



Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Робототехники и комплексной автоматизации

КАФЕДРА Системы автоматизированного проектирования (РК-6)

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Студент Головкин Антон Павлович

Группа РК6-63

Тип задания лабораторная работа

Тема лабораторной работы Численное дифференцирование. Численное интегрирование. Быстрое преобразование Фурье.

Студент _____
подпись, дата фамилия, и.о.

Преподаватель _____
подпись, дата Соколов А.П.
фамилия, и.о.

Оценка _____

Москва, 2018 г.

Задание

Задача 1 (численное дифференцирование) Дана функция

$$g(x) = xe^x, (1)$$

и узел $x_0 = 2$.

Требуется:

1. Вывести общую центральную формулу численного дифференцирования 4-го порядка вместе с остаточным членом, аппроксимирующую первую производную по 5 узлам:

$$f' \approx Af(x_0 - 2h) + Bf(x_0 - h) + Cf(x_0) + Df(x_0 + h) + Ef(x_0 + 2h). (2)$$

Продемонстрируйте, что формула действительно имеет 4-й порядок точности.

2. Написать функцию `diff2(x_0, h, f)`, которая возвращает значение первой производной функции f на основе центральной формулы численного дифференцирования 2-го порядка в точке x_0 для шага дифференцирования h .

3. Написать функцию `diff4(x_0, h, f)`, которая возвращает значение первой производной функции f на основе центральной формулы численного дифференцирования 4-го порядка в точке x_0 для шага дифференцирования h .

4. Рассчитать производную $g'(x)$ в точке $x_0 = 2$ для множества значений $h \in [10^{-16}; 1]$ сначала с помощью функции `diff2`, а затем с помощью функции `diff4`. Для обоих случаев постройте log-log графики зависимости абсолютной погрешности численного дифференцирования от шага дифференцирования. Для каждого случая ответьте на следующие вопросы:

- Каким образом на log-log графике можно увидеть порядок формулы дифференцирования? Докажите это формульно и продемонстрируйте на графике по аналогии с лекциями.
- Совпадает ли порядок выведенной формулы дифференцирования на log-log графике с ее действительным порядком?

· Каков оптимальный шаг дифференцирования, при котором абсолютная погрешность минимальна? С чем связано существование такого минимума? Обоснуйте свой ответ, ссылаясь на данные log-log графика.

5. Сравните оптимальный шаг дифференцирования и соответствующую минимально достижимую погрешность для формул 2-го и 4-го порядка. Как вы думаете, чем обоснована разница между ними?

Задача 2 (численное интегрирование) Дана функция

$$g(x) = x^2 \sin 3x, \quad (3)$$

заданная на интервале $x \in [0; \pi]$.

Требуется:

1. Написать функцию `composite_simpson(a, b, n, f)` численного интегрирования функции f на интервале $[a; b]$ по n узлам с помощью составной формулы Симпсона.

2. Рассчитать интеграл $\int_0^\pi g(x)dx$ с помощью составной формулы Симпсона для множества значений $n \in [3; 9999]$. Постройте log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования. Как и в предыдущем задании, объясните, каким образом по полученному графику можно определить порядок точности формулы. Сравните порядок формулы, полученный с помощью графика, с аналитическим порядком точности составной формулы Симпсона. Существует ли оптимальный шаг интегрирования для данной формулы, минимизирующий достижимую погрешность? Обоснуйте свой ответ.

3. С помощью теоремы о корнях многочленов Лежандра, доказанной в лекциях, вывести квадратуру Гаусса, имеющую степень точности 5. Сколько узлов необходимо для использования такой квадратуры?

4. Написать функцию `gauss_quad5(f)` численного интегрирования функции f с помощью квадратуры Гаусса пятой степени точности.

5. Доказать, что квадратура Гаусса имеет степень точности 5, с помощью следующего вычислительного эксперимента:

- постройте последовательность полиномов $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$, $P_5(x)$, $P_6(x)$, имеющих степени соответственно 0, 1, 2, 3, 4, 5, и 6, используя случайно сгенерированные значения коэффициентов полиномов;
- проинтегрируйте их на интервале $[0; 2]$ аналитически и с помощью выведенной квадратуры Гаусса;
- посчитайте абсолютную погрешность и сделайте вывод о степени точности выведенной квадратуры;
- все выкладки и посчитанные значения должны быть в отчете.

Задача 3 (БПФ) Даны функции

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 5 + 4\cos 2x + 2\sin 3x - \cos 4x, \\ f_2(x) &= |x|, \\ f_3(x) &= \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

заданные на интервале $x \in [-\pi; \pi]$.

Требуется:

1. Используя алгоритм Кули–Тьюки, написать функцию `fft_coeff(y_nodes)`, которая вычисляет и возвращает комплексные коэффициенты тригонометрического полинома, интерполирующего узлы `y_nodes`, равномерно распределенные на отрезке $[-\pi; \pi]$.
2. Протестировать корректность результатов работы функции `fft_coeff(y_nodes)` с помощью БПФ для функции $f_1(x)$. Пользуясь выкладками из лекций,

объясните, как связаны возвращаемые комплексные коэффициенты (и их индексы) с исходной функцией.

3. Написать функцию `trigonometric_interpolant(x, coeffs)`, которая вычисляет значение тригонометрического полинома с коэффициентами `coeffs` в точке x .

