Множественная линейная регрессия

Многие явления, как правило, определяются большим числом одновременно и совокупно действующих факторов. В связи с этим часто возникает задача исследования зависимости одной зависимой переменной Y от нескольких объясняющих переменных $x_1, x_2, ...x_n$. Эта задача решается с помощью множественного регрессионного анализа.

Обозначим i-е наблюдение зависимой переменной y_i а объясняющих переменных – $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, ...x_{im})$. Тогда модель множественной линейной регрессии можно представить в виде:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + ... + \beta_m x_{mi} \tag{1}$$

Задачами регрессионного анализа являются установление формы зависимости между переменными, оценка функции регрессии, оценка неизвестных значений (прогноз значений) зависимой переменной.

Для выборки объемом n имеем систему линейных уравнений

$$\begin{gathered}
y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{21} + ... + \beta_m x_{m1} + \varepsilon_1, \\
y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + ... + \beta_m x_{m2} + \varepsilon_2, \\
y_3 = \beta_0 + \beta_1 x_{31} + \beta_2 x_{32} + ... + \beta_m x_{m3} + \varepsilon_3, \\
\text{...} \\
\text{...} \\
y_n = \beta_0 + \beta_1 x_{1n} + \beta_2 x_{2n} + ... + \beta_m x_{mn} + \varepsilon_n ,
\end{gathered}$$

где ε_i – случайная величина, имеющая нормальный закон распределения с числовыми характеристиками $M(\varepsilon_i) = 0,\quad D(\varepsilon_i) = M(\varepsilon_i^2) = \sigma_\varepsilon^2$ и при этом $K_{ij} = 0.$

Тогда в матричной форме модель (1) примет вид:

$$\vec{Y} = X\vec{\beta} + \vec{\varepsilon}, \tag{2}$$

где

$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец значений зависимой переменной размера $n \times 1$;

$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_m \end{pmatrix}$ – матрица-столбец, или вектор, параметров размера $(m+1) \times 1$;

$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$ матрица-столбец, или вектор возмущений (случайных ошибок, остатков) размера $n \times 1$.

$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}$ – матрица значений объясняющих переменных, или матрица плана размера $n \times (m+1)$ (обращаем внимание на то, что в матрицу X дополнительно введен столбец, все элементы которого равны 1, т.е. условно полагается, что в модели (1) свободный член β_0 умножается на фиктивную переменную x_{i0}, принимающую значение 1 для всех i: $x_{i0} = 1$ (i = 1,2,..., n);

Эти параметры оценивания статистическими точечными оценками $\beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*, \dots \beta_m^*$, полученные путем обработки результатов выборки, являются случайными величинами. Таким образом, уравнению (1) соответствует статистическая оценка

$$y_i = \beta_0^* + \beta_1^* x_{i1} + \beta_2^* x_{i2} + \dots + \beta_m^* x_{im} + \varepsilon_i. \quad (3)$$

Статистическая оценка для вектора $\vec{y}$ будет определяться вектором

$$\vec{y} = X\vec{\beta}^* + \vec{\varepsilon}, \quad (4)$$

где $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}$; $\vec{\beta}^* = \begin{pmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \\ \beta_2^* \\ \dots \\ \beta_m^* \end{pmatrix}$; $\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$.

Вектор ошибок равен

$$\vec{\varepsilon} = \vec{y} - X \cdot \vec{\beta}^*. \quad (5)$$

Для определения компонентов вектора $\vec{\beta}^*$(статистических точечных оценок компонентов вектора $\vec{\beta}$), применив метод наименьших квадратов, получим (X' - обозначение X^T)

$$X' X \vec{\beta}^* = X' \vec{y} \quad (6)$$

Решением уравнения (6) является вектор $\vec{\beta}^* = (X' X)^{-1} X' \vec{y}$. (7)

Коэффициент множественной регрессии

Тесноту между признаками *Y* и *X*, где $X = (x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_m)$, измеряют с помощью коэффициента детерминации R^2 (как одна из наиболее эффективных оценок адекватности регрессионной модели, мера качества уравнения регрессии, характеристика его прогностической силы), который вычисляется по формуле

$$R^2 = 1 - \frac{\sum \varepsilon_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}. \qquad (8)$$

