

Devoir à rendre : simulations numériques

Le compte-rendu doit :

- être clair
 - expliquer clairement votre méthodologie
 - comporter le listing de tous vos programmes commentés
 - comporter des conclusions personnelles.
-

Exercice 1 : chiffrement RSA

- 1) écrire un programme d'exponentiation rapide
- 2) écrire un programme du calcul des coefficients de Bezout
- 3) écrire un programme de chiffrement RSA
- 4) imaginer un scénario et une attaque du chiffrement RSA.

Exercice 2 : loi des grands nombres

On considère N v.a. X_i indépendantes toutes de même loi. Choisir la loi. La moyenne empirique est donnée par :

$$\overline{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

- 1) Quelle est l'espérance de \overline{X}_N ? son écart-type ?
- 2) Représenter graphiquement 1 réalisation \overline{x}_N en fonction de N. Que constatez-vous ? comment l'expliquez-vous ?
- 3) Refaire la question 2) en augmentant le nombre de réalisations.
- 4) Mettez-vous en évidence la loi des grands nombres ? Expliquer vos résultats.

Exercice 3 : marche aléatoire

On jette une pièce bien équilibrée toutes les T secondes et on fait un pas de longueur s à droite si face apparaît, à gauche sinon. Le processus démarre à t=0 et on obtient une fonction en escalier avec des discontinuités aux points $T_n = nT$.

On obtient une marche aléatoire dont les réalisations $X(t, \omega)$ dépendent de la séquence de faces et de piles.

Partie1

1) Soit X_i la v.a. « déplacement n°i ». Quelle est sa loi ?

2) On peut écrire :

$$X(nT, \omega) = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Quelle est la loi de X qui représente la position du marcheur à l'instant nT ?

3) Prendre s=T=1 et représenter des trajectoires de X pour n=20,100,1000.

4) Calculer l'espérance de X. Est-ce bien ce que l'on observe sur les trajectoires ?
Faire de même avec la variance.

Partie2

5) On va accélérer la promenade, c'est-à-dire prendre T de plus en plus petit, tout en faisant des pas s de longueur également de plus en plus petite. On choisit de prendre s proportionnel à \sqrt{T} , plus précisément on va poser $s^2 = \alpha T$. On s'intéresse à ce qui se passe lorsque T tend vers 0. D'après les calculs de l'espérance et de la variance, expliquer pourquoi on ne prend pas $s = \alpha T$.

6) Représenter des trajectoires de X pour n fixé pour T de plus en plus petit.

7) En utilisant le théorème central limite, démontrer que X(t) suit la loi $N(0, \sqrt{t})$.
. On l'appelle le mouvement brownien.