  $c' \in B$  do
17:           $Rg \leftarrow Lrg(q-1, c') + (c - c')$ 
18:          if  $Rg = Best_{rg}$  then
19:             $c^* \leftarrow c'$  (cu o anumită probabilitate)
20:          else if  $Rg < Best_{rg}$  then
21:             $c^* \leftarrow c', Best_{rg} \leftarrow Rg$ 
22:           $BestS(q, c) \leftarrow BestS(q-1, c^*) \cup \{c\}$ 
23:           $Lint(q, c) \leftarrow Best_{int}, Lrg(q, c) \leftarrow Best_{rg}$ 
24: return  $BestS$ 

```

Algoritmul R_{exact} are ca scop generarea unei secvențe optime de culori pentru un vârf i , minimizând două obiective: **numărul de întreruperi** (f_2) și **diferența de interval (range)** (f_3). O *întrerupere* este definită ca situația în care două culori consecutive dintr-o secvență au o diferență strict mai mare decât 1. *Range-ul* reprezintă diferența dintre cea mai mică și cea mai mare culoare din secvență.

Algoritmul parcurge secvențe de lungime q de la 1 la p_i (lungimea maximă dorită) și, pentru fiecare lungime q , evaluează fiecare culoare $c \in A_i$ (mulțimea culorilor admisibile pentru vârful i) ca potențială ultimă culoare a unei secvențe optime. Se utilizează trei structuri de date: $BestS(q, c)$ pentru a reține secvența optimă, $Lint(q, c)$ pentru numărul de întreruperi și $Lrg(q, c)$ pentru range-ul corespunzător.

Pentru $q = 1$, fiecare culoare $c \in A_i$ inițializează o secvență formată doar din $\{c\}$. În acest caz, nu există întreruperi, deci $Lint(1, c) = 0$. Range-ul unei singure culori este 1, deci $Lrg(1, c) = 1$. $BestS(1, c)$ devine $\{c\}$.

Pentru $q > 1$, algoritmul încearcă să extindă secvențele valide de lungime $q - 1$ prin adăugarea culorii curente c . Procesul se face în doi pași efectuați în ordine:

1. **Minimizarea întreruperilor (f_2):** Se evaluează fiecare $c' \in A_i$ cu $c' < c$. Numărul de întreruperi (Int) este calculat ca $Lint(q - 1, c')$ dacă $c - c' = 1$ (fără o nouă întrerupere) sau $Lint(q - 1, c') + 1$ dacă $c - c' \neq 1$ (o nouă întrerupere). Se construiește un set B care conține toate culorile c' ce minimizează acest Int .
2. **Minimizarea range-ului (f_3):** Dintre culorile c' aflate în setul B , se selectează culoarea c^* care minimizează $Rg = Lrg(q - 1, c') + (c - c')$. Acesta reprezintă range-ul noii secvențe de lungime q .
3. **Gestionarea Egalității:** În cazul în care mai multe culori c' din setul B conduc la același range minim, selecția lui c^* se face aleatoriu, fiecare candidat având o probabilitate egală de $1/|B|$ de a fi ales.

Capitolul 4

Experimente și rezultate

4.1 Măsurători și metrici

Inițial vom discuta despre cum arată instanțele de test în ceea ce privește parametri de bază ai algoritmilor: graful $G = (V, E)$, vectorul de culori p , numărul total de unități de timp/culori D , limita numărului de unități de resurse partajate/culori l și vectorul de câștig g . Pentru generarea grafului se folosesc doi parametri: numărul n de vârfuri și o densitate a grafului d (probabilitate de avea o muchie între două noduri). Am considerat $n \in \{30, 150, 300\}$ și $d \in \{0.2, 0.5, 0.8\}$. Pentru fiecare combinație (n, d) sunt generate câte 10 instanțe. Numărul de culori p_i a unui vârf i este un număr întreg pozitiv ales aleatoriu în intervalul $[1, 10]$. Pentru a simula scenariile reale unde câștigul este în strânsă legătură cu timpul de procesare (p_i), cu cât e un timp de procesare mai mare cu atât și câștigul este mai mare. Prin urmare $g_i = \beta \cdot p_i$, unde β este ales aleatoriu în intervalul $[1, 20]$. Limita de resurse l este setată la 25.

În privința lui D (numărul total de culori) am dori să aibă o valoare ce nu permite colorarea completă pentru a vedea comportamentul algoritmilor cât mai bine. Pentru a determina o valoare potrivită a lui D , a fost creat un script care, pentru fiecare combinație (n, d) , generează 100 de instanțe folosind algoritmul Greedy 1. Pentru fiecare D , se calculează procentul mediu de colorare, precum și intervalul $[\min, \max]$ al procentelor de colorare obținute. Valoarea aleasă pentru testare este cel mai mare D care nu a permis atingerea unui grad de colorare de 100% în niciuna dintre instanțe.

