UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Elena COJUHARI

CALCULUL OPERAȚIONAL ȘI APLICAȚII

Chișinău
2024

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

FACULTATEA INGINERIE MECANICĂ,
INDUSTRIALĂ ȘI TRANSPORTURI

DEPARTAMENTUL MATEMATICA

Elena Cojuhari

CALCUL OPERAȚIONAL ȘI APLICAȚII

Manual

Chişinău
Editura "Tehnica-UTM"
2024

CZU 517.4(075.8)
C 61

Manualul a fost discutat și aprobat pentru editare la ședința Senatului UTM din 19.12.2023, proces verbal nr. 6.

Manualul este destinat studenților care studiază cursul de matematică superioară, conține material teoretic și exemple de rezolvare a problemelor în calculul operațional - o secțiune de matematică superioară inclusă în standardul obligatoriu de învățământ pentru studenții specialităților inginerie radio, inginerie electrică și inginerie termică, de asemenea, poate fi folosit și de studenții la fizică tehnică și matematică aplicată. Manualul se încheie cu o serie de exerciții și probleme de control pe care studenții ar trebui să le rezolve pentru a verifica stăpânirea materialului prezentat.

Autor: conf. univ., dr. Elena Cojuhari

Recenzenți: conf. univ., dr. Victor Cernii, UTM
prof. univ., dr. hab. Liubomir Chiriac, UPS

DESCRIEREA CIP A CAMEREI NAŢIONALE A CĂRŢII DIN RM

Cojuhari, Elena.

Calcul operaţional şi aplicaţii: Manual / Elena Cojuhari Universitatea Tehnică a Moldovei, Facultatea Inginerie Mecanică, Industrială şi Transporturi, Departamentul Matematica.
– Chişinău: Tehnica-UTM, 2024. – 125 p.: fig.
Bibliogr.: p. 123 (8 tit.). – Index: p. 124-125. – 100 ex.

Redactor E.Balan

Bun de tipar 15.01.24	Formatul hârtiei 60x84 1/16
Hârtie ofset. Tipar RISO	Comanda nr. 10

MD-2004, Chişinău, bd. Ştefan cel Mare și Sfânt, 168, UTM
MD-2045, Chişinău, str. Studenţilor, 9/9, Editura „Tehnica-UTM"

ISBN 978-9975-64-383-2.

CUPRINS

Introducere

Apariția calculului operațional ca ramură independentă a matematicii datează de la sfârșitul secolului al XIX-lea, deși originile calculului operațional erau deja conturate în lucrările clasice ale matematicienilor remarcabili G. Leibniz, D. Bernoulli, L. Euler, J. Lagrange, J. Fourier, S. Poisson, A. Cauchy.

Calculul operațional reprezintă o tehnică prin care problemele de analiză sunt transformate în probleme algebrice considerabil mai simple în special, ecuațiile diferențiale ordinare, precum și unele ecuații integrale, sunt transformate în ecuații algebrice.

Ghidată în mare măsură de intuiție și de bogatele cunoștințe de fizică bazate în special pe studiile sale în domeniul telegrafiei, această tehnică a fost dezvoltată de fizicianul-matematician Oliver Heaviside (1850-1925), punând bazele calculului operațional atribuit acum numelui său. O justificare matematică riguroasă a metodelor operaționale ale lui Heaviside a venit abia după lucrările lui Th. Bromwich (1875-1929) care au înrudit calculul operațional cu transformarea Laplace, apoi, cu merit de menționat, justificarea făcută de Norbert Wiener (1894-1964) în cadrul metodelor bazate pe proprietățile transformării Fourier.

Metodele de calcul operațional, făcând parte din cele mai eficiente metode ale analizei matematice aplicate, care în majoritatea cazurilor fac posibilă, prin reguli simple, rezolvarea multor probleme suficient de complicate din diverse domenii ale științelor naturale moderne. Aceste metode găsesc aplicații de succes în fizica matematică, în teoria ecuațiilor diferențiale, teoria ecuațiilor integrale, teoria funcțiilor speciale, precum și în multe alte domenii înrudite. Metodele operaționale au o importanță deosebită în diverse domenii ale științelor naturale, tehnologie, de exemplu, automatizare și telemecanică, teoria sistemelor și optimizare, sunt utilizate pe scară largă în rezolvarea problemelor din mecanică, inginerie electrică, inginerie radio, transfer de căldură etc.

Manualul de față oferă informații teoretice asupra calculului operațional și aplicații, sunt analizate în detaliu soluții de probleme care ilustrează aplicarea metodelor calculului operațional. De asemenea, sunt date exemple de aplicare a metodelor operaționale la rezolvarea ecuațiilor diferențiale, ecuațiilor integrale, ecuațiilor și sistemelor de ecuații integro-diferențiale, precum în studiul circuitelor electrice etc.

1. Transformarea Laplace

În matematică, transformarea Laplace, numită datorită lui Pierre-Simon Laplace (1749 -1827), este un operator integral L definit prin

$$(Lf)(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt, \quad p \in \mathbb{C}, \tag{1.1}$$

care transformă o funcţie a unei variabile reale t (de obicei, t fiind tratate ca valori de timp) într-o funcţie a unei variabile complexe p (dintr-un domeniu al planului complex (p)).

Transformarea Laplace se bucură de numeroase aplicaţii în diverse domenii ale matematicii, fizicii, ingineriei etc., constituind un instrument de bază în calculul operaţional util pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale, precum şi ecuaţiilor integrale, în special, transformă ecuaţiile diferenţiale ordinare în ecuaţii algebrice, şi, respectiv, operaţia de convoluţie în operaţia de multiplicare.

1.1. Spaţiul funcţiilor original. Transformata Laplace

La definirea transformatei Fourier a unei funcţii se presupune că funcţia corespunzătoare este absolut integrabilă de-a lungul axei reale. Acest fapt exclude din considerare funcţiile care cresc rapid la infinit. Transformarea Laplace este o adaptare a transformării Fourier care permite ca unele dintre aceste funcţii în creştere rapidă să fie luate în considerare. Clasa de funcţii admisibile în calculul operaţional cu implicarea transformării Laplace reprezintă astfel numita **clasa funcţiilor original**.

1.1.1. ***Definiţie.*** *O funcţie f, în general cu valori complexe, a unei variabile reale t se numeşte* ***funcţie original****, sau simplu* ***original****, dacă*

(i) $f(t) = 0$ *pentru* $t < 0$;
(ii) *pe orice interval marginit funcţia f are cel mult un număr finit de puncte de discontinuitate de speţa întâi*;
(iii) *există constante $M > 0$ şi s astfel încât*

$$|f(t)| \leq Me^{st}, \quad t \geq 0. \tag{1.2}$$

Condiţia (i) presupune că funcţiile original au suport pe semiaxa reală pozitivă, pe când (ii) asigură sumabilitatea (altfel, integrabilitatea) lor pe orice interval mărginit. Reamintim că o funcţie sumabilă (integrabilă) pe orice interval mărginit se mai numeşte funcţie local sumabilă (local integrabilă). În acest context, *funcţiile original se numesc, mai general, funcţiile local sumabile pentru care sunt valabile proprietăţile* (i) *şi* (ii).

Condiţia (iii) permite o creştere exponenţială a originalelor. Valoarea lui s în inegalitatea (1.2) depinde de funcţia dată f. Evident, (1.2) rămâne valabilă cu înlocuirea lui s cu o valoare mai mare. Valoarea optimă a lui s, adică marginea inferioară a mulţimii tuturor valorilor reale s pentru care are loc (1.2), se numeşte **indice de creştere** (sau **exponent de creştere**) al funcţiei original f.

1.1.2. ***Propoziţie.*** *Suma şi produsul unui număr finit de funcţii original sunt funcţii original.*

Demonstraţie. Este suficient să luăm în considerare cazul a două funcţii. Astfel, fie f_k $(k = 1, 2)$ două funcţii original. Suma şi produsul lor, definite prin

$$(f_1 + f_2)(t) = f_1(t) + f_2(t),$$
$$(f_1 f_2)(t) = f_1(t) f_2(t)$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$, îndeplinesc, evident, primele două condiţii ale definiţiei 1.1.1.

Dacă

$$|f_k(t)| \leq M_k \ e^{s_k t}, \quad t \geq 0,$$

cu anumite constante $M_k \geq 0$ şi $s_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2)$, atunci

$$|f_1(t) + f_2(t)| \leq |f_1(t)| + |f_2(t)| \leq 2Me^{s_0 t},$$

unde

$$M = \max\{M_1, M_2\} \quad \text{şi} \quad s_0 = \max\{s_1, s_2\},$$

şi, respectiv,

$$|f_1(t) \ f_2(t)| = |f_1(t)| \ |f_2(t)| \leq M_1 \ M_2 \ e^{(s_1+s_2)t}$$

şi, prin urmare, condiţia 1.1.1 (iii) este de asemenea îndeplinită. □

1.1.3. ***Corolar.*** *Mulţimea funcţiilor original înzestrată cu operaţiile algebrice definite punctual formează un spaţiu vectorial peste corpul numerelor complexe* $\mathbb{C}$.

În cele ce urmează, spaţiul vectorial al funcţiilor original va fi notat cu $\mathscr{L}$.

Fie $f \in \mathscr{L}$ o funcţie original având indicele de creştere s_0. Pentru valori complexe p pentru care $\operatorname{Re} p > s_0$ integrala improprie

$$F(p) := \int_0^\infty e^{-pt} f(t) \ dt, \tag{1.3}$$

numită **integrala Laplace**, este absolut convergentă.

Într-adevăr, deoarece

$$|f(t)| \leq Me^{s_0 t}, \quad t \geq 0,$$

cu o constantă pozitivă M (conform Definiţiei 1.1.1), rezultă

$$|e^{-pt}f(t)| = e^{-(\mathrm{Re}\,p)\,t}\;|f(t)| \leq Me^{(s_0-\mathrm{Re}\,p)\,t}.$$

Aplicând criteriul de comparaţie pentru integrale improprii, deducem convergenţa absolută a integralei (1.3).

În plus, conchidem că pentru $\mathrm{Re}\,p < s_0$ integrala (1.3) este divergentă, în timp ce pe dreapta $\mathrm{Re}\,p = s_0$ această integrală poate fi atât convergentă cât şi divergentă.

În conformitate cu comentariile făcute, "**indicele de creştere**" se mai poate denumi "**abscisă de convergenţă**" a funcţiei original date şi, respectiv, semiplanul $\mathrm{Re}\,p > s_0$ să fie numit **semiplanul de convergenţă** al integralei Laplace.

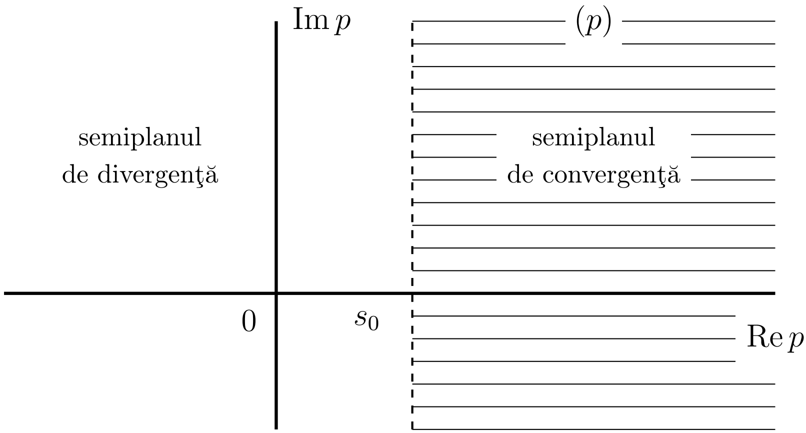


Fig. 1.1

1.1.4. ***Definiţie.*** *Pentru $f \in \mathscr{L}$ cu indicele de creştere s_0, funcţia F de variabilă complexă p definită prin formula* (1.3) *se numeşte **transformata Laplace** a funcţiei original f.*

Transformata Laplace F a funcţiei original, având indicele de creştere s_0, este definită pe domeniul $\mathrm{Re}\,p > s_0$.

Aplicaţia L care transformă f în F, adică operatorul integral definit prin

$$(Lf)(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt, \quad \operatorname{Re} p > s_0, \tag{1.4}$$

(a se vedea (1.1)) se numeşte **transformare Laplace**.

Faptul că funcţia F este transformata Laplace a funcţiei f se notează astfel

$$f(t) \risingdotseq F(p). \tag{1.5}$$

Această notaţie (1.5) se justifică conform argumentelor din secţiunea 1.2 care urmează.

1.1.5. ***Teoremă.*** *Fie $f \in \mathscr{L}$ o funcţie original cu indicele de creştere s_0, şi fie*

$$f(t) \risingdotseq F(p).$$

Atunci F reprezintă o funcţie olomorfă (analitică) pe semiplanul de convergenţă $\operatorname{Re} p > s_0$. În plus, derivatele funcţiei imagine F se obţin derivând consecutiv în raport cu p funcţia de sub semnul de integrare

$$F^{(n)}(p) = \int_0^\infty (-1)^n\, t^n\, e^{-pt} f(t)\, dt, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots\ . \tag{1.6}$$

Demonstraţie. Fără a pierde generalitatea, se poate presupune că funcţia original f este continuă pe semiaxa pozitivă reală. Pentru $\operatorname{Re} p \geq s > s_0$, avem

$$\int_0^\infty |e^{-pt} f(t)|\, dt \leq \int_0^\infty e^{-st}\ |f(t)|\, dt < \infty\ .$$

În consecinţă, integrala improprie (1.3) converge uniform pentru $\operatorname{Re} p \geq s$. În plus, funcţia de sub semnul integralei (1.3) este continuă în (p,t) pentru orice p şi orice t, şi reprezintă o funcţie analitică în raport cu variabila p pentru fiecare t. Conform abordărilor standard (a se vedea [**5**], capitolul XIV), se poate diferenţia sub semnul integralei (în raport cu parametrul p) pentru a obţine

$$F'(p) = \int_0^\infty (-t)\, e^{-pt} f(t)\ dt. \tag{1.7}$$

Acelaşi raţionament analog arată că se poate din nou diferenţia sub semnul integralei (1.7). Continuând în acest mod, obţinem relaţiile (1.6). Deoarece s poate fi ales arbitrar aproape de s_0, concluziile în vigoare sunt valabile pentru $\operatorname{Re} p \geq s_0$. $\square$

1.1.6. ***Observaţie.*** Dacă funcţia original f este continuă având suportul său o mulţime mărginită, atunci domeniul de convergenţă a transformatei Laplace F este întregul plan complex (p), deci, în acest caz, F reprezintă o funcţie întreagă. Reamintim că suportul unei funcţii f, cum, în cazul prezent, definită pe axa reală şi cu valori în mulţimea numerelor complexe, se numeşte mulţimea

$$\sup f := \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}.$$

1.1.7. ***Exemplu (funcţia Heaviside).*** Funcţia Heaviside (altfel numită **funcţia unitate** sau **treapta unitate**) este definită prin

$$\eta(t) = \chi_{[0,\infty\}}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

η este o funcţie original cu indicele de creştere $s_0 = 0$, iar transformata Laplace este

$$H(p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt = \frac{1}{p}$$

adică

$$\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}, \qquad \operatorname{Re} p > 0. \tag{1.9}$$

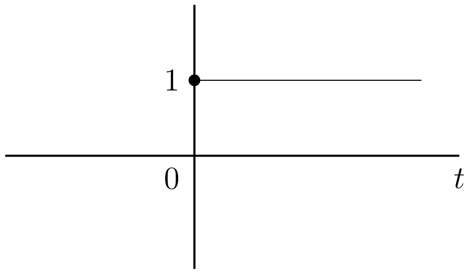


Fig. 1.2. Funcţia Heaviside

Funcţia Heaviside joacă un rol important în teoria calculului operaţional Laplace. O situaţie convenabilă corespunde faptului că funcţiile de o singură variabilă reală, pentru care condiţiile (ii) şi (iii) din Definiţia 1.1.1 sunt îndeplinite, devin funcţii original după înmulţirea lor cu funcţia Heaviside. Astfel, de exemplu,

$$\eta(t)\ e^{\alpha t}, \quad \eta(t)\ t^n, \quad \eta(t) \cos \omega t \quad etc.$$

sunt funcţii original.

Totuşi, pentru a evita abuz de notaţii, în cele ce urmează ne vom permite să scriem şi să numim funcţii original f în loc de $f\eta$.

1.1.8. ***Exemplu.*** Transformata funcţiei original

$$f(t) = e^{\alpha t}, \quad t \geq 0,$$

unde α un număr complex oarecare, este funcţia

$$F(p) = \frac{1}{p-\alpha}$$

definită pentru $\operatorname{Re} p > s_0$, $s_0 = \operatorname{Re}\alpha$.

Soluţie. Avem

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\ e^{\alpha t} dt = \int_0^\infty e^{-(p-\alpha)t} dt =$$

$$= -\frac{1}{p-\alpha} e^{-(p-\alpha)t}\Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha},$$

deoarece

$$\left| e^{-(p-\alpha)t} \right| = e^{-\operatorname{Re}(p-\alpha)t} < e^{-(\operatorname{Re} p - s_0)t}.$$

□

1.2. Transformarea Laplace inversă. Formula Mellin-Fourier

În această secţiune, ne vom ocupa de problema determinării funcţiei original în dependenţă de transformata Laplace corespunzătoare. Vom reieşi de la relaţia dintre transformata Fourier şi transformata Laplace a unei funcţii local integrabile care îndeplineşte condiţiile (i) şi (iii) din definiţia 1.1.1.

Reamintim că pentru o funcţie f care satisface condiţiile Dirichlet şi este absolut integrabilă pe întreaga axă reală este valabilă formula

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\ e^{iw\,(t-s)}\ ds. \tag{1.10}$$

Formula (1.10) este cunoscută ca **formula integrală Fourier** (în forma complexă) (a se vedea, de exemplu, [**6**], capitolul XIX, §6).

Dacă notăm

$$\widehat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-iws}\, ds, \tag{1.11}$$

atunci

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\, e^{iwt}\, d\omega, \tag{1.12}$$

Formulele (1.11) şi (1.12) formează o pereche de transformări Fourier, funcţia $\widehat{f}(\omega)$ $(-\infty < \omega < \infty)$ fiind numită **transformata Fourier** a funcţiei f. Formula (1.12) se numeşte **formula de inversiune Fourier**.

Integrala improprie (1.12) trebuie înţeleasă în sensul valorii principale Cauchy, adică

$$f(t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} \widehat{f}(\omega)\, e^{iwt}\, d\omega, \tag{1.13}$$

în orice punct de continuitate t pentru f, pe când în fiecare punct de discontinuitate t_0, care pot fi numai de speţa întâi, valoarea integralei din (1.13) este egală cu

$$\frac{1}{2}\left(f(t_0+0) + f(t_0-0)\right).$$

Acum, fie f o funcţie original cu abscisa de convergenţă s_0. Conform Teoremei 1.1.5, transformata Laplace $F(p)$ a funcţiei original f constituie o funcţie olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re} p > s_0$.

Fie

$$p = \sigma + i\omega, \tag{1.14}$$

unde $\sigma = \operatorname{Re} p$, $\omega = \operatorname{Im} p$ sunt, respectiv, partea reală şi partea imaginară a variabilei complexe p. Pentru $\sigma > s_0$, notăm

$$g(t) := e^{-\sigma t} f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.15}$$

Evident, funcţia g este absolut integrabilă pe toată axa reală şi, în plus, relaţiile următoare sunt valabile

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\ dt = \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-pt} f(t)\ dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^\infty \left(e^{-\sigma t} f(t)\right)\ e^{-iwt}\ dt = \int\limits_{-\infty}^\infty g(t)\, e^{-iwt}\ dt = \sqrt{2\pi}\ \widehat{g}(\omega).$$

Astfel

$$F(p) = \sqrt{2\pi}\ \widehat{g}(\omega), \tag{1.16}$$

unde $\widehat{g}(\omega)$ desemnează transformata Fourier a funcţiei g (în notaţiile (1.14) şi (1.16)).

1.2.1. ***Teorema (Mellin-Fourier).*** *Dacă $F(p)$ este transformata Laplace a originalului $f(t)$, având exponentul de creştere s_0, atunci în fiecare punct de continuitate a funcţiei f are loc formula*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} F(p)\ dp, \quad \sigma > s_0. \tag{1.17}$$

unde integrala este luată de-a lungul dreptei $\operatorname{Re} p = \sigma$ *paralelă cu axa imaginară şi este înţeleasă în sensul valorii principale*

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp = \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} e^{pt}F(p)\,dp. \tag{1.18}$$

În punctele de discontinuitate t formula (1.17) *este valabilă cu* $\frac{1}{2}\left(f(t-0)+f(t+0)\right)$ *în loc de* $f(t)$.

Demonstraţie. Vom folosi relaţiile dintre transformatele Fourier şi Laplace (1.16) în notaţiile făcute anterior. Pe lângă funcţia g introdusă prin formula (1.15), pentru comoditate, notăm cu h funcţia

$$h(t) = \frac{1}{2}\left(f(t-0)+f(t+0)\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bineînţeles, funcţiile f şi h coincid pe mulţimea punctelor de continuitate. Valoarea funcţiei h într-un punct de discontinuitate este egală cu media limitelor sale laterale respective.

Pentru orice $R > 0$, prin schimbarea de variabilă $p = \sigma + i\omega$, deducem

$$\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} e^{pt}F(p)\,dp = \int_{-R}^{R} e^{\sigma t + i\omega t}F(\sigma+i\omega)\,i\,d\omega =$$

$$= ie^{\sigma t}\int_{-R}^{R} F(\sigma+i\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega = ie^{\sigma t}\int_{-R}^{R} \sqrt{2\pi}\,\widehat{g}(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega =$$

$$= i\sqrt{2\pi}\,e^{\sigma t}\int_{-R}^{R} \widehat{g}(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega\ .$$

Prin urmare,

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} e^{pt}\, F(p)\; dp =$$

$$= e^{\sigma t} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-R}^{R} \widehat{g}(\omega)\; e^{i\omega t}\, d\omega =$$

$$= e^{\sigma t}(e^{-\sigma t} h(t)) = h(t),$$

şi, cu aceasta, teorema este demonstrată. □

Formula (1.17) este cunoscută sub denumirea **formula Mellin-Fourier** (numită şi **formula Mellin-Riemann** sau, de asemenea, **formula de inversare Mellin**).

