Cálculo III

Juan Carlos Pacheco Paez

27 de julio de 2018

1. Funciones vectoriales

Función vectorial: es aquella función con valor vectorial o cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo rango es un conjunto de vectores.

Tenemos más interés en las funciones vectoriales r cuyos valores son vectores tridimensionales; es decir, que para cada número t en el dominio de r, existe un vector único en V_3 denotado como $r(t)$.

Si *f(t), g(t)* y *h(t)* son las componentes del vector *r(t)*, entonces *f,g* y h son funciones llamadas *funciones componentes* de r y podemos escribirlas como:

$$r(t) =< f(t), g(t), h(t) >= f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$$

Usamos la letra t para denotar la variable independiente porque representa el tiempo en la mayor parte de las aplicaciones de las funciones vectoriales.

Ejemplo 1: Si *r(t)*$=< t^3, ln(3-t), \sqrt{t} >$

El dominio de r consiste en todos los valores de t para los que la expresión *r(t)* esté definida. La expresión $t^3, ln(3-t)$ y $\sqrt{t}$ están definidas cuando:

$3 - t > 0$, por lo que $Dom_r = [0, 3]$

Ejemplo 2: Sea $r(t) = (t+2)\hat{i} + (2t^2-3)\hat{j} + t^3\hat{k}$ para

1. Calcular *r(1)* y *r(2)* y trazar sus vectores de posición.

$$r(1) = (1+2)\hat{\imath} + (2(1)^2 - 3)\hat{\jmath} + (1)^3\hat{k} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$$

$$r(2) = (2+2)\hat{\imath} + (2(2)^2 - 3)\hat{\jmath} + (2)^3\hat{k} = 4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 8\hat{k}$$

   Los puntos finales de los vectores posición son: *A(3,-1,1)* y *B(4,5,8)*.

2. ¿Para qué valores de t el vector de posición de *r(t)* está en uno de los planos coordenados? **Img1** El vector de posición *r(t)* está en el plano xy si su componente según k, o sea t^3 es 0; es decir, si *t=0*. El vector de posición está en el plano yz si la componente según $\hat{\imath}$, que es $t+z$, es 0; es decir, si $t=-2$ está en en plano xz si $2t^2-3=0$, es decir, si $t = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \simeq \pm 1.225$

¿Esto es parte de la pregunta 2 o no? El límite de una función vectorial r se define tomando los límites de sus funciones componentes como:

1: Si *r(t)*= $\langle f(t), g(t), h(t)\rangle$, entonces:

$$\lim_{t\to a} r(t) = \langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t)\rangle$$

en caso de que existan los límites de las funciones componentes.

Los límites de las funciones vectoriales obedecen las mismas reglas que las funciones reales.

Ejemplo 3: Encuentre el $\lim_{t\to 0} r(t)$ donde $r(t) = (1+t^3)\hat{\imath} + te^{-t}\hat{\jmath} + \frac{\sin(t)}{t}\hat{k}$.

Aplicando la definición anterior,

L'hopital

$$\lim_{t\to 0} r(t) = \left[\lim_{t\to 0}(1+t^3)\right]\hat{\imath} + \left[\lim_{t\to 0} te^{-t}\right]\hat{\jmath} + \left[\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}\right]\hat{k}$$

$$\lim_{t\to 0} r(t) = \hat{\imath} + \hat{k}$$

Una función vectorial r es continua en a si:

$$\lim_{t\to a} r(t) = r(a)$$

En vista de la definición **1**, tenemos que r es continua en a si y solo si sus funciones componentes *f,g* y h son continuas en a.

Existe una conexión muy estrecha entre las funciones vectoriales y las curvas del espacio.

2. Suponga *f,g* y h son funciones reales en un intervalo I. Entonces el conjunto C de todos los puntos *(x,y,z)* en el espacio en que

$$x = f(t); y = g(t); z = h(t)$$

y t varía en todo el intervalo I, se llama *'curva en el espacio'*. Las ecuaciones de (**2**) se denominan *ecuaciones paramétricas* de C, y t se llama *parámetro*. Podemos considerar que C se traza al mover una partícula cuya posición en el tiempo t es (*f(t), g(t), h(t)*. Si ahora consideramos la función vectorial $r(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$, entonces r(t) es el vector de posición del punto $P\langle f(t), g(t), h(t)\rangle$ sobre C. Así que cualquier función vectorial continua en r define una curva en el espacio C, que se forma por la punta del vector en movimiento.