Tabela 4.1: Rezultatele generării valori D

n	d	D	Procent colorat mediu	Interval
30	0.2	24	85.5%	[70.0% – 96.7%]
30	0.5	42	83.7%	[70.0% – 96.7%]
30	0.8	68	82.0%	[60.0% – 96.7%]
150	0.2	63	85.1%	[79.3% – 91.3%]
150	0.5	132	84.6%	[74.7% – 91.3%]
150	0.8	239	82.8%	[72.0% – 91.3%]
300	0.2	101	85.8%	[81.7% – 90.0%]
300	0.5	228	85.8%	[78.3% – 90.0%]
300	0.8	423	84.7%	[79.0% – 90.0%]

Import de menționat că deși valorile prezentate în tabel sunt rezultatul a 100 de instanțe, generarea grafului dar și algoritmul Greedy sunt realizate prin mecanisme predominant aleatorii, deci aceste date pot varia. Aceste aspecte aleatorii datorează și variația valorilor din intervale.

Algoritmii supuși instanțelor de test implică, pe lângă parametrii de bază, și o serie de parametri suplimentari specifici fiecărui algoritm, după cum urmează:

1. **Greedy 1**: utilizează exclusiv parametrii de bază ai instanței, ceea ce explică simplitatea implementării și eficiența în ceea ce privește timpul de execuție.
2. **Descent 2**: necesită definirea unui număr maxim de iterații și a unui număr de restarturi. Aceste valori au fost stabilite prin rulari consecutive pentru fiecare combinație (n, d) , până când s-a găsit pragul în care creșterea celor două variabile nu produce nicio îmbunătățire (cu o limită de timp de n secunde).
3. **Tabu Search 5**: similar algoritmului Descent, acest algoritm primește un număr maxim de iterații, stabilit conform aceleiași logici de limitare temporală. În plus, include următorii parametri:
 - dimensiunea numărului de mutări interzise (tab): setată la 3 pentru $n = 30$ și la 10 pentru $n \in \{150, 300\}$;
 - Parametrul de diversificare / procentul de decolare (b): 20%;
 - numărul maxim de iterații fără îmbunătățire (I_{\max}): 150;

- numărul de noduri selectate pentru $R^{Exact}(q)$: 20;
- procentajul de vârfuri utilizat în generarea vecinătății 6: 25%;
- Probabilitate aplicări R^{SD} în cadrul celei de a doua strategii (γ): 0,2.

Valorile acestor parametri au fost determinate în urma unei etape de ajustare, bazată pe rulări preliminare ale algoritmului pe un set reprezentativ de instanțe.

Instanțele de test vor fi încadrate în 3 tabele distincte, grupate în funcție de numărul de vârfuri n astfel încât să se evidențieze comportamentul algoritmilor în cadrul instanțelor de dimensiuni reduse, medii și mari. Pentru fiecare combinație (n, d) și pentru fiecare algoritm analizat: Greedy, Descent, TS1(Tabu Search cu strategia 1), TS2(Tabu Search cu strategia 2) sunt acordate două coloane: o coloană cu cel mai bun rezultat și o coloană cu rezultatul mediu din cele 10 instanțe. Rezultatele o să fie de forma unui triplet (scor obiectiv f1, scor obiectiv f2, scor obiectiv f3) însoțit de raportul dintre numărul de vârfuri colorate și numărul total de vârfuri.