Observăm că orice valoare reală a lui σ mai mare decât s_0 poate fi utilizată în (1.17) şi că fiecare astfel de alegere duce la aceeaşi valoare pentru $f(t)$ în orice punct dat din $\mathbb{R}$.

Unicitatea inversării transformării Laplace este dată în esenţă în teorema 1.2.1, dar, totuşi, este subliniată mai evidenţiat în următorul corolar.

1.2.2. ***Corolar.*** *Dacă transformatele Laplace $F(p)$ şi $G(p)$ respectiv ale două funcţii original f şi g sunt egale pe o dreaptă verticală $p = \sigma + i\omega$ situată în domeniile lor de convergenţă, atunci $f(t) = g(t)$ pentru orice puncte de continuitate t ale acestora.*

Astfel, două originale cu aceeaşi transformată Laplace pot diferi doar în punctele de discontinuitate.

1.2.3. ***Definiţia.*** *Aplicaţia $F(p) \to f(t)$ dată de formula Mellin-Fourier* (1.17) *se numeşte **transformarea Laplace inversă** şi se notează cu L^{-1}.*

Pentru aplicaţii, ca de obicei, valorile funcţiei original în punctele de discontinuitate nu sunt semnificative. Din acest motiv, nu ar trebui să fie îngrijorător faptul că constatarea unui original poate diferi în puncte de discontinuitate de rezultatul obţinut prin formula Mellin-Fourier.

În cele ce urmează, vom identifica funcţiile original care diferă între ele într-un număr finit de puncte, şi vom scrie ca în (1.5)

$$f(t) \risingdotseq F(p)$$

relaţia dintre originalul $f(t)$ şi transformata Laplace respectivă $F(p)$.

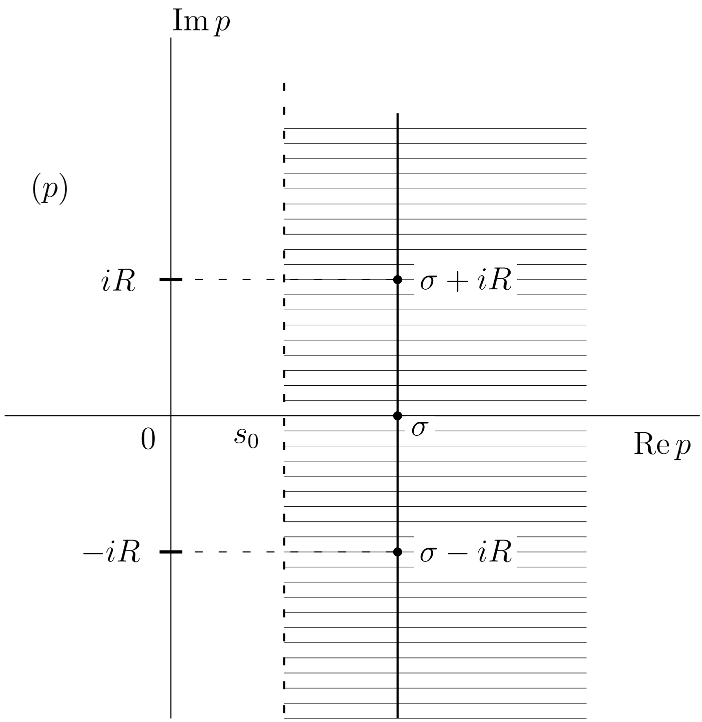


Fig. 1.3. Drumul de integrare în formula Mellin-Fourier

1.3. Proprietăţi ale transformării Laplace

Transformarea Laplace L poate fi privită ca o aplicaţie liniară definită pe clasa funcţiilor original $\mathscr{L}$ în modul următor. Fie f şi g funcţii original cu abscisele de convergenţă $s_0(f)$ şi, respectiv, $s_0(g)$. Atunci, combinaţia liniară $\lambda f + \mu g$ cu $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ reprezintă de asemenea o funcţie original (a se vedea propoziţia 1.1.2 cât şi demonstraţia ei) şi, se poate scrie

$$\begin{gathered} L(\lambda f + \mu g)(p) = \lambda L(f)(p) + \mu L(g)(p), \\ p > \max\{s_0(f), s_0(g)\}. \end{gathered} \tag{1.19}$$

În anumite cazuri, abscisa de convergenţă pentru $\lambda f + \mu g$ poate fi, în general, mai mică decât valoarea $\max\{s_0(f), s_0(g)\}$. În (1.19) $L(f)(p)$ desemnează transformata Laplace $F(p)$ ($\operatorname{Re} p > s_0(f)$) pentru funcţia original f.

Relaţia (1.19) exprimă proprietatea de liniaritate a transformării Laplace L, care, în notaţiile convenite, poate fi formulată după cum urmează.

1.3.1. ***Teorema (Proprietate de liniaritate).*** Dacă

$$f(t) \risingdotseq F(p), \quad g(t) \risingdotseq G(p),$$

atunci

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \risingdotseq \lambda F(p) + \mu G(p)$$

pentru orice $\lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$.

Demonstraţie. Rezultă imediat din proprietatea de liniaritate a operaţiei de integrare. □

1.3.2. ***Exemplu.*** *Să se determine transformata Laplace a următoarelor funcţii original*

$$a)\ \sin \omega t; \quad b)\ \cos \omega t; \quad c)\ \operatorname{sh} \omega t; \quad d)\ \operatorname{ch} \omega t.$$

Soluţie. Pentru cazurile a) şi b) vom folosi formulele

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i},$$

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}.$$

Transformata Laplace a funcţiei exponenţiale a fost calculată în exemplul 1.1.7. Avem

$$e^{i\omega t} \risingdotseq \frac{1}{p - i\omega} \quad \text{şi} \quad e^{-i\omega t} \risingdotseq \frac{1}{p + i\omega}.$$

Conform proprietăţii de liniaritate 1.3.1, obţinem

$$\sin \omega t = \frac{1}{2i} e^{i\omega t} - \frac{1}{2i} e^{-i\omega t} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \frac{1}{2i}\ \frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{2i}\ \frac{1}{p + i\omega} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

şi, respectiv,

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}\ e^{i\omega t} + \frac{1}{2}\ e^{-i\omega t} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \frac{1}{2}\ \frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{2}\ \frac{1}{p + i\omega} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Prin urmare,

$$\sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \tag{1.20}$$

$$\cos \omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \tag{1.21}$$

În mod analog se determină transformata Laplace pentru funcţiile hiperbolice $\operatorname{sh}\omega t$ şi $\operatorname{ch}\omega t$, folosind în mod direct formulele

$$\operatorname{sh}\omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$$

şi

$$\operatorname{ch}\omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2},$$

sau, astfel, pe baza relaţiilor cu funcţiile trigonometrice respective, şi anume

$$\operatorname{sh}\omega t = -i\sin(i\omega t),$$
$$\operatorname{ch}\omega t = \cos(i\omega t).$$

Avem

$$\operatorname{sh}\omega t = -i\sin(i\omega t) \risingdotseq -i\frac{i\omega}{p^2 + (i\omega)^2} = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$$

şi, respectiv,

$$\operatorname{ch}\omega t = \cos(i\omega t) \risingdotseq \frac{p}{p^2 + (i\omega)^2} = \frac{p}{p^2 - \omega^2}\,.$$

Aşadar,

$$\operatorname{sh}\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}\,, \tag{1.22}$$

$$\operatorname{ch}\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2 - \omega^2}\,. \tag{1.23}$$

Fie f o funcţie original şi α un număr real pozitiv. Atunci, funcţia g definită prin

$$g(t) = f(\alpha t), \quad t \in \mathbb{R},$$

reprezintă, de asemenea, o funcţie original. Într-adevăr, condiţiile (i) şi (ii) din definiţia 1.1.1 sunt îndeplinite imediat, pe când condiţia (iii) rezultă din estimaţia

$$|g(t)| \leq Me^{\alpha st}, \quad t \geq 0, \quad s > s_0.$$

În plus, se observă că indicele de creştere a funcţiei original g este respectiv egal cu αs_0, unde s_0 desemnează indicele de creştere a lui f.

Înlocuirea variabilei t cu αt nu înseamnă altceva decât schimbarea unităţii de măsură pe axa variabilei. Din acest motiv, următoarea proprietate poate fi numită *schimbarea de scară* sau, altfel, *modificarea de scară*, este cunoscută şi ca *teorema asemănării.*

1.3.3. ***(Teorema asemănării).*** *Fie f o funcţie original cu indicele său de creştere s_0. Dacă $f(t) \risingdotseq F(p)$, atunci*

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \operatorname{Re} p > \alpha s_0. \tag{1.24}$$

Demonstraţie. Efectuând schimbarea de variabilă $t \to \alpha t$, obţinem

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(\alpha t) dt = \int_0^\infty e^{-\frac{p}{\alpha}t} f(t) \frac{1}{\alpha} dt =$$
$$= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\frac{p}{\alpha}t} f(t) dt = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

□

Fie $f \in \mathscr{L}$ o funcţie original cu indicele de creştere s_0. Dacă argumentul t a funcţiei f se înlocuieşte cu $t - \tau$, unde τ este o constantă pozitivă, atunci obţinem o nouă funcţie original g definită prin

$$g(t) = f(t - \tau), \quad t \in \mathbb{R},$$

care este nulă pentru $t < \tau$, şi ia aceleaşi valori ca şi funcţia original f însă cu întârzierea τ. Intârzierea τ este reflectată de transformarea Laplace prin înmulţirea imaginii cu e^{-pt}. Mai exact, are loc următoarea proprietate.

1.3.4. ***(Teorema întârzierii).*** *Dacă*

$$f(t) \risingdotseq F(p), \quad \operatorname{Re} p > s_0,$$

atunci pentru orice τ, $\tau > 0$, este valabilă următoarea relaţie

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p), \quad \operatorname{Re} p > s_0. \tag{1.25}$$

Demonstraţie. Ţinând seamă că $f(t-\tau) = 0$ pentru $t < \tau$, prin schimbarea de variabilă pentru $t - \tau = s$, avem

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t-\tau) dt = \int_t^\infty e^{-pt} f(t-\tau) dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-p(\tau+s)} f(s) ds = e^{-p\tau} \int_0^\infty e^{-ps} f(s)\ ds = e^{-p\tau} F(p).$$

□

1.3.5. ***Exemple.*** a) Funcţia Heaviside η (a se vedea exemplul 1.1.7) este definită prin

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

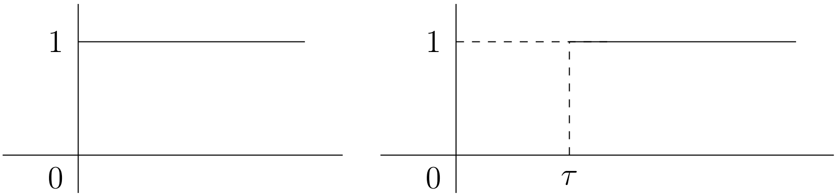
şi, după cum am constatat,

$$\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}, \qquad \operatorname{Re} p > 0$$

(a se vedea formula (1.9) din secţiunea 1.1).

Considerăm funcţia original ν obţinută din funcţia Heaviside prin translaţia argumentului cu τ, $\tau > 0$, adică

$$\nu(t) := \eta\ (t - \tau), \quad \tau > 0.$$



Funcția Heaviside η Funcția Heaviside translată ν

Fig. 1.4

Conform teoremei 1.3.4, imaginea funcţiei obţinute este

$$\nu(t) = \eta\ (t - \tau) \risingdotseq \frac{e^{-p\tau}}{p}, \qquad \mathrm{Re}\, p > 0. \tag{1.26}$$

b) Deseori, este necesar să se aproximeze funcţia original cu funcţii relativ mai simple cum ar fi funcţiile în scară (etajate). Vom găsi imaginea Laplace funcţiei în scară, al cărei grafic este prezentat in fig. 1.5.

Analitic, această funcţie se exprimă după cum urmează

$$f(t) = a \sum_{n=1}^{\infty} \eta\ (t - (n-1)\ \tau),$$

a fiind o constantă pozitivă dată.

Funcţia f satisface condiţiile (i)-(iii) din definiţia 1.1.1 şi, prin urmare, este o funcţie original, evident, cu indicele de creştere $s_0 = 0$.

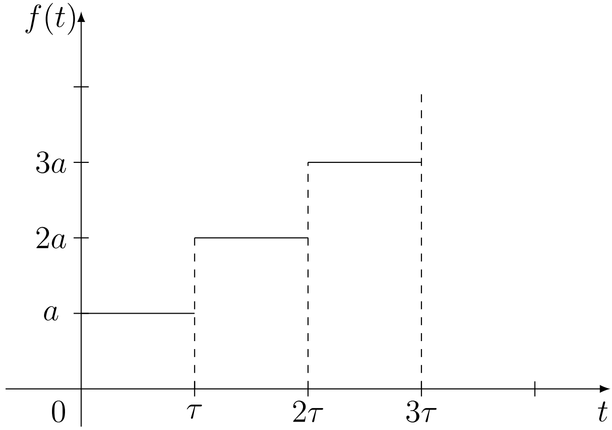


Fig. 1.5

Se observă că

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\ dt = \int_0^\infty e^{-pt}\ a \sum_{n=1}^\infty \eta\ (t-(n-1)\ \tau)\ dt =$$
$$= a \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-pt}\ \eta\ (t-(n-1)\ \tau)\ dt$$

pentru $\operatorname{Re} p > 0$ şi, atunci, conform teoremei 1.3.4, avem

$$f(t) \risingdotseq a \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{p}\ e^{-(n-1)\ p\,\tau} = \frac{a}{p} \sum_{n=1}^\infty e^{-(n-1)\ p\,\tau}.$$

În partea dreaptă avem suma unei progresii geometrice convergente, deoarece

$$|e^{-p\tau}| < 1$$

pentru $\operatorname{Re} p > 0$. Prin urmare,

$$f(t) \risingdotseq \frac{a}{p}\,\frac{1}{1-e^{-p\tau}}$$

şi, cum

$$\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{cth}\frac{p\tau}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{e^{\frac{p\tau}{2}}+e^{-\frac{p\tau}{2}}}{e^{\frac{p\tau}{2}}-e^{-\frac{p\tau}{2}}}\right) =$$

$$= -\frac{e^{\frac{p\tau}{2}}}{e^{\frac{p\tau}{2}}-e^{-\frac{p\tau}{2}}} = \frac{1}{1-e^{-p\tau}},$$

deducem

$$f(t) \risingdotseq \frac{a}{2p}\left(1+\operatorname{cth}\frac{p\tau}{2}\right). \tag{1.27}$$

Teorema de întârziere stabileşte schimbarea imaginii Laplace în raport cu operaţia de translaţie a argumentului funcţiei original. Următoarea proprietate se referă la operaţia de translaţie a argumentului imaginii (dualul teoremei de întârziere).

1.3.6. ***(Teorema deplasării).*** *Fie $f \in \mathscr{L}$ o funcţie original cu indicele de creştere s_0 şi fie $\alpha \in \mathbb{C}$ un număr complex arbitrar. Dacă*

$$f(t) \risingdotseq F(p), \quad \operatorname{Re} p > s_0,$$

atunci

$$e^{\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p-\alpha), \quad \operatorname{Re} p > s_0 + \operatorname{Re}\alpha. \tag{1.28}$$

Demonstraţie. În primul rând, observăm că $e^{\alpha t} f(t)$ este de asemenea original şi, cum

$$|e^{\alpha t}| = e^{(\operatorname{Re}\alpha)\,t},$$

indicele său de creştere este egal respectiv cu $s_0 + \operatorname{Re}\alpha$. Pentru $\operatorname{Re} p > s_0 + \operatorname{Re}\alpha$, deducem

$$e^{\alpha t} f(t) \risingdotseq \int_0^\infty e^{-pt} e^{\alpha t} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(p-\alpha)t} f(t)\, dt = F(p-\alpha),$$

adică (1.28). □

Teorema 1.3.6 permite, cunoscând imaginile funcţiilor original, să se determine imaginile aceleaşi funcţii multiplicate cu o funcţie exponenţială, după cum se arată în exemplele care urmează

1.3.7. ***Exemple.*** Cunoscând imaginile Laplace funcţiilor original

$$\sin\omega t; \quad \cos\omega t; \quad \operatorname{sh}\omega t; \quad \operatorname{ch}\omega t \quad \textit{etc.}$$

(a se vedea formulele (1.20), (1.21), (1.22) şi (1.23)), conform teoremei 1.3.6, deducem

$$e^{\alpha t}\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}, \tag{1.29}$$

$$e^{\alpha t}\cos\omega t \risingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}, \tag{1.30}$$

$$e^{\alpha t}\operatorname{sh}\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-\alpha)^2-\omega^2}, \tag{1.31}$$

$$e^{\alpha t}\operatorname{ch}\omega t \risingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\omega^2} \tag{1.32}$$

etc.

Operaţia de diferenţiere, aşa cum este înţeleasă în mod obişnuit, nu poate fi aplicată la orice funcţie original. O funcţie original poate să nu fie diferenţiabilă cum, de exemplu, o funcţie de tip Weierstrass continuă, dar nediferenţiabilă, pe toată semiaxa pozitivă, chiar dacă multiplicată cu o funcţie exponenţială, nu are derivată în niciun punct, deşi reprezintă o funcţie original. Pe clasa funcţiilor original diferenţiabile, astfel încât derivatele lor sunt de asemenea funcţii original, adică pentru care sunt îndeplinite condiţiile (i)-(iii) din definiţia 1.1.1, se poate aplica operaţia de diferenţiere, obţinându-se formule pentru imaginile Laplace extrem de convenabile în aplicaţii, în special, la rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale.

1.3.8. ***Teoremă (derivarea originalului).*** *Fie $f \in \mathscr{L}$ o funcţie original continuă pe semiaxa pozitivă, având indicele de creştere s_0, astfel încât derivata f' şi, în general, derivatele sale $f^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, n)$ până la ordinul n sunt funcţii original. Dacă*

$$f(t) \risingdotseq F(p), \quad \operatorname{Re} p > s_0,$$

atunci

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0), \tag{1.33}$$

şi, respectiv,

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0), \tag{1.34}$$

unde

$$f^{(k)}(0) = \lim_{t \to 0+} f^{(k)}(t) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

sunt limitele de dreapta în origine[1].

[1]Limitele de stânga sunt întotdeauna egale cu zero.

Demonstraţie. Într-adevăr, trecând la imagini şi integrând prin părţi, obţinem

$$\begin{aligned} f'(t) &\risingdotseq \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\, dt = \\ &= \Big(e^{-pt} f(t)\Big)\Big|_{t=0}^{\infty} + p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Datorită faptului că $\operatorname{Re} p > s_0$, avem

$$|e^{-pt} f(t)| = e^{-(\operatorname{Re} p)\, t}\ |f(t)| \leq M e^{-(\operatorname{Re} p - s_0)\, t},$$

şi atunci,

$$\lim_{t\to\infty} |e^{-pt} f(t)| = 0,$$

ceea ce implică că primul termen din membrul drept al relaţiei (1.35) să fie egal cu

$$\lim_{t\to\infty} (e^{-pt} f(t)) - \lim_{t\to 0+} (e^{-pt} f(t)) = -f(0+).$$

Astfel, din (1.35) deducem

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0+),$$

adică (1.33).

Aplicând formula (1.33) la derivata f' funcţiei original f, obţinem

$$\begin{aligned} f''(t) = (f'(t))' &\risingdotseq p\Big(pF(p) - f(0)\Big) - f'(0) = \\ &= p^2 F(p) - pf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

ş.a.m.d., conform principiului inducţiei matematice, formula (1.34) este adevărată pentru orice n natural. $\square$

1.3.9. ***Corolar.*** *Dacă în ipotezele teoremei 1.3.8*

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0,$$

atunci diferenţierea originalului se reduce la multiplicarea transformatei sale Laplace cu p^n*, adică*

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p). \tag{1.36}$$

1.3.10. ***Observaţie.*** Presupunerea ca funcţia original să fie continuă este esenţială. Pentru o funcţie original f, netedă pe porţiuni, având puncte de discontinuitate, formula (1.33) şi, respectiv, (1.34), nu este adevărată. Într-adevăr, fie f o funcţie original, pentru care f' este de asemenea o funcţie original, are un punct de discontinuitate pe semiaxa pozitivă. Atunci, aplicând acelaşi procedeu ca mai sus, obţinem

$$f'(t) \risingdotseq \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\, dt = \int_0^{t_0} e^{-pt} f'(t)\, dt + \int_{t_0}^\infty e^{-pt} f'(t)\, dt =$$

$$= e^{-pt} f(t)\Big|_{t=0}^{t_0} + p\int_0^{t_0} e^{-pt} f(t)\, dt + e^{-pt} f(t)\Big|_{t=t_0}^{\infty} + p\int_{t_0}^\infty e^{-pt} f(t)\, dt =$$

$$= -e^{-pt_0}\Big(f(t_0+0) - f(t_0-0)\Big) + pF(p) - f(0).$$

În mod similar se stabileşte o egalitate pentru cazul mai multor puncte de discontinuitate.

1.3.11. ***Exemplu.*** Cunoscând imaginea Laplace funcţiei original $\sin \omega t$ (a se vedea formula (1.20)), pe baza formulelor obţinute prin teorema 1.3.8 rezultă imediat formula (1.21) pentru imaginea funcţiei original $\cos \omega t$, şi viceversa.

Avem

$$\cos \omega t = \frac{1}{\omega}\ (\sin \omega t)' \risingdotseq \frac{1}{\omega}\ p \cdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2} = \frac{p}{p^2+\omega^2},$$

sau

$$\sin \omega t = -\frac{1}{\omega}\ (\cos \omega t)' \risingdotseq -\frac{1}{\omega}\left(p \cdot \frac{p}{p^2+\omega^2} - 1\right) =$$

$$= -\frac{1}{\omega}\ \cdot \frac{-\omega^2}{p^2+\omega^2} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Bineînţeles, aceasta se referă şi la alte exemple de funcţii.

