

# Guía 1 - Cinemática y Dinámica - IPD482

D.Gross

## I. PROBLEMA 1

Para obtener la cinemática externa se debe primero encontrar la cinemática de la rueda en su propio sistema, luego se debe traducir esta al sistema de referencia del robot, luego del sistema de referencia del robot al sistema de referencia global.

### A. Cinemática de la rueda

Considerando las restricciones de una rueda convencional como las estudiadas en clases se tiene lo que se puede observar en la figura 1:

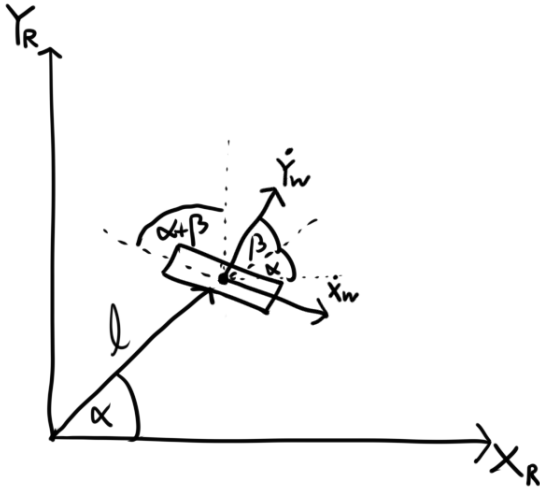


Fig. 1. Sistema de la rueda para las restricciones de las velocidades en  $x$  y  $y$

De esto se encuentran las componentes  $x$  y  $y$  de las restricciones de la rueda, para ello se deben proyectar las velocidades tanto en  $y$  como en  $x$  del robot, de lo que se llega a las siguientes ecuaciones:

$$v_{xx} = \dot{X}_R \cdot \sin(\alpha + \beta) \quad (1)$$

$$v_{xy} = \dot{X}_R \cdot \cos(\alpha + \beta) \quad (2)$$

$$v_{yx} = -\dot{Y}_R \cdot \cos(\alpha + \beta) \quad (3)$$

$$v_{yy} = \dot{Y}_R \cdot \sin(\alpha + \beta) \quad (4)$$

Donde  $v_{xx}$  es la velocidad del robot en el eje  $x$  proyectado al eje  $x$  del sistema de la rueda,  $v_{yx}$  es la velocidad del robot en el eje  $y$  proyectado al eje  $x$  del sistema de la rueda (este es negativo pues se proyecta en dirección opuesta al positivo en  $x$ ), y así mismo con las otras dos. Luego para hacer esta

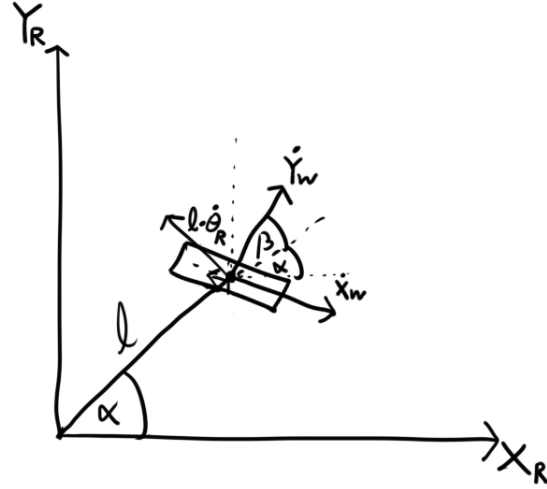


Fig. 2. Sistema de la rueda para las restricciones de la velocidad de la pose

proyección pero con la velocidad angular que regula la pose del robot se usa la figura 2:

Al igual que en el caso anterior se proyecta esta velocidad que en este caso corresponde a la velocidad angular del ángulo del robot hacia el sistema de coordenadas de las ruedas, resultando en las restricciones:

$$v_{\theta x} = -l\dot{\theta}_R \cdot \cos(\beta) \quad (5)$$

$$v_{\theta y} = l\dot{\theta}_R \cdot \sin(\beta) \quad (6)$$

Donde al igual que antes el primer subíndice corresponde a la velocidad en el sistema del robot y el segundo corresponde al eje al que fue proyectado en la rueda, y al igual que en el caso de  $v_{yx}$ ,  $v_{\theta x}$  es negativo ya que queda proyectada hacia el lado negativo del eje  $x$ . Luego para integrar todo esto en ecuaciones de restricción del movimiento del robot se deben componer las ecuaciones encontradas de la siguiente forma:

$$v_{xx} + v_{yx} + v_{\theta x} = r\dot{\phi} \quad (7)$$

$$v_{yy} + v_{xy} + v_{\theta y} = 0 \quad (8)$$

Que sale del hecho de que la rueda solo puede rodar en la dirección de su eje  $X$  y no en su eje  $Y$ ,  $r$  es el radio de la rueda y  $\dot{\phi}$ , siendo así  $r\dot{\phi}$  la velocidad lineal de la rueda, esto supone que no existe deslizamiento, ni derrape en el caso de la restricción de  $Y$ . Finalmente para llegar a la relación explícita, se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) & -l\cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_R \\ \dot{Y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = r\dot{\phi} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l\sin(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_R \\ \dot{Y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