Img 2

EJEMPLO 4: Describa la curva definida por la función vectorial:

$$r(t) = \langle 1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t\rangle$$

Las ecuaciones paramétricas correspondientes son:

$$x = 1 + t; y = 2 + 5t; z = -1 + 6t$$

Observemos que las ecuaciones paramétricas tienen la forma $r = r_0 + vt$.
$r = (\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}) + t(\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 6\hat{k})$; es decir, son ecuaciones de una recta que pasa por el punto $(1, 2, -1)$ y es paralela al vector $\langle 1, 5, 6\rangle$.

EJEMPLO 5: las curvas cuya ecuación es: $r(t) = 2\cos(t)\hat{\imath} + \sin(t)\hat{\jmath} + t\hat{k}$.

Img3

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = 2\cos(t); y = \sin(t); z = t$$

Puesto que $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$, la curva debe estar en el cilindro elíptico:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Ya que $z = t$, la curva forma un espiral ascendente al rededor del cilindro conforme t se incrementa. Ésta curva se llama hélice.

Ejemplo 6: Halle la función vectorial que represente la curva de la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $y + z = 2$.

Img 4 y 5.

La proyección de C sobre el plano xy es el círculo $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. Entonces:
$x = \cos(t); y = \sin(t); z = 2 - \sin(t), 0 \leq t \leq 2\pi$.

De la ecuación del plano $y + z = 2$, $z = 2 - y = 2 - \sin(t)$. Por tanto, podemos escribir las ecuaciones paramétricas de C como:

$$x = \cos(t); y = \sin(t); z = 2 - \sin(t); 0 \leq t \leq 2\pi$$

La ecuación vectorial es: $r(t) = \cos(t)\hat{\imath} + \sin(t)\hat{\jmath} + (2 - \sin(t))\hat{k}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Sección de ejercicios 10.1 pp. 708.

2. Derivadas

1 La derivada de *r'* de una función vectorial r se define como se hizo para funciones reales.

$$\frac{dr}{dt} = r'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{r(t+h) - r}{h}$$

Si el límite existe.

Img 6 y 7

La recta tangente a lata a la curva C en P se define como la recta a través de P que es paralela al vector tangente *r'(t)*. También tendremos ocasión de considerar el vector tangente unitario que es:

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

Teorema: Si $r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$, donde f,g y h son funciones diferenciales, entonces:

$$r'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle = f'(t)\hat{i} + g'(t)\hat{j} + h'(t)\hat{k}$$

Demostración:

$$r'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} [r(t+\Delta t) - r(t)] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} [\langle f(t+\Delta t), g(t+\Delta t), h(t+\Delta t) \rangle - \langle f(t), g(t), h(t) \rangle]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\langle \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle$$

$$= \left\langle \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle$$

$$r'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

Ejemplo 1:

1. Encuentre la derivada de $r(t) = (1+t^3)\hat{i} + e^{-t}t\hat{j} + \sin(2t)\hat{k}$ Aplicando Teorema 2, $r'(t) = 3t^2\hat{i} + (1-t)e^{-t}\hat{j} + 2\cos(2t)$

2. Hallar el vector tangente unitario en donde $t = 0$ Puesto que $r(0) = \hat{\imath}$ y $r'(0) = \hat{\jmath} + 2\hat{k}$, el vector tangente unitario en el punto $(1, 0, 0)$ es:

$$T(0) = \frac{r'(0)}{|r'(0)|} = \frac{\hat{\jmath} + 2\hat{k}}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\jmath} + \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{k}$$

Ejemplo 2: Calcule r'(t) y dibuje el vector posición r(1) y el vector tangente r'(t) para la curva $r(t) = \sqrt{t}\hat{\imath} + (2-t)\hat{\jmath}$.

$$r'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\hat{\imath} - \hat{\jmath}$$

$$r'(1) = \frac{1}{2}\hat{\imath} - \hat{\jmath}$$

Img8

La curva es una curva plana y la eliminación del parámetro de las ecuaciones $x = \sqrt{t}, y = 2 - t$ da $y = 2 - x^2, 0 \leq x$. Podemos ver que el vector posición $r(1) = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$ comenzando en el origen y el vector tangente *r'(1)* empezando en el punto correspondiente $(1, 1)$.

