10) Sea P_n el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales

$$|p_n\rangle \rightleftarrows p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

a) Demostrar que P_n es un espacio vectorial respecto a la suma y multiplicacion por un numero (numero real)

1) Cerradora

sea $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ y $q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$

$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i \rightarrow$ es un polinomio de grado $n-1 \in P_n$

2) suma

$p(x) + q(x) = q(x) + p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (b_i + a_i) x^i$

3) elementro neutro

$p(x) + 0(x) = p(x)$

4) Elemento inverso

para cada $p(x)$ existe un $-p(x)$ talque $p(x) + (-p(x)) = 0$

5) Cerrado bajo la multiplicacion

$c \in \mathbb{R}$

$c \cdot p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (c a_i) x^i \rightarrow$ es un polinomio de grado $n-1$

6) distributividad

- se cumplen las propiedades distributivas y asociativas mixtas debido a las propiedades de los numeros reales

∘ P_n es un espacio vectorial

b) si los coeficientes a_i son enteros ¿P_n sera un espacio vectorial?

No, sea $p(x) = 1$ y $c = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, el resultado $\frac{1}{2} p(x) = \frac{1}{2}$ tiene coeficientes no enteros, por lo que pertenece al conjunto de polinomios con coeficientes enteros

C) ¿Cual de los siguientes subconjuntos P_n es un subespacio vectorial?

I El polinomio cero y todos los de grado $n-1$

- esto es exactamente P_n que ya sabemos es espacio vectorial, por tanto, subespacio

II El polinomio cero y todos los de grado par

No es, porque la suma de 2 polinomios de grado par puede dar un polinomio de grado menor

$p(x) = x^2$; $q(x) = -x^2 + x$

$p(x) + q(x) = x$

III Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado $n > 1$)

1) el polinomio cero esta incluido $(q(x) = 0)$

2) la suma de 2 polinomios con factor x sigue teniendo factor x

3) la multiplicacion por un escalar preserva x

es un subespacio

IV Todos los polinomios (de grado) que tienen a $x-1$ como un factor

$p(x) = (x-1) \cdot q(x)$

1) El polinomio cero esta incluido $(q(x) = 0)$

2) la suma de polinomios con factor $x-1$ sigue teniendo factor $x-1$

3) la multiplicacion por un escalar preserva el factor $x-1$

es un subespacio

6)

a) Compruebe si los cuaterniones $|a\rangle$ forman un espacio vectorial respecto a esa operacion suma y multiplicacion, analoga a la de los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas

Verificacion de axiomas

1) suma

la suma de 2 cuaterniones es otro cuaternion

2) asociatividad

$(|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle = |a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle)$

3) neutro aditivo

$|0\rangle = 0 + 0|q_1\rangle + 0|q_2\rangle + 0|q_3\rangle$

$|a\rangle + |0\rangle = |a\rangle$

4) inverso aditivo

$-|a\rangle = a^0 - a^1|q_1\rangle - a^2 q_2\rangle - a^3|q_3\rangle$

$|a\rangle + (-|a\rangle) = |0\rangle$

5) conmutatividad

$|a\rangle + |b\rangle = |b\rangle + |a\rangle$ - la suma de reales es conmutativa

6) multiplicacion por escalar

$\alpha|a\rangle$ es otro cuaternion

7) distributividad

$(\alpha + \beta)|a\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$ - se cumple por la distributividad en $\mathbb{R}$

8) compatibilidad con el producto de escalares

$\alpha(\beta|a\rangle) = (\alpha\beta)|a\rangle$ - se cumple por la asociatividad del producto en $\mathbb{R}$

Norma

b)

$$|b\rangle = (b^0, b) = b^0 + b^1|q_1\rangle + b^2|q_2\rangle + b^3|q_3\rangle = b^0 + b^i|q_i\rangle$$
$$|r\rangle = (r^0, r) = r^0 + r^1|q_1\rangle + r^2|q_2\rangle + r^3|q_3\rangle = r^0 + r^j|q_j\rangle$$

$$|b\rangle \odot |r\rangle = (b^0 + b^i|q_i\rangle) \odot (r^0 + r^j|q_j\rangle) =$$
$$\underbrace{b^0 r^0}_{\text{escalar}} + \underbrace{b^0 r^j|q_j\rangle + r^0 b^i|q_i\rangle + b^i r^j |q_i\rangle \odot |q_j\rangle}_{\text{vectorial}} + \underbrace{b^i r^i |q_i\rangle \odot |q_i\rangle}_{\text{escalar}}$$

$$|d\rangle = (b^0 r^0 - b.r,\ r^0 b + b^0 r + b \times r)$$

c)