### B. Cinemática del robot

En el caso de un robot diferencial unicycle de dos ruedas, como el de la figura 3, se deben caracterizar las ecuaciones de restricción para cada una de las dos ruedas, este proceso resulta relativamente sencillo ya que solo debemos elegir nuestros ejes coordenados para el robot, para ambas ruedas y luego se identifican los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $l$  trabajados en la sección anterior a esta, en la figura 3 podemos ver los ejes asignados y los parámetros identificados para cada rueda.

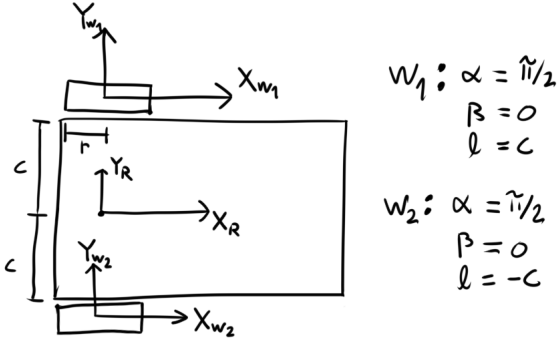


Fig. 3. robot unicycle diferencial con una rueda de apoyo delantera.

Una vez seleccionado los marcos de referencia y encontrado los parámetros para esos marcos de referencia, se escriben las restricciones para cada rueda utilizando las ecuaciones derivadas en 9 y 10:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_R \\ \dot{Y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = r\dot{\phi}_{W1} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_R \\ \dot{Y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = 0 \quad (12)$$

Para la rueda 1, y en el caso de la rueda 2 se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_R \\ \dot{Y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = r\dot{\phi}_{W2} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_R \\ \dot{Y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

Luego el sistema rueda-robot queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -c \\ 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_R \\ \dot{Y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{W1} \\ \dot{\phi}_{W2} \end{bmatrix} \quad (15)$$

De esta ecuación se puede derivar ya sea la cinemática directa que se encuentra a continuación (esta operación requiere realizar una pseudoinversa ya que las matrices con las que se trabaja no son cuadradas):

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_R \\ \dot{Y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ 0 & 0 \\ -\frac{r}{2c} & \frac{r}{2c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{W1} \\ \dot{\phi}_{W2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

También se puede derivar la cinemática inversa que se puede ver a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_{W1} \\ \dot{\phi}_{W2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 & -\frac{c}{r} \\ \frac{1}{r} & 0 & \frac{c}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_R \\ \dot{Y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} \quad (17)$$

Un detalle importante a notar con este modelo es que como esta restringido el movimiento en  $Y$  del robot el  $\dot{Y}_R$  se puede igualar a cero. Desde ahora en adelante se escribirá como el vector:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_R \\ 0 \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} \quad (18)$$

### C. Cinemática en un marco inercial generalizado

Finalmente y para integrar todo en un solo sistema, debemos llevar las coordenadas del robot al sistema inercial, para esto se aplica una matriz de rotación donde el ángulo importante en esta situación es el que tiene el robot con respecto al eje  $x$  del sistema inercial, el ángulo que formalmente llamamos la pose del robot, quedando así el sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_I \\ \dot{Y}_I \\ \dot{\theta}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_R \\ 0 \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{X}_R \cos(\theta) \\ \dot{X}_R \sin(\theta) \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} \quad (19)$$

Ya que no hay dependencia de la velocidad  $\dot{Y}_R$  se puede eliminar todo lo relacionado a esta componente del arreglo quedando:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_I \\ \dot{Y}_I \\ \dot{\theta}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} \quad (20)$$