Поскольку $\sum \varepsilon_i^2 = \vec{\varepsilon}'\ \vec{\varepsilon}$, то

$$\sum \varepsilon_i^2 = \vec{\varepsilon}'\ \vec{\varepsilon} = \left(\vec{y} - X\ \vec{\beta}^*\right)'\left(\vec{y} - X\ \vec{\beta}^*\right) =$$

$$= (\vec{y})'\ \vec{y} - 2\left(\vec{\beta}^*\right)'\ X'\ \vec{y} + \left(\vec{\beta}^*\right)'\ X'\ X\ \vec{\beta}^* =$$

$$= (\vec{y})'\ \vec{y} - 2\left(\vec{\beta}^*\right)'\ X'\ \vec{y} + \left(\vec{\beta}^*\right)'\ X'\ \vec{y} =$$

$$= (\vec{y})'\ \vec{y} - \left(\vec{\beta}^*\right)'\ X'\ \vec{y},$$

поскольку $\left(\vec{\beta}^*\right)'\ X'\ X\ \vec{\beta}^* = \left(\vec{\beta}^*\right)'\ X'\ \vec{y}^*$.

При этом $\sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - n(\bar{y})^2$, а поскольку $\sum (y_i)^2 = (\vec{y})'\ \vec{y}$, это окончательно имеем

$$R^2 = 1 - \frac{(\vec{y})'\ \vec{y} - \left(\vec{\beta}^*\right)'\ X'\ \vec{y}}{(\vec{y})'\ \vec{y} - n(\bar{y})^2} = \frac{\left(\vec{\beta}^*\right)'\ X'\ \vec{y} - n(\bar{y})^2}{(\vec{y})'\ \vec{y} - n(\bar{y})^2}. \qquad (9)$$

Чем ближе R^2 к единице, тем лучше регрессия описывает зависимость между объясняющими и зависимой переменными.

Нормирование коэффициентов регрессии

Множественная линейная регрессия дает возможность сравнить влияние на исследуемый процесс разных факторов x_i, когда последние выражаются разными единицами измерения (килограммы, рубли, метры и т.п.). Итак, для того чтобы сравнить и выяснить относительную весомость каждого из факторов, используют так называемые нормированные коэффициенты регрессии, которые определяют по формуле

$$a_j^* = \beta_j^* \frac{S_{x_j}}{S_y} \quad \left(j = \overline{1, m}\right), \qquad (10)$$

где a_j — коэффициент регрессии после нормирования; S_{x_j} — исправленное среднее квадратичное отклонение сменной x_j; S_y — исправленное среднее квадратичное отклонение признака *Y*.

Пример. Признак Y — линейно зависимый от x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}. Результаты наблюдения приведены в таблице:

i	y_i	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}
1	6	1	1	2
2	8	2	2	1
3	14	1	0	0
4	20	3	2	1
5	26	5	2	2

Необходимо:
1) найти компоненты вектора

$$\beta^* = \begin{pmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \\ \beta_2^* \\ \beta_3^* \end{pmatrix}$$

и определить линейную функцию регрессии

$$y_i = \beta_0^* + \beta_1^* x_{i1} + \beta_2^* x_{i2} + \ldots + \beta_3^* x_{i3};$$

2) вычислить R^2;
3) определить дисперсии для β_0^*, β_1^*, β_2^*, β_3^* и оценить эффективность влияния на признак Y независимых переменных x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}.

Решение. 1. По условию задачи имеем:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 14 \\ 20 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\beta^* = \begin{pmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \\ \beta_2^* \\ \beta_3^* \end{pmatrix} = \left(X' X\right)^{-1} X' \vec{y} =$$

$$=\frac{1}{178}\begin{pmatrix}173 & -14 & -39 & -41\\ -14 & 32 & -38 & -8\\ -39 & -38 & 123 & -35\\ -41 & -8 & -35 & 91\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 8\\ 14\\ 20\\ 26\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7{,}98\\ 6{,}34\\ -3{,}78\\ -2{,}58\end{pmatrix}.$$

Итак, получили: $\beta_0^* = 7{,}98$; $\beta_1^* = 6{,}34$; $\beta_2^* = -3{,}78$; $\beta_3^* = -2{,}58$.