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$$
$$= \underbrace{a|q_0\rangle}_{\text{escalar}} + \underbrace{S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha |q_j\rangle}_{\text{simetrico}} + \underbrace{A^{[jk]i}\, b_j r_k |q_i\rangle}_{\text{asimetrico}}$$

- termino escalar $a|q_0\rangle$
  $a = b^0 r^0 - b.r$
- termino simetrico
  $\delta^0_\alpha \rightarrow S^{(0j)}$
  $S^{(0j)} = r^0 b^j + b^0 r^j$
- termino antisimetrico
  $A^{[jk]i} = \epsilon_{jki}$
  $A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle = \epsilon_{jki} b_j r_k |q_i\rangle = (b \times r)^i |q_i\rangle$

$$|d\rangle = \underbrace{(b^0 r^0 - b.r)}_{a}|q_0\rangle + \underbrace{(r^0 b^j + b^0 r^j)}_{S^{(0j)}}|q_j\rangle + \underbrace{(b \times r)^i}_{A^{[jk]i}}|q_i\rangle$$

d) $a = b^0 r^0 - b.r$ — escalar
$S^{0j} = r^0 b^j + b^0 r^j$ — vector
$A^{[jk]i} = b \times r$ — pseudovector

es una mezcla de vector y pseudovector

e)

I)

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$i^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ik = j$

$|q_0\rangle \to \sigma_0$

$|q_1\rangle \to (\sigma_1)(-i)$

$|q_2\rangle \to (\sigma_3)(-i)$

$|q_3\rangle \to (\sigma_4)(-i)$

Verificacion de propiedades

Cuadrado de las matrices

$(-i\sigma_1)^2 = (-i)^2(\sigma_1)^2 = (-1)(I) = -I$

$(-i\sigma_2)^2 = (-i)^2(\sigma_2)^2 = (-1)(I) = -I$

$(-i\sigma_3)^3 = (-i)^2(\sigma_3)^2 = (-1)(I) = -I$

Productos cruzados

$(-i\sigma_1)(-i\sigma_2) = (-i)^2\sigma_1\sigma_2 = (-1)(i\sigma_3) = -i\sigma_3$

$(-i\sigma_2)(-i\sigma_3) = (-1)^2\sigma_2\sigma_3 = (-1)(i\sigma_1) = i\sigma_1$

$(-i\sigma_3)(-i\sigma_1) = (-1)^2\sigma_3\sigma_1 = (-1)(i\sigma_2) = -i\sigma_2$

∴ La asignacion propuesta puede representar la base de los cuaterniones

II

$$|b\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$$

$$|b\rangle \longleftrightarrow b^0\sigma_0 - ib^1\sigma_1 - ib^2\sigma_2 - ib^3\sigma_3$$

$$|b\rangle \longleftrightarrow b^0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - ib^1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - ib^2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - ib^3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|b\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} b^0 - ib^3 & -ib^1 - b^2 \\ -ib^1 + b^2 & b^0 + ib^3 \end{pmatrix}$$

$z = b^0 + ib^3$

$z^* = b^0 - ib^3$

$w = -ib^1 - b^2$

$-w^* = -ib^1 + b^2$

f)

$$|q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |q_3\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|q_1\rangle^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$|q_2\rangle^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = I$$

$$|q_3\rangle^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = I$$

$$|q_1\rangle|q_2\rangle = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = |q_3\rangle$$

$$|q_1\rangle|q_3\rangle = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = |q_2\rangle$$

$$|q_2\rangle|q_3\rangle = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = |q_1\rangle$$

g)

$$\widetilde{\langle a|b\rangle} = |a\rangle^* \odot |b\rangle$$

no, ya que no cumple conmutividad

$$\widetilde{\langle a|b\rangle} = |a\rangle^* \odot |b\rangle = \widetilde{|b\rangle \odot |a\rangle^*} = \overline{\langle b|a\rangle}$$

$$(a^0b^0 - a^* b,\ a^0 b + b^0 a^* + a^* \times b) = (a^0 b^0 - b a^*,\ b^0 a^* + b a^0 + b \times a^*)$$

iguales

$$a^* \times b \neq b \times a^*$$

h)

$$\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}\left[\widetilde{\langle a|b\rangle} - |q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a|b\rangle} \odot |q_1\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[|a\rangle^* \odot |b\rangle - |q_1\rangle \odot |a\rangle^* \odot |b\rangle \odot |q_1\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(a^0 - a^1|q_1\rangle)(b^0 + b^1|q_2\rangle) - |q_1\rangle \odot (a^0 - a^1|q_1\rangle)(b^0 + b^1|q_2\rangle) \odot |q_1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[a^0b^0 + a^0b^1|q_1\rangle - a^1b^0|q_1\rangle - a^1b^1|q_1\rangle|q_1\rangle \right.$$
$$\left. + a^0b^0 + a^0b^1|q_1\rangle - a^1b^0|q_1\rangle - a^1b^1|q_1\rangle|q_2\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2}2\left(a^0b^0 + a^0b^1|q_1\rangle - a^1b^0|q_1\rangle - a^1b^1|q_1\rangle|q_1\rangle\right]$$

$$= a^0b^0 + a^0b^1|q_1\rangle - a^1b^0|q_1\rangle - a^1b^1|q_1\rangle|q_1\rangle$$

¿cumple todas las propiedades?