4. Используя функции `trigonometric_interpolant` и `fft_coeff`, произвести тригонометрическую интерполяцию функции $f_2(x)$ для $N = 2^{\tilde{n}}$, где $\tilde{n} \in 1, \dots, 8$ и вывести результаты в виде графиков. Проанализируйте непрерывность функции $f_2(x)$ и исходя из графиков сделайте вывод о сходимости подобного приближения:

- является ли сходимость равномерной?
- является ли сходимость среднеквадратической?

5. Повторите те же шаги для функции $f_3(x)$ и ответьте на те же вопросы. В чем по вашему мнению причина различий?

Оглавление

Цель выполнения лабораторной работы.....	7
Задачи, выполненные в процессе реализации лабораторной работы.....	7
1. Численное дифференцирование.	10
2. Численное интегрирование.	13
3. Быстрое преобразование Фурье.	17
Заключение	21

Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы – изучить основы языка python для реализации задач вычислительной математики; реализовать функции для численного дифференцирования, численного интегрирования и функцию для быстрого преобразования Фурье.

Задачи, выполненные в процессе реализации лабораторной работы

1. Разработана функция `diff2(x_0, h, f)`, которая возвращает значение первой производной функции f на основе центральной формулы численного дифференцирования 2-го порядка в точке x_0 для шага дифференцирования h (листинг 1.1).

Листинг 1.1 – Код функции `diff2(x_0, h, f)`

```
def diff2(x_0, h, f):  
    diffF2 = ((1/(2*h))*f(x_0+h)) - ((1/(2*h))*f(x_0-h))  
    return diffF2
```

2. Разработана функция `diff4(x_0, h, f)`, которая возвращает значение первой производной функции f на основе центральной формулы численного дифференцирования 4-го порядка в точке x_0 для шага дифференцирования h (листинг 1.2).

Листинг 1.2 – Код функции `diff4(x_0, h, f)`

```
def diff4(x_0, h, f):  
    A = 1 / (12 * h)  
    B = -2 / (3 * h)  
    C = 0  
    D = -B  
    E = -A  
  
    diffF4 = A * f(x_0 - 2 * h) + B * f(x_0 - h) + C * f(x_0) + D * f(x_0 +  
h) + E * f(x_0 + 2 * h)  
  
    return diffF4
```

3. Разработана функция `composite_simpson(a, b, n, f)` численного интегрирования функции f на интервале $[a; b]$ по n узлам с помощью составной формулы Симпсона (листинг 1.3).

Листинг 1.3 – Код функции composite_simpson(a, b, n, f)

```
def composite_simpson(a, b, n, f):
    h3 = ((b-a)/(n-1))/3
    x = np.linspace(a, b, n)
    oddX = x[2:-1:2]
    evenX = x[1:-1:2]
    integS = h3*(f(a)+2*sum(f(oddX))+4*sum(f(evenX))+f(b))
    return integS
```

4. Разработана функция gauss_quad5(f) численного интегрирования функции f с помощью квадратуры Гаусса пятой степени точности (листинг 1.4).

Листинг 1.4 – Код функции gauss_quad5(f)

```
def gauss_quad5(f):
    a = 0
    b = 2

    c1 = 8 / 9
    c2 = 10 / 18
    c3 = c2

    x1 = 0.5 * (a + b)
    x2 = 0.5 * ((b - a)*(0.6**0.5) + a + b)
    x3 = 0.5 * (a + b + (a - b)*(0.6**0.5))

    integG = c1*f(x1) + c2*f(x2) + c3*f(x3)
    return integG
```

5. Разработана функция fft_coeff(k, y_nodes), которая вычисляет и возвращает комплексные коэффициенты тригонометрического полинома, интерполирующего узлы y_nodes, равномерно распределенные на отрезке $[-\pi; \pi]$ (листинг 1.5).

Листинг 1.5 – Код функции fft_coeff(k, y_nodes)

```
def fft_coeff(k, y_nodes):
    n = len(y_nodes)

    if (n == 2):
        return y_nodes[0] + y_nodes[1]*((-1)**k)

    evenY = y_nodes[0:n:2]
    oddY = y_nodes[1:n:2]

    Ek = fft_coeff(k, evenY)
    Ok = fft_coeff(k, oddY)

    e = exp((-1j * k * pi) / (n/2))
    return Ek + e*Ok
```


6. Разработана функция `trigonometric_interpolant(x, coeffs)`, которая вычисляет значение тригонометрического полинома с коэффициентами `coeffs` в точке `x` (листинг 1.6).

Листинг 1.6 – Код функции `trigonometric_interpolant(x, coeffs)`

```
def trigonometric_interpolant(x, coeffs):  
    m = len(coeffs) - 1  
    fft = np.real(coeffs[0])  
    for i in range(1, m):  
        fft += 2*np.real(coeffs[i])*cos(i*x) -\  
2*np.imag(coeffs[i])*sin(i*x)  
        fft += np.real(coeffs[m])*cos(m*x)  
    return fft
```

1. Численное дифференцирование.

