

## Devoir à rendre : simulations numériques

---

**Le compte-rendu doit :**

- être clair
  - expliquer clairement votre méthodologie
  - comporter le listing de tous vos programmes commentés
  - comporter des conclusions personnelles.
- 

### Exercice 1 : chiffrement RSA

- 1) écrire un programme d'exponentiation rapide
- 2) écrire un programme du calcul des coefficients de Bezout
- 3) écrire un programme de chiffrement RSA
- 4) imaginer un scénario et une attaque du chiffrement RSA.

### Exercice 2 : loi des grands nombres

On considère N v.a.  $X_i$  indépendantes toutes de même loi. Choisir la loi. La moyenne empirique est donnée par :

$$\overline{X_N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

- 1) Quelle est l'espérance de  $\overline{X_N}$  ? son écart-type ?
- 2) Représenter graphiquement 1 réalisation  $\overline{x_N}$  en fonction de N. Que constatez-vous ? comment l'expliquez-vous ?
- 3) Refaire la question 2) en augmentant le nombre de réalisations.
- 4) Mettez-vous en évidence la loi des grands nombres ? Expliquer vos résultats.

### Exercice 3 : marche aléatoire

On jette une pièce bien équilibrée toutes les T secondes et on fait un pas de longueur s à droite si face apparaît, à gauche sinon. Le processus démarre à t=0 et on obtient une fonction en escalier avec des discontinuités aux points  $T_n = nT$ .

On obtient une marche aléatoire dont les réalisations  $X(t, \omega)$  dépendent de la séquence de faces et de piles.

## Partie1

- 1) Soit  $X_i$  la v.a. « déplacement n<sup>o</sup>i ». Quelle est sa loi ?
- 2) On peut écrire :

$$X(nT, \omega) = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Quelle est la loi de X qui représente la position du marcheur à l'instant nT ?

- 3) Prendre s=T=1 et représenter des trajectoires de X pour n=20,100,1000.
- 4) Calculer l'espérance de X. Est-ce bien ce que l'on observe sur les trajectoires ?  
Faire de même avec la variance.

## Partie2

- 5) On va accélérer la promenade, c'est-à-dire prendre T de plus en plus petit, tout en faisant des pas s de longueur également de plus en plus petite. On choisit de prendre s proportionnel à  $\sqrt{T}$ , plus précisément on va poser  $s^2 = \alpha T$ . On s'intéresse à ce qui se passe lorsque T tend vers 0. D'après les calculs de l'espérance et de la variance, expliquer pourquoi on ne prend pas  $s = \alpha T$ .
- 6) Représenter des trajectoires de X pour n fixé pour T de plus en plus petit.
- 7) En utilisant le théorème central limite, démontrer que  $X(t)$  suit la loi  $N(0, \sqrt{t})$ .  
. On l'appelle le mouvement brownien.