- $\langle a|a\rangle = \| |a\rangle \|^2$

$$= \frac{1}{2}\left[|a\rangle^* \odot |a\rangle - |q_1\rangle \odot |a\rangle^* \odot |a\rangle \odot |q_1\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(a^0 - a^1|q_1\rangle)(a^0 + a^1|q_1\rangle) - |q_1\rangle \odot ((a^0 - a^1|q_1\rangle)(a^0 + a^1|q_1\rangle)) \odot |q_1\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[a^0a^0 + a^0a^1|q_1\rangle - a^1a^0|q_1\rangle - (a^1|q_1\rangle)^2 - |q_1\rangle \odot a^0a^0 + a^0a^1|q_1\rangle - a^1a^0|q_1\rangle \right.$$
$$\left. - (a^1|q_1\rangle)^2 \odot |q_1\rangle\right.$$

$$= \frac{1}{2}\left[2((a^0)^2 + (a^1)^2\right) = (a^0)^2 + (a^1)^2$$

- $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^* = \frac{1}{2}\left[\widetilde{\langle b|a\rangle}^* - |q_1\rangle \odot \widetilde{\langle b|a\rangle}^* \odot |q_1\rangle\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[(|b\rangle^* \odot |a\rangle)^* - |q_1\rangle \odot (|b\rangle^* \odot |a\rangle)^* \odot |q_1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[(b^0 + b^1|q_1\rangle)(a^0 - a^1|q_1\rangle) - |q_1\rangle \odot (b^0 + b^1|q_1\rangle)(a^0 - a^1|q_2\rangle) \odot |q_1\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2(b^0a^0 - b^0a^1|q_1\rangle + a^0b^1|q_1\rangle - a^1b^1|q_1\rangle|q_1\rangle\right]$$

- $\langle a | \alpha b + \beta c\rangle = \alpha \langle a | b\rangle + \beta \langle a | c\rangle$

$= \frac{1}{2}\left[|a\rangle^* \odot |\alpha b + \beta c\rangle - |q_1\rangle \odot |a\rangle^* \odot |\alpha b + \beta c\rangle \odot |q_1\rangle \right]$

$= \frac{1}{2}\left[(a^0 - a^1|q_1\rangle)(\alpha b^0 + \alpha b^2|q_2\rangle) + (a^0 - a^1|q_1\rangle)(\beta c^0 + \beta c^3|q_3\rangle) \right.$
$\left. + (a^0 - a^1|q_1\rangle)(\alpha b^0 + \alpha b^2|q_2\rangle) + (a^0 - a^1|q_1\rangle)(\beta c^0 + \beta c^3|q_3\rangle)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[2\left[(a^0 - a^1|q_1\rangle)(\alpha b^0 + \alpha b^2|q_2\rangle) + (a^0 - a^1|q_1\rangle)(\beta c^0 + \beta c^3|q_3\rangle)\right]\right]$

$= \alpha (a^0 - a^1|q_1\rangle)(b^0 + b^2|q_2\rangle) + \beta (a^0 - a^1|q_1\rangle)(c^0 + c^3|q_3\rangle)$

$= \alpha (a^0 b^0 + a^0 b^2 |q_2\rangle - a^1 b^0 |q_1\rangle - a^1 b^2 |q_1\rangle|q_2\rangle + \beta \ldots$

$= \alpha \langle a|b\rangle + \beta \langle a|c\rangle$

- $\langle \alpha a + \beta b | c\rangle = \alpha^* \langle a|c\rangle + \beta^* \langle b|c\rangle$

$= \frac{1}{2}\left[|\alpha a + \beta b\rangle^* \odot |c\rangle - |q_1\rangle \odot |\alpha a + \beta b\rangle^* \odot |c\rangle \odot |q_1\rangle \right]$

$= \frac{1}{2}\left[|\alpha a\rangle^* \odot |c\rangle + |\beta b\rangle^* |c\rangle - |q_1\rangle \odot |\alpha a\rangle^* \odot |c\rangle + |\beta b\rangle^* \odot |c\rangle \odot |q_1\rangle \right]$

$= \frac{1}{2}\left[2\left[|\alpha a\rangle^* \odot |c\rangle + |\beta b\rangle^* \odot |c\rangle \right]\right]$