Получим общую центральную формулу численного дифференцирования 4-го порядка с помощью разложения $f(x)$ в ряд Тейлора. Формула первого порядка получается из разложения $f(x)$ в точке x_1 и дальнейшем вычислении ряда в точке $x_1 + h$. Формула четвертого порядка получается аналогичным образом, однако требуются дополнительные вычисления в точках $x_1 - 2h$, $x_1 - h$, $x_1 + h$, $x_1 + 2h$:

$$f(x_1 - 2h) = f(x_1) - 2hf'(x_1) + 2h^2f''(x_1) - \frac{4}{3}h^3f'''(x_1) + \frac{2}{3}h^4f^{(4)}(x_1) - \frac{2}{15}h^5f^{(5)}(\xi^1) \quad (1.1),$$

$$f(x_1 - h) = f(x_1) - hf'(x_1) + \frac{1}{2}h^2f''(x_1) - \frac{1}{6}h^3f'''(x_1) + \frac{1}{24}h^4f^{(4)}(x_1) - \frac{1}{120}h^5f^{(5)}(\xi^2) \quad (1.2),$$

$$f(x_1 + h) = f(x_1) + hf'(x_1) + \frac{1}{2}h^2f''(x_1) + \frac{1}{6}h^3f'''(x_1) + \frac{1}{24}h^4f^{(4)}(x_1) + \frac{1}{120}h^5f^{(5)}(\xi^3) \quad (1.3),$$

$$f(x_1 + 2h) = f(x_1) + 2hf'(x_1) + 2h^2f''(x_1) + \frac{4}{3}h^3f'''(x_1) + \frac{2}{3}h^4f^{(4)}(x_1) + \frac{2}{15}h^5f^{(5)}(\xi^4) \quad (1.4),$$

где $\xi^1 \in (x_1 - 2h; x_1)$, $\xi^2 \in (x_1 - h; x_1)$, $\xi^3 \in (x_1; x_1 + h)$, $\xi^4 \in (x_1; x_1 + 2h)$.

Тогда отняв из (1.4) (1.1) и из (1.3) (1.2) получим:

$$f(x_1 + h) - f(x_1 - h) = 2hf'(x_1) + \frac{1}{3}h^3f'''(x_1) + \frac{1}{120}h^5[f^{(5)}(\xi^3) + f^{(5)}(\xi^2)] \quad (1.5),$$

$$f(x_1 + 2h) - f(x_1 - 2h) = 4hf'(x_1) + \frac{8}{3}h^3f'''(x_1) + \frac{2}{15}h^5[f^{(5)}(\xi^4) + f^{(5)}(\xi^1)] \quad (1.6).$$

В итоге, домножив (1.5) на 8 и отняв из (1.6) получим:

$$\begin{aligned} & f(x_1 + 2h) - f(x_1 - 2h) - 8(f(x_1 + h) - f(x_1 - h)) \\ &= -12hf'(x_1) + h^5 \left[\frac{2}{15}(f^{(5)}(\xi^4) + f^{(5)}(\xi^1)) - \frac{1}{15}(f^{(5)}(\xi^3) + f^{(5)}(\xi^2)) \right] \quad (1.7). \end{aligned}$$

Для получения формулы общей центральной формулы численного дифференцирования 4-го порядка вместе с остаточным членом осталось выразить первую производную из (1.7).

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= \frac{8(f(x_1 - h) - f(x_1 + h)) - (f(x_1 + 2h) - f(x_1 - 2h))}{12h} \\ &+ \frac{h^4}{180} [4(f^{(5)}(\xi^1) - f^{(5)}(\xi^4)) - (f^{(5)}(\xi^2) - f^{(5)}(\xi^3))] \quad (1.8). \end{aligned}$$

Из (1.8) можно выделить коэффициенты A,B,C,D,E:

$$A = \frac{1}{12h}, \quad B = -\frac{2}{3h}, \quad C = 0, \quad D = \frac{2}{3h}, \quad E = -\frac{1}{12h}. \quad (1.9)$$

Степень остаточного члена в формуле (1.8) равна 4. Используя данную формулу можно точно вычислить производные функций, степень которых строго меньше 5. В этом случае остаточный член содержащий $f^v(\xi)$, будет обращаться в ноль.

Была разработана функции $\text{diff2}(x_0, h, f)$, которая возвращает значение первой производной функции f на основе центральной формулы численного дифференцирования 2-го порядка в точке x_0 для шага дифференцирования h . Функция использует следующую формулу дифференцирования:

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1 - h)}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi) \quad (1.10)$$

Также разработана функция $\text{diff4}(x_0, h, f)$, которая возвращает значение первой производной функции f на основе центральной формулы численного дифференцирования 4-го порядка в точке x_0 для шага дифференцирования h .