Conform teoremei 1.1.5, transformata Laplace $F(p)$ a unei funcţii original f (cu indicele de creştere s_0) este olomorfă în semiplanul complex $\operatorname{Re} p > s_0$ şi, prin urmare, admite derivate de orice ordin în acest semiplan. Derivata $F^{(n)}(p)$ de ordinul n a transformatei Laplace $F(p)$ corespunde funcţiei original $(-1)^n\ t^n\ f(t)$ şi, conform formulei (1.6), avem relaţia

$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^n\ t^n\ f(t).$$

În acest mod, am stabilit următoarea afirmaţie (dual la teorema 1.3.8).

1.3.12. ***Teoremă (derivarea imaginii).*** *Fie $f \in \mathscr{L}$ o funcţie original cu indicele de creştere s_0. Dacă*

$$f(t) \risingdotseq F(p), \quad \operatorname{Re} p > s_0,$$

atunci pentru transformata Laplace $F(p)$, reprezentând o funcţie olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re} p > s_0$, au loc relaţiile

$$F^{(n)}(p) \fallingdotseq (-1)^n\ t^n\ f(t), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{1.37}$$

1.3.13. ***Exemple.*** a) Reieşind din formula

$$e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha},$$

(a se vedea exemplul 1.1.7) şi aplicând teorema 1.3.12, obţinem

$$t^n e^{\alpha t} \risingdotseq (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p-\alpha}\right) = \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}},$$

adică

$$t^n e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}. \tag{1.38}$$

b) Similar, conform formulei (1.9) pentru imaginea funcţiei Heaviside, avem

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}. \tag{1.39}$$

Proprietăţile care urmează stabilesc relaţiile dintre funcţiile original şi imaginile acestora în raport cu operaţia de integrare. Prin operaţia de integrare se înţelege operaţia

$$f(t) \longrightarrow \int_0^t f(\tau)\, d\tau$$

în urma căreia funcţiei original f corespunde funcţia g determinată prin

$$g(t) := \int_0^t f(\tau)\, d\tau.$$

Funcţia obţinută g satisface condiţiile (i)-(iii) din definiţia 1.1.1. Primele două (i) şi (ii) sunt evidente, pe când a treia (iii)

rezultă nemijlocit din următoarele considerente. Cum

$$|g(t)| = \left| \int_0^t f(\tau)\ d\tau \right| \leq \int_0^t |f(\tau)|\ d\tau$$

şi cum pentru originalul $f(t)$ există constante $M > 0$ şi $s \in \mathbb{R}$ (evident, s poate fi considerat un număr real pozitiv) astfel încât are loc estimaţia (1.2), obţinem

$$|g(t)| \leq M \int_0^t e^{s\tau}\ d\tau = \frac{M}{s}(e^{st} - 1) \leq \frac{M}{s}\ e^{st},$$

adică

$$|g(t)| \leq \frac{M}{s}\ e^{st}.$$

Astfel, g este de asemenea o funcţie original şi, în plus, cum uşor se observă, f şi g au acelaşi indice de creştere.

În cele ce urmează vom nota cu J operaţia de integrare considerând-o ca o transformare (liniară) definită pe spaţiul funcţiilor original $\mathscr{L}$. De asemenea, fie J^n să desemneze iteraţia de ordinul n a lui J, definită prin inducţie

$$J^n := J \circ J^{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots; \quad J^0 := I),$$

unde I desemnează transformarea identitate

$$I\, f = f, \quad f \in \mathscr{L}.$$

Avem,

$$(Jf)(t) = \int_0^t f(\tau)\ d\tau, \tag{1.40}$$

$$(J^2 f)(t) = \int_0^t \left(\int_0^{\tau_1} f(\tau_2)\ d\tau_2 \right) d\tau_1$$

ş.a.m.d., în general,

$$(J^n f)(t) = \int_0^t \left(\int_0^{\tau_1} \left(\int_0^{\tau_2} \dots \left(\int_0^{\tau_{n-1}} f(\tau_n)\ d\tau_n \right) \dots \right) d\tau_2 \right) d\tau_1,$$

ceea ce reprezintă nu altceva decât integrarea repetată de n ori a funcţiei f.

Integrând prin părţi, se deduce

$$(J^n f)(t) = \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\ d\tau, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{1.41}$$

1.3.14. ***Teoremă (integrarea originalului).*** *Fie $f \in \mathscr{L}$ o funcție original cu indicele de creștere s_0. Dacă*

$$f(t) \risingdotseq F(p), \quad \operatorname{Re} p > s_0,$$

atunci

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}, \quad \operatorname{Re} p > s_0, \tag{1.42}$$

și, în general,

$$\int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p^n}, \quad \operatorname{Re} p > s_0, \tag{1.43}$$

pentru orice n număr natural (deci, integrarea repetată de ordinul n a originalului produce împărțirea imaginii sale cu p^n).

Demonstrație Operația de diferențiere $D = \dfrac{d}{dt}$ este o transformare inversă (la stânga) a operației de integrare, adică

$$DJ = I,$$

de unde

$$D^n J^n = I \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{1.44}$$

Notăm

$$g = J^n f, \tag{1.45}$$

atunci, cum rezultă din cele menționate mai sus, g este de asemenea o funcție original și, în plus,

$$g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(n-1)}(0) = 0.$$

Din (1.44) și (1.45) rezultă

$$f(t) = g^{(n)}(t).$$

Formula (1.36) (a se vedea corolarul 1.27) poate fi aplicată, obținem

$$F(p) = p^n G(p),$$

de unde

$$G(p) = \frac{F(p)}{p^n},$$

formulă echivalentă cu (1.43). □

1.3.15. ***Teoremă (integrarea imaginii).*** *Dacă*

$$f(t) \risingdotseq F(p), \quad \operatorname{Re} p > s_0,$$

atunci

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty F(q)dq, \quad \operatorname{Re} p > s_o. \tag{1.46}$$

Demonstrație. Avem

$$\int_p^\infty F(q)dq = \int_p^\infty \left(\int_0^\infty e^{-qt} f(t)dt \right) dq. \tag{1.47}$$

Cum intervalul de integrare (p, ∞) se află în semiplanul de convergență $\operatorname{Re} p > s_0$, conform evaluării

$$\left| \int_0^\infty e^{-qt} f(t)dt \right| \leq M \int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re} q - s_0)t} dt,$$

rezultă convergența uniformă a integralei interioare din membrul drept al egalității (1.47) în raport cu parametrul q. Prin urmare, putem schimba ordinea integrării și obținem

$$\int_p^\infty F(q)dq = \int_0^\infty \left(\int_p^\infty e^{-qt} f(t)dq \right) dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t) \left(\int_0^\infty e^{-qt} dq \right) dt = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt,$$

adică

$$\int_p^\infty F(q)dq = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt \risingdotseq \frac{f(t)}{t}.$$

$\square$

Teorema 1.3.15 poate fi considerată duala primei afirmații din teorema 1.3.14 referitoare la formula (1.42). Afirmația respectivă referitoare la cazul general în contextul formulei (1.43) lăsăm pe seama cititorului.

1.3.16. ***Exemple.*** a) Reieșind din relația

$$\sin^2 \omega t = \omega \int_0^t \sin 2\omega\tau d\tau,$$

conform teoremei 1.3.14 și formulei (1.20), avem

$$\sin^2 \omega t = \omega \int_0^t \sin 2\omega\tau d\tau \risingdotseq \omega \frac{2\omega}{p\,(p^2 + (2\omega)^2)} = \frac{2\omega^2}{p\,(p^2 + 4\omega^2)},$$

adică

$$\sin^2 \omega t = \frac{2\omega^2}{p\,(p^2 + 4\omega^2)}.$$

Bineînțeles, imaginea originalului $\sin^2 \omega t$ poate fi de asemenea calculată direct după cum urmează

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t) \risingdotseq \frac{1}{2}\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\frac{p}{p^2 + 4\omega^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4\omega^2}{p(p^2 + 4\omega^2)} = \frac{2\omega^2}{p(p^2 + 4\omega^2)}.$$

b) Considerăm funcția original

$$f(t) = e^{bt} - e^{at},$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$. Avem

$$e^{bt} - e^{at} \risingdotseq \frac{1}{p - b} - \frac{1}{p - a} = \frac{b - a}{(p - a)(p - b)}.$$

Conform teoremei 1.3.15 (a se vedea formula (1.46)), deducem

$$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t} \risingdotseq \int_p^\infty \frac{b-a}{(q-a)(q-b)}dq = \ln\frac{p-a}{p-b}.$$

Deci,

$$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t} \risingdotseq \ln\frac{p-a}{p-b}. \tag{1.48}$$

c) Sinusul integral este o funcție specială definită prin integrala

$$\operatorname{Si} t := \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau. \tag{1.49}$$

Funcția sinus integral a fost introdusă de matematicianul italian Lorenzo Mascheroni în 1790.

Aplicăm teorema 1.3.15 și formula (1.20), avem

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int_p^\infty \frac{dq}{1+q^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

Cum

$$\operatorname{arctg} p + \operatorname{arcctg} p = \frac{\pi}{2},$$

obținem

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \operatorname{arcctg} p. \tag{1.50}$$

Acum, prin aplicarea teoremei 1.3.14 (a se vedea formula (1.42)), găsim imaginea funcției original $\mathrm{Si}\, t$, și anume

$$\mathrm{Si}\, t = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau \risingdotseq \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}.$$

Astfel,

$$\mathrm{Si}\, t \risingdotseq \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}. \tag{1.51}$$

Fie $f \in \mathscr{L}$ o funcţie original periodică cu perioada principală T, ceea ce înseamnă că

$$f(t+T) = f(t), \quad t > 0$$

şi T este cel mai mic număr pozitiv pentru care este valabilă această egalitate. Evident, că domeniul de convergenţă a unei funcţii original periodice este semiplanul complex $\mathrm{Re}\, p > 0$ (indicele de creştere este egal cu $s_0 = 0$).

1.3.17. ***Teoremă (imaginea originalului periodic).*** *Dacă $f \in \mathscr{L}$ este o funcție original periodică cu perioada principală T, atunci*

$$f(t) \risingdotseq \frac{F_T(p)}{1 - e^{-pT}}, \tag{1.52}$$

unde

$$F_T(p) = \int_0^T e^{-pt} f(t)\, dt. \tag{1.53}$$

Demonstrație. Avem

$$f(t) \risingdotseq F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\ dt =$$

$$= \int\limits_0^T e^{-pt} f(t)\ dt + \int\limits_T^\infty e^{-pt} f(t)\ dt$$

şi, cu schimbarea de variabilă

$$s = t - T$$

în a doua integrală, obţinem

$$F(p) = F_T(p) + \int\limits_0^\infty e^{-p\,(s+T)} f(s+T)\ ds =$$

$$= F_T(p) + e^{-pT} \int\limits_0^\infty e^{-ps} f(s)\ ds = F_T(p) + e^{-pt} F(p),$$

adică

$$F(p) = F_T(p) + e^{-pt} F(p),$$

din care deducem formula dorită (1.52). □

1.3.18. ***Exemple.*** a) Considerăm funcţia original periodică

$$f(t) = |\sin \omega t| \quad (\omega \neq 0).$$

Perioada principală este $T = \dfrac{\pi}{\omega}$.

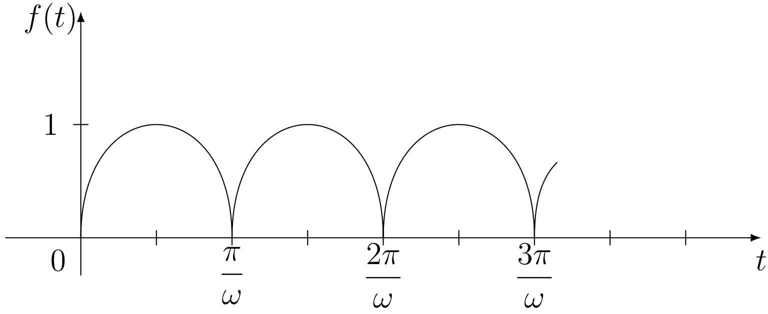


Fig. 1.6

Avem

$$F_T(p) = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-pt}\, |\sin\omega t|\, dt.$$

Ţinem seamă că $\sin\omega t > 0$ pentru $0 < t < \dfrac{\pi}{\omega}$ şi, atunci, cu utilizarea formulelor lui Euler, obţinem

$$F_T(p) = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-pt} \sin\omega t\, dt = \frac{1}{2i}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \left(e^{(-p+i\omega)t} - e^{-(p+i\omega)t}\right)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{-p+i\omega}\left(e^{(-p+i\omega)\frac{\pi}{\omega}} - 1\right) + \frac{1}{p+i\omega}\left(e^{-(p+i\omega)\frac{\pi}{\omega}} - 1\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{-p+i\omega}e^{(-p+i\omega)\frac{\pi}{\omega}} + \frac{1}{p+i\omega}e^{-(p+i\omega)\frac{\pi}{\omega}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{-p+i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{p\pi}{\omega}} + 1}{2i} \left(\frac{1}{-p + i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right) = \omega \, \frac{1 + e^{-\frac{p\pi}{\omega}}}{p^2 + \omega^2},$$

adică

$$F_T(p) = \omega \, \frac{1 + e^{-\frac{p\pi}{\omega}}}{p^2 + \omega^2}.$$

Înlocuind în formula (1.52), obţinem

$$|\sin \omega t| \risingdotseq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{p\pi}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{p\pi}{\omega}}} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \, \operatorname{cth} \frac{p\pi}{2\omega}.$$

Astfel,

$$|\sin \omega t| \risingdotseq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \, \operatorname{cth} \frac{p\pi}{2\omega}. \tag{1.54}$$

b) Să considerăm impusul rectangular periodic f al cărui grafic este reprezentat în fig. 1.7.

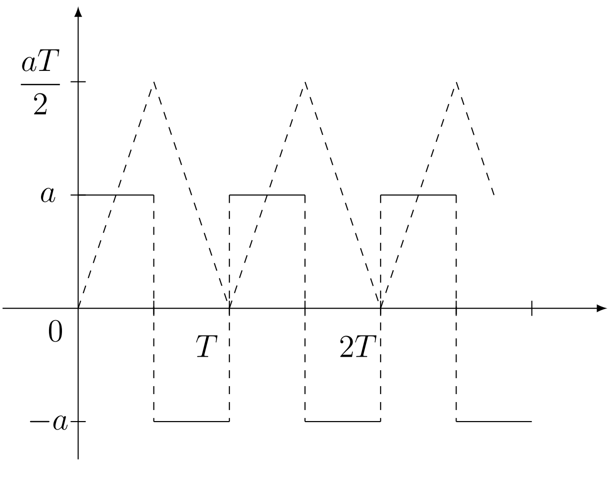


Fig. 1.7

Perioada principală a funcţiei original f este T. Calculăm

$$F_T(p) = \int_0^T e^{-pt} f(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-pt}\, a\, dt + \int_{\frac{T}{2}}^T e^{-pt}\, (-a)\, dt =$$

$$= -\frac{a}{p} \left(e^{\frac{-pT}{2}} - 1 \right) + \frac{a}{p} \left(e^{-pT} - e^{\frac{-pT}{2}} \right) =$$

$$= \frac{a}{p} \left(1 - 2\, e^{\frac{-pT}{2}} + e^{-pT} \right) = \frac{a}{p} \left(1 - e^{\frac{-pT}{2}} \right)^2 .$$

Deci,

$$F_T(p) = \frac{a}{p} \left(1 - e^{\frac{-pT}{2}} \right)^2 .$$

şi conform formulei (1.52) obţinem

$$f(t) \risingdotseq \frac{\frac{a}{p} \left(1 - e^{\frac{-pT}{2}} \right)^2}{1 - e^{-pT}} = \frac{a}{p} \frac{\left(1 - e^{\frac{-pT}{2}} \right)^2}{\left(1 - e^{\frac{-pT}{2}} \right) \left(1 + e^{\frac{-pT}{2}} \right)} =$$

$$= \frac{a}{p} \frac{\left(1 - e^{\frac{-pT}{2}} \right)}{\left(1 + e^{\frac{-pT}{2}} \right)} = \frac{a}{p}\ \mathrm{th}\, \frac{pT}{4},$$

adică

$$f(t) \risingdotseq F_T(p) = \frac{a}{p}\ \mathrm{th}\, \frac{pT}{4}. \tag{1.55}$$

c) Impulsul triunghiular periodic, al cărui grafic este reprezentat punctat în fig. 1.7, prezintă nu altceva decât funcţia original g definită prin

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau.$$

Avem

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau = \int_0^t a\, d\tau = at$$

pentru orice $t \in [0, \frac{T}{2})$, şi

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau = \int_0^{\frac{T}{2}} a\, d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^t (-a)\, d\tau = \frac{aT}{2} - at + \frac{aT}{2} = aT + aT$$

pentru orice $t \in [\frac{T}{2},\ T)$. Astfel

$$g(t) = \begin{cases} at, & t \in [0, \frac{T}{2}), \\ -at + aT, & t \in [\frac{T}{2},\ T). \end{cases}$$

Conform formulei (1.42) (a se vedea teorema 1.3.14), imaginea Laplace al acestui impuls este următoarea (folosim formula (1.55))

$$G(p) = \frac{F(p)}{p} = \frac{a}{p^2}\ \mathrm{th}\, \frac{pT}{4},$$

adică

$$G(p) = \frac{a}{p^2}\ \mathrm{th}\, \frac{pT}{4}. \tag{1.56}$$

1.4. Operaţia de convoluţie. Teoreme de multiplicare

Pe spaţiul funcţiilor original $\mathscr{L}$, alături de operaţiile algebrice definite în mod natural, se consideră o operaţie specială numită **operaţie de convoluţie**, de asemenea **produs de convoluţie**, sau simplu, **convoluţie**.

1.4.1. ***Definiţia.*** *Operaţia de convoluţie a două funcţii original f şi g se numeşte funcţia $f * g$, notând operatorul cu simbolul $*$, definită prin*

$$(f * g)(t) = \int\limits_0^t f(t-s)\, g(s)\; ds, \tag{1.57}$$

1.4.2. ***Teoremă.*** *Dacă $f, g \in \mathscr{L}$ sunt funcții original având indicii lor de creștere respectiv $s_0(f)$ şi $s_0(g)$, atunci produsul de convoluţie $f * g$ reprezintă de asemenea o funcție original cu indicele de creștere $s_0 = \max\{s_0(f),\, s_0(g)\}$.*

Demonstrație. Într-adevăr, funcția definită de integrala (1.57) îndeplineşte în mod evident condiţiile (i) şi (ii) din definiţia 1.1.1. Condiţia (iii) este de asemenea îndeplinită, deoarece pentru $s > s_0$, avem

$$|(f * g)(t)| \leq \int\limits_0^t |f(t-\tau)\, g(\tau)|\; d\tau \leq$$

$$\leq M \int\limits_0^t e^{s(t-\tau)}\, e^{s\tau}\; d\tau = M \int\limits_0^t e^{st}\; d\tau = Mte^{st},$$

de unde rezultă imediat evaluarea dorită

$$|(f * g)(t)| \leq Me^{(s+\epsilon)t},$$

posibil cu o altă constantă pozitivă M, iar ϵ fiind un număr pozitiv arbitrar mic. $\square$

1.4.3. ***Teoremă (proprietăţi ale convoluţiei).*** *Operaţia de convoluţie* $*$ *definită prin formula* (1.57) *este comutativă, asociativă, distributivă, adică*

(i) $f * g = g * f$,
(ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$,
(iii) $f * (g + h) = f * g + f * h$,
şi, de asemenea,
(iv) $(cf) * g = f * (cg) = c(f * g)$,
pentru orice $f, g, h \in \mathscr{L}$ *şi* $c \in \mathbb{C}$.

Astfel, $\mathscr{L}$ *formează un inel (prin urmare, o algebră peste corpul numerelor complexe* $\mathbb{C}$*) în raport cu operaţia de multiplicare definită ca convoluţie prin formula* (1.57).

Demonstrație. (i) Efectuând schimbarea de variabila $s \to t - s$, obţinem

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)\, g(s)\ ds = \int_0^t f(s)\, g(t-s)\ ds =$$

$$= \int_0^t g(t-s)\, f(s)\ ds = (g * f)(t)$$

pentru orice $t > 0$.

(ii) Ţinem seamă că funcţiile original sunt considerate egale cu zero pe semiaxa negativă şi, efectuând schimbarile de variabilă necesare, obţinem

$$\int_0^t (f*g)(t-s)\, h(s)\ ds = \int_0^t \left(\int_0^{t-s} f(t-s-u)\, g(u)\ du \right) h(s)\ ds =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-s-u)\, g(u)\ du \right) h(s)\ ds =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\, g(u-s)\ du \right) h(s)\ ds =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-u) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u-s)\, h(s)\ ds \right) du =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\ (g * h)\,(u)\ du$$

pentru orice $t > 0$. Întrucât funcţiile care sunt integrate sunt sumabile, schimbarea ordinii de integrare este justificată.

Proprietăţile (*iii*) şi (*iv*) se demonstrează în mod similar.

□

Un loc special în metoda operaţională îl ocupă proprietăţile care exprimă legătura dintre originale şi imagini în raport cu produsul funcţiilor. În acest context, afirmaţia care urmează, datorată matematicianului francez Émile Borel (1871-1956), arată că produsul de convoluţie trece, respectiv, în produsul imaginilor sale Laplace.

1.4.4. ***Teoremă (transformata produsului de convoluţie).*** *Fie* $f, g \in \mathscr{L}$ *funcții original având, respectiv, indicii de creștere* $s_0(f)$, $s_0(g)$. *Dacă*

$$f(t) \risingdotseq F(p), \quad g(t) \risingdotseq G(p),$$

atunci

$$(f * g)(t) \risingdotseq F(p)G(p), \quad \operatorname{Re} p > s_0, \tag{1.58}$$

unde $s_0 := \max\{s_0(f),\, s_0(g)\}$.

Demonstrație. Luând în consideraţie teorema 1.4.2 avem numai de demonstrat formula (1.58).