Уравнением регрессии будет

$$y_i^* = 7{,}98 + 6{,}34x_{i1} - 3{,}78x_{i2} - 2{,}58x_{i3}.$$

2. Найдем R. Для этого необходимо определить

$$\left(\vec{\beta}^*\right)' X'\,\vec{y} = \begin{pmatrix}7{,}98 & 6{,}34 & -3{,}78 & -2{,}58\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 8\\ 14\\ 20\\ 26\end{pmatrix}=1354{,}38;$$

$$\vec{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{6+8+14+20+26}{5} = 14{,}8; \quad n(\vec{y})^2 = 5(14{,}8)^2 = 1095{,}2;$$

$$(\vec{y}')\vec{y} = \begin{pmatrix}6 & 8 & 14 & 20 & 26\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\ 8\\ 14\\ 20\\ 26\end{pmatrix} = 1372$$

Тогда $$(\vec{y}')\vec{y} - n(\bar{y})^2 = 1372 - 1095{,}2 = 276{,}8;$$

$$\left(\vec{\beta}^*\right)' X'\ \vec{y} - n(\bar{y})^2 = 1354{,}38 - 1095{,}2 = 259{,}18.$$

Тогда

$$R = \sqrt{1 - \frac{(\vec{y})'\ \vec{y} - \left(\vec{\beta}^*\right)'\ X'\,\vec{y}}{(\vec{y})'\ \vec{y} - n(\bar{y})^2}} = \sqrt{\frac{\left(\vec{\beta}^*\right)'\ X'\,\vec{y} - n(\bar{y})^2}{(\vec{y})'\ \vec{y} - n(\bar{y})^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{259{,}18}{276{,}8}} = 0{,}968.$$

Для нахождения нормированных коэффициентов регрессии необходимо вычислить S_ε, что является точечной несмещенной статистической оценкой для σ_ε — среднеквадратичного отклонения случайного фактора ε_i.

Поскольку $S_\varepsilon = \sqrt{\dfrac{\sum \varepsilon_i^2}{n-m-1}}$, то в этом случае результаты вычислений удобно представить в виде таблицы:

i	y_i	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	$y_i^* = 7{,}98 + +6{,}34x_{i1} - 3{,}78x_{i2} - 2{,}58x_{i3}$	$y_i - y_i^*$	$\left(\varepsilon_i^*\right)^2$
1	6	1	1	2	5,38	0,62	0,3844
2	8	2	2	1	10,52	–2,52	6,3504
3	14	1	0	0	14,32	–0,32	0,1024
4	20	3	2	1	16,86	3,14	9,8596
5	26	5	2	2	26,96	–0,96	0,9216
						$\sum \varepsilon_i^2 = 17{,}618$	

Таким образом, получим:

$$S_\varepsilon^2 = \frac{\sum\left(\varepsilon_i^*\right)^2}{n-m-1} = \frac{17{,}618}{5-3-1} = 17{,}618,$$

где n=5 является количеством наблюдений, а m=3 — количеством оцениваемых параметров множественной линейной регрессии.