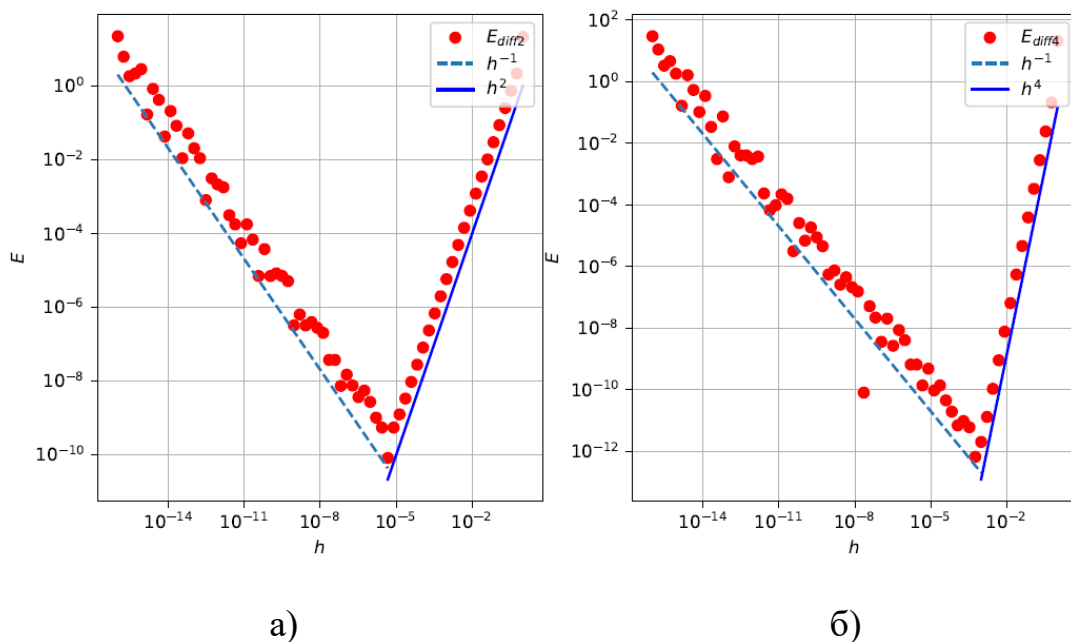


Рис. 1 Зависимость погрешности от шага дифференцирования функции (1), а) с использованием формулы второго порядка (1.10), б) 4-ого порядка (1.8).

Для определения порядка точности формулы дифференцирования на графике, нужно выявить зависимости вида $E(h) = \alpha h^\gamma$. Для графиков выше (Рис. 1) зависимости следующие:

а) $E \sim h^2$,

б) $E \sim h^4$,

то есть для а) порядок формулы равен 2, а для б) равен 4, это соответствует порядку остаточного члена (1.8) (1.10). На графике (Рис. 1) зависимости обозначены прямой линией.

Из графиков (Рис. 1) следует, что:

- оптимальный шаг дифференцирования для формулы численного дифференцирования 2-ого порядка для функции $g(x)$ $h \approx 10^{-5}$,
- оптимальный шаг дифференцирования для формулы численного дифференцирования 4-ого порядка для функции $g(x)$ $h \approx 10^{-3}$.

Это связано с неустойчивостью формул численного дифференцирования (при бесконечно малом шаге погрешность стремится к бесконечности), постоянное уменьшение шага дифференцирования не приводит к увеличению точности. Таким образом, при определённом шаге вычислительная погрешность начнёт увеличиваться обратно пропорционально шагу дифференцирования.

Так как (1.8) имеет меньшую степень остаточного члена чем (1.10), то и оптимальное значение шага h для формулы 4-ого порядка меньше, чем для формулы 2-ого порядка.

2. Численное интегрирование.

Была разработана функция `composite_simpson(a, b, n, f)` численного интегрирования функции f на интервале $[a; b]$ по n узлам с помощью составной формулы Симпсона.

Рассчитан интеграл $\int_0^\pi g(x)dx$ с помощью составной формулы Симпсона для множества значений $n \in [3; 9999]$. Постройте log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования (Рис. 2).