Tabela 4.2: Rezultate pentru $n = 30$

d	Algoritm	Cel mai bun rezultat	Media rezultatelor
0.2	Greedy	(1747, 5, 185), 22/30	(1623.10, 2.70, 148.40), 20.8/30
	Descent	(1808, 30, 313), 25/30	(1762.10, 30.90, 296.90), 24/30
	TS1	(1808, 22, 243), 25/30	(1771.40, 18.80, 242.00), 23.6/30
	TS2	(1808, 58, 332), 25/30	(1782.70, 40.40, 297.00), 23.6/30
0.5	Greedy	(1614, 7, 170), 26/30	(1555.30, 5.60, 169.30), 24.89/30
	Descent	(1704, 40, 464), 29/30	(1671.50, 26.60, 365.70), 28/30
	TS1	(1704, 31, 384), 29/30	(1684.60, 30.30, 378.00), 27.7/30
	TS2	(1704, 32, 409), 29/30	(1669.70, 53.30, 492.70), 28.7/30
0.8	Greedy	(1617, 7, 169), 27/30	(1588.70, 6.10, 198.80), 26.4/30
	Descent	(1644, 43, 749), 28/30	(1631.40, 42.00, 699.20), 28/30
	TS1	(1688, 35, 620), 29/30	(1646.30, 26.20, 473.10), 28/30
	TS2	(1644, 38, 556), 28/30	(1644.00, 43.80, 608.40), 28.1/30

Tabela 4.3: Rezultate pentru $n = 30$

d	Algoritm	Cel mai bun rezultat	Media rezultatelor
0.2	Greedy	(8075, 17, 736), 138/150	(7994.20, 25.40, 882.40), 134.7/150
	Descent	(8358, 193, 3259), 148/150	(8335.20, 240.10, 3330.10), 148.5/150
	TS1	(8364, 77, 1421), 149/150	(8326.80, 64.40, 1298.60), 147/150
	TS2	(8364, 68, 1537), 149/150	(8341.70, 68.50, 1393.00), 148/150
0.5	Greedy	(8517, 53, 1903), 129/150	(8253.50, 43.70, 1608.70), 124.6/150
	Descent	(8862, 296, 7593), 147/150	(8807.70, 284.40, 7148.60), 145.9/150
	TS1	(8862, 130, 3335), 147/150	(8802.50, 133.00, 3350.20), 144.9/150 27.7/30
	TS2	(8891, 172, 4249), 148/150	(8829.20, 155.50, 3720.80), 145.4/150
0.8	Greedy	(7655, 42, 2247), 131/150	(7579.80, 41.80, 1904.30), 126.8/150
	Descent	(7992, 280, 11956), 149/150	(7964.10, 250.90, 11422.90), 147.8/150
	TS1	(7985, 150, 5995), 148/150	(7953.90, 144.50, 5258.40), 146.7/150
	TS2	(8006, 212, 7657), 150/150	(7991.30, 188.10, 6812.80), 148.5/30

4.2 Interpretarea rezultatelor și concluzii parțiale

În cadrul experimentelor, timpul de execuție nu a fost utilizat ca metrică de performanță, ci doar ca reper pentru setarea parametrilor algoritmilor metaheuristici. Astfel, pentru algoritmi *Descent* și *Tabu Search*, numărul maxim de iterații (și, unde este cazul, numărul de restarturi) a fost calibrat astfel încât timpul total de execuție să nu depășească pragul de $10 \cdot n$ secunde, unde n este numărul de vârfuri al grafului procesat. Prin urmare, timpul a fost uniformizat între instanțele de aceeași dimensiune și nu a reprezentat un criteriu de comparație între algoritmi. Accentul a fost pus pe calitatea soluțiilor obținute în acest interval prestabilit de timp.

Capitolul 5

Dezvoltarea aplicației web

- 5.1 Arhitectura generală a aplicației**
- 5.2 Prelucrarea și introducerea datelor în aplicație**
- 5.3 Modulul de multicolorare și interfața utilizator**
- 5.4 Testare și funcționalități implementate**

Concluzii

Bibliografie

- [1] D. Costa, A. Hertz, and O. Dubuis. Embedding of a sequential procedure within an evolutionary algorithm for coloring problems in graphs. *Journal of Heuristics*, 1:105–128, 1995.
- [2] R. Dorne and J. K. Hao. A new genetic local search algorithm for graph coloring. In *Proceedings of PPSN'98*, Lecture Notes in Computer Science, 1998. To appear.
- [3] Raphael Dorne and Jin-Kao Hao. Tabu search for graph coloring, t-colorings and set t-colorings. In *Proceedings of a Conference on Graph Theory or Combinatorics*, 2000.
- [4] H. Gabow and O. Kariv. Algorithms for edge coloring bipartite graphs and multigraphs. *SIAM Journal on Computing*, 11(1):117–129, February 1992.
- [5] R. Gandhi, M. M. Halldórsson, G. Kortsarz, and H. Shachnai. Approximating non-preemptive open-shop scheduling and related problems. In *Proceedings of the 31st International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP)*, 2004.
- [6] R. Gandhi, M. M. Halldórsson, G. Kortsarz, and H. Shachnai. Improved bounds for sum multicoloring and weighted completion time of dependent jobs. Unpublished manuscript, 2004.
- [7] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, 1979.
- [8] Magnus M. Halldórsson and Guy Kortsarz. Multicoloring: Problems and techniques. In *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2004. Conference paper, August 2004.
- [9] C.H. Papadimitriou and K. Steiglitz. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Prentice Hall, 1982.

- [10] Simon Thevenin, Nicolas Zufferey, and Jean-Yves Potvin. Graph multi-coloring for a job scheduling application. *European Journal of Operational Research*, 255(1):128–141, 2016.