Ejemplo 3: Halle las ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la hélice que tiene como ecuaciones paramétricas a:

$$x = 2\cos(t), y = \sin(t), z = t$$

en el punto $(0, 1, \frac{\pi}{2})$.

La ecuación vectorial de la hélice es $r(t) = \langle 2\cos(t), \sin(t), t\rangle$, así $r'(t) = \langle -2\sin(t), \cos(t), 1\rangle$. El parámetro que corresponde al punto $(0, 1, \frac{\pi}{2})$ es $t = \frac{\pi}{2}$, por lo que el vector tangente ahí es $r'(\frac{\pi}{2}) = \langle -2, 0, 1\rangle$. La recta tangente a través de $(0, 1, \frac{\pi}{2})$ paralela al vector $\langle -2, 0, 1\rangle$, de modo que las ecuaciones paramétricas son:

$$x = -2t; y = 1; z = \frac{\pi}{2} + 1$$

Al igual que en las funciones reales, la segunda derivada de una función vectorial r es la derivada de *r'*, es decir $r'' = (r')'$. Aquí

$$r''(t) = \langle -2\cos(t), -\sin(t), 0\rangle$$

Se dice que una curva determinada por una función vectorial *r(t)* sobre una intervalo I es suave si *r'* es continua y $r'(t) \neq 0$. **(Excepto quizás en cualquier punto extremo de I).

EJEMPLO 4: Determine si la parábola semicúbica $r(t) = \langle 1 + t^3, t^2 \rangle$ es suave.

Puesto que $r'(t) = \langle 3t^2, 2t \rangle$, tenemos que:

$r'(0) = \langle 0, 0 \rangle = 0$ y por consiguiente, la C no es suave. El punto que corresponde a $t = 0$ es $(1, 0)$. Cualquier C con este tipo de comportamiento *-un cambio abrupto de dirección-* no puede ser suave.

Una curva como la parábola semicircular compuesta por un número finito de pedazos suaves, se llama *'suave en secciones'*.

EJEMPLO 5: Sea $r(t) = ln(t)\hat{\imath} + e^{-3t}\hat{\jmath} + t^2\hat{k}$, encontrar:

1. El dominio de t y determinar donde r es continua. Como $\ln(t)$ no está definido para $t \leq 0$, el dominio de r es el conjunto de los números $\mathbb{R}$ positivos. Además, r es continua en todo este dominio porque cada componente determina una función continua.
2. $r'(t)$ y $r''(t)$. $r'(t) = \frac{1}{t}\hat{\imath} - 3e^{-3t}\hat{\jmath} + 2t\hat{k}$; $r''(t) = -\frac{1}{t^2}\hat{\imath} + 9e^{-3t}\hat{\jmath} + 2\hat{k}$.

EJEMPLO 6: Sea $r(t) = 2t\hat{\imath} + (4 - t^2)\hat{\jmath}$ para $-2 \leq t \leq 2$. Calcular $r'(t)$ y trazar la curva C determinada por *r(t)*. Ilustrar geométricamente *r(1)* y *r'(1)*.

Img9

Como *r(t)* está en V_2, usamos un plano xy para representar los vectores. Eliminando el parámetro en $x = 2t$, $y = 4 - t^2$

$$y = 4 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 4 - \frac{1}{4}x^2$$

$$\begin{bmatrix} t & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ x & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ y & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

La curva C es parte de la parábola que se muestra en la figura. Como $r(1) = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$, el vector de posición correspondiente a $r(1)$ es $\vec{OP}$, donde P es el punto de coordenadas $(2, 3)$. Derivando:

$$r'(t) = 2\hat{\imath} - 2t\hat{\jmath} \rightarrow r'(1) = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$$

EJEMPLO 7: Sea C una curva con ecuaciones paramétricas: Cúbica alabeada

$$x = t, y = t^2, z = t^3; 0 \leq t$$

Encontrar las ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la C correspondiente a $t = 2$.

La curva C está determinada por: $r(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}, 0 \leq t$.

$r'(t) = \hat{i} + 2t\hat{j} + 3t^2\hat{k}$. Es un vector tangente a C en el punto correspondiente a t. En particular, el punto en C correspondiente a $t = 2$.

$$r(2) = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 8\hat{k} \to (2, 4, 8)$$

$$r'(2) = \hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}$$

es un vector tangente.