Cum produsul de convoluţie este comutativ (a se vedea teorema 1.4.3 (i)), putem scrie

$$(f * g)(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{-pt}(f * g)(t)\; dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-pt}\,(g * f)(t)\; dt = \int\limits_0^\infty e^{-pt}\left(\int\limits_0^t g(t-s)\,f(s)\; ds\right)\, dt.$$

Deoarece $\mathrm{Re}\, p > s_0$, iar f şi g sunt funcţii original, ordinea de integrare poate fi schimbată, astfel se poate continua (şi, in plus, înlocuind $t - s$ cu t)

$$(f * g)(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_s^\infty e^{-pt}\, g(t-s)\; dt\right) f(s)\, ds =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty e^{-p(t+s)}\, g(t)\; dt\right) f(s)\, ds =$$

$$= \left(\int\limits_0^\infty e^{-ps}\, f(s)\, ds\right)\left(\int\limits_0^\infty e^{-pt}\, g(t)\; dt\right) = F(p)G(p).$$

□

În aplicaţii este util corolarul teoremei 1.4.4, care se referă la cazul în care este necesară găsirea funcţiei original produsului de forma $pF(p)G(p)$.

1.4.5. ***Corolar (Duhamel).*** *În aceleaşi ipoteze ca în teorema 1.4.4 sunt valabile relaţiile*

$$pF(p)G(p) \risingdotseq f(0)g(t) + \int_0^t f'(t-s)\,g(s)\;ds =$$

$$= g(0)f(t) + \int_0^t g'(t-s)\,f(s)\;ds \tag{1.59}$$

cunoscute sub numele de ***formulele lui Duhamel***[2]*.*

Demonstrație. Folosind regula de diferenţiere a funcţiilor original (a se vedea teorema 1.3.8, formula (1.33)), obţinem

$$pF(p)G(p) = f(0)G(p) + (pF(p) - f(0))\,G(p) \risingdotseq$$

$$\risingdotseq f(0)g(t) + \int_0^t g(t-s)\,f'(s)\;ds.$$

Pe baza proprietăţii de comutativitate a convoluţiei, integrala obţinută poate fi, de asemenea, rescrisă sub forma

$$pF(p)G(p) \risingdotseq f(0)g(t) + \int_0^t f'(t-s)\,g(s)\;ds,$$

iar inversarea rolurilor funcţiilor f şi g conduce la formulele (1.59). $\square$

Să prezentăm şi teorema duală a teoremei 1.4.4.

1.4.6. ***Teoremă (imaginea produsului).*** *Fie $f, g \in \mathscr{L}$ funcții original având, respectiv, indicii de creștere $s_0(f)$ şi $s_0(g)$. Atunci,*

[2]Jean-Marie Duhamel (1797-1872) - matematician francez.

(i) produsul lor obişnuit fg, de asemenea, reprezintă o funcţie original cu indicele de creştere

$$s_0 = s_0(f) + s_0(g),$$

şi în plus,

(ii) dacă

$$f(t) \risingdotseq F(p), \quad g(t) \risingdotseq G(p),$$

atunci

$$f(t)g(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)G(p-q)\, dq, \tag{1.60}$$

unde $a > s_0(f)$ şi $\operatorname{Re} p > a + s_0(g)$.

Demonstrație. Funcția fg satisface, în mod evident, condiţiile (i)-(iii) din definiţia 1.1.1. Imaginea Laplace a acestei funcţii este

$$f(t)g(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)g(t)\, dt.$$

Fie $a > s_0(f)$ şi înlocuim $f(t)$ conform formulei de inversare Mellin-Fourier (1.17) (a se vedea teorema 1.2.1), obţinem

$$f(t)g(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{qt} F(q)\, dq \right) e^{-pt} g(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(\int\limits_0^\infty e^{-(p-q)t}\, g(t)\, dt \right) F(q)\, dq$$

(schimbarea ordinii integrării poate fi justificată cu uşurinţă).

Pentru $\operatorname{Re} p > a + s(g)$, vom avea

$$\operatorname{Re}(p - q) > s(g),$$

deoarece $\operatorname{Re} q = a$. În aceste condiţii, integrala interioară poate fi înlocuită cu $G(p - q)$, adică

$$G(p - q) = \int\limits_0^\infty e^{-(p-q)t}\, g(t)\, dt, \quad \operatorname{Re} p > a + s(g).$$

Rămâne de observat că a poate fi ales în mod arbitrar apropiat de valoarea lui $s_0(f)$. Teorema este demonstrată. $\square$

1.5. Teoreme de dezvoltare

În această secţiune vom lua în considerare câteva afirmaţii legate de metodele de determinare a originalelor atunci când imaginile respective sunt cunoscute.

1.5.1. ***Teoremă.*** *Dacă funcţia $F(p)$ este olomorfă într-o vecinătate $|p| \geq R$ a punctului de la infinit $p = \infty$ şi dezvoltarea sa în serie Laurent (în această vecinătate) este*

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}, \tag{1.61}$$

atunci seria Taylor-Maclaurin

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!}\, t^{n-1} \tag{1.62}$$

reprezintă o funcţie original având imaginea Laplace $F(p)$.

Demonstrație. Înlocuim $p = \dfrac{1}{q}$ şi atunci, conform dezvoltării (1.61), rezultă că funcţia

$$F\left(\frac{1}{q}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$$

este olomorfă în vecinătatea $|q| \leq \dfrac{1}{R}$. Conform inegalităţilor Cauchy, avem

$$|a_n| \leq MR^n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

cu o constantă pozitivă M. Atunci, pentru orice $t > 0$, obţinem

$$|f(t)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!}\, t^{n-1}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \leq$$

$$\leq MR \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Rt)^{n-1}}{(n-1)!} = MR\, e^{Rt}.$$

Astfel,

$$|f(t)| \leq MR\, e^{Rt},$$

şi conchidem că f este o funcţie original având indicele de creștere nu mai mare decât R. Evident (a se vedea formulele (1.39)),

$$f(t) \risingdotseq F(p).$$

$\square$

1.5.2. ***Exemplu.*** Considerăm funcţia

$$F(p) = \frac{1}{p^{m+1}}\, e^{-\frac{1}{p}}\,,$$

unde $m = 0, 1, 2, \ldots$. Cum

$$e^{-\frac{1}{p}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\, p^n},$$

avem descompunerea

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \, \frac{1}{p^{n+m+1}} \, .$$

Se poate aplica Teorema 1.5.1 şi obţinem

$$\frac{1}{p^{m+1}} \, e^{-\frac{1}{p}} \risingdotseq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \, \frac{t^{n+m}}{(n+m)!} \, . \tag{1.63}$$

Astfel,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \, \frac{t^{n+m}}{(n+m)!}$$

reprezintă funcţia original f, a cărei imagine Laplace este tocmai $F(p)$.

Reţinem că funcţia J_n definită cu ajutorul seriei

$$J_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+m)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+m} \tag{1.64}$$

este nu altceva decât funcţia Bessel de speţa întâi şi de indice m. Prin urmare, ţinând seamă de (1.63) şi (1.64), obţinem

$$t^{\frac{m}{2}} J_m(2\sqrt{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \, \frac{t^{n+m}}{(n+m)!} \risingdotseq \frac{1}{p^{m+1}} \, e^{-\frac{1}{p}} \, ,$$

adică

$$t^{\frac{m}{2}} J_m(2\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p^{m+1}} \, e^{-\frac{1}{p}} \, . \tag{1.65}$$

În particular, pentru $m = 0$, avem

$$J_0(2\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p}\, e^{-\frac{1}{p}}\,. \tag{1.66}$$

Determinarea originalului folosind, în mod direct, formula de inversare Mellin-Fourier (1.17), mai ales în aplicaţii concrete, nu este întotdeauna convenabilă. Cu toate acestea, în anumite situaţii şi condiţii destul de generale, din formula de inversare Mellin-Fourier rezultă o serie de concluzii utile în calcule, precum şi aplicaţii.

1.5.3. ***Teoremă.*** *Fie $F(p)$ reprezintă o funcţie având următoarele proprietăţi:*

(i) este olomorfă într-un semiplan $\operatorname{Re} p > s_0$ cu excepţia doar unui număr finit de puncte singulare;

(ii) $F(p) \to 0$ pentru $|p| \to \infty$ în orice semiplan $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$ uniform în respect cu $\arg p$;

(iii) pentru orice $a > s_0$ integrala

$$\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, dp$$

este absolut convergentă.

Atunci $F(p)$ este imaginea Laplace originalului

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} res_{p_k}\left(F(p)\, e^{pt}\right)\,, \tag{1.67}$$

unde suma este preluată peste toate punctele singulare p_k $(k = 1, \ldots, m)$ ale funcţiei F.

Demonstrație. Fie a o constantă reală pozitivă astfel încât punctele singulare p_k $(k = 1, \ldots, m)$ funcţiei F să se afle (strict) la stânga de linia dreaptă $\operatorname{Re} p = a$. Notăm cu Γ_R curba închisă formată de segmentul de dreaptă cu extremităţile $a - iR$

şi $a+iR$, R fiind sufficient de mare, şi semicircumferinţa C_R cu centrul în a şi de rază R, $R>0$. R este luat atât de mare încât toate punctele singulare p_k funcţiei F să fie în interiorul curbei Γ_R (a se vedea fig. 1.8).

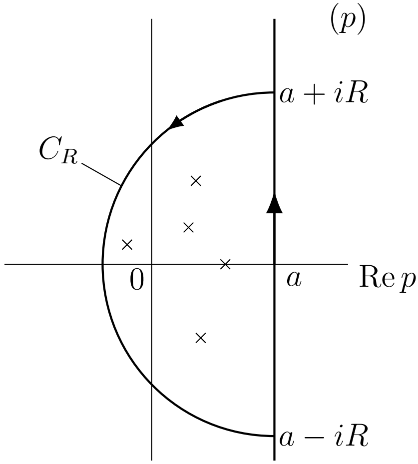


Fig. 1.8

Avem

$$\int_{\Gamma_R} e^{pt}F(p)\ dp = \int_{a-iR}^{a+iR} e^{pt}F(p)\ dp + \int_{C_R} e^{pt}F(p)\ dp \tag{1.68}$$

Conform teoremei reziduurilor

$$\int_{\Gamma_R} e^{pt}F(p)\ dp = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} res_{p_k}\left(e^{pt}F(p)\right)\ . \tag{1.69}$$

Pe de altă parte, în ipotezele (i)-(iii) din teoremă, rezultă că pentru $t > 0$ are loc

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} e^{pt} F(p)\ dp \to 0, \tag{1.70}$$

pe când

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{a-iR}^{a+iR} e^{pt} F(p)\ dp = \int\limits_{a-iR}^{a+iR} e^{pt} F(p)\ dp. \tag{1.71}$$

În virtutea formulei de inversare Mellin-Fourier, avem

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)\ dp = f(t) \tag{1.72}$$

în punctele de continuitate ale originalului $f(t)$.

Trecând la limită în relaţia (1.68) când $R \to \infty$ şi ţinând seamă de (1.70), (1.71) şi (1.72), obţinem (1.67). □

1.5.4. ***Observaţie.*** Nu orice funcţie olomorfă pe un semiplan este transformata Laplace a unei funcţii original. Menţionăm că o funcţie olomorfă (pe un semiplan) care îndeplineşte condiţiile (ii) şi (iii) din teorema 1.5.3 este transformata Laplace a unui original. Reţinem că originalul este determinat în mod univoc de transformata corespunzătoare cu acurateţea până în punctele de discontinuitate. După cum se a convenit în secţiunea 1.1, două funcţii original care diferă doar prin punctele lor de discontinuitate sunt indentificate.

Următoarea afirmaţie rezultă imediat din teorema 1.5.3 ca un caz particular al funcţiilor original având imaginile lor Laplace funcţii raţionale.

1.5.5. ***Teoremă.*** *Dacă F este o funcţie raţională proprie, ce înseamnă*

$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)}\,, \tag{1.73}$$

în care M şi N sunt polinoame în p, iar gradul lui M este mai mic decât cel al lui N, atunci $F(p)$ este imaginea Laplace funcţiei original

$$f(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(m_k-1)!} \lim_{p\to p_k} \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}}((p-p_k)^{m_k}F(p)\,e^{pt}), \tag{1.74}$$

unde p_k $(k = 1, 2, \ldots, l)$ sunt polii funcţiei F, m_k $(k = 1, 2, \ldots, l)$ fiind ordinele lor corespunzătoare.

Demonstrație. Funcţia raţională F definită prin (1.73) îndeplineşte ipotezele teoremei 1.5.3 şi, deci, pentru F, formula (1.67) este valabilă. Folosind formula de calcul a reziduurilor în poli multipli, din (1.67) deducem (1.74). □

1.5.6. ***Observaţie.*** Dacă funcţia raţională F definită prin (1.73) reprezintă o fracţie proprie ireductibilă, atunci polii funcţiei F sunt nu altceva decât zerourile numitorului $N(p)$. În cazul în care o rădăcină, să zicem p_k, este simplă, atunci termenul respectiv în (1.74) este

$$res_{p_k}(F(p)e^{pt}) = \lim_{p\to p_k}((p-p_k)F(p)e^{pt}) = \lim_{p\to p_k}\left((p-p_k)\frac{M(p)}{N(p)}e^{pt}\right)$$

şi, cum $N(p_k) = 0$ pe când $M(p_k) \neq 0$, rezultă

$$\lim_{p\to p_k}\frac{N(p)}{p-p_k} = \lim_{p\to p_k}\frac{N(p)-N(p_k)}{p-p_k} = N'(p_k),$$

şi, astfel,

$$res_{p_k}(F(p)e^{pt}) = \frac{M(p_k)}{N'(p_k)}e^{p_k t}.$$

În cazul în care toate rădăcinile numitorului sunt simple, avem următoarea afirmaţie.

1.5.7. ***Teoremă.*** *Dacă $F(p)$, dată prin* (1.73), *este o fracţie raţională proprie şi ireductibilă în care rădăcinile numitorului $N(p)$ sunt simple (adică $m_k = 1$), atunci funcţia original f corespunzătoare transformatei Laplace $F(p)$ se determină conform formulei*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{M(p_k)}{N'(p_k)}\, e^{p_k t}. \tag{1.75}$$

Teorema 1.5.6 a fost dedusă ca o consecinţă a afirmaţiilor generale precedente (reieşind din teorema 1.5.3). Cu toate acestea, vom da o dovadă directă a acesteia, folosind argumente simple, dar, cu merit de menţionat, utile în practica calculelor.

Demonstrația alternativă a teoremei 1.5.7. În ipotezele teoremei fracţia raţională $F(p)$ admite o descompunere în fracţii simple de forma

$$F(p) = \sum_{k=1}^{l} \frac{a_k}{p - p_k}\,, \tag{1.76}$$

unde coeficienţii $a_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \ldots, l)$ rămân de calculat. În acest scop, fixăm un pol arbitrar p_k şi integrăm funcţia F (în direcţia pozitivă) pe o circumferinţă C_k cu centrul în polul ales p_k şi de rază atât de mică încât în interiorul cercului obţinut să nu fie un alt pol p_j $(j \neq k)$. Avem

$$\int\limits_{C_k} F(p)\; dp = \sum_{j=1}^{l} a_j \int\limits_{C_k} \frac{dp}{p - p_j}\,.$$

Cum

$$\int_{C_k} \frac{dp}{p - p_k} = 2\pi i\,,$$

iar

$$\int_{C_k} \frac{dp}{p - p_j} = 0$$

pentru orice $j \neq k$, obţinem

$$\int_{C_k} F(p)\; dp = 2\pi i\, a_k\,. \tag{1.77}$$

Pe de altă parte, conform teoremei reziduurilor, avem

$$\int_{C_k} F(p)\; dp = 2\pi i\; res_{p_k} F(p)\,. \tag{1.78}$$

Din formulele obţinute (1.77) şi (1.78), deducem

$$a_k = res_{p_k} F(p)$$

şi, din faptul că p_k este un pol simplu, rezultă

$$a_k = res_{p_k} F(p) = \frac{M(p_k)}{N'(p_k)}\,. \tag{1.79}$$

Inlocuind valorile obţinute pentru a_k (1.79) în (1.76) şi luând în considerare că

$$\frac{1}{p - p_k} \fallingdotseq e^{p_k t}$$

(a se vedea exemplul 1.1.7), obţinem în final formula dorită (1.75). $\square$

În aplicaţii (în principal electrotehnică), apar ca importante diverse variaţii a formulei (1.75) cum, de exemplu, referitor la cazul când, în ipotezele teoremei 1.5.7, una din rădăcini ai numitorului $N(p)$ este nulă, adică

$$N(p) = pR(p),$$

$R(p)$ fiind un polinom. Cum

$$N'(p) = R(p) + pR'(p),$$

avem

$$N'(0) = R(0),$$

iar pentru ceilalţi poli p_k diferiţi de zero

$$N'(p_k) = R(p_k) + p_k R'(p_k) = p_k R'(p_k).$$

Aşadar, în acest caz, formula (1.75) devine

$$f(t) = \frac{M(0)}{R(0)} + \sum_{p_k \neq 0} \frac{M(p_k)}{p_k R'(p_k)}\, e^{p_k t}\,. \tag{1.80}$$

cunoscută în literatura de specialitate sub denumirea de **formula lui Heaviside**.

1.5.8. ***Exemple.*** a) Să determinăm funcţia original f, a cărei transformată Laplace este funcţia raţională

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 - \alpha^2)(p^2 + \beta^2)}, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Polinomul

$$N(p) = (p^2 - \alpha^2)(p^2 + \beta^2)$$

are rădăcini simple

$$p_1 = -\alpha, \quad p_2 = \alpha, \quad p_3 = -i\beta, \quad p_4 = i\beta\,.$$

Calculăm

$$res_{p_1}(F(p)e^{pt}) = \lim_{p\to p_1}(p-p_1)F(p)e^{pt} =$$

$$= \lim_{p\to -\alpha} \frac{p}{(p-\alpha)(p^2+\beta^2)}e^{pt} = \frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}e^{-\alpha t},$$

$$res_{p_2}(F(p)e^{pt}) = \lim_{p\to p_2}(p-p_2)F(p)e^{pt} =$$

$$= \lim_{p\to \alpha} \frac{p}{(p+\alpha)(p^2+\beta^2)}e^{pt} = \frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}e^{\alpha t},$$

$$res_{p_3}(F(p)e^{pt}) = \lim_{p\to p_3}(p-p_3)F(p)e^{pt} =$$

$$= \lim_{p\to -i\beta} \frac{p}{(p^2-\alpha^2)(p-i\beta)}e^{pt} = -\frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}e^{-i\beta t},$$

$$res_{p_4}(F(p)e^{pt}) = \lim_{p\to p_4}(p-p_4)F(p)e^{pt} =$$

$$= \lim_{p\to i\beta} \frac{p}{(p^2-\alpha^2)(p+i\beta)}e^{pt} = -\frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}e^{i\beta t}.$$

Conform formulei (1.67), obţinem originalul

$$f(t) = \frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}e^{-\alpha t} + \frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}e^{\alpha t} -$$

$$-\frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}e^{-i\beta t} - \frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}e^{i\beta t} =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\operatorname{ch} \alpha t - \cos \beta t\right),$$

adică

$$f(t) = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\operatorname{ch} \alpha t - \cos \beta t\right).$$

Cum rădăcinile polinomului de la numitor $N(p)$ sunt simple şi funcţia dată $F(p)$ este ireductibilă, se poate aplica şi formula (1.75).

Avem,

$$N'(p) = 2p(p^2 + \beta^2) + 2p(p^2 - \alpha^2) = 2p(2p^2 + \beta^2 - \alpha^2)$$

şi, deci,

$$N'(p_1) = -2\alpha(2\alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2) = -2\alpha(\alpha^2 + \beta^2),$$

$$N'(p_2) = 2\alpha(2\alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2) = 2\alpha(\alpha^2 + \beta^2),$$

$$N'(p_3) = -2\beta i(-2\beta^2 + \beta^2 - \alpha^2) = 2\beta i(\alpha^2 + \beta^2),$$

$$N'(p_4) = 2\beta i(-2\beta^2 + \beta^2 - \alpha^2) = -2\beta i(\alpha^2 + \beta^2),$$

pe când

$$M(p_k) = p_k \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

Prin urmare,

$$f(t) = \frac{-\alpha}{-2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} e^{-\alpha t} + \frac{\alpha}{2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} e^{\alpha t} +$$

$$+ \frac{-\beta i}{2\beta i(\alpha^2 + \beta^2)} e^{-i\beta t} + \frac{\beta i}{-2\beta i(\alpha^2 + \beta^2)} e^{i\beta t} =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\operatorname{ch} \alpha t - \cos \beta t \right).$$

b) Considerăm funcţia raţională F definită de următoare fracţie proprie

$$F(p) = \frac{1}{p(p-\alpha)^3}, \quad \alpha \neq 0.$$

În acest caz polinomul de la numitor

$$N(\alpha) = p(p-\alpha)^3$$

are o rădăcină triplă. Pentru a determina funcţia original, în primul rând, vom aplica formula (1.74). Avem

$$\lim_{p\to 0} \left(pF(p)e^{pt} \right) = \lim_{p\to 0} \left(\frac{1}{(p-\alpha)^3} e^{pt} \right) = -\frac{1}{\alpha^3},$$

$$\lim_{p\to\alpha} \frac{d^2}{dp^2} \left((p-\alpha)^3 F(p)\, e^{pt} \right) = \lim_{p\to\alpha} \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{1}{p}\, e^{pt} \right) =$$

$$= -\frac{2}{\alpha^3} e^{\alpha t} - \frac{2}{\alpha^3} t e^{\alpha t} + \frac{1}{\alpha} t^2 e^{\alpha t},$$

şi, astfel, conform formulei (1.74), obţinem

$$f(t) = -\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{2!} \left(-\frac{2}{\alpha^3}\, e^{\alpha t} - \frac{2}{\alpha^2}\, t\, e^{\alpha t} + \frac{1}{\alpha}\, t^2\, e^{\alpha t} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\, t^2\, e^{\alpha t} - \frac{1}{\alpha^2}\, t\, e^{\alpha t} - \frac{1}{\alpha^3}\, e^{\alpha t} - \frac{1}{\alpha^3}\,.$$

c) Fie

$$F(p) = \frac{p+1}{p(p^2+1)}\,.$$

Polinomul de la numitor

$$N(\alpha) = p(p^2 + 1)$$

are rădăcini simple

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -i, \quad p_3 = i\,.$$

Cum una din rădăcini este nulă, se poate aplica formula lui Heaviside (1.80), unde

$$M(p) = p + 1, \quad N(p) = pR(p), \quad R(p) = p^2 + 1\,.$$

Deducem

$$f(t) = \frac{M(0)}{R(0)} + \frac{M(-i)}{-iR'(-i)}\,e^{-it} + \frac{M(i)}{iR'(i)}\,e^{it} =$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1-i}{-i\cdot 2(-i)}\,e^{-it} + \frac{1+i}{i\cdot 2i}\,e^{it} =$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)e^{-it} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)e^{it}\,,$$

sau, echivalent,

$$f(t) = 1 - \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} + \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = 1 - \cos t + \sin t\,.$$

Funcţiile original în cazul în care imaginile lor Laplace sunt funcţii raţionale pot fi determinate în mod direct utilizând metoda de descompunere în fracţii elementare sau astfel numite funcţii raţionale simple. Nu vom explica aici în detaliu toate nuanţele care îşi pot face apariţia, ne vom limita doar la examinarea următoarelor exemple.