Поскольку диагональные элементы матрицы $\left(X'X\right)^{-1}$ соответственно равны

$$b_{11} = \frac{173}{178};\quad b_{22} = \frac{32}{178};\quad b_{33} = \frac{123}{178};\quad b_{44} = \frac{91}{178},$$

то соответственно получим

$$S_{\beta_0^*}^2 = S_\varepsilon^2 b_{11} = 17{,}618 \cdot \frac{173}{178} = 17{,}123,\ S_{\beta_0^*} = 4{,}138;$$

$$S_{\beta_1^*}^2 = S_\varepsilon^2 b_{22} = 17{,}618 \cdot \frac{32}{178} = 3{,}167,\ S_{\beta_1^*} = 1{,}78;$$

$$S_{\beta_2^*}^2 = S_\varepsilon^2 b_{33} = 17{,}618 \cdot \frac{123}{178} = 12{,}17,\ S_{\beta_2^*} = 3{,}489;$$

$$S_{\beta_3^*}^2 = S_\varepsilon^2 b_{44} = 17{,}618 \cdot \frac{91}{178} = 9{,}007,\ S_{\beta_3^*} = 3{,}001.$$

Вычислим

$$S_y = \sqrt{\frac{\vec{y}'\vec{y}}{n} - \left(\bar{y}\right)^2} = \sqrt{53{,}36} \approx 7{,}44.$$

Определим нормированные коэффициенты регрессии:

$$a_1 = \beta_1^* \frac{S_{\beta_1^*}}{S_y} = 6{,}34 \cdot \frac{1{,}78}{7{,}44} = 1{,}52,$$

$$a_2 = \beta_2^* \frac{S_{\beta_2^*}}{S_y} = -3{,}78 \cdot \frac{3{,}489}{7{,}44} = -1{,}77,$$

$$a_3 = \beta_3^* \frac{S_{\beta_3^*}}{S_y} = -2{,}58 \cdot \frac{3{,}001}{7{,}44} = -1{,}04.$$

Итак, для переменной x_{i2} влияние на признак Y является наиболее эффективным в сравнении с действием переменных x_{i1}, x_{i3}.

Задания

1. Определить статистические оценки $\beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*, \beta_4^*$ для параметров линейной множественной регрессии:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4}.$$

2. Вычислить коэффициент детерминации R^2.
3. Оценить эффективность влияния независимых переменных x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} на признак Y с помощью нормированных коэффициентов регрессии.
4. Все вычисления проверить средствами Python.

а) Зависимость между производительностью труда Y и фондообеспеченностью, 10тыс. руб., X_1, стажем работы в годах X_2, текучестью кадров (в частях) — X_3, уровнем оплаты труда, 10 тыс. руб/год — X_4 приведена в таблицах:

1.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	14,85	60	30	0,15	5,0
2	11,94	48	19	0,02	3,1
3	8,03	39	8	0,14	4,7
4	7,11	28	18	0,11	2,5
5	9,50	45	9	0,12	4,9
6	9,40	37	23	0,10	2,6
7	11,60	58	15	0,13	4,6
8	8,14	27	17	0,09	3,4
9	15,62	58	28	0,07	4,8
10	11,12	47	16	0,12	4,9
11	7,34	38	7	0,08	3,2
12	10,58	44	15	0,11	4,7
13	7,37	23	25	0,15	2,7
14	10,63	57	8	0,13	5,0
15	10,63	38	24	0,07	2,9

2.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	11,12	47	16	0,12	4,9
2	7,34	38	7	0,08	3,2
3	10,58	44	15	0,11	4,7
4	7,37	23	25	0,15	2,7
5	10,63	57	8	0,13	5,0
6	10,63	38	24	0,07	2,9
7	7,85	22	15	0,12	4,6
8	5,73	29	7	0,09	2,8
9	14,84	56	27	0,02	3,5
10	10,30	45	15	0,14	4,9
11	7,85	34	9	0,10	4,1
12	9,68	51	14	0,11	3,3
13	9,49	55	5	0,13	4,8
14	12,53	43	26	0,08	4,0
15	10,29	44	27	0,15	2,9

3.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	7,85	22	15	0,12	4,6
2	5,73	29	7	0,09	2,8
3	14,84	56	27	0,02	3,5
4	10,30	45	15	0,14	4,9
5	7,85	34	9	0,10	4,1
6	9,68	51	14	0,11	3,3
7	9,49	55	5	0,13	4,8
8	12,53	43	26	0,08	4,0
9	10,29	44	27	0,15	2,9
10	8,99	37	8	0,06	4,3
11	12,28	33	24	0,12	5,0
12	8,00	25	18	0,02	2,9
13	7,27	29	4	0,07	3,5
14	7,47	53	13	0,14	2,7
15	10,86	41	9	0,08	4,9
16	5,23	26	12	0,13	3,4