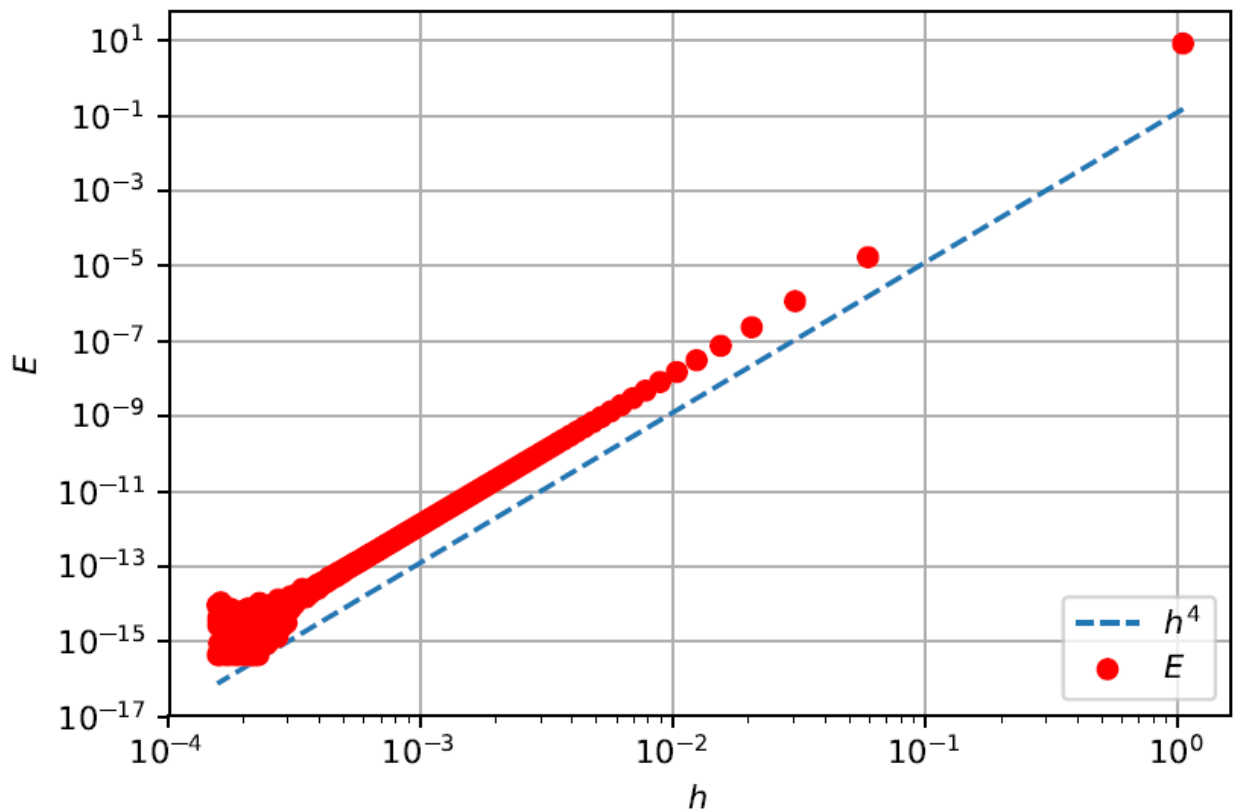


Рис. 2 log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования функции $g(x) = x^2 \sin 3x$ с помощью составной формулы Симпсона.

Для определения порядка точности формулы дифференцирования на графике, нужно выявить зависимости вида $E(h) = \alpha h^\gamma$. Для функции `composite_simpson(a, b, n)` (Рис. 2) зависимость имеет вид $E \sim h^4$, что

соответствует аналитическому порядку точности составной формулы Симпсона. В отличие от дифференцирования, формулы численного интегрирования устойчивы, оптимального шага не существует, а, следовательно, полная погрешность интегрирования падает до тех пор, пока не достигнет значения, сравнимого машинного эпсилон.

С помощью теоремы о корнях многочленов Лежандра, доказанной в лекциях (теорема 3.2.8 [1, с.55]), выведем квадратуру Гаусса, имеющую степень точности 5. Для того чтобы проинтегрировать полином 5 степени, необходимо построить квадратуру для которой потребуется $n = \frac{6}{2} = 3$ узла.

Рассмотрим квадратуру:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i). \quad (2.1)$$

Она имеет $2n$ параметров, столько же параметров имеет полином $2n-1$ степени. Перепишем соответственно квадратуру:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i P_m(x_i), \quad m < 6 \quad (2.2)$$

где $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_3 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ - корни многочлена Лежандра 3-ей степени,

$$c_i = \int_{-1}^1 l_i(x) dx = \int_{-1}^1 \prod_{j=1, j \neq i}^3 \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx. \quad (2.3)$$

Тогда:

$$c_1 = \int_{-1}^1 \frac{x - \sqrt{\frac{3}{5}}}{0 - \sqrt{\frac{3}{5}}} \cdot \frac{x + \sqrt{\frac{3}{5}}}{0 + \sqrt{\frac{3}{5}}} dx = \frac{8}{9}, \quad (2.4)$$

$$c_2 = \int_{-1}^1 \frac{x + \sqrt{\frac{3}{5}}}{\sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{3}{5}}} \cdot \frac{x - 0}{\sqrt{\frac{3}{5}} - 0} dx = \frac{5}{9}, \quad (2.5)$$

$$c_3 = \int_{-1}^1 \frac{x - \sqrt{\frac{3}{5}}}{-\sqrt{\frac{3}{5}} - \sqrt{\frac{3}{5}}} \cdot \frac{x - 0}{-\sqrt{\frac{3}{5}} - 0} dx = \frac{5}{9}, \quad (2.6)$$

Подставим коэффициенты c_1, c_2, c_3 в (2.2) и получим искомую квадратуру.

$$\int_{-1}^1 P_m(x) dx = \frac{8}{9} P_m(0) + \frac{5}{9} P_m\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{5}{9} P_m\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right), m < 6 \quad (2.7)$$

$$\text{где } P_i(x) = \sum_{j=0}^i (j+1)x^j. \quad (2.8)$$

Проинтегрируем функцию (2.7) на интервале $[0; 2]$ с помощью квадратуры Гаусса. Для получения абсолютной погрешности найдем значения интегралов для функций (2.7) аналитически и с помощью написанной функции `gauss_quad5(f)` и сравним их.

Таблица 2.1 Значения абсолютной погрешности интегрирования (E), аналитическое решение интеграла и решение квадратурой Гаусса.

m	Аналитическое решение	Квадратурой Гаусса	E
0	2	2	0.0
1	6	6	0.0
2	14	14	0.0
3	30	30	0.0
4	62	61.(9)	~0
5	126	126.(0)	~0
6	254	253.68(0)	0.31(9)

Из данных, приведённых в таблице 2.1 видно, что полученная формула (2.7) действительно обеспечивает точное интегрирование полиномов со степенью меньше 5.

3. Быстрое преобразование Фурье.