1.5.9. ***Exemple.*** a) Considerăm funcţia raţională

$$F(p) = \frac{p^2 - p + 1}{p^4 + p^3 - p^2 - p}\,.$$

Cum

$$p^4 + p^3 - p^2 - p = p^2(p^2 - 1) + p(p^2 - 1) = (p^2 + p)(p^2 - 1) =$$

$$= p(p+1)(p-1)(p+1) = p(p-1)(p+1)^2\,,$$

avem descompunerea $F(p)$ în fracţii elementare

$$\frac{p^2 - p + 1}{p^4 + p^3 - p^2 - p} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{(p+1)^2}\,,$$

unde

$$A = -1, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = \frac{3}{4}, \quad D = \frac{3}{2}\,.$$

Astfel,

$$F(p) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(p+1)^2} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq -1 + \frac{1}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{3}{2}te^{-t}\,,$$

şi, deci, originalul $f(t)$ funcţiei date F este

$$f(t) = -1 + \frac{1}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{3}{2}te^{-t}\,.$$

b) Să determinăm originalul $f(t)$ dacă transformata Laplace este

$$F(p) = \frac{p^4 - 3p^3 + 7p^2 - 7p + 3}{(p^2+1)(p^2-2p+2)^2}\,.$$

Polinomul de la numitor

$$N(p) = (p^2 + 1)(p^2 - 2p + 2)^2$$

are două rădăcini simple $p_1 = -i, \quad p_2 = i$, iar celelalte două $p_3 = 1 - i$ şi $p_4 = 1 + i$ sunt duble.

Avem descompunerea în fracţii elementare

$$F(p) = -\frac{1}{2i}\frac{1}{p+i} + \frac{1}{2i}\frac{1}{p-i} - \frac{1}{4i}\frac{1}{(p-1+i)^2} + \frac{1}{4i}\frac{1}{(p-1-i)^2}$$

şi, prin urmare, obţinem

$$f(t) = -\frac{1}{2i}e^{-it} + \frac{1}{2i}e^{it} - \frac{1}{4i}e^{(1-i)t} + \frac{1}{4i}e^{(1+i)t}.$$

Originalul $f(t)$ poate fi reprezentat şi în modul următor

$$f(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} + \frac{1}{2}\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}te^t = \sin t + \frac{1}{2}te^t \sin t\,.$$

Acelaşi rezultat se va obţine dacă fracţia raţională dată $F(p)$ este descompusă în fracţii simple după cum urmează

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{p-1}{(p^2-2p+2)^2}\,.$$

Avem,

$$\frac{1}{p^2+1} \risingdotseq \sin t$$

şi

$$\frac{1}{p^2-2p+2} = \frac{1}{(p-1)^2+1} \risingdotseq e^t \sin t\,.$$

Cum

$$\left(\frac{1}{(p-1)^2+1}\right)' = -\frac{2(p-1)}{((p-1)^2+1)^2}\,,$$

în virtutea teoremei 1.3.12 privind derivarea imaginii, rezultă

$$\frac{(p-1)}{((p-1)^2+1)^2} \risingdotseq \frac{1}{2} te^t \sin t$$

(a se vedea formula (1.37)). Astfel,

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{p-1}{((p-1)^2+1)^2} \risingdotseq \sin t + \frac{1}{2} te^t \sin t\,.$$

Transformatele Laplace ale unor funcţii elementare prezentăm în următorul tabel.

Tabelul 1.1. Transformatele Laplace

Nr.	Funcția original $f(t)$	Transformata Laplace $F(t)$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
4	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
5	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
6	$\operatorname{sh} \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
7	$\operatorname{ch} \alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$
8	$e^{\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
9	$e^{\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
10	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$

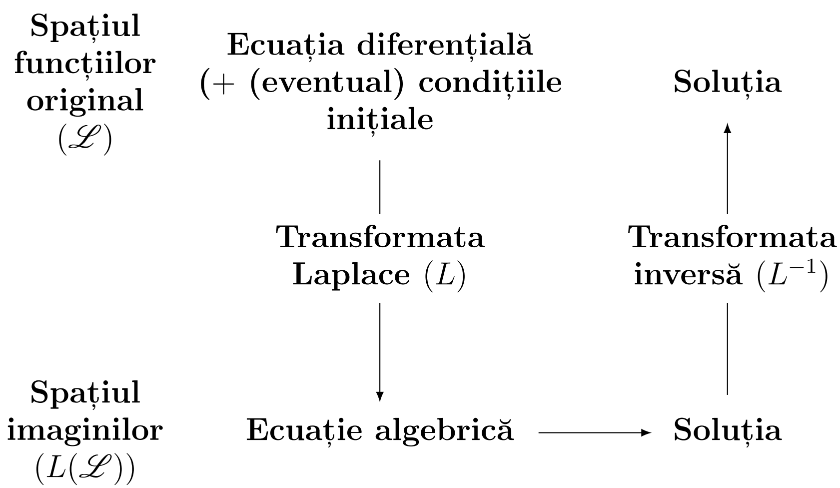
2. Aplicaţii ale transformării Laplace

Una dintre caracteristicile transformării Laplace, care a predeterminat utilizarea sa pe scară largă în calculele ştiinţifice şi de inginerie, este că multe relaţii şi operaţii pe funcţiile original corespund unor relaţii mai simple pe imaginile lor. Astfel, convoluţia a două funcţii original se reduce în spaţiul imaginilor la operaţia de multiplicare obişnuită, iar ecuaţiile diferenţiale liniare, cât şi unele ecuaţii integrale, devin ecuaţii algebrice (a se vedea proprietăţile date prin teoremele 1.3.8, 1.3.14 şi 1.4.4).

2.1. Integrarea ecuaţiilor diferenţiale

Metoda de rezolvare a unei ecuaţii diferenţiale folosind calculul operaţional poate fi reprezentată figurativ sub forma următoarei scheme.

Schema



Rezolvarea prin transformarea Laplace a altor tipuri de ecuaţii cum ar fi, de exemplu, ecuaţiile integrale, se realizează conform aceleiaşi scheme.

Această schemă arată că soluţia ecuaţiei diferenţiale, dată (eventual) împreună cu condiţiile iniţiale în spaţiul funcţiilor original, este înlocuită cu o soluţie indirectă în spaţiul imaginilor, şi anume, mai întâi ecuaţia diferenţială dată se reduce prin intermediul transformării directe Laplace la o ecuaţie algebrică, iar apoi, rezolvând ecuaţia obţinută, prin intermediul transformării Laplace inverse, revenim în spaţiul funcţiilor original, obţinând în acest mod soluţia problemei iniţiale.

Să începem cu rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale ordinare liniare cu coeficienţi constanţi, la care metoda operaţională este relativ uşor de aplicat.

Astfel, fie ecuaţia diferenţială

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t)\,, \quad (2.1)$$

unde a_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ sunt numere complexe, f fiind o funcţie dată.

Problema este de a determina soluţia ecuaţiei (2.1) care satisface condiţiile iniţiale

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}\,. \quad (2.2)$$

Vom presupune că $a_n \neq 0$, iar funcţia f cât şi soluţia ecuaţiei împreună cu toate derivatele sale până la ordinul n sunt funcţii original.

Notăm

$$x(t) \risingdotseq X(p), \quad f(t) \risingdotseq F(p)\,.$$

Conform regulii de diferenţiere (a se vedea teorema 1.3.8) şi proprietăţii de linearitate (a se vedea teorema 1.3.1), ecuaţia diferenţială (2.1) cu datele iniţiale (2.2) se reduce la ecuaţia algebrică (în spaţiul imaginilor)

$$a_n(p^n X(p) - p^{n-1}x_0 - p^{n-2}x_1 - \cdots - x_{n-1}) +$$

$$+a_{n-1}(p^{n-1}X(p) - p^{n-2}x_0 - p^{n-3}x_1 - \cdots - x_{n-2}) + \cdots +$$

$$+a_1(pX(p) - x_0) + a_0X(p) = F(p),$$

sau, echivalent,

$$D(p)X(p) = F(p) + G(p)\,, \tag{2.3}$$

unde

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0\,, \tag{2.4}$$

şi

$$\begin{aligned} G(p) = (a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} + \cdots + a_1)x_0 + \\ +(a_n p^{n-2} + a_{n-1}p^{n-3} + \cdots + a_2)x_1 + \cdots + a_n x_{n-1} \end{aligned} \tag{2.5}$$

sunt polinoame (în variabila p) cunoscute.

Ecuaţia algebrică obţinută (2.3) se numeşte **ecuaţia operaţională** corespunzătoare problemei (2.1)-(2.2), polinomul $D(p)$ definit prin (2.4) fiind numit **polinomul caracteristic** al ecuaţiei diferenţiale (2.1).

Menţionăm că $G(p)$ din (2.5) reprezintă o combinaţie liniară

$$G(p) = \sum_{k=0}^{n-1} D_k(p)\, x_{n-1-k}\,, \tag{2.6}$$

de polinoame $D_k(p)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Cum se observă, polinomul $D_{n-1}(p)$ se obţine din polinomul caracteristic $D(p)$

prin eliminarea termenului liber a_0 şi împărţind cu p şi, prin inducţie, aplicând acelaşi procedeu se obţine $D_k(p)$ din $D_{k+1}(p)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1;\ D_n(p) := D(p))$.

Rezolvând ecuaţia operaţională (2.3), obţinem soluţia problemei în spaţiul imaginilor Laplace

$$X(p) = \frac{F(p) + G(p)}{D(p)}\,. \tag{2.7}$$

Dacă ecuaţia (2.1) cu datele iniţiale (2.2) permite o soluţie $x(t)$ (se arată, în condiţiile acceptate, soluţia există) care satisface condiţiile impuse originalelor (a se vedea definiţia 1.1.1), atunci această soluţie este originalul transformatei Laplace, adică

$$x(t) \risingdotseq X(p)$$

este soluţia problemei (2.1) - (2.2).

2.1.1. ***Exemplu.*** Considerăm următoarea ecuaţie diferenţială

$$x''(t) + \omega^2\, x(t) = f(t)\,, \quad \omega > 0, \tag{2.8}$$

(**ecuaţia oscilatorului liniar**), unde ω este un parametru pozitiv, f este o funcţie (**forţa externă**) dată.

Problema este de a determina, în clasa funcţiilor original, soluţia ecuaţiei (2.8) care satisface condiţiile iniţiale (generale)

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1\,. \tag{2.9}$$

Fie

$$x(t) \risingdotseq X(p), \quad f(t) \risingdotseq F(p)\,.$$

Aplicând transformarea Laplace la ambele părţi ale ecuaţiei, obţinem ecuaţia operaţională

$$(p^2 + \omega^2)X(p) = F(p) + px_0 + x_1\,,$$

de unde

$$X(p) = \frac{F(p) + px_0 + x_1}{p^2 + \omega^2} .$$

Cum

$$\frac{p}{p^2 + \omega^2} \fallingdotseq \cos \omega t, \qquad \frac{1}{p^2 + \omega^2} \fallingdotseq \frac{1}{\omega} \sin \omega t$$

(a se vedea formulele nr.4 şi 5 din tabelul 1.1), rezultă

$$X(p) = x_0 \cdot \frac{p}{p^2 + \omega^2} + x_1 \cdot \frac{1}{p^2 + \omega^2} + \frac{1}{p^2 + \omega^2} F(p) \fallingdotseq$$

$$\fallingdotseq x_0 \cos \omega t + \frac{x_1}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int\limits_0^t \sin \omega(t - s) f(s) ds .$$

Ultimul termen corespunde produsului de convoluţie originalelor $\frac{1}{\omega} \sin \omega t$ şi $f(t)$ (a se vedea teorema 1.4.4).

Funcţia

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{x_1}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int\limits_0^t \sin \omega(t - s) f(s) ds \qquad (2.10)$$

astfel găsită este soluţia dorită a problemei, sau, cum se mai spune, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (2.8).

În particular, dacă condiţiile iniţiale sunt nule

$$x(0) = x'(0) = 0 ,$$

atunci, cum rezultă imediat din (2.10),

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^t \sin \omega(t - s) f(s) ds . \qquad (2.11)$$

Dacă, în plus,

$$f(t) = a \sin \omega t\,,$$

atunci

$$x(t) = \frac{a}{\omega} \int_0^t \sin \omega (t-s) \sin \omega s \, ds =$$

$$= \frac{a}{2\omega^2} \left(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t \right),$$

adică

$$x(t) = \frac{a}{2\omega^2} \left(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t \right).$$

Un alt caz particular, important în practică, este atunci când se consideră ecuaţia oscilatorului armonic (2.8) cu partea dreaptă

$$f(t) = a\,(\eta(t) - \eta(t-\tau)), \quad \tau > 0\,,$$

unde η este funcţia Heaviside.

Conform formulei (2.11), avem

$$x(t) = \frac{a}{\omega} \int_0^t \sin \omega (t-s) \left(\eta(s) - \eta(s-\tau) \right) ds =$$

$$= \frac{a}{\omega} \left(\int_0^t \sin \omega (t-s)\, \eta(s)\, ds - \int_0^t \sin \omega (t-s)\, \eta(s-\tau)\, ds \right) =$$

$$= \frac{a}{\omega} \left(\eta(t) \int_0^t \sin \omega (t-s)\, ds - \eta(t-\tau) \int_0^t \sin \omega (t-s)\, ds \right) =$$

$$= \frac{a}{\omega}\left(\frac{1}{\omega}\,(1-\cos\omega t)\,\eta(t) - \frac{1}{\omega}\,(1-\cos\omega(t-\tau))\,\eta(t-\tau)\right) =$$

$$= \frac{a}{\omega^2}\left(\sin^2\frac{\omega t}{2}\,\eta(t) - \sin^2\frac{\omega(t-\tau)}{2}\,\eta(t-\tau)\right).$$

Astfel, soluţia problemei

$$x''(t) + \omega^2\,x(t) = a\,(\eta(t) - \eta(t-\tau)), \quad \tau > 0\,, ?\omega > 0,$$

reprezintă funcţia

$$x(t) = \frac{a}{\omega^2}\left(\sin^2\frac{\omega t}{2}\,\eta(t) - \sin^2\frac{\omega(t-\tau)}{2}\,\eta(t-\tau)\right).$$

2.1.2. ***Exemplu.*** Să considerăm problema determinării soluţiei ecuaţiei diferenţiale

$$x^{IV}(t) - \omega^2\,x''(t) = \omega\,e^{\omega t}\,, \quad \omega > 0,$$

care satisface condiţiile iniţiale

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0\,, \quad x'''(0) = 1\,.$$

Notăm, ca de obicei, prin $X(p)$ transformata Laplace originalului $x(t)$ (soluţia ecuaţiei date). Cum

$$e^{\omega t} \doteqdot \frac{1}{p-\omega}\,,$$

ecuaţia operaţională corespunzătoare este

$$(p^4 - \omega^2 p^2)\,X(p) = \frac{\omega}{p-\omega} + 1\,,$$

de unde

$$X(p) = \frac{p}{(p-\omega)(p^4-\omega^2p^2)} = \frac{1}{p\,(p-\omega)^2\,(p+\omega)}\,,$$

adică

$$X(p) = \frac{1}{p\,(p-\omega)^2\,(p+\omega)}\,.$$

Aplicând teorema 1.5.5 (a se vedea formula (1.74)), obţinem

$$x(t) = \lim_{p\to 0} pX(p) + \lim_{p\to -\omega}(p+\omega)X(p)e^{pt} + \\ + \lim_{p\to\omega}\frac{d}{dp}\left((p-\omega)^2 X(p)e^{pt}\right) =$$

$$= \frac{1}{\omega^3} - \frac{1}{4\omega^3}e^{-\omega t} - \frac{3}{4\omega^3}e^{\omega t} + \frac{1}{2\omega^2}\,te^{\omega t}\,,$$

şi, deci, soluţia problemei date este

$$x(t) = \frac{1}{\omega^3} - \frac{1}{4\omega^3}e^{-\omega t} - \frac{3}{4\omega^3}e^{\omega t} + \frac{1}{2\omega^2}\,te^{\omega t}\,.$$

2.1.3. ***Exemplu.*** Să analizăm soluţia ecuaţiei diferenţiale de ordinul doi

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t)\,, \tag{2.12}$$

unde a_0, a_1 sunt numere (în general, complexe) date (a se vedea ecuaţia generală (2.1)). Vom presupune că f cât şi soluţia ecuaţiei x împreună cu derivatele sale x' şi x'' sunt funcţii original.

Ecuaţia operaţională corespunzătoare este

$$D(p)X(p) = F(p) + (p+a_1)x(0) + x'(0)\,, \tag{2.13}$$

unde

$$D(p) = p^2 + a_1\,p + a_0$$

reprezintă polinomul caracteristic al ecuaţiei (2.12).

Din (2.13) rezultă că soluţia ecuaţiei în spaţiul imaginilor este

$$X(p) = \frac{F(p)}{D(p)} + \frac{p + a_1}{D(p)}\, x(0) + \frac{x'(0)}{D(p)}\,. \tag{2.14}$$

Prin aplicarea transformării Laplace inverse, din (2.14) se obţine soluţia (generală), în clasa funcţiilor original, a ecuaţiei diferenţiale date. Structura soluţiei depinde de însăşi funcţia f precum şi de rădăcinile polinomului caracteristic, fie notate α şi β. În cazul general al unei funcţii (original) oarecare, se poate proceda prin aplicarea unor argumente similare ca în exemplul 2.1.1 obţinând o formulă asemănătoare ca în (2.10) pentru soluţia generală.

Să analizăm în detaliu cazul special al unei funcţii (original) de forma

$$f(t) = ae^{\gamma t}\,,$$

a, γ fiind numere (complexe) date. Se disting următoarele cazuri.

1) *Rădăcinile α şi β sunt simple şi ambele sunt diferite de γ.*

În acest caz, fracţiile raţionale incluse în formula (2.14) pot fi descompuse în sumă de fracţii elementare, fiecare dintre care conţinând numai un singur factor liniar la numitor. Astfel,

$$\frac{F(p)}{D(p)} = \frac{a}{(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)} =$$

$$= \frac{a}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\frac{1}{p-\alpha} + \frac{a}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\frac{1}{p-\beta} + \frac{a}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\frac{1}{p-\gamma},$$

şi

$$\frac{p+a_1}{D(p)}x(0)+\frac{x'(0)}{D(p)}=\frac{(p+a_1)x(0)+x'(0)}{D(p)}=\frac{A}{p-\alpha}+\frac{B}{p-\beta},$$

unde A şi B sunt constante care depind de valorile $x(0)$ şi $x'(0)$. Prin gruparea termenilor respectivi, obţinem

$$X(p)=\frac{a}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\frac{1}{p-\gamma}+\frac{C_1}{p-\alpha}+\frac{C_2}{p-\beta}\,, \tag{2.15}$$

unde C_1 şi C_2, fiind dependente de valorile arbitrare $x(0)$ şi $x'(0)$, pot fi considerate constante arbitrare.

Din (2.15) deducem că soluţia generală ecuaţiei diferenţiale (2.12), în cazul considerat, reprezintă originalul

$$x(t)=\frac{a}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}e^{\gamma t}+C_1e^{\alpha t}+C_2e^{\beta t}\,, \tag{2.16}$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante arbitrare.

2) *Rădăcinile α şi β sunt simple, iar γ coincide cu una din rădăcini, fie, de exemplu, $\gamma=\alpha$.*

Aplicând aceeaşi procedură ca mai sus, în loc de descompunerea (2.15) vom avea

$$X(p)=\frac{a}{\alpha-\beta}\frac{1}{(p-\alpha)^2}+\frac{C_1}{p-\alpha}+\frac{C_2}{p-\beta}\,, \tag{2.17}$$

unde C_1 şi C_2 fiind constante arbitrare.

Din (2.17) rezultă că originalul corespunzător

$$x(t)=\frac{a}{\alpha-\beta}\,te^{\alpha t}+C_1e^{\alpha t}+C_2e^{\beta t} \tag{2.18}$$

reprezintă soluţia generală ecuaţiei diferenţiale date

3) $\alpha=\beta\neq\gamma$. Cazul în care polinomul caracteristic are o rădăcină dublă α, iar $\gamma\neq\alpha$.

În acest caz avem

$$X(p) = \frac{a}{(\gamma-\alpha)^2}\frac{1}{p-\gamma} + \frac{C_1}{p-\alpha} + \frac{C_2}{(p-\alpha)^2}\,,$$

şi, respectiv, originalul

$$x(t) = \frac{a}{(\gamma-\alpha)^2}\,e^{\gamma t} + C_1 e^{\alpha t} + C_2 t e^{\alpha t}\,, \tag{2.19}$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante arbitrare, constituie soluţia generală a ecuaţiei date.

4) *Polinomul caracteristic are o rădăcină dublă egală cu* γ.