### D. Juntando todo

Finalmente para integrar todo se debe escribir explícitamente la velocidad del robot a partir de las velocidades de las ruedas:

$$\dot{X}_R = \frac{r}{2} (\dot{\phi}_{W2} + \dot{\phi}_{W1}) \quad (21)$$

$$\dot{\theta}_R = \frac{r}{2c} (\dot{\phi}_{W2} - \dot{\phi}_{W1}) \quad (22)$$

Luego necesitamos en forma explicita las ecuaciones que rigen al sistema inercial con respecto al del robot

$$\dot{X}_I = \cos(\theta) \dot{X}_R \quad (23)$$

$$\dot{Y}_I = \sin(\theta) \dot{X}_R \quad (24)$$

$$\dot{\theta}_I = \dot{\theta}_R \quad (25)$$

Finalmente reemplazando las dos ecuaciones 21 y 22 en las ecuaciones antes escritas se puede obtener la cinemática externa del robot a partir de la velocidad de las ruedas:

$$\dot{X}_I = \frac{r \cdot \cos(\theta)}{2} (\dot{\phi}_{W2} + \dot{\phi}_{W1}) \quad (26)$$

$$\dot{Y}_I = \frac{r \cdot \sin(\theta)}{2} (\dot{\phi}_{W2} + \dot{\phi}_{W1}) \quad (27)$$

$$\dot{\theta}_I = \frac{r}{2c} (\dot{\phi}_{W2} - \dot{\phi}_{W1}) \quad (28)$$

## II. PROBLEMA 2

Lo primero que se necesita para poder describir el movimiento pedido con un robot omnidireccional con ruedas suecas tipo robotino de festo, es el modelo cinemático inverso tanto para obtener los perfiles de velocidad de las ruedas a partir de la ruta que debe cumplir como el directo para luego poder simular si las velocidades calculadas cumplen con lo pedido en cuanto a la ruta y la pose. Para eso al igual que en el ítem anterior se parte haciendo análisis de la cinemática de las ruedas, luego del robot y al final se integra todo para un sistema inercial genérico.

### A. Cinemática de las ruedas

En general el modelo de restricciones de las ruedas omnidireccionales es muy similar al de una rueda tradicional, con dos grandes diferencias, la primera es que se agrega un ángulo que llamaremos  $\gamma$  que indica la inclinación que tienen las pequeñas ruedas que van dentro de la rueda grande con respecto a esa rueda grande, este ángulo es cero si sus giros son perfectamente perpendiculares. Ya que se trabaja con un robot tipo robotino se asume un  $\gamma = 0$  puesto que el robotino tiene el giro de sus ruedas pequeñas perpendicular al giro de la rueda principal. La otra gran diferencia es que la presencia de estas ruedas pequeñas nos libera de la restricción de derrape, ya que el robot si puede movilizarse en su eje  $Y_R$ , y la restricción de deslizamiento se escribe de la siguiente manera para estas ruedas:

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta + \gamma) & -\cos(\alpha + \beta + \gamma) & -l\cos(\beta + \gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_R \\ \dot{Y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = r\dot{\phi}\cos(\gamma) \quad (29)$$

### B. Cinemática del robot

Al igual que en el caso del ejercicio 1 para poder obtener la cinemática del robot a partir de las restricciones de las ruedas debemos caracterizar cada rueda con sus parámetros ya insertados en el robot con sus respectivos marcos de referencia, todos estos se pueden visualizar en la figura 4 donde los marcos fueron seleccionados y los parámetros identificados.

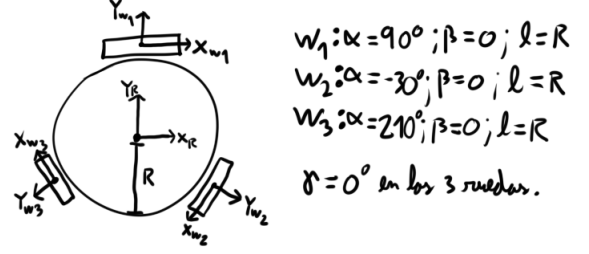


Fig. 4. robot omnidireccional con ruedas suecas.

Luego se reemplazan estos en la ecuación de restricción para obtener el sistema que nos entrega una forma de pasar desde velocidad de las ruedas a velocidad del robot:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_R \\ \dot{Y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = r\dot{\phi}_{W1} \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_R \\ \dot{Y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = r\dot{\phi}_{W2} \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_R \\ \dot{Y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = r\dot{\phi}_{W3} \quad (32)$$

Después al juntarlo todo queda el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -R \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -R \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_R \\ \dot{Y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{W1} \\ v_{W2} \\ v_{W3} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Es importante mencionar que en este caso el  $r$  que representa el radio de cada rueda se integro al vector de velocidades angular para trabajar directamente con velocidades lineales, que fueron nombradas  $v_{Wk}$  donde  $k$  se reemplaza con el numero de rueda.