$= (\alpha^* a^0 - \alpha^* a^1|q_1\rangle)(c^0 + c^3|q_3\rangle) + (\beta^* b^0 - \beta b^2|q_2\rangle)(c^0 + c^3|q_3\rangle)$

$= \alpha^* (a^0 c^0 + a^0 c^3 |q_3\rangle - a^1 c^0 |q_1\rangle - a^1 c^3 |q_1\rangle|q_3\rangle) + \beta^* [b^0 c^0 + b^0 c^3 |q_3\rangle - b^2 c^0 |q_3\rangle$
$- b^2 c^3 |q_2\rangle|q_3\rangle$

$= \alpha^* \langle a|c\rangle + \beta^* \langle b|c\rangle$

• $\langle a|0\rangle = 0$; $|0\rangle \in \mathbb{H}$

$= \frac{1}{2}\left[a^* \odot 0 - |q_i\rangle \odot a^* \odot 0 \odot |q_i\rangle\right]$

$= \frac{1}{2}\left[0 - |q_i\rangle \odot 0 \odot |q_i\rangle\right]$

$= 0$

i)

$$n(|a\rangle) = \||a\rangle\| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^* \odot |a\rangle}$$

de ejercicios anteriores se sabe que $\langle a|a\rangle = |a\rangle^* \odot |a\rangle = (a^0)^2 + (a^i)^2$

sea $|b\rangle = b^0 + b^i|q_i\rangle \rightarrow$ su norma euclidiana es $\sqrt{(b^0)^2 + (b^i)^2}$

Por lo que la definicion anterior es una buena definicion de norma ya que

• $n(|a\rangle) = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^* \odot |a\rangle} = \sqrt{(a^0)^2 + (a^i)^2} \geq 0 \leftrightarrow a = 0, \||a\rangle\| = 0$

• $\|\lambda|a\rangle\| = |\lambda| \cdot \||a\rangle\|$

• $\||a\rangle + |b\rangle\| \leq \||a\rangle\| + \||b\rangle\|$

la norma euclidiana y esta definicion de norma son practicamente iguales

j) Compruebe si $|\bar{a}\rangle = \frac{|a\rangle^*}{\||a\rangle\|^2}$ puede considerarse como el elemento simetrico de a respecto a o

$|a\rangle = (a^0, a)$; $|a\rangle^* = (a^0, -a)$
$= a^0 + a^i|q_i\rangle$ $\quad = a^0 - a^i|q_i\rangle$

$\||a\rangle\|^2 = (a^0)^2 + (a^i)^2 = \alpha$

$$|\bar{a}\rangle \odot |a\rangle = \left(\frac{(a^0)^2}{\alpha} + \frac{a\,a}{\alpha}, \cancel{\frac{a^0 a}{\alpha}} - \cancel{\frac{a^0 a}{\alpha}} - \cancel{\frac{a \times a}{\alpha}}\right)$$

$$= \left(\frac{(a^0)^2 + (a^i)^2}{\alpha}, 0\right) = \left(\frac{\alpha}{\alpha}, 0\right) = (1, 0)$$ ✓

L)

$|v\rangle = v_j |q_j\rangle$

$|\bar{a}\rangle = \dfrac{|a\rangle^*}{\||a\rangle\|^2} = |a\rangle^{-1}$

$\||x\rangle\|^2 = |x\rangle^* \odot |x\rangle$

$(x,y)^* = x^* y^*$

$|v'\rangle = |\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle$

$$\||v'\rangle\| = (|\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle)^* \odot (|\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle)$$

$$= |\bar{a}\rangle^* \odot |v\rangle^* \odot |a\rangle^* \odot |\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle$$

$$= |a\rangle^* \odot |v\rangle^* \odot (|\bar{a}\rangle^* \odot |\bar{a}\rangle) \odot |v\rangle \odot |a\rangle$$

$$= |a\rangle^* \odot |v\rangle^* \odot \left(\frac{|a\rangle}{\|a\|^2} \odot \frac{|a\rangle^*}{\|a\|^2}\right) \odot |v\rangle \odot |a\rangle$$

$$= |a\rangle^* \odot |v\rangle^* \odot \left(\frac{|a\rangle \odot |a\rangle^*}{\|a\|^4}\right) \odot |v\rangle \odot |a\rangle$$

$$= |a\rangle^* \odot |v\rangle^* \odot \left(\frac{1}{\|a\|^2}\right) \odot |v\rangle \odot |a\rangle$$

$$= \underbrace{\frac{|a\rangle^*}{\|a\|^2} \odot |a\rangle}_{1} \odot |v\rangle^* \odot |v\rangle$$

$$= \||v\rangle\|^2$$ conserva la norma