În acest caz se obţine

$$X(p) = \frac{a}{(p-\alpha)^3} + \frac{C_1}{p-\alpha} + \frac{C_2}{(p-\alpha)^2}\,,$$

şi, prin urmare, originalul

$$x(t) = \frac{a}{2}\,t^2 e^{\alpha t} + C_1 e^{\alpha t} + C_2 t e^{\alpha t}\,, \tag{2.20}$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante arbitrare, reprezintă soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (2.12).

Remarcăm o metodă elegantă de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale bazate pe formulele Duhamel (a se vedea corolarul 1.4.5).

Fie ecuaţia diferenţială (2.1) cu condiţiile iniţiale nule

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0\,.$$

Presupunem să se cunoaşte soluţia aceleiaşi ecuaţii diferenţiale (2.1) cu funcţia din partea dreaptă

$$f(t) \equiv 1$$

şi, de asemenea, condiţiile iniţiale nule. Notăm prin $X(p)$ şi $X_1(p)$ soluţiile ale ecuaţiilor operaţionale respective. Avem

$$D(p)X(p) = F(p) \tag{2.21}$$

şi

$$D(p)X_1(p) = \frac{1}{p}\,. \tag{2.22}$$

Din (2.21) şi (2.22) rezultă

$$pF(p)X_1(p) = pF(p)\frac{1}{pD(p)} = \frac{F(p)}{D(p)} = X(p)\,,$$

adică relaţia

$$pF(p)X_1(p) = X(p)\,. \tag{2.23}$$

Conform formulelor Duhamel (a se vedea a doua formulă din (1.59)), avem

$$pF(p)X_1(p) = x_1(0)f(t) + \int_0^t x_1'(t-s)f(s)\,ds\,, \tag{2.24}$$

iar, atunci, din (2.13) şi (2.24), ţinând cont de faptul că $x_1(0) = 0$, obţinem

$$x(t) = \int_0^t x_1'(t-s)f(s)\,ds\,, \tag{2.25}$$

sau, echivalent, utilizând prima formulă din (1.59),

$$x(t) = f(0)x_1(t) + \int_0^t f'(t-s)x_1(s)\,ds\,, \tag{2.26}$$

cu condiţia că derivata funcţiei (original) f să existe.

2.1.4. ***Exemplu.*** Considerăm ecuaţia

$$x''(t) - \omega^2 x(t) = f(t)\,, \tag{2.27}$$

cu condiţiile iniţiale nule

$$x(0) = x'(0) = 0\,, \tag{2.28}$$

unde funcţia (original) f este dată.

Alcătuim ecuaţia

$$x''(t) - \omega^2 x(t) = 1\,, \tag{2.29}$$

cu aceleaşi condiţii iniţiale nule (2.28) şi notăm soluţia ei prin $x_1(t)$. Fie

$$x_1(t) \risingdotseq X(p)\,,$$

şi, atunci, ecuaţia operaţională a ecuaţiei (2.29) este

$$(p^2 - \omega^2)X_1(p) = \frac{1}{p}\,,$$

de unde

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p^2 - \omega^2)}\,.$$

Cum

$$\frac{1}{p^2 - \omega^2} = \frac{1}{\omega}\operatorname{sh}\omega t$$

(a se vedea formula nr.6 din tabelul 1.1), aplicând proprietatea de integrare a originalelor (a se vedea teorema 1.3.14), obţinem

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p^2 - \omega^2)} \risingdotseq \frac{1}{\omega}\int\limits_0^t \operatorname{sh}\omega s\, ds = \frac{1}{\omega^2}(\operatorname{ch}\omega t - 1)\,,$$

adică

$$x_1(t) = \frac{1}{\omega^2}(\operatorname{ch}\omega t - 1)\,.$$

Conform formulei (2.25), obţinem soluţia problemei date (2.27)-(2.28) şi, anume,

$$x(t) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^t \operatorname{sh}\omega(t-s) f(s)\, ds\,. \tag{2.30}$$

Dacă, de exemplu,

$$f(t) = a\operatorname{ch}\omega t\,,$$

atunci

$$x(t) = \frac{a}{\omega}\int\limits_0^t \operatorname{sh}\omega(t-s)\operatorname{ch}\omega s\, ds =$$

$$= \frac{a}{2\omega}\int\limits_0^t (\operatorname{sh}\omega t + \operatorname{sh}\omega(t-2s))\, ds =$$

$$= \frac{a}{2\omega}\operatorname{sh}\omega t\int\limits_0^t ds + \frac{a}{2\omega}\int\limits_0^t \operatorname{sh}\omega(t-2s) ds =$$

$$= \frac{a}{2\omega} t\operatorname{sh}\omega t - \frac{a}{4\omega^2}(\operatorname{ch}\omega t - \operatorname{ch}\omega t) = \frac{a}{2\omega} t\operatorname{sh}\omega t\,,$$

adică

$$x(t) = \frac{a}{2\omega}\, t\operatorname{sh}\omega t\,.$$

Deseori, mai ales în aplicaţii, problema (2.27)-(2.28) apare cu funcţia f din partea dreaptă de forma

$$f(t) = a\, e^{\omega t}\,, \quad a \in \mathbb{C}\,, \quad \omega > 0.$$

Înlocuind în (2.30), obţinem

$$x(t) = \frac{a}{\omega} \int\limits_0^t \operatorname{sh} \omega(t-s)\, e^{-\omega s^2}\, ds,$$

care se poate transforma în modul următor

$$x(t) = \frac{a}{2\omega} \int\limits_0^t \left(e^{\omega(t-s)} - e^{-\omega(t-s)} \right)\, e^{-\omega s^2}\, ds =$$

$$= \frac{a}{2\omega} \left(e^{\omega t} \int\limits_0^t e^{-\omega(s^2+s)}\, ds - e^{-\omega t} \int\limits_0^t e^{-\omega(s^2-s)}\, ds \right) =$$

$$= \frac{a}{2\omega}\, e^{\frac{\omega}{4}} \left(e^{\omega t} \int\limits_0^t e^{-\omega(s+\frac{1}{2})^2}\, ds - e^{-\omega t} \int\limits_0^t e^{-\omega(s-\frac{1}{2})^2}\, ds \right) =$$

$$= \frac{a}{2\omega\sqrt{\omega}}\, e^{\frac{\omega}{4}} \left(e^{\omega t} \int\limits_{\frac{\sqrt{\omega}}{2}}^{\sqrt{\omega}t+\frac{\sqrt{\omega}}{2}} e^{-s^2}\, ds - e^{-\omega t} \int\limits_{-\frac{\sqrt{\omega}}{2}}^{\sqrt{\omega}t-\frac{\sqrt{\omega}}{2}} e^{-s^2}\, ds \right).$$

Integralele obţinute pot fi exprimate prin astfel numita (în teoria probabilităţilor) **funcţia eroare** sau, de asemenea, cunoscută ca **funcţia Laplace**

$$\operatorname{erf} f = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t e^{-s^2}\, ds\,.$$

Avem

$$x(t) = \frac{a\sqrt{\pi}}{4\omega\sqrt{\omega}}\, e^{\frac{\omega}{4}} \left(e^{\omega t} \left(\operatorname{erf} \sqrt{\omega}(t + \frac{1}{2}) - \operatorname{erf} \frac{\sqrt{\omega}}{2} \right) - \right.$$

$$\left. -e^{-\omega t} \left(\operatorname{erf} \sqrt{\omega}(t - \frac{1}{2}) + \operatorname{erf} \frac{\sqrt{\omega}}{2} \right) \right) =$$

$$= \frac{a\sqrt{\pi}}{4\omega\sqrt{\omega}}\, e^{\frac{\omega}{4}} \left(e^{\omega t} \operatorname{erf} \sqrt{\omega}(t + \frac{1}{2}) - \right.$$

$$- e^{-\omega t} \operatorname{erf} \sqrt{\omega}(t - \frac{1}{2}) -$$

$$\left. -2 \operatorname{erf} \frac{\sqrt{\omega}}{2} \operatorname{ch} \omega t \right),$$

şi, deci,

$$x(t) = \frac{a}{4\omega}\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\, e^{\frac{\omega}{4}} \left(e^{\omega t} \operatorname{erf} \sqrt{\omega}(t + \frac{1}{2}) - \right.$$

$$- e^{-\omega t} \operatorname{erf} \sqrt{\omega}(t - \frac{1}{2}) -$$

$$\left. -2 \operatorname{erf} \frac{\sqrt{\omega}}{2} \operatorname{ch} \omega t \right).$$

erf t este o funcţie specială şi nu se exprimă prin funcţii elementare.

Metoda operaţională poate fi utilă şi la rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi variabili.

Să considerăm, de exemplu, ecuaţia diferenţială liniară

$$\begin{aligned} &a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + \\ &\qquad + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = f(t) \end{aligned} \tag{2.31}$$

în care coeficienţii $a_k(t)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ sunt polinoame în variabila t. În astfel de ipoteze, expresia din membrul stâng al ecuaţiei nu este altceva decât o combinaţie liniară de termeni de forma

$$t^k x^{(l)}(t) \quad (k = 0, 1, \ldots, m; \quad l = 0, 1, \ldots, n),$$

unde m desemnează gradul maxim al polinoamelor date $a_l(t)$ ($l = 0, 1, \ldots, n$).

Fie

$$x_1(t) \risingdotseq X(p)\,,$$

bineînţeles, presupunem că f reprezintă o funcţie original (atunci şi soluţia $x(t)$, împreună cu derivatele sale până la ordinul n inclusiv, sunt originale). Atunci, prin teoremele privind diferenţierea originalelor şi imaginilor (a se vedea teoremele 1.3.8 şi 1.3.12), avem

$$t^k x^{(l)}(t) \risingdotseq (-1)^k \frac{d^k}{dp^k}\left(p^l x(p) - \sum_{j=0}^{l-1} p^{l-j-1} x^{(j)}(0)\right). \qquad (2.32)$$

Prin urmare, cu aplicarea transformării Laplace, ecuaţia dată (2.31) se transformă într-o ecuaţie, de asemenea diferenţială, uneori, fiind relativ mai simplă.

2.1.5. ***Exemplu.*** Considerăm ecuaţia diferenţială a funcţiilor cilindrice

$$t^2 x''(t) + t x'(t) + (t^2 - \nu^2) x(t) = 0\,, \qquad (2.33)$$

unde t este variabila independentă, x este funcţia necunoscută, ν este un parametru, numit **indicele ecuaţiei**, care pentru simplitate (în acest exemplu) va fi considerat egal cu zero.

Vom rezolva ecuaţia (2.33) prin metoda operaţională astfel cum este indicat mai sus. În cazul în care $\nu = 0$, simplificăm prin t (reţinem că $t = 0$ este un punct singular al ecuaţiei (2.33)) şi, dacă notăm cu $X(p)$ imaginea Laplace funcţiei necunoscute x, atunci

$$t x''(t) \risingdotseq (p^2 X(p) - p x(0) - x'(0))' = -p^2 X'(p) - 2p X(p) + x(0)\,,$$

$$x'(t) \fallingdotseq pX(p) - x(0)\,,$$

$$tx(t) \fallingdotseq -X'(p)\,.$$

Ecuaţia operaţională corespunzătoare este

$$-p^2X'(p) - 2pX(p) + x(0) + pX(p) - x(0) - X'(p) = 0\,,$$

sau, echivalent,

$$(p^2 + 1)X'(p) + X(p) = 0\,.$$

Astfel, obţinem o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile, a cărei soluţie generală este

$$X(p) = \frac{c}{\sqrt{1+p^2}}\,,$$

c fiind o constantă arbitrară. Originalul corespunzător constituie funcţia Bessel (multiplicată cu c) de speţa întâi de indice $\nu = 0$ şi, anume

$$x(t) = CJ_0(t) = C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$$

(a se compara cu formula (1.64) din exemplul 1.5.2).

2.2. Integrarea sistemelor de ecuaţii diferenţiale

Metoda operaţională este, de asemenea, deosebit de utilă pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii diferenţiale şi se aplică conform aceleiaşi scheme descrise la începutul secţiunii 2.1.

2.2.1. ***Exemplu.*** Considerăm sistemul de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi

$$\begin{cases} x_1'(t) = & x_1(t) - x_2(t) + e^t, \\ x_2'(t) = & 2x_1(t) + x_2(t) + e^{-2t}. \end{cases}$$

Ne propunem să aflăm soluţia sistemului dat care verifică condiţiile iniţiale

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1.$$

Aplicăm transformarea Laplace în ambele ecuaţii, notând

$$x_1(t) \risingdotseq X_1(p), \quad x_2(t) \risingdotseq X_2(p)\,,$$

şi obţinem sistemul operaţional (reprezintă un sistem algebric)

$$\begin{cases} pX_1(p) & = & X_1(p) - X_2(p) + \dfrac{1}{p-1}, \\ pX_2(p) - 1 & = & 2X_1(p) + X_2(p) + \dfrac{1}{p+2}, \end{cases}$$

sau, echivalent,

$$\begin{cases} (p-1)X_1(p) & + X_2(p) = \dfrac{1}{p-1}, \\ -2X_1(p) & + (p-1)X_2(p) = \dfrac{p+3}{p+2}. \end{cases}$$

Să rezolvăm acest sistem algebric folosind formulele lui Cramer. Avem

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & 1 \\ -2 & p-1 \end{vmatrix} = (p-1)^2 + 2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{p-1} & 1 \\ \dfrac{p+3}{p+2} & p-1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{p+3}{p+2} = -\frac{1}{p+2},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p-1 & \dfrac{1}{p-1} \\ -2 & \dfrac{p+3}{p+2} \end{vmatrix} = \frac{(p-1)(p+3)}{p+2} + \frac{2}{p-1} = \frac{p^3+p^2-3p+7}{(p-1)(p+2)},$$

şi, deci,

$$X_1(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{(p+2)((p-1)^2+2)},$$

$$X_2(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{p^3+p^2-3p+7}{(p-1)(p+2)((p-1)^2+2)}.$$

Cum

$$\frac{1}{(p+2)((p-1)^2+2)} = \frac{\frac{1}{11}}{p+2} + \frac{-\frac{1}{11}p + \frac{4}{11}}{(p-1)^2+2} =$$

$$= \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{p+2} - \frac{1}{11} \cdot \frac{p-1}{(p-1)^2+2} + \frac{3}{11} \cdot \frac{1}{(p-1)^2+2},$$

şi

$$\frac{p^3+p^2-3p+7}{(p-1)(p+2)((p-1)^2+2)} = \frac{1}{p-1} - \frac{\frac{3}{11}}{p+2} + \frac{\frac{3}{11}p - \frac{5}{22}}{(p-1)^2+2} =$$

$$= \frac{1}{p-1} - \frac{3}{11} \cdot \frac{1}{p+2} + \frac{3}{11} \cdot \frac{p-1}{(p-1)^2+2} + \frac{1}{22} \cdot \frac{1}{(p-1)^2+2},$$

rezultă

$$x_1(t) = -\frac{1}{11}e^{-2t} + \frac{1}{11}e^t\cos(t\sqrt{2}) - \frac{3}{11}e^t\sin(t\sqrt{2}),$$

$$x_2(t) = e^t - \frac{3}{11}e^{-2t} + \frac{3}{11}e^t\cos(t\sqrt{2}) + \frac{1}{22}e^t\sin(t\sqrt{2})\,.$$

2.2.2. ***Exemplu.*** Să aflăm soluţia generală a următorului sistem de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} x_1'(t) = & -2x_1(t) - x_2(t) + \sin t, \\ x_2'(t) = & 4x_1(t) + 2x_2(t) + \cos t. \end{cases}$$

Notăm

$$x_1(t) \risingdotseq X_1(p), \quad x_2(t) \risingdotseq X_2(p)\,.$$

Cum

$$x_1'(t) \risingdotseq pX_1(p) - x_1(0)\,,$$

$$x_2'(t) \risingdotseq pX_2(p) - x_2(0)\,,$$

şi

$$\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}\,, \quad \cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}\,,$$

sistemul operaţional este

$$pX_1(p) - x_1(0) = -2X_1(p) - X_2(p) + \frac{1}{p^2+1}\,,$$

$$pX_2(p) - x_2(0) = 4X_1(p) + 2X_2(p) + \frac{p}{p^2+1}\,,$$

sau, ceea ce este acelaşi,

$$\begin{cases} (p+2)X_1(p) & + & X_2(p) & = & x_1(0) + \dfrac{1}{p^2+1}, \\ -4X_1(p) & + & (p-2)X_2(p) & = & x_2(0) + \dfrac{p}{p^2+1}. \end{cases}$$

Rezolvăm sistemul algebric obţinut, de exemplu, folosind din nou formulele lui Cramer. Avem,

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p+2 & 1 \\ -4 & p-2 \end{vmatrix} = p^2 - 4 + 4 = p^2,$$

$$\Delta_1(p) = \begin{vmatrix} x_1(0) + \dfrac{1}{p^2+1} & 1 \\ x_2(0) + \dfrac{p}{p^2+1} & p-2 \end{vmatrix} =$$

$$= (p-2)x_1(0) + \frac{p-2}{p^2+1} - x_2(0) - \frac{p}{p^2+1} =$$

$$= (p-2)x_1(0) - x_2(0) - \frac{2}{p^2+1},$$

$$\Delta_2(p) = \begin{vmatrix} p+2 & x_1(0) + \dfrac{1}{p^2+1} \\ -4 & x_2(0) + \dfrac{p}{p^2+1} \end{vmatrix} =$$

$$= (p+2)x_2(0) + \frac{p(p+2)}{p^2+1} + 4x_1(0) + \frac{4}{p^2+1} =$$

$$= 4x_1(0) + (p+2)x_2(0) + \frac{p^2+2p+4}{p^2+1}.$$

Prin urmare,

$$X_1(p) = \frac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)} = \left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p^2}\right)x_1(0) - \frac{1}{p^2}x_2(0) - \frac{2}{p^2(p^2+1)},$$

$$X_2(p) = \frac{\Delta_2(p)}{\Delta(p)} = \frac{4}{p^2}x_1(0) + \left(\frac{1}{p} + \frac{2}{p^2}\right)x_2(0) + \frac{p^2+2p+4}{p^2(p^2+1)}.$$

Intrucât

$$\frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1},$$

şi

$$\frac{p^2+2p+4}{p^2(p^2+1)} = \frac{2}{p} + \frac{4}{p^2} - \frac{2p+3}{p^2+1} =$$

$$= \frac{2}{p} + \frac{4}{p^2} - \frac{2p}{p^2+1} - \frac{3}{p^2+1},$$

originalele corespunzătoare sunt

$$x_1(t) = (1-2t)x_1(0) - tx_2(0) - 2t + 2\sin t,$$

$$x_2(t) = 4t\,x_1(0) + (1+2t)x_2(0) + 2 + 4t - 2\cos t - 3\sin t\,.$$

Dat fiind că $x_1(0)$ şi $x_2(0)$ sunt valori nedeterminate (oarecare), pot fi notate cu C_1 şi, respectiv, C_2, şi atunci, soluţia generală a sistemului dat este

$$x_1(t) = (1-2t)C_1 - tC_2 - 2t + 2\sin t,$$

$$x_2(t) = 4t\,C_1 + (1+2t)C_2 + 2 + 4t - 2\cos t - 3\sin t\,.$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante arbitrare.

2.2.3. ***Exemplu.*** Să determinăm soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} x_1''(t) - x_2'(t) - x_1(t) + x_2(t) = & 1-2t, \\ 2x_1''(t) + x_2''(t) + 2x_1'(t) + 2x_2(t) = & 2(1-t), \end{cases}$$

care verifică condiţiile iniţiale

$$x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 2, \quad x_2(0) = 1, \quad x_2'(0) = -2.$$

Notăm

$$x_1(t) \risingdotseq X_1(p), \quad x_2(t) \risingdotseq X_2(p)\,,$$

şi aplicăm transformarea Laplace asupra sistemului, ţinând cont de condiţiile iniţiale, obţinem

$$\begin{cases} p^2X_1(p) - 2 - pX_2(p) + 1 - X_1(p) + X_2(p) &= \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{p^2}, \\ 2p^2X_1(p) - 4 + p^2X_2(p) - p + 2 + 2pX_1(p) &+ \; 2X_2(p) = \\ &= \; 2\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2}\right), \end{cases}$$

sau, echivalent

$$\begin{cases} (p^2-1)X_1(p) - (p-1)X_2(p) &= 1 + \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{p^2}, \\ 2(p^2+p)X_1(p) + (p^2+2)X_2(p) &= p + 2 + 2\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2}\right). \end{cases}$$

Rezolvând sistemul (operaţional) obţinut, deducem

$$X_1(p) = \frac{2(p^2+p+1)}{p^2(p^2+2p+2)} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2+2p+2} =$$

$$= \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2+1},$$

$$X_2(p) = \frac{p^3-2p-2}{p^2(p^2+2p+2)} = -\frac{1}{p^2} + \frac{p+1}{p^2+2p+2}.$$

$$= -\frac{1}{p^2} + \frac{p+1}{(p+1)^2+1}.$$

Originalele corespunzătoare

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= t + e^{-t}\sin t,\\
x_2(t) &= -t + e^{-t}\cos t
\end{aligned}
$$

reprezintă soluţia problemei.

2.3. Aplicarea transformării Laplace la rezolvarea ecuaţiilor integrale

În această secţiune vom considera anumite clase de ecuaţii integrale care pot fi rezolvate în cadrul metodelor operaţionale. Una dintre cele mai importante, utilizate pe scară largă în diverse domenii ale ştiinţelor naturale, reprezintă **clasa ecuaţiilor de tip Volterra**, anume vom considera clasa ecuaţiilor integrale de forma

$$
\varphi(t) - \int_0^t k(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t)\,, \tag{2.34}
$$

unde k şi f sunt funcţii cunoscute, φ este funcţia necunoscută. $k(t,s) = k(t-s)$ se numeşte **nucleul** ecuaţiei integrale (2.34). În cazul în care $f \equiv 0$ ecuaţia (2.34) devine

$$
\varphi(t) - \int_0^t k(t-s)\varphi(s)\,ds = 0\,, \tag{2.35}
$$

şi se numeşte **ecuaţia Volterra omogenă**. Ambele ecuaţii (2.34) şi (2.35) sunt de speţa a doua. Ecuaţia

$$
\int_0^t k(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t)\,, \tag{2.36}
$$

unde φ este funcţia necunoscută, se numeşte **ecuaţie integrală Volterra de speţa întâia**.