### C. Cinemática en un marco inercial generalizado

Finalmente para poder obtener el modelo que nos lleva desde las velocidades de las ruedas del robot a velocidades en un marco generalizado debemos relacionar el marco del robot con el marco inercial para esto debemos aplicar la matriz de rotación correspondiente al marco del robot:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_I \\ \dot{Y}_I \\ \dot{\theta}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_R \\ \dot{Y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{X}_R \cos(\theta) - \dot{Y}_R \sin(\theta) \\ \dot{X}_R \sin(\theta) + \dot{Y}_R \cos(\theta) \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} \quad (34)$$

### D. Juntando todo

Finalmente para poder juntar todo se realiza lo mismo que en el caso del ejercicio 1 debemos expresar las ecuaciones de

forma explícita partiendo por las que nos mueven del marco referencial de las ruedas al marco referencial del robot:

$$\dot{X}_R = \frac{1}{3} (2 \cdot v_{W1} - v_{W2} - v_{W3}) \quad (35)$$

$$\dot{Y}_R = \frac{\sqrt{3}}{3} (-v_{W2} + v_{W3}) \quad (36)$$

$$\dot{\theta}_R = -\frac{1}{3R} (v_{W1} + v_{W2} + v_{W3}) \quad (37)$$

Luego expresamos las ecuaciones que llevan del sistema robot al inercial de forma explícita:

$$\dot{X}_I = \dot{X}_R \cdot \cos(\theta) - \dot{Y}_R \cdot \sin(\theta) \quad (38)$$

$$\dot{Y}_I = \dot{X}_R \cdot \sin(\theta) + \dot{Y}_R \cdot \cos(\theta) \quad (39)$$

$$\dot{\theta}_I = \dot{\theta}_R \quad (40)$$

El desarrollo de esto resulta en expresiones excesivamente largas, por lo que se entrega el resultado trabajado usando propiedades trigonométricas que permiten compactar la expresión a una versión hartó más sencilla:

$$\dot{X}_I = \frac{2}{3} \left( \cos(\theta) \cdot v_{W1} + \sin(\theta - \frac{\pi}{6}) \cdot v_{W2} - \sin(\theta + \frac{\pi}{6}) \cdot v_{W3} \right) \quad (41)$$

$$\dot{Y}_I = \frac{2}{3} \left( \sin(\theta) \cdot v_{W1} - \cos(\theta - \frac{\pi}{6}) \cdot v_{W2} + \cos(\theta + \frac{\pi}{6}) \cdot v_{W3} \right) \quad (42)$$

$$\dot{\theta}_I = -\frac{2}{3R} (v_{W1} + v_{W2} + v_{W3}) \quad (43)$$

Con eso se tiene como teniendo los perfiles de velocidad obtener mediante integración la posición del robot. Sin embargo para poder simular una ruta específica necesitamos el sistema inverso, esto es, poder ingresar las posiciones que deseamos y obtener el perfil de velocidad a partir de eso, por lo que debemos invertir el sistema, de lo que resulta:

$$\begin{bmatrix} v_{W1} \\ v_{W2} \\ v_{W3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\cos(\theta) & 2\sin(\theta) & -R \\ \sqrt{3}\sin(\theta) - \cos(\theta) & -\sin(\theta) - \sqrt{3}\cos(\theta) & -R \\ -\sqrt{3}\sin(\theta) - \cos(\theta) & \sqrt{3}\cos(\theta) - \sin(\theta) & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_I \\ \dot{Y}_I \\ \dot{\theta}_I \end{bmatrix} \quad (44)$$

Utilizando este sistema podemos a partir de una trayectoria encontrar los perfiles de velocidad que permiten seguir esa trayectoria. Ya que se trabaja basándose en robotino  $R = \frac{0.45}{2}$  ya que el robotino tiene diámetro 0.45[m]

#### E. Definición de ruta

El objetivo es recrear un movimiento recto junto con giro sobre el eje, esto es trazar una recta en alguno de los ejes del sistema inercial mientras se cambia la pose. En el caso particular de este trabajo se selecciono recrear un movimiento de 0 a 10 [m] en el eje x, mientras el robot da 4 vueltas. La ruta trazada se puede ver en la figura 5, para ambos el movimiento rotacional y el que es a lo largo del eje se utilizaron vectores que van desde 0 a su respectivo número con N cantidad de puntos, donde esos puntos se encuentran equispaciados, por lo que el robot se va a mover y girar a velocidad constante. No

así las velocidades de las ruedas, cuyos perfiles de velocidad a través del tiempo se pueden observar en la figura 6. El trazado de la ruta se logra mediante el comando linspace de Matlab, el resto de detalles del código se pueden observar en el mismo que se encuentra adjunto a este trabajo. El vídeo de la demostración del robot andando se encuentra en el siguiente link: [CLICK AQUÍ](#)