Por lo que las ecuaciones paramértricas son: $x = 2 + t; y = 4t + 4; z = 8 + 12t; t pertence \mathbb{R}$

Ejercicios: 10.2:

1. Trace la curva plana con la ecuación vectorial $r(t) = \langle \cos(t), \sin(t) \rangle, t = \frac{\pi}{4}$

$$r(t) = \cos(t)\hat{i} + \sin(t)\hat{k} \to r'(t) = -\sin(t)\hat{i} + \cos(t)\hat{j}$$

$$r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$r'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$$

Img 10

2. Encuentre $r'(t)$ $r(t) = (1 + t)\hat{i} + t^2\hat{j}, t = 1$

$$x = 1 + t; y = t^2 \to y = (x - 1)^2$$

$$r(t) = (1 + t)\hat{i} + t^2\hat{j} \to r'(t) = \hat{i} + 2t\hat{j}$$

$$r(1) = 2\hat{i} + \hat{j} \to (2, 1)$$

$$r'(1) = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$$

$$\begin{bmatrix} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ y & -9 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Img 11

3. Dibuje el vector de posición $r'(t)$ y el vector tangente $r'(t)$ para el valor dado de t.
   $r(t) = e^t\hat{\imath} + e^{-2t}\hat{k}, t = 0.$

$$x = e^t; y = e^{-2t}$$

$$r'(t) = e^t\hat{\imath} - 2e^{-2t}\hat{k}$$

$$r'(0) = \hat{\imath} - 2\hat{k}$$

$$\ln(x) = t \to y = e^{-2\ln(x)}$$

$$\begin{bmatrix} x & 0.5 & 1 & 1.5 & 2 \\ y & 4 & 1 & 0.4 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$r(t) = e^t\hat{\imath} + e^{-2t}\hat{k} \to r(0) = \hat{\imath} + \hat{k} \to (1, 1)$$

Img12

3. Ecuaciones de rectas y planos

Una recta en el plano xy está determinada cuando se dan un punto y una dirección sobre la recta (su pendiente o ángulo de inclinación).

De manera semejante, una recta L en el espacio tridimensional está determinada cuando conocemos un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ sobre L y la dirección de L.

Sea $P(x, y, z)$ un punto arbitrario sobre L y sean r y r_0 los vectores de posición de P_0 y P. Si a es el vector con representación de P_0 y P, como se ve en la figura, entonces la ley triángulos para el vector suma da $r = r_0 + a$. Pero ya que a y v son vectores paralelos, existen un escalar t, tal que $a = tv$. Así que:

$$r = r_0 + tv$$

la cual se denomina *'ecuación vectorial'* de L. Cada valor del parámetro t proporciona el vector posición r de un punto sobre L.

Img 13,14

EJEMPLO 1:

1. Calcule la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto $(5, 1, 3)$ y es para al vector $\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$

   Aquí $r_0 = \langle 5, 1, 3\rangle = 5\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ y $v = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$, la ecuación vectorial aqui es:

   $$r = (5\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) + t(\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k})$$

   $$= (5 + t)\hat{i} + (1 + 4)\hat{j} + (3 - 2t)\hat{k}$$

   Las ecuaciones paramétricas son:

   $$x = 5 + t; y = 1 + 4t; z = 3 - 2t$$

   Halle las derivadas de la función vectorial

   a) $r(t) = \hat{i} + \tan(t)\hat{j} + \sec(t)\hat{k}$

   $$r'(t) = \sec^2(t)\hat{j} + \sec(t)\tan(t)\hat{k}$$

$b)$ $r(t) = \ln(4 - t^2)\hat{i} + \sqrt{1 + t}\hat{j} - 4e^{3t}\hat{k}$

$$r'(t) = -\frac{2t}{4 - t^2}\hat{i} + \frac{4}{2\sqrt{1 + t}}\hat{j} - 12e^{3t}\hat{k}$$

4. Reglas de derivación

El teorema siguiente, muestra que las fórmulas de derivación para funciones reales tienen sus contra partes para las funciones vectoriales.