Используя алгоритм Кули–Тьюки, написана функция `fft_coeff(k, y_nodes)`, которая вычисляет и возвращает комплексные коэффициенты тригонометрического полинома, интерполирующего узлы `y_nodes`, равномерно распределенные на отрезке $[-\pi; \pi]$.

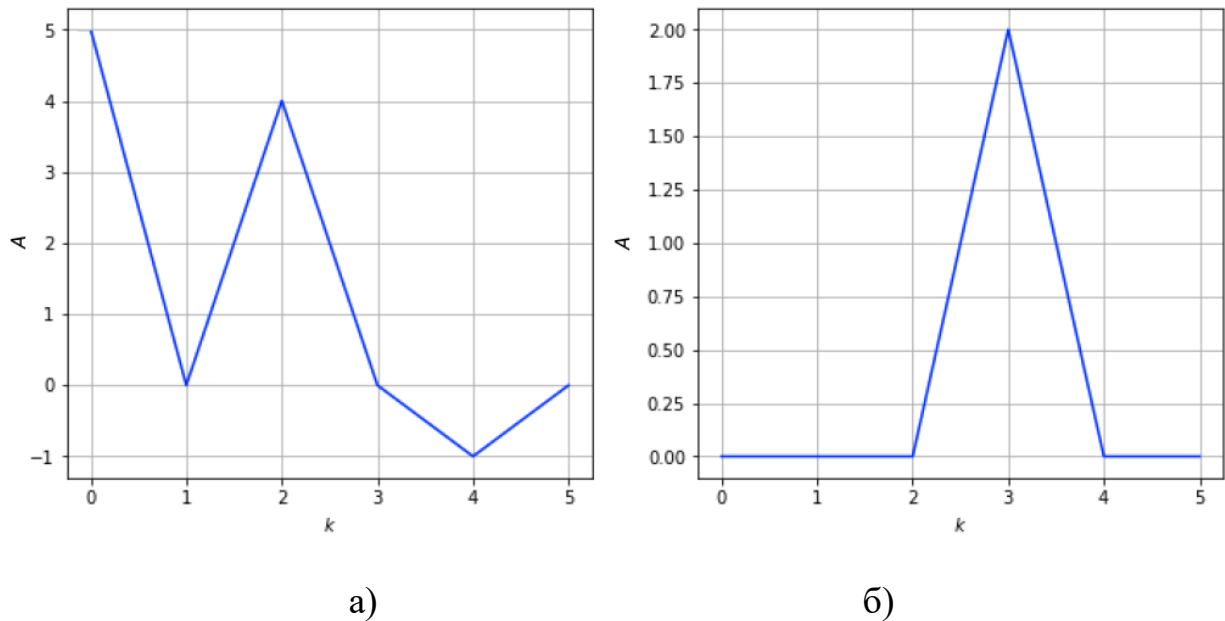


Рис. 3.1 Коэффициенты, найденные с помощью `fft_coeff(k, y_nodes)` для функции $f_1(x)$ (4), на рисунке а) амплитудные значения (A) для действительной части ($\cos(x)$) возвращаемого комплексного коэффициента степени k , б) амплитудные значения (A) для мнимой части ($\sin(x)$) возвращаемого комплексного коэффициента степени k .

Коэффициенты k при $A \cdot \cos(kx)$ и $A \cdot \sin(kx)$ соответствуют частоте тригонометрической функции. Соответственно A является амплитудой для действительной ($A \cdot \cos(kx)$) и мнимой ($A \cdot \sin(kx)$) части возвращаемого комплексного коэффициента степени k .

Была разработана функция `trigonometric_interpolant(x, coeffs)`, которая вычисляет значение тригонометрического полинома с коэффициентами `coeffs` в точке x . Так же была проведена интерполяция функции $f_3(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ с помощью функции `trigonometric_interpolant(x, coeffs)`. Функция была использована чтобы проинтерполировать тестовые функции $f_2(x) = |x|$, и $f_3(x) =$

$\begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ на отрезке $x \in [-\pi; \pi]$. На рисунках (рис. 3.2 - рис.3.7) исходная функция представлена пунктирной линией, интерполянт представлен сплошной линией.

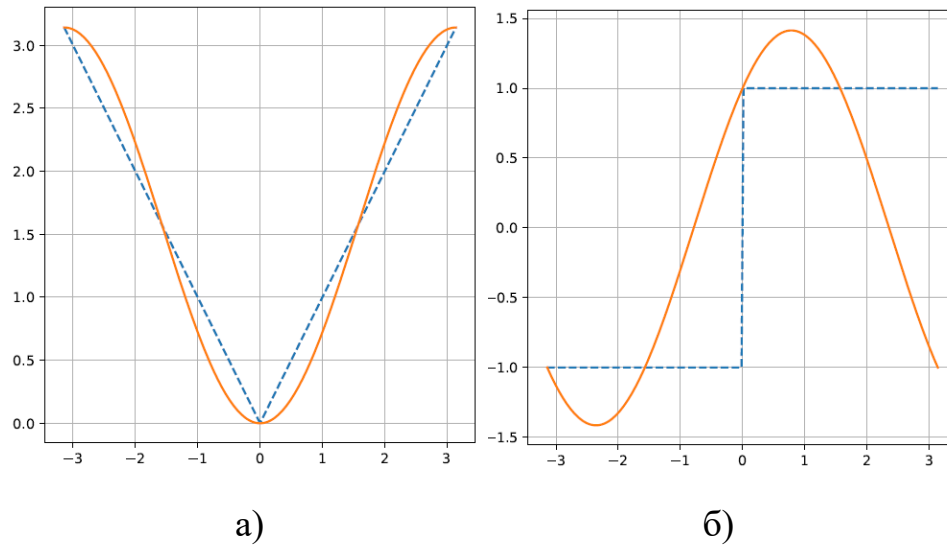


Рис. 3.2 Интерполяция тригонометрическими полиномами для максимального $k=2$, где k - коэффициент для функций $\cos(kx)$, $\sin(kx)$ а) функции $f_2(x) = |x|$,