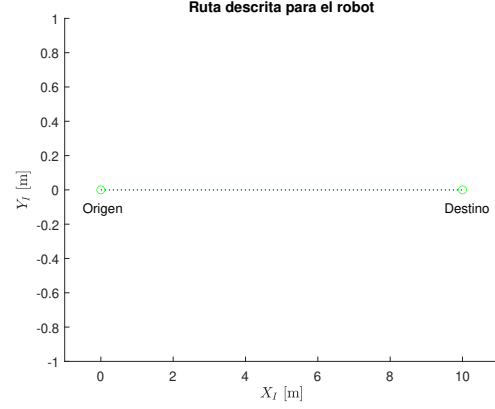


Fig. 5. Ruta descrita para el robot

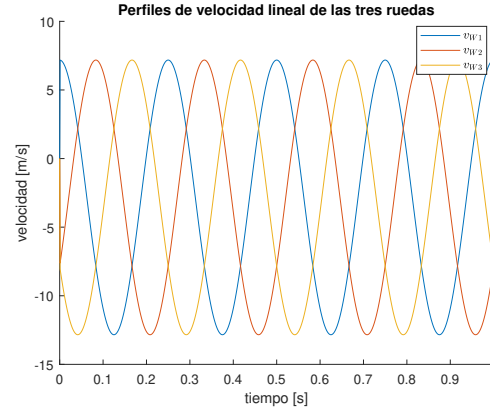


Fig. 6. Perfiles de velocidad para cada rueda

Un ultimo comentario importante a notar es que existe un error en la trayectoria que en el caso de  $X_I$  y de  $\theta_I$  con casi imperceptibles, pero en el caso de  $Y_I$  es más notorio, esto es producto del método tanto de derivación como de integración donde se pierde un poco de información por lo que encontrar una velocidad que conserve una posición justo en cero se vuelve difícil, y como se trabaja sobre el punto anterior a la hora de integrar estos pequeños errores en las velocidades van sumando un offset en  $Y_I$ .

### III. PROBLEMA 3

Para poder afrontar el problema de encontrar la cinemática de este sistema se debe separar en 4 partes, en primer lugar se debe caracterizar el robot con respecto a sus restricciones de las ruedas, en segundo lugar se debe caracterizar al robot respecto al sistema inercial genérico, en tercer lugar se debe caracterizar al carro con respecto al robot, y en cuarto lugar

llevar esas dimensiones del tráiler al sistema inercial genérico, para así poder generar el sistema que describe ambas partes y las lleva desde la velocidad de las ruedas del robot hasta el sistema inercial genérico.

#### A. Caracterización del robot y sus ruedas

Al trabajar con un robot “Husky A200” que es un sked-steer se puede asumir un modelo uniclo, ya que aunque cuente con 2 ruedas por lados estas giran a la misma velocidad en cada lado, por lo que pueden ser considerada como 2 ruedas nomas. Investigando el manual del robot, se encontró el siguiente modelo cinemático que lleva desde la velocidad lineal de cada rueda a la velocidad lineal y angular del robot:

$$\begin{bmatrix} v_R \\ w_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{d} & \frac{1}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_l \\ v_r \end{bmatrix} \quad (45)$$

donde el parámetro  $d = 0.555$  es un parámetro que se entrega en el manual de usuario del robot. Luego este sistema se puede expresar como un par de ecuaciones:

$$v_R = \frac{v_r + v_l}{2} \quad (46)$$

$$w_R = \frac{v_r - v_l}{0.555} \quad (47)$$

#### B. Caracterización del robot y el marco inercial genérico

Para poder pasar del marco del robot al marco inercial genérico se utiliza la matriz de rotación estudiada en clases, que también fue utilizada en los dos problemas anteriores a este, quedando el sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_{IR} \\ \dot{Y}_{IR} \\ \dot{\theta}_{IR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_R) & 0 \\ \sin(\theta_R) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_R \\ w_R \end{bmatrix} \quad (48)$$