Teorema: Suponga que *'u'* y *'v'* son funciones vectoriales diferenciales, que c es un escalar y que f es una función real. Entonces:

1. $\frac{d}{dt} = [u(t) + v(t)] = u'(t) + v'(t)$
2. $\frac{d}{dt} = [cu(t)] = cu'(t)$
3. $\frac{d}{dt} = [f(t)u(t)] = f'(t)u(t) + f(t)u'(t)$
4. $\frac{d}{dt} = [u(t) \cdot v(t)] = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t)$
5. $\frac{d}{dt} = [u(t) \times v(t)] = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t)$
6. $\frac{d}{dt} = [u(f(t))] = f'(t)u'(t)$ Regla de la cadena

5. Integrales

La integral definida de una función vectorial continua *r(t)* puede definirse en gran medida como se hizo para las funciones reales, excepto que la integral es un vector. Pero podemos expresar la integral de r en términos de las integrales de sus funciones componentes *f,g* y h, como sigue:

Definición: Sea *r(t)*=$f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$. La integral definida desde a hasta b de r es:

$$\int_a^b r(t)dt = \left[\int_a^b f(t)dt\right]\hat{i} + \left[\int_a^b g(t)dt\right]\hat{j} + \left[\int_a^b h(t)dt\right]\hat{k}$$

siempre y cuando *f,g* y h sean integrables en $[a, b]$.

Si *R'(t)=r(t)*, entonces *R(t)* es una antiderivada de *r(t)*. Por lo que el siguiente resultado es análogo al *Teorema fundamental del Cálculo*.

Teorema: Si *R(t)* es una antiderivada de *r(t)* en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b r(t)dt = R(t)|_a = R(b) - R(a)$$

Ejemplo 1: Calcular $\int_0^2 r(t)dt$ para $r(t) = 12t^3\hat{i} + 4e^{2t}\hat{j} + (t+1)^{-1}\hat{k}$

$$\int_0^2 r(t)dt = \left(\int_0^2 12t^3 dt\right)\hat{i} + \left(\int_0^2 4e^{2t}dt\right)\hat{j} + \left(\int_0^2 (t+1)^{-1}dt\right)\hat{k}$$

$$= 3t^4\big|_0 \hat{i} + 2e^{2t}\big|_0^4 \hat{j} + \ln(t+1)\big|_0 \hat{k}$$

$$= 48\hat{i} + (2e^4 - 1)\hat{j} + \ln(3)\hat{k}$$

Ejemplo 2:

1. Si *r(t)*=$1\cos(t)\hat{i} + \sin(t)\hat{j} + 2(t)\hat{k}$, encontrar su integral.

$$\int r(t) = \left(\int 2\cos(t)dt\right)\hat{i} + \left(\int \sin(t)dt\right)\hat{j} + \left(\int 2tdt\right)\hat{k}$$

$$= 2\sin(t)\hat{i} - \cos(t)\hat{j} + t^2\hat{k} + C$$

2. Hallar: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} r(t)dt$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r(t)dt = 2\sin(t)\hat{i} - \cos(t)\hat{j} + t^2\hat{k}\Big|_0$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\hat{i} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\hat{j} + \frac{\pi^2}{4}\hat{k} - 2\sin(0)\hat{i} + \cos(0)\hat{j} - 0\hat{k}$$

$$= 2\hat{i} + \hat{j} + \frac{\pi^2}{4}\hat{k}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r(t)dt = 2\hat{i} + \hat{j} + \frac{\pi^2}{4}\hat{k}$$

6. Movimiento en el espacio

Suponga que una partícula se mueve a través del espacio, de manera que su vector posición en un tiempo t es *r(t)*. Entonces el vector velocidad *v(t)* en el tiempo t se define como:

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h} = r'(t)$$

Así, el vector velocidad es también un vector tangente y señala hacia la dirección de la recta tangente.

La rapidez de la partícula en el tiempo t es la magnitud del vector velocidad; es decir, $|v(t)|$. Esto resulta apropiado, ya que podemos escribir:

$$|v(t)| = |r'(t)| = \frac{ds}{dt}$$

razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo.

Como en el caso del movimiento en una dimensión, la aceleración de la partícula se define como la derivada de la velocidad:

$$a(t) = v'(t) = r''(t)$$

Ejemplo 1: Sea $r(t) = t^3\hat{i} + t^2\hat{j}$, $0 \leq t$ el vector de posición de un objeto que se mueve en un plano. Calcule la velocidad, rapidez y aceleración cuando $t = 1$ e ilústrelo geométricamente.