4.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	8,00	25	18	0,02	2,9
2	7,27	29	4	0,07	3,5
3	7,47	53	13	0,14	2,7
4	10,86	41	9	0,08	4,9
5	5,23	26	12	0,13	3,4
6	12,16	32	23	0,10	4,8
7	9,19	59	11	0,13	3,9
8	10,12	48	3	0,09	4,8
9	6,86	51	8	0,12	2,9
10	11,02	43	22	0,15	3,7
11	7,77	29	9	0,02	3,5
12	10,62	37	12	0,08	5,0
13	7,40	49	5	0,14	4,1
14	10,55	57	11	0,11	3,6
15	12,30	46	15	0,06	4,7
16	7,83	29	21	0,15	2,8

5.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	10,55	57	11	0,11	3,6
2	12,30	46	15	0,06	4,7
3	7,83	29	21	0,15	2,8
4	11,10	35	18	0,05	4,9
5	7,66	38	10	0,14	3,6
6	9,26	30	22	0,06	3,1
7	11,50	45	6	0,02	5,0
8	14,51	60	20	0,05	4,2
9	6,33	39	7	0,09	2,8
10	12,94	50	21	0,06	4,7
11	13,13	49	15	0,04	4,8

6.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	14,85	60	30	0,15	5,0
2	8,03	39	8	0,14	4,7
3	9,50	45	9	0,12	4,9
4	11,61	58	15	0,13	4,6
5	15,62	58	28	0,07	4,8
6	7,34	38	7	0,08	3,2
7	7,37	23	25	0,15	2,7
8	10,63	38	24	0,07	2,9
9	5,73	29	7	0,09	2,8
10	10,30	45	15	0,14	4,9
11	9,68	51	14	0,11	3,3
12	12,53	43	26	0,08	4,0
13	8,99	37	8	0,06	4,3
14	8,00	25	18	0,02	2,9
15	7,47	53	13	0,14	2,7

7.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	5,73	29	7	0,09	2,8
2	7,85	34	9	0,10	4,1
3	12,53	43	26	0,08	4,0
4	12,28	33	24	0,12	5,0
5	7,47	53	13	0,14	2,7
6	5,23	26	12	0,13	3,4
7	12,16	32	23	0,10	4,8
8	6,86	51	8	0,12	2,9
9	11,02	43	22	0,15	3,7
10	7,77	29	9	0,02	3,5
11	10,62	37	12	0,08	5,0
12	7,40	49	5	0,14	4,1
13	10,55	57	11	0,11	3,6
14	12,30	46	15	0,06	4,7
15	7,83	29	21	0,15	2,8

8.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	8,99	37	8	0,06	4,3
2	12,28	33	24	0,12	5,0
3	8,00	25	18	0,02	2,9
4	7,27	29	4	0,07	3,5
5	7,47	53	13	0,14	2,7
6	10,86	41	9	0,08	4,9
7	5,23	26	12	0,13	3,4
8	12,16	32	23	0,10	4,8
9	9,19	59	11	0,13	3,9
10	10,12	48	3	0,09	4,8
11	6,86	51	8	0,12	2,9
12	11,02	43	22	0,15	3,7
13	7,77	29	9	0,02	3,5
14	10,62	37	12	0,08	5,0
15	7,40	49	5	0,14	4,1

9.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	10,58	44	15	0,11	4,7
2	7,37	23	25	0,15	2,7
3	10,63	38	24	0,07	2,9
4	7,85	22	15	0,12	4,6
5	5,73	29	7	0,09	2,8
6	14,84	56	27	0,02	3,5
7	10,30	45	15	0,14	4,9
8	9,68	51	14	0,11	3,3
9	9,49	55	5	0,13	4,8
10	12,53	43	26	0,08	4,0
11	10,29	44	27	0,15	2,9
12	12,28	33	24	0,12	5,0
13	8,00	25	18	0,02	2,9
14	7,27	29	4	0,07	3,5
15	7,47	53	13	0,14	2,7