Luego teniendo esto y la relación obtenida en la subsección anterior se pueden escribir las ecuaciones que describen a partir de la velocidad de las ruedas la velocidad del robot en el sistema inercial genérico:

$$\dot{X}_{IR} = \cos(\theta_R) \frac{v_r + v_l}{2} \quad (49)$$

$$\dot{Y}_{IR} = \sin(\theta_R) \frac{v_r + v_l}{2} \quad (50)$$

$$\dot{\theta}_{IR} = \frac{v_r - v_l}{0.555} \quad (51)$$

Además si se invierte este sistema se obtiene las ecuaciones con las cuales se puede conseguir los perfiles de velocidad a partir de la ruta a trazar en el marco inercial:

$$v_l = \cos(\theta_R) \dot{X}_{IR} + \sin(\theta_R) \dot{Y}_{IR} - 0.2775 \cdot \dot{\theta}_{IR} \quad (52)$$

$$v_r = \cos(\theta_R) \dot{X}_{IR} + \sin(\theta_R) \dot{Y}_{IR} + 0.2775 \cdot \dot{\theta}_{IR} \quad (53)$$

#### C. Caracterización del tráiler respecto al robot

El tráiler al ser un elemento pasivo, se encuentra a merced del robot que es el elemento activo que controla el movimiento. Es por esto que para poder caracterizar las velocidades del tráiler se debe hacer relacionándolo con las velocidades del robot, para esto se encontró la matriz que las relaciona en el paper [1], de esto se llega al sistema.

$$\begin{bmatrix} v_T \\ w_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & L_{hi} \sin(\beta) \\ \frac{1}{L_{hi}} \sin(\beta) & -\frac{L_{hi}}{L_i} \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_R \\ w_R \end{bmatrix} \quad (54)$$

donde los parámetros  $L_{h1}$  y  $L_1$  son parámetros que describen los largos de los brazos del eje acoplado tanto el que pertenece al robot y al tráiler respectivamente los cuales fueron asumidos 1, lo que significa que en términos prácticos que el robot y el tráiler están a 2 metros de distancia lo que no es muy estándar pero simplifica los cálculos y el análisis. Y el beta se define como  $\beta = \theta_R - \theta_T$ . Luego reemplazando todo se obtiene el sistema:

$$\begin{bmatrix} v_T \\ w_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ \sin(\beta) & -\cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{d} & \frac{1}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_l \\ v_r \end{bmatrix} \quad (55)$$

#### D. Caracterización del tráiler y el marco inercial genérico

Finalmente para poder obtener las ecuaciones que describen el movimiento del tráiler en el marco inercial a partir de la velocidad de las ruedas del robot se realiza la rotación de eje al sistema obtenido, llegando al sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_{IT} \\ \dot{Y}_{IT} \\ \dot{\theta}_{IT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_T) & 0 \\ \sin(\theta_T) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ \sin(\beta) & -\cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{d} & \frac{1}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_l \\ v_r \end{bmatrix} \quad (56)$$

De esto se puede finalmente encontrar las ecuaciones que nos permiten a partir de un perfil de velocidades del robot encontrar la posición del tráiler:

$$\dot{X}_{IT} = \cos(\theta_T) \cdot \left( \frac{\sin(\beta)}{0.555} \cdot (v_r - v_l) + \frac{\cos(\beta)}{2} \cdot (v_r + v_l) \right) \quad (57)$$

$$\dot{Y}_{IT} = \sin(\theta_T) \cdot \left( \frac{\sin(\beta)}{0.555} \cdot (v_r - v_l) + \frac{\cos(\beta)}{2} \cdot (v_r + v_l) \right) \quad (58)$$

$$\dot{\theta}_{IT} = -\frac{\cos(\beta)}{0.555} \cdot (v_r - v_l) + \frac{\sin(\beta)}{2} \cdot (v_r + v_l) \quad (59)$$

#### E. Definición de ruta

1) *Ruta recta*: Para este caso, se utilizó la misma ruta descrita en el problema 2, el cual se puede observar en la figura 5, el vídeo del sistema del robot con el tráiler andando se puede encontrar en el siguiente link: [CLICK AQUÍ](#). Se adjunta además en la figura 7 los perfiles de velocidad de este caso.