O **soluţie** a ecuaţiei integrale (2.34) (de asemenea, (2.35) sau (2.36)) se numeşte o funcţie φ, care, fiind substituită în ecuaţie, o reduce la o identitate în raport cu variabila t.

În scopul de a rezolva ecuaţia (2.34) (de asemenea, (2.35) sau (2.36)), presupunem că funcţiile k şi f, precum şi posibila soluţie φ, sunt funcţii original. Aplicând transformarea Laplace la ambele părţi ale ecuaţiei (2.34) şi folosind teorema 1.4.4 (**transformarea produsului de convoluţie**), în notaţiile

$$k(t) \risingdotseq K(p), \quad f(t) \risingdotseq F(p), \quad \varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)\,,$$

obţinem

$$\Phi(p) - K(p)\Phi(p) = F(p)\,. \tag{2.37}$$

Ecuaţia algebrică obţinută (2.37) se numeşte **ecuaţia operaţională** corespunzătoare ecuaţiei integrale (2.34).

Din (2.37), deducem

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - K(p)}\,. \tag{2.38}$$

Originalul transformatei Laplace $\Phi(p)$ definită prin (2.38) reprezintă soluţia $\varphi(t)$ ecuaţiei integrale (2.34).

2.3.1. ***Exemplu.*** Considerăm ecuaţia

$$\varphi(t) - \int_0^t e^{t-s}\varphi(s)\,ds = e^{2t}\,.$$

Cum

$$e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}, \quad e^{2t} \risingdotseq \frac{1}{p-2}\,,$$

ecuaţia operaţională este

$$\Phi(p) - \frac{1}{p-1}\Phi(p) = \frac{1}{p-2}\,,$$

de unde

$$\Phi(p) = \frac{p-1}{(p-2)^2} = \frac{1}{p-2} + \frac{1}{(p-2)^2} \risingdotseq e^{2t} + te^{2t}\,,$$

şi, deci,

$$\varphi(t) = (1+t)e^{2t}$$

este soluţia ecuaţiei integrale date.

Revenind la ecuaţia integrală (2.34), în condiţiile presupuse, notăm

$$R(p) = \frac{K(p)}{1-K(p)}\,. \tag{2.39}$$

Atunci, soluţia ecuaţiei, în spaţiul imaginilor, se poate scrie

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1-K(p)} = \frac{F(p)(1-K(p)) + F(p)K(p)}{1-K(p)} =$$

$$= F(p) + F(p)R(p),$$

adică

$$\Phi(p) = F(p) + F(p)R(p)\,. \tag{2.40}$$

Fie $r(t)$ originalul transformatei Laplace $R(p)$. Atunci, din nou conform teoremei 1.4.4, avem

$$F(p)R(p) = \int\limits_0^t r(t-s)f(s)\,ds\,. \tag{2.41}$$

Din relaţiile (2.40) şi (2.41) rezultă că soluţia ecuaţiei integrale (2.34) se exprimă în modul următor

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^t r(t-s)f(s)\,ds\,. \tag{2.42}$$

$k(t,s) = r(t,s)$ se numeşte **nucleul rezolvant** al ecuaţiei integrale (2.34) (sau, de asemenea, **nucleul rezolvant** asociat cu nucleul $k(t,s)$ $(= k(t-s))$.

2.3.2. ***Exemplu.*** Să determinăm nucleul rezolvant al ecuaţiei integrale

$$\varphi(t) - 2\int_0^t \cos(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t)\,.$$

Avem,

$$k(t) = 2\cos t\,.$$

Cum

$$K(p) = \frac{2p}{p^2+1}\,,$$

conform (2.39), rezultă

$$R(p) = \frac{\frac{2p}{p^2+1}}{1-\frac{2p}{p^2+1}} = \frac{2p}{p^2-2p+1} = \frac{2p}{(p-1)^2} =$$

$$= \frac{2(p-1)+2}{(p-1)^2} = 2\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-2)^2}\right) \risingdotseq$$

$$\fallingdotseq 2(e^t + te^t) = 2(1+t)e^t\,.$$

Astfel,

$$r(t) = 2(1+t)e^t\,,$$

şi, deci, nucleul rezolvant al ecuaţiei integrale este

$$r(t-s) = 2(1+t-s)e^{t-s}\,.$$

Soluţia ecuaţiei, în presupunerea că partea dreaptă $f(t)$ a ecuaţiei reprezintă un original, este dată prin formula

$$\varphi(t) = f(t) + 2\int_0^t (1+t-s)e^{t-s}f(s)\,ds\,.$$

În particular, dacă

$$f(t) = e^t\,,$$

adică în cazul ecuaţiei integrale

$$\varphi(t) - 2\int_0^t \cos(t-s)\varphi(s)\,ds = e^t\,,$$

soluţia se determină după cum urmează

$$\varphi(t) = e^t + 2\int_0^t (1+t-s)e^{t-s}e^s\,ds =$$

$$= e^t + 2e^t\int_0^t (1+t-s)\,ds =$$

$$= e^t + 2e^t(t + t^2 - \frac{t^2}{2}) = (t^2+2t+1)e^t = (t+1)^2e^t\,,$$

$$\varphi(t) = (t+1)^2e^t\,.$$

Să considerăm şi următoarea ecuaţie integrală Volterra de speţa întâia.

2.3.3. ***Exemplu.***

$$\int_0^t \sin(t-s)\varphi(s)\,ds = t^2\,.$$

Cum

$$\sin t \fallingdotseq \frac{1}{p^2+1}, \quad t^2 \fallingdotseq \frac{2}{p^3}$$

(a se vedea formulele nr.2 şi 4 din tabelul 1.1), rezultă

$$\frac{1}{p^2+1}\Phi(p) = \frac{2}{p^3}\,.$$

Prin urmare,

$$\Phi(p) = \frac{2(p^2+1)}{p^3} = \frac{2}{p} + \frac{2}{p^3} \risingdotseq 2 + 2\cdot\frac{t^2}{2!} = t^2+2\,,$$

deci, soluţia ecuaţiei date reprezintă originalul

$$\varphi(t) = t^2 + 2\,.$$

Calculul operaţional poate fi util şi pentru alte clase de ecuaţii integrale, cum ar fi, de exemplu, ecuaţiile integrale neliniare de forma

$$\lambda\varphi(t) + \int_0^t \varphi(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t)\,, \tag{2.43}$$

unde λ este o constantă, f este o funcţie cunoscută dată, iar φ este o funcţie necunoscută pe care avem să o determinăm.

Ecuaţia operaţională corespunzătoare este

$$\lambda\Phi(p) + \Phi(p)^2 = F(p)\,,$$

adică

$$\Phi(p)^2 + \lambda\Phi(p) - F(p) = 0 \tag{2.44}$$

(desigur, presupunând că f, precum şi soluţiile $\varphi(t)$ ale ecuaţiei sunt originale).

Soluţiile ecuaţiei integrale (2.43) sunt originalele corespunzătoare soluţiilor ecuaţiei operaţionale (2.44).

2.3.4. ***Exemplu.*** Să considerăm ecuaţia integrală

$$\int_0^t \varphi(t-s)\varphi(s)\,ds = te^t\,.$$

Avem cazul ecuaţiei integrale (2.43) în care

$$\lambda = 0, \quad f(t) = te^t\,.$$

Soluţiile ecuaţiei operaţionale

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p-1)^2}$$

sunt

$$\Phi(p) = \pm\frac{1}{p-1}\,.$$

Originalele corespunzătoare

$$\varphi(t) = \pm e^t$$

reprezintă soluţiile ecuaţiei integrale date.

Transformarea Laplace poate fi folosită şi pentru a rezolva sisteme de ecuaţii integrale. Să examinăm următorul exemplu.

2.3.5. ***Exemplu.***

$$\begin{cases} \varphi_1(t) - \int\limits_0^t \varphi_1(s)\,ds + \int\limits_0^t e^{-t+s}\varphi_2(s)\,ds = 1\,, \\ \varphi_2(t) - 4\int\limits_0^t e^{t-s}\varphi_1(s)\,ds + \int\limits_0^t \varphi_2(s)\,ds = e^t\,. \end{cases}$$

Aplicând transformarea Laplace la ambele ecuaţii şi folosind teorema 1.4.4 cu privire transformarea produsului de convoluţie (de asemenea, a se vedea teorema 1.3.14, formula (1.42)), obţinem

$$\begin{cases} \Phi_1(p) - \dfrac{1}{p}\Phi_1(p) + \dfrac{1}{p+1}\Phi_2(p) = \dfrac{1}{p}\,, \\ \Phi_2(p) - \dfrac{4}{p-1}\Phi_1(p) + \dfrac{1}{p}\Phi_2(p) = \dfrac{1}{p-1}\,, \end{cases}$$

sau, echivalent

$$\begin{cases} \dfrac{p-1}{p}\Phi_1(p) + \dfrac{1}{p+1}\Phi_2(p) = \dfrac{1}{p}\,, \\ -\dfrac{4}{p-1}\Phi_1(p) + \dfrac{p+1}{p}\Phi_2(p) = \dfrac{1}{p-1}\,. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul obţinut pentru $\Phi_1(p)$ şi $\Phi_2(p)$, găsim

$$\Phi_1(p) = \frac{p^3 - p - 1}{(p^2+1)^2}\,,$$

$$\Phi_2(p) = \frac{p^3 + 4p^2 + 3p}{(p^2+1)^2}\,,$$

care se mai pot scrie

$$\Phi_1(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{2}\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1} - \frac{2p}{(p^2+1)^2}\,,$$

$$\Phi_2(p) = \frac{p}{p^2+1} + 2\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2} + \frac{2}{p^2+1} + \frac{2p}{(p^2+1)^2}\,.$$

Rezultă că originalele corespunzătoare transformărilor Laplace $\Phi_1(p)$ şi, respectiv, $\Phi_2(p)$ sunt

$$\varphi_1(t) = \cos t + \frac{1}{2}t\cos t - \frac{1}{2}\sin t - t\sin t\,,$$

$$\varphi_2(t) = \cos t + 2t\cos t + 2\sin t + t\sin t\,,$$

care reprezintă soluţiile sistemului.

2.4. Rezolvarea unor ecuaţii şi sisteme de ecuaţii integro-diferenţiale

Ecuaţiile în care funcţia necunoscută este conţinută împreună cu unele dintre derivatele sale şi, în acelaşi timp, sub o integrală sunt de obicei numite **ecuaţii integro-diferenţiale**. Vom lua în considerare ecuaţii integro-diferenţiale liniare, care, în mod firesc, se disting în cadrul calculului operaţional privind nu numai soluţionarea lor, dar şi al aplicaţiilor. Spre deosebire de cazul ecuaţiilor integrale, atunci când se studiază o ecuaţie integro-diferenţială, anumite condiţii iniţiale necesită de a fi impuse funcţiei necunoscute.

2.4.1. ***Exemplu.*** Să determinăm soluţia ecuaţiei integro-diferenţiale

$$\varphi''(t) + \varphi(t) + \int_0^t \operatorname{sh}(t-s)\varphi(s)\,ds + \int_0^t \operatorname{ch}(t-s)\varphi'(s)\,ds = \operatorname{ch} t$$

care verifică condiţiile iniţiale

$$\varphi(0) = -1, \quad \varphi'(0) = 1.$$

Notăm

$$\varphi(t) \fallingdotseq \Phi(p)\,.$$

Aplicăm transformarea Laplace la ambele părţi ale ecuaţiei şi, în virtutea teoremei 1.4.4 cu privire transformarea produsului de convoluţie şi teoremei 1.3.8 despre derivarea originalului, obţinem ecuaţia operaţională

$$p^2\Phi(p)+p-1+\Phi(p)+\frac{1}{p^2-1}\Phi(p)+\frac{p}{p^2-1}(p\Phi(p)+1)=\frac{p}{p^2-1}\,,$$

sau, echivalent,

$$\frac{p^2(p^2+1)}{p^2-1}\Phi(p)=-p+1\,.$$

Rezultă

$$\Phi(p)=-\frac{(p-1)(p^2-1)}{p^2(p^2+1)}=$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p^2+1}-\frac{2p}{p^2+1}\risingdotseq$$

$$\risingdotseq 1-t-2\cos t+2\sin t\,.$$

Prin urmare, soluţia ecuaţiei integro-diferenţiale care satisface condiţiile iniţiale date este

$$\varphi(t)=1-t-2\cos t+2\sin t\,.$$

Aceleaşi raţionamente se aplică şi la soluţionarea sistemelor de ecuaţii integro-diferenţiale.

2.4.2. ***Exemplu.*** Să determinăm soluţia sistemului de ecuaţii integro-diferenţiale

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) - \varphi_1(t) + \int\limits_0^t e^{t-s}\varphi_2'(s)\,ds = e^t\,, \\[2ex] \varphi_2'(t) - \varphi_2(t) + \int\limits_0^t (t-s)\varphi_1'(s)\,ds = -t-1\,, \end{cases}$$

care satisface condiţiile iniţiale

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 1.$$

Notăm

$$\varphi_1(t) \risingdotseq \Phi_1(p), \quad \varphi_2(t) \risingdotseq \Phi_2(p)\,.$$

Aplicăm transformarea Laplace la ambele ecuaţii ale sistemului şi obţinem

$$\begin{cases} p\Phi_1(p) - \Phi_1(p) + \dfrac{1}{p-1}(p\Phi_2(p) - 1) = \dfrac{1}{p-1}\,, \\[2ex] p\Phi_2(p) - 1 - \Phi_2(p) + \dfrac{1}{p^2}p\Phi_1(p) = -\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p}\,, \end{cases}$$

sau, echivalent,

$$\begin{cases} (p-1)\Phi_1(p) + \dfrac{p}{p-1}\Phi_2(p) = \dfrac{2}{p-1}\,, \\[2ex] \dfrac{1}{p}\Phi_1(p) + (p-1)\Phi_2(p) = \dfrac{p^2-p-1}{p^2}\,. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul algebric obţinut pentru $\Phi_1(p)$ şi $\Phi_2(p)$, deducem

$$\Phi_1(p) = \frac{1}{p(p-2)}\,,$$

$$\Phi_2(p) = \frac{p^2 - 2p - 1}{p^2(p-2)}\,.$$

Cum

$$\frac{1}{p(p-2)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-2}\,,$$

$$\frac{p^2 - 2p - 1}{p^2(p-2)} = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-2}\,,$$

rezultă că originalele

$$\varphi_1(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t}\,,$$

$$\varphi_2(t) = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}e^{2t}\,,$$

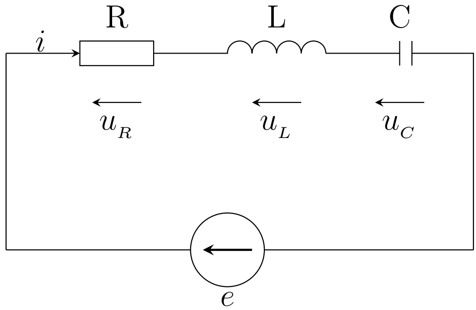
formează soluţia problemei date.

2.5. Aplicarea calculului operaţional în studiul circuitelor electrice

Oliver Heaviside (18.05.1850-08.02.1925), om de ştiinţă, inginer, matematician şi fizician englez, a propus şi a dezvoltat ca pionierat o tehnică simbolică de studiere a circuitelor electrice, de fapt, a pus bazele metodelor de calcul operaţional, utile în inginerie electrică, şi care permit calculul proceselor în circuite complexe cu tensiuni externe arbitrare.

Un circuit electric (RLC) este un set de surse conectate între ele de forţă electrică E, rezistenţă activă R, inductanţă L şi capacitate C.

Fie $e(t)$ tensiunea cu care se alimentează circuitul în momentul de timp t, $t > 0$. În urma alimentării în circuit apare un



curent, fie de intensitate $i(t)$ în funcţie de timp. Conform legii lui Kirchhoff

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = e(t)\,, \tag{2.45}$$

unde $u_R(t)$, $u_L(t)$ şi $u_C(t)$ sunt, respectiv, căderile de tensiune pe rezistor, bobină şi condensator la momentul t. Luând în considerare relaţia dintre tensiune şi curent din circuit pe fiecare din elementele sale, avem

$$u_R(t) = R\,i(t), \quad u_L = L\frac{di}{dt}, \quad u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(s)\,ds + u_C(0)\,.$$

Prin urmare, obţinem (a se vedea (2.45)) o ecuaţie integro-diferenţială

$$R\,i(t) + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(s)\,ds + u_C(0) = e(t)\,, \tag{2.46}$$

în necunoscuta $i(t)$.

Presupunând că $e(t)$, precum şi $i(t)$, reprezintă funcţii original, ecuaţia (2.46) se poate soluţiona prin aplicarea calculului operaţional. Astfel, notăm

$$i(t) \risingdotseq I(p), \quad e(t) \risingdotseq E(p)\,,$$

şi obţinem ecuaţia operaţională

$$R\,I(p) + L(pI(p) - i(0)) + \frac{1}{C}\frac{1}{p}I(p) + u_{C}(0)\frac{1}{p} = E(p)\,. \quad (2.47)$$

Rezultă

$$I(p) = C\,\frac{pE(p) + Li(0)\,p - u_{C}(0)}{LC\,p^2 + RC\,p + 1}\,. \quad (2.48)$$

În particular, dacă

$$i(0) = u_{C}(0) = 0\,,$$

(un caz frecvent întâlnit în practică), atunci

$$I(p) = \frac{C\,p\,E(p)}{LC\,p^2 + RC\,p + 1}\,. \quad (2.49)$$

Fie $k(t)$ originalul transformatei Laplace

$$K(p) = \frac{p}{LC\,p^2 + RC\,p + 1}\,, \quad (2.50)$$

atunci din (2.49), în virtutea teoremei 1.4.4, deducem

$$i(t) = C\int_0^t k(t-s)e(s)\,ds\,. \quad (2.51)$$

Observăm că polii funcţiei imagine K definită prin (2.50) sunt nu altceva decât rădăcinile ecuaţiei

$$LC\,p^2 + RC\,p + 1 = 0\,. \quad (2.52)$$

Distingem două cazuri

1) $R^2C^2 - 4LC \neq 0$.

În acest caz trinomul pătrat din (2.52) are două rădăcini, fie notate prin α şi β, distincte, şi, prin urmare, are loc descompunerea în fracţii simple

$$K(p) = \frac{A}{p-\alpha} + \frac{A}{p-\beta}\,, \tag{2.53}$$

unde A şi B sunt anumite constante (se pot calcula). Originalul $k(t)$ corespunzător imaginii Laplace $K(p)$ este de forma

$$k(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}\,,$$

şi, atunci, formula de calcul a funcţiei intensitate (2.51) devine

$$i(t) = AC\int_0^t e^{\alpha(t-s)}e(s)\,ds + BC\int_0^t e^{\beta(t-s)}e(s)\,ds\,. \tag{2.54}$$

2) $R^2C^2 - 4LC = 0$.

Cazul în care trinomul pătrat din (2.52) are o rădăcină dublă

$$\alpha = -\frac{R}{2L}.$$

În această situaţie are loc descompunerea

$$K(p) = \frac{1}{LC}\frac{p}{(p-\alpha)^2} = \frac{1}{LC}\left(\frac{1}{p-\alpha} + \frac{\alpha}{(p-\alpha)^2}\right)$$

şi, astfel, găsim

$$k(t) = \frac{1}{LC}\left(e^{\alpha t} + \alpha t e^{\alpha t}\right),$$

iar formula de calcul pentru funcţia intensitate este

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t (1+\alpha(t-s))e^{\alpha(t-s)}e(s)\,ds\,. \tag{2.55}$$

În cazul în care avem la dispoziţie un circuit electric compus, fiecare element al căruia reprezintă un RLC circuit, atunci pentru fiecare astfel de element, au loc următoarele relaţii

$$\begin{aligned} R_k i_k(t) + L_k \tfrac{di_k}{dt} &+ \frac{1}{C_k}\int_0^t i_k(s)\,ds + u_{C_k}(0) + \\ &+ \sum_{l\neq k} \mu_{kl}\,\frac{di_k}{dt} \;=\; e_k(t), \end{aligned} \tag{2.56}$$

unde R_k, L_k, C_k, $i_k(t)$, u_{C_k} sunt valorile respective ale circuitului k, μ_{kl} desemnează coeficientul de inducţie între circuitele cu numărul k şi respectiv l.

Ecuaţiile operatoriale corespunzătoare (în presupunerile necesare) sunt

$$\begin{aligned} \sum_l Z_{kl}(p)I_l(p) \;&+\; \tfrac{1}{p}u_{C_k}(0) - \\ &-\; L_k i_k(0) - \sum_{l\neq k}\mu_{kl}i_l(0) = E_k(p), \end{aligned} \tag{2.57}$$

unde

$$Z_{kk}(p) = R_k + L_k p + \frac{1}{C_k p}\,,$$

$$Z_{kl} = \mu_{kl}\,p \quad (l\neq k).$$

Adunând relaţiile (2.57) parte cu parte, conform legilor lui Kirchhoff, obţinem

$$\sum_k \sum_l Z_{kl}(p) I_l(p) - \sum_k \Bigg(L_k i_k(0) + \\ + \sum_{l \neq k} \mu_{kl} i_l(0) - \frac{1}{p} u_{C_k}(0) \Bigg) = E(p)\,, \tag{2.58}$$

unde suma este preluată asupra tuturor elementelor ale circuitului, iar $E(p)$ reprezintă tensiunea totală în forma operaţională.

Asociem la ecuaţia (2.58) relaţia

$$\sum_k I_k(p) = 0\,, \tag{2.59}$$

adevărată datorită legilor lui Kirchhoff (se aplică prima lege), şi obţinem sistemul de ecuaţii integro-diferenţiale (2.58)-(2.59), care permite determinarea valorilor curentului pentru fiecare element al circuitului.