б) функции $f_3(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

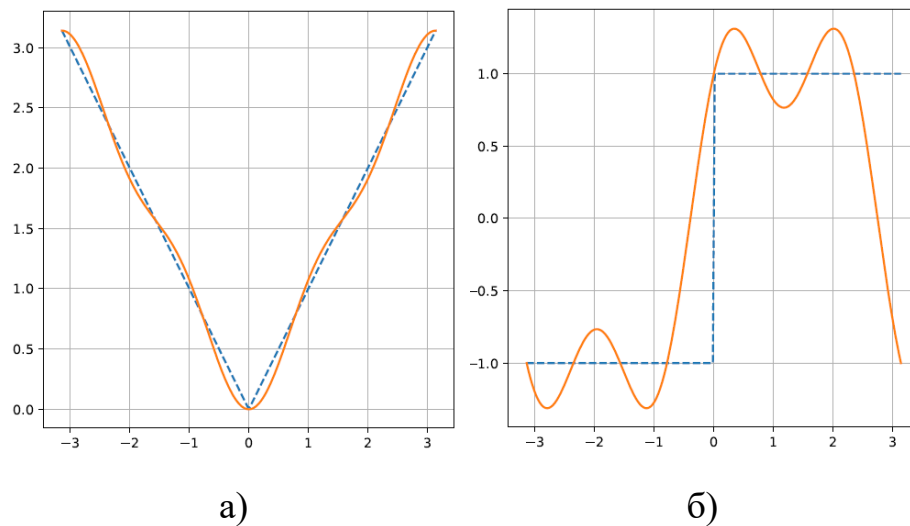


Рис. 3.3 Интерполяция для максимального $k=4$ а) функции $f_2(x) = |x|$,

б) функции $f_3(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

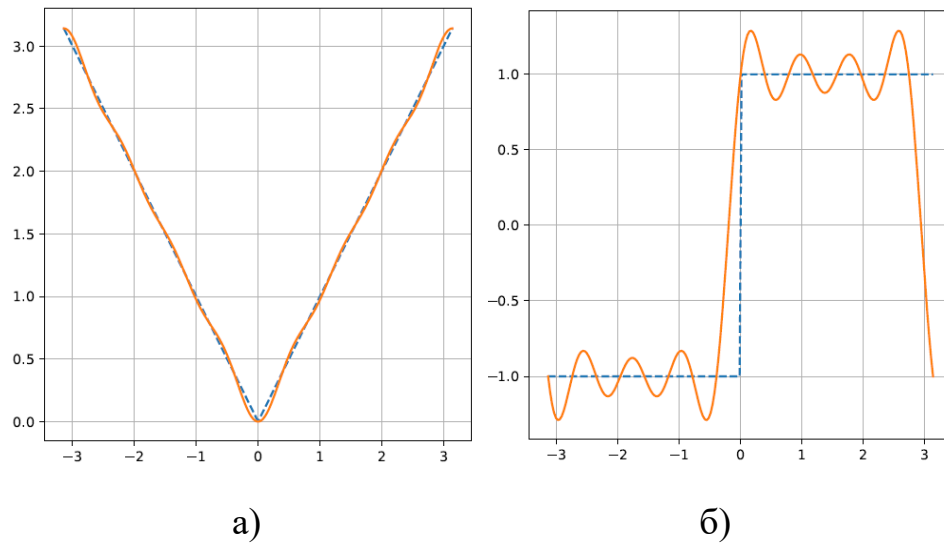


Рис. 3.4 Интерполяция для максимального $k=8$ а) функции $f_2(x) = |x|$,
 б) функции $f_3(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