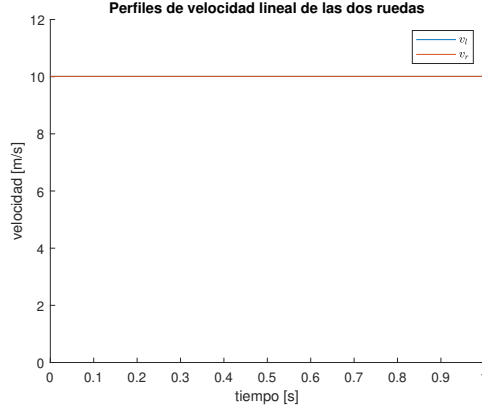


Fig. 7. Perfiles de velocidad de las ruedas en el caso de la trayectoria recta

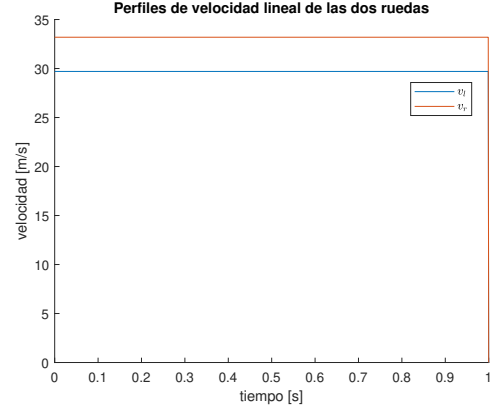


Fig. 9. Perfiles de velocidad de las ruedas en el caso de la trayectoria circular

2) *Ruta circular*: Para describir la ruta circular se genero un vector que va desde 0 a  $2\pi$ , este es un ángulo  $\mu$  auxiliar que esta definido igual que las poses de los robots como un angulo de offset desde el eje x. Luego en conjunto con algún radio se utiliza para proyectar los puntos de un círculo, en el caso del eje x se utilizo  $r \cdot \cos(\mu)$  y para el eje y  $r \cdot \sin(\mu)$  finalmente para la pose del robot se utilizo  $\mu + \pi/2$  ya que el robot va a recorrer tangencial al círculo y por lo tanto su pose es perpendicular al ángulo auxiliar. Una figura de la ruta se puede observar en la figura 8 El vídeo del sistema del robot con el tráiler andando se puede encontrar en el siguiente link: [CLICK AQUÍ](#). Se adjunta además en la figura 9 los perfiles de velocidad de este caso.

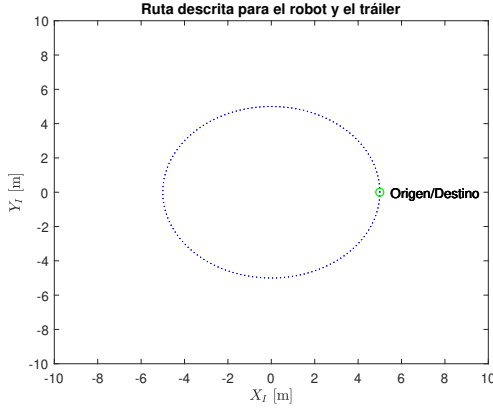


Fig. 8. Ruta descrita por el robot y el tráiler

#### IV. PROBLEMA 4

Para el trabajo de este problema se asumió un modelo bastante sencillo para la dinámica, poniendo así énfasis sobretodo en el efecto del suelo sobre la fuerza ejercida por las ruedas que es el foco del problema. Es en ese sentido que se hacen los siguientes supuestos:

- No hay deslizamiento con el terreno por lo que se asume que toda la fuerza ejercida por la rueda se convierte a velocidad salvo por las perdidas producto del roce.

- No existe derrape con el terreno por lo que el trabajo sobre el eje  $Y_R$  se ignora completamente ya que no es una dirección valida de movimiento.
- Se asumió un robot uniclo de dos ruedas, donde las dos ruedas están alineadas con el centro de masa, se asume que el robot logra equilibrarse.
- Se desprecio el efecto el efecto del roce con el viento ya que el robot no es tan grande ni va tan rápido.

##### A. Caracterización del robot y sus parámetros

En la figura 10 se puede observar las dimensiones de interés y el diagrama de cuerpo libre con las fuerzas que se consideraron, y las direcciones de las velocidades. Además están las relaciones entre estos parámetros que rigen la dinámica del sistema.

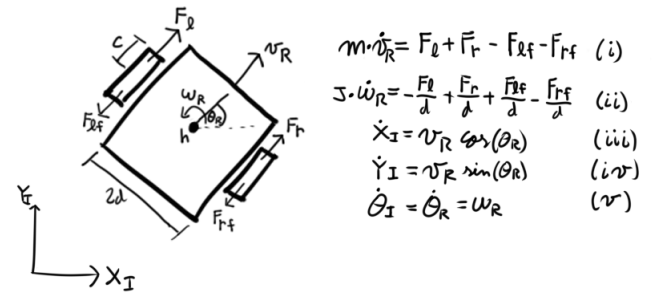


Fig. 10. Diagrama con robot y ecuaciones de la dinámica.