$v(t) = r'(t) = 3t^2\hat{i} + 2t\hat{j}$

$a(t) = r''(t) = 6t\hat{i} + 2\hat{j}$

Y la rapidez es: $|v(t)| = \sqrt{9t^4 + 4t^2}$

Cuando $t = 1$ $v(1) = 3\hat{i} + 2\hat{j}$

$a(1) = 6\hat{i} + 2\hat{j}$

$|v(1)| = \sqrt{13}$

Para graficar: $x = t^3$ y $y = t^2$

$$t = x^{\frac{1}{3}} \rightarrow y = x^{\frac{2}{3}}$$

Img 15

Ejemplo 2: Determine la velocidad, aceleración y rapidez de una partícula con un vector posición $r(t) =< t^2, e^t, te^t >$.

$v(t) = r'(t) = 2t\hat{i} + e^t\hat{j} + (1+t)e^t\hat{k}$

$a(t) = r''(t) = 2\hat{i} + e^t\hat{j} + (2+t)e^t\hat{k}$

$|v(t)| = \sqrt{4t^2 + e^{2t} + (1+t)^2 e^{2t}}$

Para graficar: $x = t^2$, $y = e^t$, $z = te^t$

$\rightarrow t = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow y = e^{x^{\frac{1}{2}}}$, $z = x^{\frac{1}{2}} e^{x^{\frac{1}{2}}}$

Img 16

Las integrales que se presentaron en la sección 10.2, pueden utilizarse para encontrar los vectores de posición cuando se conocen los vectores de velocidad o aceleración.

Ejemplo 3: Una partícula en movimiento, comienza en una posición inicial $r(0) =< 1, 0, 0 >$ con una velocidad inicial $v(0) = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$. Su aceleración es $a(t) = 4t\hat{i} + 6t\hat{j} + \hat{k}$. Determine su velocidad y posición en el tiempo t.

Puesto que $a(t) = v'(t)$, entonces:

$$v(t) = \int a(t)dt = \int (4t\hat{i} + 6t\hat{j} + \hat{k})dt =$$

$$2t^2\hat{i} + 3t^2\hat{j} + t\hat{k} + C$$

Para determinar el valor de la constante $'C'$, utilizamos que:

$$v(0) = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}.$$

La ecuación anterior da $v(0) = C$; así $C = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$$v(t) = 2t^2\hat{i} + 3t^2\hat{j} + t\hat{k} + \hat{i}\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$v(t) = (2t^2 + 1)\hat{i} + (3t^2 - 1)\hat{j} + (t + 1)\hat{k}$$

Puesto que $v(t) = r'(t)$, entonces:

$$r(t) = \int v(t)dt = \int \left[(2t^2+1)\hat{\imath} + (3t^2-1)\hat{\jmath} + (t+1)\hat{k}\right] dt$$

$$r(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 + t\right)\hat{\imath} + (t^3 - t)\hat{\jmath} + \left(\frac{t^2}{2} + t\right)\hat{k} + D$$

Al hacer $r(0) = \hat{\imath}$ y $r(0) = D \rightarrow D = \hat{\imath}$

Por lo que: $r(t) = \left(\frac{2t^3}{3} + t + 1\right)\hat{\imath} + (t^3 - t)\hat{\jmath} + \left(\frac{t^2}{2} + t\right)\hat{k}$

En general, las integrales vectoriales permiten obtener la velocidad cuando se conoce la aceleración y la posición cuando se conoce la velocidad.

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(u)du$$

$$r(t) = r(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(u)du$$

7. Segunda ley de Newton

La versión vectorial de ésta ley, establece que si en cualquier tiempo t una fuerza $F(t)$ actúa sobre un objeto de masa m, produciendo una aceleración $a(t)$, entonces:

$$F(t) = ma(t)$$

Ejemplo 1: Se dispara una bala con una velocidad inicial V_0 con un rifle cuyo cañón tiene su boca a una altura de h_0 metros sobre el suelo. La única fuerza que actúa sobre la bola es la debida a la gravedad, que produce la aceleración g. Determinar la posición a los t segundos.