3. Exerciţii şi probleme

1. Să se determine transformările Laplace ale funcţiilor original definite prin

a) $t \sin \omega t$;
b) $t \cos \omega t$;

c) $te^{\alpha t} \sin \omega t$;
d) $te^{\alpha t} \cos \omega t$;

e) $\dfrac{\sin \omega t}{t}$;
f) $\dfrac{\operatorname{sh} \omega t}{t}$,

ω este un număr (în general complex).

2. Să se reprezinte grafic funcţiile original f şi să se determine transformatele Laplace ale lor

a) $f(t) = a(\eta(t) + \eta(t-T)), \quad T > 0, \quad a \in \mathbb{C}$;

b) $f(t) = a(\eta(t-T) + \eta(t-2T)), \quad T > 0, \quad a \in \mathbb{C}$;

c) $f(t) = e^{\alpha t}(\eta(t) + \eta(t-T)), \quad T > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$;

d) $f(t) = \eta\left(t - \dfrac{\pi}{2\omega}\right) \sin \omega t, \quad \omega > 0$;

e) $f(t) = \left(\eta(t) + \eta\left(t - \dfrac{\pi}{2\omega}\right)\right) \cos \omega t, \quad \omega > 0$,

η desemnează funcţia Heaviside (a se vedea exemplul 1.1.7).

3. Să se determine transformatele Laplace pentru următoarele originale

a) $t \sin^2 \omega t$;
b) $t^2 \cos^2 \omega t$;

c) $\sin(\omega t - \alpha)\, \eta(\omega t - \alpha)$;
d) $e^{\alpha t} \sin^2 \omega t$;

e) $\sin \omega t \cos \nu t$;
f) $\cos \omega t - \omega t \sin \omega t$;

g) $\dfrac{\operatorname{ch}\omega t - 1}{t}$; h) $\displaystyle\int_0^t \frac{\operatorname{ch}\omega s - 1}{s}\, ds$;

i) $\ln t$,

α, ω, ν sunt numere (în general) complexe.

4. Să se determine transformata Laplace pentru fiecare din următoarele originale

a) $f(t) = \displaystyle\int_0^t (t-s)^n e^{\alpha s}\, ds, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in \mathbb{C};$

b) $f(t) = \displaystyle\int_0^t e^{\alpha s} \sin \omega(t-s)\, ds, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \omega > 0\ ;$

c) $f(t) = \displaystyle\int_0^t (t-s)\, e^{\alpha(t-s)} \sin \omega s\, ds, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \omega > 0;$

d) $f(t) = \displaystyle\int_0^t \eta(t-s)\ \operatorname{sh} \omega s\, ds, \quad \omega > 0,$

η desemnează funcţia Heaviside.

5. Să se determine imaginea Laplace pentru fiecare din următoare originale periodice

a) $f(t) = |\cos \omega t|;$

b) $f(t) = |\sin(\omega t - \alpha)|;$

c) $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (t - 2nT)\chi_{[2nT,\,(2n+1)T]}, \quad T > 0.$

6. Să se determine funcţia original a cărei transformată Laplace este

a) $\dfrac{4p^2+p-1}{p^3-p}$;

b) $\dfrac{p^3-3p^2-7p-8}{p^4+2p^3+5p^2+8p+4}$;

c) $\dfrac{p-1}{p^3(p^3+1)}$;

d) $\dfrac{p^2-3p+1}{(p-2)^2(p^2+2p+5)}$;

e) $\dfrac{p^2+p-1}{(p+1)^3(p^2+2p-3)}$;

f) $\dfrac{p+1}{p^3(p-1)^2(p^2-4p+5)}$.

Indicaţii. Să se descompună imaginea în fracţii simple.

7. Să se determine funcţia original pentru fiecare din următoarele transformate Laplace

a) $\dfrac{p+2}{(p^2-2p+2)^2}$;

b) $\dfrac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$;

c) $\dfrac{p-3}{p^3(p^2+2p+3)^2}$;

d) $\dfrac{p^2-p+1}{(p^2+1)^2(p^2-4)^2}$;

e) $\dfrac{p-3}{(p^2-2p+10)^2}$;

f) $\dfrac{p}{(p-1)^2(p^2-2p+5)^2}$;

g) $\dfrac{1}{p}e^{-\frac{1}{p^2}}$;

h) $\log\dfrac{p^2+\omega^2}{p^2}\quad(\omega>0)$.

Indicaţii. Să se utilizeze proprietăţile transformării Laplace.

8. Să se verifice dacă expresiile date sunt transformate Laplace pentru originale periodice. Să se identifice aceste originale şi să se traseze graficele lor

a) $F(p) = \dfrac{a}{p}\,\dfrac{1 - e^{-p\tau}}{1 - e^{-pT}}, \quad 0 < \tau < T, \quad a \in \mathbb{R};$

b) $F(p) = \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}\,\dfrac{1 + e^{-\frac{\pi}{\omega}p}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\omega}p}};$

c) $F(p) = \dfrac{p}{p^2 + \omega^2}\,\dfrac{e^{-\frac{2\pi}{\omega}p} + e^{-\frac{\pi}{\omega}p}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{\omega}p}};$

d) $F(p) = \dfrac{1}{p+1}\,\dfrac{1 - e^{-2(1+p)}}{1 - e^{-2p}}.$

Indicaţii. Conform teoremei 1.3.17 (**imaginea originalului periodic**) (a se vedea şi formulele (1.52) şi (1.53)), dacă $F(p)$ este de forma

$$F(p) = \frac{F_T(p)}{1 - e^{-sT}}, \quad T > 0$$

unde $F_T(p)$ este transformata Laplace a unui original egal cu 0 pentru $t > T$, atunci $F(p)$ este transformata Laplace a funcţiei original periodică f cu perioada T, pentru care considerată pe intervalul $[0, T]$ corespunde transformatei Laplace $F_T(p)$, adică

$$f(t)\,\chi_{[0,\,T]}(t) = f(t)\,(\eta(t) - \eta(t - T)) \risingdotseq F_T(p)$$

(η este funcţia Heaviside).

Astfel, în cazul a), din forma expresiei pentru $F(p)$ rezultă că $F(p)$ poate fi transformata Laplace a unui original periodic cu perioada T. Cum

$$F_T(p) := A \int_0^T e^{-pt}\,(\eta(t) - \eta(t - \tau))\,dt =$$

$$= A \int_0^T e^{-pt}\, dt = \frac{A}{p}\left(1 - e^{-pT}\right),$$

iar originalul corespunzător

$$f_T(t) = A\left(\eta(t) - \eta(t-\tau)\right)$$

satisface condiţia $f_T(t) = 0$ pentru $t > T$, rezultă că $F(p)$ este transformata originalului periodic

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{pentru} \quad nT \le t \le nT + \tau, \\ 0 & \text{pentru} \quad nT + \tau \le t \le (n+1)T, \end{cases}$$

sau, poate într-o prezentare mai elegantă,

$$f(t) = A \sum_{n=0}^{\infty} \left(\eta(t - nT) - \eta(t - nT - \tau)\right).$$

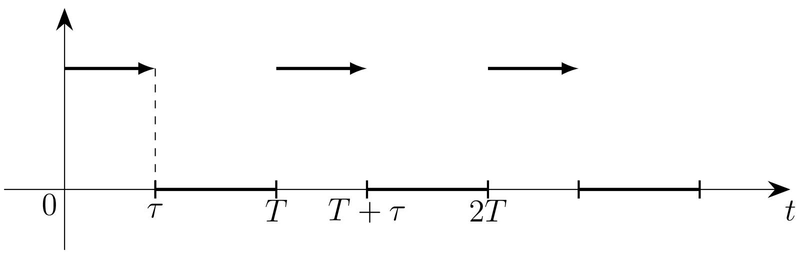


Fig. 3.9

9. Să se determine, în clasa funcţiilor original, soluţiile următoarelor ecuaţii diferenţiale în care funcţia f este cunoscută

a) $x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = f(t)$;

b) $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = f(t)$;

c) $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = f(t)$;

d) $x''(t) - x'(t) = f(t)$.

Să se considere condiţiile iniţiale nule

$$x(0) = x'(0) = 0.$$

Indicaţii. De aplicat argumente similare ca în exemplele 2.1.3 şi 2.1.4.

10. Să se determine soluţiile generale pentru fiecare din ecuaţiile diferenţiale

a) $x''(t) + 3x'(t) - 4x(t) = \sin t$;

b) $x''(t) - 3x'(t) - 4x(t) = e^{-t}$;

c) $x''(t) + x'(t) = f(t)$,

f este o funcţie original cunoscută.

11. Aplicând metodele calculului operaţional să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale cu condiţii iniţiale date

a) $x''(t) - 4x(t) = te^{-2t}$,

$x(0) = 1,\ x'(0) = 0$;

b) $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = e^{-t}$,

$x(0) = 0,\ x'(0) = -1$;

c) $x''(t) + \omega^2 x'(t) = \cos \omega t,\ \ \omega > 0$,

$x(0) = -1,\ x'(0) = 0$;

d) $x^{IV}(t) - x'(t) = e^t$,

$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,\ x'''(0) = -1$;

e) $2x^V(t) - 5x^{IV}(t) + 3x'''(t) + x'(t) + 2x(t) = \operatorname{ch} t$,

$x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ x'''(0) = 0,\ x^{IV}(0) = -1$.

12. Aplicând metodele calcului operaţional să se integreze următoarele sisteme de ecuaţii diferenţiale cu condiţii iniţiale date

$$\text{a)}\ \begin{cases} x_1'(t) + x_2'(t) - x_1(t) = e^t, \\ x_1'(t) + 2x_2'(t) + 2x_2(t) = 5, \end{cases}$$
$$x_1(0) = x_2(0) = 0\ ;$$

$$\text{b)}\ \begin{cases} x_1'(t) - x_1(t) - x_2(t) = 0, \\ x_2'(t) - x_1(t) + x_3(t) = 0, \\ x_3'(t) - x_2(t) - x_3(t) = 0, \end{cases}$$
$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 2, \quad x_3(0) = 3\ ;$$

$$\text{c)}\ \begin{cases} x_1'(t) + 7x_1(t) - x_2(t) = 0, \\ x_2'(t) + 2x_1(t) + 5x_2(t) = 0, \end{cases}$$
$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1\ ;$$

$$\text{d)}\ \begin{cases} x_1'(t) + x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) = 1, \\ x_2'(t) - x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) = -1, \\ x_3'(t) - x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) = 0, \end{cases}$$
$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 3, \quad x_3(0) = -1\ ;$$

$$\text{e)}\ \begin{cases} x_1'(t) - x_1(t) + 2x_2(t) = 3, \\ 3x_1'(t) + x_2(t) - 4x_1(t) + 2x_2(t) = 0, \end{cases}$$
$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0\ ;$$

f) $\begin{cases} x_1'(t) - x_1(t) + 2x_2(t) = 0, \\ x_1''(t) + 2x_2'(t) = -\cos 2t, \end{cases}$

$$x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 2, \quad x_2(0) = -1 \ ;$$

g) $\begin{cases} 2x_1''(t) - x_2''(t) - x_2'(t) = 4(1 - e^{-t}), \\ 2x_1''(t) + x_2'(t) = 2(1 - e^{-2t}), \end{cases}$

$$x_1(0) = x_1'(0) = 0, \quad x_2(0) = x_2'(0) = 1 \ ;$$

h) $\begin{cases} 2x_1''(t) - x_2''(t) - x_1'(t) - x_2'(t) + 9x_1(t) - 3x_2(t) = 0, \\ 2x_1''(t) - x_2''(t) + x_1'(t) + x_2'(t) + 7x_1(t) - 5x_2(t) = 0, \end{cases}$

$$x_1(0) = 1, \quad x_1'(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2'(0) = 0 \ ;$$

i) $\begin{cases} x_1''(t) + \omega^2 x_2(t) = e^{\omega t}, \\ x_2''(t) + \omega^2 x_1(t) = e^{-\omega t}, \quad \omega > 0, \end{cases}$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_1'(0) = x_2'(0) = 0 \ .$$

13. Să se rezolve următoarele ecuaţii integrale

a) $\varphi(t) - \int\limits_0^t e^{t-s} \varphi(s)\, ds = t;$

b) $\varphi(t) - \int\limits_0^t (t-s)^2\, \varphi(s)\, ds = e^t;$

c) $\varphi(t) - 2\int\limits_0^t \cos(t-s)\, \varphi(s)\, ds = e^t;$

d) $\varphi(t) - \alpha \int\limits_0^t (t-s)\,\varphi(s)\,ds = e^{\alpha t}, \quad \alpha \in \mathbb{C};$

e) $\varphi(t) + \alpha \int\limits_0^t e^{\alpha(t-s)}\,\varphi(s)\,ds = t, \quad \alpha \in \mathbb{C};$

f) $\varphi(t) + 2\alpha \int\limits_0^t e^{\alpha(t-s)}\,\varphi(s)\,ds = ae^{\alpha t}, \quad \alpha, a \in \mathbb{C};$

g) $\varphi(t) + 2\omega \int\limits_0^t \cos\omega(t-s)\,\varphi(s)\,ds = a\sin\omega t,$

$\omega > 0,\ a \in \mathbb{C};$

h) $\varphi(t) - 2\omega \int\limits_0^t \sin\omega(t-s)\,\varphi(s)\,ds = a\cos\omega t,$

$\omega > 0,\ a \in \mathbb{C};$

i) $\varphi(t) + 2\omega \int\limits_0^t \operatorname{sh}\omega(t-s)\,\varphi(s)\,ds = a\operatorname{ch}\omega t,$

$\omega > 0,\ a \in \mathbb{C};$

j) $\varphi(t) - 2\omega \int\limits_0^t \operatorname{ch}\omega(t-s)\,\varphi(s)\,ds = a\operatorname{sh}\omega t,$

$\omega > 0,\ a \in \mathbb{C};$

k) $\varphi(t) - \omega \int\limits_0^t e^{\alpha(t-s)}\sin\omega(t-s)\,\varphi(s)\,ds = ae^{\alpha t}\cos\omega t,$

$\omega > 0,\ \alpha, a \in \mathbb{C}.$

14. Să se rezolve următoarele ecuaţii integrale de tip Volterra de speţa întâia

a) $\displaystyle\int_0^t e^{\alpha(t-s)}\,\varphi(s)\,ds = t^2,\ \alpha \in \mathbb{C};$

b) $\displaystyle\int_0^t e^{\alpha(t-s)}\,\varphi(s)\,ds = \sin\omega t,\ \alpha \in \mathbb{C},\ \omega > 0;$

c) $\displaystyle\int_0^t e^{\alpha(t-s)}\,\varphi(s)\,ds = \operatorname{sh}\alpha t,\ \alpha \in \mathbb{C};$

d) $\displaystyle\int_0^t \cos\omega(t-s)\,\varphi(s)\,ds = \sin\omega t,\ \omega > 0;$

e) $\displaystyle\int_0^t \operatorname{sh}\alpha(t-s)\,\varphi(s)\,ds = t^2 e^{\alpha t},\ \alpha \in \mathbb{C};$

15. Să se rezolve următoarele sisteme de ecuaţii integrale

a) $$\begin{cases} \varphi_1(t) - 4\displaystyle\int_0^t (t-s)\,\varphi_1(s)\,ds + \int_0^t \varphi_2(s)\,ds = 4t, \\ \varphi_2(t) + 2\displaystyle\int_0^t e^{2(t-s)}\,\varphi_2(s)\,ds - \int_0^t \varphi_1(s)\,ds = 1; \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \varphi_1(t) + \int\limits_0^t \varphi_2(s)\,ds = 1 - \cos t, \\ \varphi_2(t) - \int\limits_0^t \varphi_1(s)\,ds = \quad \sin t; \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} \varphi_1(t) - \int\limits_0^t \varphi_1(s)\,ds + \int\limits_0^t (t-s)\varphi_2(s)\,ds = -t, \\ \varphi_2(t) - \int\limits_0^t \varphi_2(s)\,ds + \int\limits_0^t e^{t-s}\varphi_1(s)\,ds = \quad e^t; \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} \varphi_1(t) + \varphi_2(t) - \int\limits_0^t (t-s)\varphi_1(s)\,ds - \int\limits_0^t \varphi_3(s)\,ds = 1, \\ \varphi_1(t) + \varphi_3(t) + \int\limits_0^t \varphi_1(s)\,ds - \int\limits_0^t \varphi_3(s)\,ds = t + \cos t, \\ \varphi_2(t) + \varphi_3(t) - \int\limits_0^t (t-s-1)\varphi_1(s)\,ds = -1 - t + \cos t. \end{cases}$$

16. Să se rezolve următoarele ecuaţii integro-diferenţiale cu condiţiile iniţiale indicate

a) $\varphi'(t) + \int\limits_0^t e^{2(t-s)}\varphi(s)\,ds = e^{2t}$,

$\varphi(0) = 1$;

b) $\varphi'(t) + 2\varphi(t) - \int\limits_0^t (t-s)\varphi''(s)\,ds = e^{-t},$

$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1$;

c) $\varphi''(t) + 3\varphi'(t) + \varphi(t) - 3\int\limits_0^t \cos(t-s)\varphi''(s)\,ds -$

$$- 3\int\limits_0^t \sin(t-s)\varphi'(s)ds = \cos t,$$

$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$;

d) $\varphi'(t) - \varphi(t) - \int\limits_0^t \operatorname{sh}(t-s)\varphi(s)\,ds +$

$$+ \int\limits_0^t \operatorname{ch}(t-s)\varphi'(s)ds = \operatorname{ch} t,$$

$\varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = -1$;

17. Să se determine soluţiile următoarelor sisteme de ecuaţii integro-diferenţiale care satisfac condiţiile iniţiale indicate

a) $\begin{cases} \varphi_1'(t) - \int\limits_0^t (t-s)\,\varphi_2(s)\,ds = e^{2t}, \\ \int\limits_0^t e^{2(t-s)}\,\varphi_1(s)\,ds + \int\limits_0^t \varphi_2(s)\,ds = 1, \end{cases}$

$\varphi_1(0) = 1$;

b) $$\begin{cases} \varphi_1(t) + \varphi_1'(t) - 4 \displaystyle\int_0^t e^{t-s}\, \varphi_2'(s)\, ds = e^t, \\ -\varphi_2(t) + \varphi_2'(t) + \displaystyle\int_0^t e^{-t+s}\, \varphi_1'(s)\, ds = 1, \end{cases}$$

$$\varphi_1(0) = 0,\ \varphi_2(0) = 0\ ;$$

c) $$\begin{cases} \varphi_1'(t) - \varphi_2'(t) + a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + \\ \qquad + b_1 \displaystyle\int_0^t \varphi_1(s)\, ds + b_2 \displaystyle\int_0^t \varphi_2(s)\, ds = a \sin \omega t, \\ c_1\varphi_1'(t) - c_2\varphi_2'(t) = b \cos \omega t, \end{cases}$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0\ .$$

Să se discute sistemul în funcţie de coeficienţii a, b, a_k, b_k, c_k $(k = 1, 2)$ care se consideră numere reale.

Sistemul de ecuaţii integro-diferenţiale 17.c) constituie un model general al celor care apar în rezolvarea multor probleme ale ştiinţelor electrotehnice. De exemplu, un caz particular reprezintă sistemul de ecuaţii integro-diferenţiale corespunzător următoarei probleme (de asemenea, a se vedea secţiunea 2.5, ecuaţia (2.46)).

18. Se consideră un circuit electric alcătuit dintr-un condesator cu capacitatea C, rezistenţă R, inductanţă L după cum se arată în fig. 3.10. Fie până la momentul $t = 0$, circuitul este în repaus, adică până la acest moment nu există curent, tensiune sau încărcare. La momentul iniţial $t = 0$ se aplică la intrarea circuitului tensiunea $e(t)$. Se cere să se determine intensitatea curentului şi tensiunea $e_0(t)$ la ieşire.

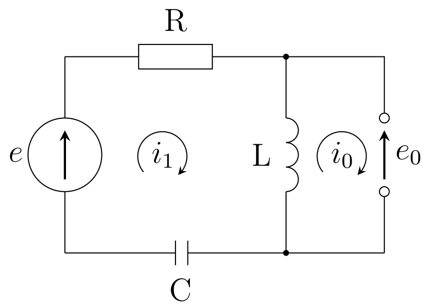


Fig. 3.10

Să notăm cu $i_1(t)$ şi $i_0(t)$ intensităţile curenţilor corespunzători din circuit. Atunci, conform presupunerilor $i_1(t) = i_0(t) = 0$ pentru $t < 0$, iar legile lui Kirchhoff implică următorul sistem de ecuaţii integro-diferenţiale (modelul matematic al problemei)

$$\begin{cases} L(i_1'(t) - i_0(t)) + Ri_1(t) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_1(s)\,ds = e(t), \\ L(i_0'(t) - i_1'(t)) = -e_0(t). \end{cases}$$

19. Să se analize în detaliu sistemul integro-diferenţial obţinut.

Să se efectueze calculele pentru $R = 2(\Omega)$, $L = 1(H)$, $C = 0.2(F)$, iar $e(t)$ dată de formula

$$e(t) = A\sin\omega t, \quad \omega > 0, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Condiţiile iniţiale să se considere nule.

BIBLIOGRAFIE

[1] Boboc N. *Funcţii complexe.* Bucureşti: Ed. Didactică şi Pedagogică, 1969.

[2] Chițescu I., Cristescu R., Grigore Gh., Gussi G., Halanay A., Turchescu M., Marcus S. Coordonator Cristescu R. *Dicționar de analiză matematică.* București: Editura Științifică și Enciclopedică, 1989.

[3] Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Integral Transforms and Operational Calculus, Pure and Applied Mathematics, Volume 78,* Oxford: Pergamon Press, 1965.

[4] Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Operational calculus,* Itogi Nauki. Ser. Mathematics. Mat. anal. 1964, 1966, 7–75.

[5] Fihtenholt G. M. *Curs de calcul diferențial și integral. Vol. II.* București: Editura Tehnică, 1964.

[6] Fihtenholt G. M. *Curs de calcul diferențial și integral. Vol. III.* București: Editura Tehnică, 1965.

[7] Mayer O. *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă. Vol. 1.* Bucureşti: Ed. Academiei Române, 1981.

[8] Privalov I. *Introducere în teoria funcţiilor de o variabilă complexă.* Chişinău: Ed. Lumina, 1989.

INDEX