10.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	5,23	26	12	0,13	3,4
2	12,16	32	23	0,10	4,8
3	9,19	59	11	0,13	3,9
4	10,12	48	3	0,09	4,8
5	6,86	51	8	0,12	2,9
6	10,62	37	12	0,08	5,0
7	10,55	57	11	0,11	3,6
8	7,83	29	21	0,15	2,8
9	11,10	35	18	0,05	4,9
10	7,66	38	10	0,14	3,6
11	9,26	30	22	0,06	3,1
12	11,50	45	6	0,02	5,0
13	6,33	39	7	0,09	2,8
14	12,94	50	21	0,06	4,7
15	13,13	49	15	0,04	4,8

11.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	9,50	45	9	0,12	4,9
2	8,14	27	17	0,09	3,4
3	7,34	38	7	0,08	3,2
4	7,37	23	25	0,15	2,7
5	10,63	38	24	0,07	2,9
6	5,73	29	7	0,09	2,8
7	10,30	45	15	0,14	4,9
8	9,68	51	14	0,11	3,3
9	12,53	43	26	0,08	4,0
10	8,99	37	8	0,06	4,3
11	7,27	29	4	0,07	3,5
12	11,10	35	18	0,05	4,9
13	7,47	53	13	0,14	2,7
14	9,26	30	22	0,06	3,1
15	12,16	32	23	0,01	4,8
16	9,19	59	11	0,13	3,9

12.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	13,13	49	15	0,04	4,8
2	6,33	39	7	0,09	2,8
3	11,50	45	6	0,02	5,0
4	7,66	38	10	0,14	3,6
5	7,83	29	21	0,15	3,8
6	10,55	57	11	0,11	3,6
7	7,40	49	5	0,14	4,1
8	10,62	37	12	0,08	5,0
9	7,77	29	9	0,02	3,5
10	6,86	51	8	0,12	2,9
11	10,12	48	3	0,09	4,8
12	9,19	59	11	0,13	3,9
13	14,85	60	30	0,15	5,0
14	8,03	39	19	0,02	3,1
15	7,11	28	18	0,11	2,5

13.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	10,29	44	27	0,15	2,9
2	12,53	43	26	0,08	4,0
3	9,49	55	5	0,13	4,8
4	9,68	51	14	0,11	3,3
5	7,85	34	9	0,10	4,1
6	10,30	45	15	0,14	4,9
7	14,84	56	27	0,02	3,5
8	5,73	29	7	0,09	2,8
9	7,85	22	15	0,12	4,6
10	10,63	57	8	0,13	5,0
11	7,37	23	25	0,15	2,7
12	10,58	44	15	0,11	4,7
13	7,34	38	7	0,08	3,2
14	11,12	47	16	0,12	4,9
15	15,62	58	28	0,07	4,8

14.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	7,83	29	21	0,15	2,8
2	12,30	46	15	0,06	4,7
3	10,55	57	11	0,11	3,6
4	7,40	49	5	0,14	4,1
5	10,62	37	12	0,08	5,0
6	7,77	29	9	0,02	3,5
7	11,02	43	22	0,15	3,7
8	5,86	51	8	0,12	2,9
9	10,12	48	3	0,09	4,8
10	9,19	59	11	0,13	3,9
11	10,30	45	15	0,14	4,9
12	7,85	34	9	0,10	4,1
13	9,68	51	14	0,11	3,3
14	9,49	55	5	0,13	4,8
15	12,53	43	26	0,08	4,0
16	10,29	44	27	0,15	2,9

По заданным статистическим данным зависимости урожайности сахарной свеклы Y, ц/га, от: 1) рабочего времени X_1, человеко-дней/га, 2) количества внесенных питательных веществ X_2, кг/га, 3) осадков за год X_3, мм, 4) суммы температур за период активной вегетации X_4, °С:

15.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	369	16	83	460	2500
2	457	18	240	503	2621
3	379	13	125	496	2564
4	403	21	86	548	2792
5	439	17	221	472	2672
6	421	12	201	484	2840
7	448	23	217	537	2711
8	407	24	97	461	2638
9	419	18	144	493	2578
10	441	19	205	539	2617
11	418	20	156	526	2835
12	401	15	175	467	2693
13	451	17	189	542	2691
14	381	21	86	472	2532
15	432	18	204	483	2783

16.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	439	17	221	472	2672
2	448	23	217	537	2711
3	419	18	144	493	2578
4	418	20	156	526	2835
5	451	17	189	542	2693
6	381	21	86	472	2532
7	439	15	110	538	2627
8	423	17	210	523	2593
9	396	21	125	539	2543
10	412	20	93	471	2682
11	402	15	125	539	2543
12	413	22	87	501	2736
13	389	17	216	463	2639
14	418	18	173	542	2817
15	405	15	214	498	2572
16	399	21	92	498	2735

17.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	439	19	217	463	2702
2	423	17	210	523	2593
3	396	21	125	492	2828
4	412	20	93	471	2682
5	402	15	125	539	2543
6	413	22	87	501	2736
7	389	17	216	463	2639
8	418	18	173	542	2817
9	405	15	214	492	2572
10	399	21	92	498	2735
11	403	23	89	483	2720
12	396	17	140	523	2527
13	377	15	96	499	2793
14	427	20	180	471	2815
15	412	17	200	483	2584
16	453	19	171	511	2801

18.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	393	15	110	538	2627
2	396	21	125	492	2828
3	402	15	125	539	2543
4	413	22	87	501	2736
5	389	17	216	463	2639
6	389	18	173	542	2817
7	399	21	92	498	2735
8	403	23	89	483	2720
9	396	17	140	523	2527
10	377	15	96	499	2793
11	427	20	180	471	2815
12	412	17	200	483	2584
13	453	19	171	511	2801
14	404	22	163	476	2612
15	397	24	103	516	2643

19.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	371	15	170	493	2648
2	478	18	217	510	2573
3	377	17	154	475	2543
4	452	22	180	518	2801
5	439	21	143	478	2562
6	401	17	130	523	2517
7	429	19	160	468	2650
8	366	15	126	474	2628
9	424	26	90	493	2529
10	371	20	115	521	2823
11	429	21	220	464	2730
12	391	18	97	547	2555
13	407	15	225	472	2711
14	449	24	239	517	2784
15	408	25	184	492	2548

20.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	413	22	87	501	2736
2	418	18	173	542	2817
3	399	21	92	498	2735
4	396	17	140	523	2527
5	427	20	180	471	2815
6	453	19	171	511	2801
7	397	24	103	516	2643
8	478	18	217	510	2573
9	452	22	180	518	2801
10	401	17	130	523	2517
11	366	15	126	474	2628
12	371	20	115	521	2823
13	391	18	97	547	2555
14	449	24	239	517	2784
15	393	21	85	547	2837
16	407	24	97	461	2638

21.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	408	25	184	492	2548
2	407	15	225	472	2711
3	429	21	220	464	2730
4	424	26	90	493	2529
5	429	19	160	468	2650
6	439	21	143	478	2562
7	377	17	154	475	2543
8	371	15	170	493	2648
9	404	22	163	476	2612
10	412	17	200	483	2584
11	377	15	96	499	2793
12	403	23	89	483	2720
13	405	15	214	498	2572
14	389	17	216	463	2639
15	402	15	125	539	2543

22.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	452	22	180	518	2801
2	377	17	154	475	2543
3	478	18	217	510	2573
4	371	15	170	493	2648
5	397	24	103	516	2643
6	404	22	163	476	2612
7	427	20	180	471	2815
8	396	17	140	523	2527
9	399	21	92	483	2720
10	418	18	173	542	2817
11	413	22	87	501	2736
12	412	20	93	471	2682
13	423	17	210	523	2593
14	393	15	110	538	2627
15	381	21	86	472	2532
16	401	15	175	467	2693