Donde  $F_r$  y  $F_l$  son las fuerzas que ejercen las ruedas derecha e izquierda respectivamente,  $F_{rf}$  y  $F_{lf}$  son las fricciones con el suelo de la rueda derecha e izquierda respectivamente. La ecuación (i) es la dinámica de fuerzas que rige la aceleración del robot. La ecuación (ii) es la dinámica de torques que rige la aceleración angular del robot. Y las siguientes 3 ecuaciones describen como pasar del marco del robot al marco inercial. Luego se procedió a la selección de valores de parámetros y relaciones más específicas de cada variable de fuerza.

### B. Selección de parámetros

En primer lugar se profundizo en la relación de las fuerzas, de lo que se derivó:

$$F_r = \frac{\tau_l}{c} \quad (60)$$

$$F_l = \frac{\tau_r}{c} \quad (61)$$

$$F_{rf} = \begin{cases} -F_r & F_r \leq m \cdot g \cdot \mu_e \\ m \cdot g \cdot \mu_d & F_r > m \cdot g \cdot \mu_e \end{cases} \quad (62)$$

$$F_{lf} = \begin{cases} -F_l & F_l \leq m \cdot g \cdot \mu_e \\ m \cdot g \cdot \mu_d & F_l > m \cdot g \cdot \mu_e \end{cases} \quad (63)$$

$$(64)$$

Se adjunta a continuación en la tabla I con todos los valores seleccionados para los distintos parámetros.

Parámetro	Valor
$\mu_e$	1
$\mu_d$	0.6
$d$	$0.25[m]$
$c$	$0.1[m]$
$m$	$30[Kg]$
$R$	$0.35[m]$
$J$	$1.875[Kg \cdot m^2]$

TABLE I

TABLA CON LOS VALORES SELECCIONADOS PARA LOS PARÁMETROS

Luego todo el resto de constantes salen de relaciones entre las de la tabla, quedando así finalmente un sistema:

$$\dot{v}_R = \frac{\tau_l}{0.1} + \frac{\tau_r}{0.1} - F_{lf} - F_{rf} \quad (65)$$

$$\dot{w}_R = \frac{-\tau_l}{0.1} + \frac{\tau_r}{0.1} + F_{lf} - F_{rf} \quad (66)$$

$$\dot{X}_I = \cos(\theta_R) \cdot v_R \quad (67)$$

$$\dot{Y}_I = \sin(\theta_R) \cdot v_R \quad (68)$$

$$\dot{\theta}_I = w_R \quad (69)$$

Y con eso se procedió a definir los perfiles de fuerzas y simulación.

### C. Definición de perfiles de fuerzas y simulación

El vídeo donde se testean todos los casos pedidos se encuentra en el siguiente link: [CLICK AQUÍ](#). En cuanto a la selección de los perfiles de fuerzas estos se pueden observar en la figura 11. Es importante comentar que a diferencia del problema 2 y 3 donde se trabajo con los perfiles de velocidad toda la mentalidad de trabajo cambia al trabajar con la dinámica, ya que a través de las fuerzas en realidad se controla las aceleraciones del robot. Además al trabajar con dinámica si bien se pueden alcanzar resultados mucho más precisos ya que se pueden poner tantos detalles sobre el robot y el ambiente como sean necesarios, es también un arma de doble filo ya que se necesita hacer un trabajo mucho mas riguroso y profundo para poder identificar bajo

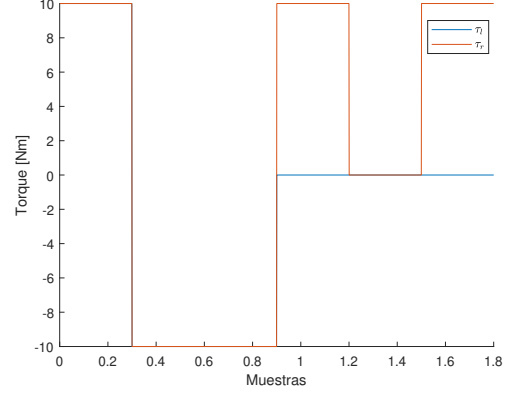


Fig. 11. Perfiles de torque utilizados en el video

ciertos estándares “suficientes” fenómenos tal que al utilizar los perfiles de fuerzas el resultado sea el deseado o al menos “suficientemente” bueno.

### V. REFERENCE

- [1] Guevara, L., Jorquera, F., Walas, K., Auat-Cheein, F. (2023). Robust control strategy for generalized N-trailer vehicles based on a dual-stage disturbance observer. Control Engineering Practice, 131, 105382. <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2022.105382>