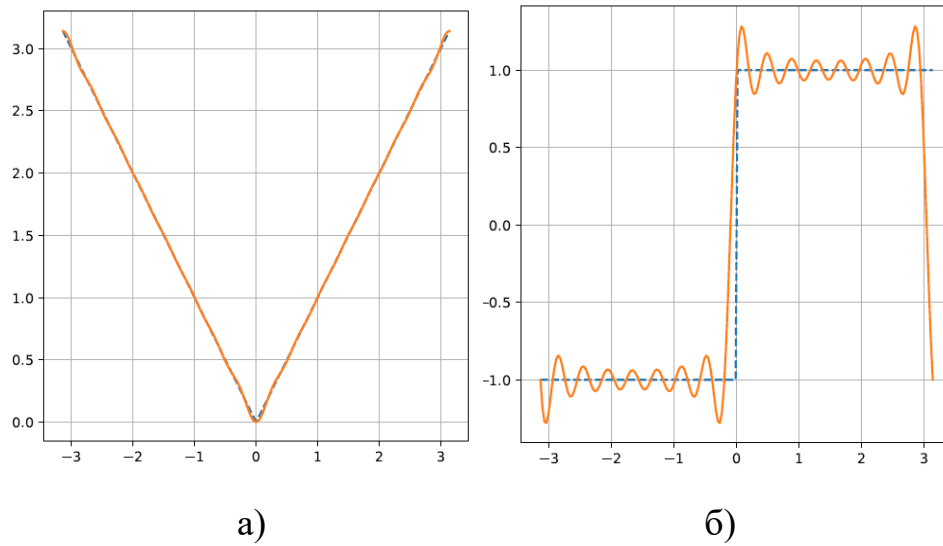
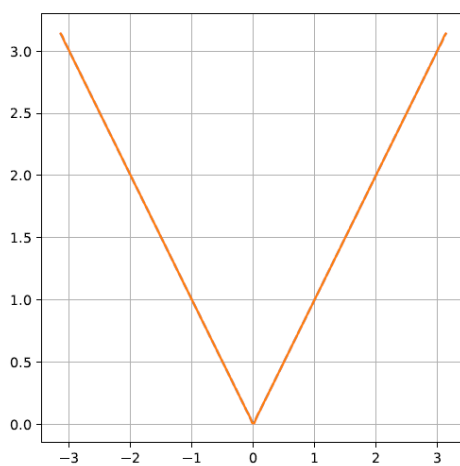
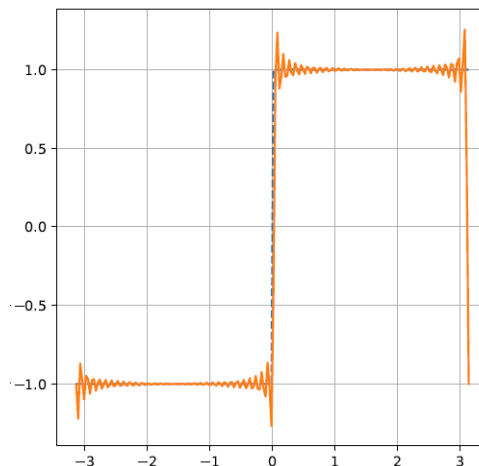


Рис. 3.5 Интерполяция для максимального $k=16$ а) функции $f_2(x) = |x|$,
 б) функции $f_3(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$



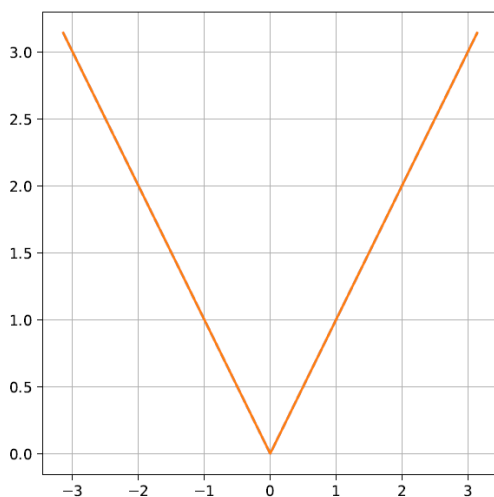
а)



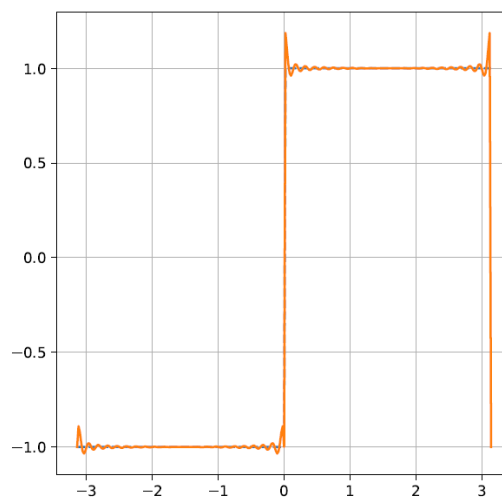
б)

Рис. 3.6 Интерполяция для максимального $k=64$ а) функции $f_2(x) = |x|$,

б) функции $f_3(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$



а)



б)

Рис. 3.7 Интерполяция для максимального $k=256$ а) функции $f_2(x) = |x|$,

б) функции $f_3(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

Для функции $f_2(x) = |x|$ сходимость является равномерной и среднеквадратичной. Для функции $f_3(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ есть среднеквадратичная сходимость, однако нет равномерной. Это связано с тем, что $f_3(x)$ имеет разрыв в точке 0.

Заключение

1. Так как при постоянном уменьшении шага дифференцирования абсолютная погрешность будет стремиться к бесконечности, формулы численного дифференцирования не являются устойчивыми. Существует оптимальное значение шага, для которого значение погрешности будет минимальным.
2. Операция численного интегрирования является вычислительно устойчивой, и при уменьшении шага интегрирования абсолютная погрешность будет уменьшаться вплоть до значения машинного эпсилон.
3. Интерполирование функций тригонометрическими полиномами даёт равномерную и среднеквадратичную сходимость для случая непрерывной функции. Однако если функция разрывная – сходимость только среднеквадратичная, а вблизи точек разрыва возникают паразитные осцилляции.

Список использованных источников

- [1] Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика», 2018.