23.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	401	17	130	523	2517
2	452	22	180	518	2801
3	478	18	217	510	2573
4	397	24	103	516	2643
5	453	19	171	511	2801
6	427	20	180	471	2815
7	396	17	140	523	2527
8	399	21	92	498	2735
9	418	18	173	542	2817
10	413	22	87	501	2736
11	412	20	93	471	2682
12	423	17	210	523	2593
13	393	15	110	538	2627
14	381	21	86	472	2532
15	401	15	175	467	2693

24.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	405	15	214	498	2572
2	418	18	173	542	2817
3	389	17	216	463	2639
4	413	22	87	501	2736
5	402	15	125	539	2543
6	412	20	93	471	2682
7	396	21	125	492	2828
8	423	17	210	523	2593
9	439	19	217	463	2702
10	393	15	110	538	2627
11	432	18	204	483	2783
12	381	21	86	472	2532
13	451	17	189	542	2691
14	401	15	175	467	2693
15	418	20	156	526	2835

25.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	453	19	171	511	2801
2	427	20	180	471	2715
3	377	15	96	499	2793
4	396	17	140	523	2527
5	403	23	89	483	2720
6	399	21	92	498	2735
7	405	15	214	498	2572
8	418	18	173	542	2817
9	389	17	216	463	2639
10	413	22	87	501	2736
11	402	15	125	539	2543
12	412	20	93	471	2682
13	396	21	125	492	2828
14	423	17	210	523	2593
15	439	19	217	463	2702

26.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	451	17	189	542	2691
2	381	21	86	472	2532
3	432	18	204	483	2783
4	393	15	110	538	2627
5	439	19	217	463	2702
6	423	17	210	523	2593
7	396	21	125	539	2543
8	412	20	93	471	2682
9	402	15	125	539	2543
10	413	22	87	501	2736
11	389	17	216	463	2639
12	418	18	173	542	2817
13	405	15	214	498	2735
14	399	21	92	498	2735
15	403	23	89	483	2720

27.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	439	19	217	463	2702
2	393	15	110	538	2627
3	432	18	204	483	2783
4	381	21	86	472	2532
5	451	17	189	542	2691
6	401	15	175	467	2693
7	418	20	156	526	2835
8	441	19	205	539	2617
9	419	18	144	493	2578
10	407	24	97	461	2638
11	448	23	217	537	2711
12	421	12	201	484	2840
13	439	17	221	472	2672
14	403	21	86	548	2792
15	379	13	125	496	2564

28.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	457	18	240	503	2621
2	403	21	86	548	2792
3	421	12	201	484	2840
4	407	24	97	461	2638
5	441	19	205	539	2617
6	401	15	175	467	2693
7	381	21	86	472	2532
8	393	19	217	463	2702
9	423	17	210	523	2593
10	412	20	93	471	2682
11	413	22	87	501	2736
12	418	18	173	542	2817
13	399	21	92	498	2572
14	396	17	140	523	2572

29.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	439	19	217	463	2702
2	412	20	93	471	2682
3	389	17	216	463	2639
4	399	21	92	498	2735
5	377	15	96	499	2793
6	453	19	171	511	2801
7	371	15	170	493	2648
8	452	22	180	518	2801
9	429	19	160	468	2650
10	424	26	90	493	2529
11	371	20	115	521	2823
12	391	18	97	547	2555
13	449	24	239	517	2784
14	408	25	184	492	2548
15	393	21	85	547	2837

30.

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	424	26	90	493	2526
2	429	19	160	468	2650
3	439	21	143	478	2562
4	377	17	154	475	2543
5	378	18	217	510	273
6	371	15	170	493	2648
7	397	24	103	516	2643
8	404	22	163	476	2612
9	453	19	171	511	2801
10	412	17	200	483	2584
11	427	20	180	471	2815
12	377	15	96	499	2793
13	396	17	190	523	2527
14	403	23	89	483	2720
15	399	21	92	498	2735