Img 17

Como la gravedad g actúa hacia abajo

$$g = -g\hat{j} \rightarrow |g| = 9.81\frac{m}{s^2} = 32\frac{ft}{s^2}$$

De 2da ley de Newton:

$F = ma = -mg\hat{j} \rightarrow a = -g\hat{j} \rightarrow r''(t) = -g\hat{j}$

Entonces para la velocidad:

$$\int r''(t)dt = -\int (g)dt\hat{j} = -gt\hat{j} + C$$

Donde $C = v(0) = V_0$. Por consiguiente:

$$r'(t) = v(t) = -gt\hat{j} + V_0$$

Por lo tanto para la posición de la partícula, tenemos:

$$\int r'(t)dt = -g\int t\hat{j} + V_0\int dt = -g\frac{t^2}{2}\hat{j} + V_0 t + D$$

Donde $D = r(0) = h_0\hat{j}$. Entonces:

$$r(t) = -g\frac{t^2}{2}\hat{j} + V_0 t + h_0\hat{j} = \left(-g\frac{t^2}{2} + h_0\right)\hat{j} + V_0 t$$

Ejemplo 2: Se dispara un proyectil con un ángulo de elevación α y una velocidad inicial V_0. Suponga que la resistencia al aire es despreciable y que la única fuerza externa es la gravedad. Determine:

1. La función posición $r(t)$ del proyectil.
2. ¿Qué valor de α maximiza el alcance (distancia horizontal recorrida)?

Consideremos $F = ma = -mg\hat{j}$, donde $g = |a| = 9.81\frac{m}{s^2}$ $a = -g\hat{j}$.

Puesto que $v'(t) = a$, entonces:

$$v(t) = \int a dt = -g \int dt\hat{j} = -gt\hat{j} + C.$$

donde $C = v(0) = V_0$. Por lo que:

$$v(t) = -gt\hat{j} + V_0$$

Img 18

Para la posición, integramos de nuevo:

$$r(t) = \int v(t)dt = -g \int (t)dt\hat{i} + V_0 \int dt = -g\frac{t^2}{2}\hat{j} + V_0 t + D$$

Como $D = r(0) = 0$, entonces el vector posición es:

$$r(t) = -g\frac{t^2}{2}\hat{j} + V_0 t$$

Si escribimos $|V_0| = V_0$ (la rapidez inicial del proyectil), entonces:

$$V_0 = V_0 \cos\alpha\hat{i} + V_0 \sin\alpha\hat{j};$$

$$r(t) = (V_0 \cos\alpha)t\hat{i} + \left[(V_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right]\hat{j}$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = (V_0 \cos\alpha)t; y = (V_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

*La distancia horizontal d es el valor de x cuando $y = 0$. Al hacer $y = 0$, obtenemos:

$$(V_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

$$t\left(V_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}gt\right) = 0$$

$$t = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g};$$

entonces:

$$d = x = (V_0 \cos \alpha)\left(\frac{2V_0 \sin \alpha}{g}\right) = \frac{V_0^2(2 \sin \alpha \cos \alpha)}{g}$$

Recordemos: $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$$d = x = \frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

Obviamente, d tiene su valor máximo cuando $\sin(2\alpha) = 1$, es decir $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Ejemplo 3: Ejemplo 6 (758) Sokowski (Alumnos)

Ejemplo 4: Un objeto con masa 'm' que se mueve en una trayectoria elíptica con una rapidez angular constante 'w' tiene un vector de posición $r(t)a\cos(w)\hat{\imath} + b\sin(w)\hat{\jmath}$. Calcule la fuerza que activa sobre el objeto y demuestre que se dirige al origen.

Ya que tenemos $r(t)$ y $v(t) = r'(t)$, entonces

$$v(t) = r'(t) = -aw\sin(wt)\hat{\imath} + bw\cos(wt)\hat{\jmath}$$

$$a(t) = v'(t) = -aw^2\cos(wt)\hat{\imath} - bw^2\sin(wt)\hat{\jmath}$$

Ya que $f(t) = ma(t) =$

$$-m(aw^2\cos(wt)\hat{\imath} + bw^2\sin(wt)\hat{\jmath}$$

$$f(t) = -mw^2(awswt\hat{\imath} + b\sin(wt)\hat{\jmath}$$

$$= -mw^2 r(t)$$

Img 19

El signo menos, demuestra que la fuerza actúa en dirección opuesta al vector radio $r(t)$, por lo que señala hacia el origen.

Ejemplo 5: Una partícula $'P'$ gira al rededor del eje z sobre una circunferencia de radio $'k'$ que se encuentra en el plano $z = h$. La rapidez angular $\frac{d\theta}{dt}$ es una constante $'w'$. El vector $w = wk$ que está girando a lo largo del eje z y tiene por magnitud a $'w'$ es la velocidad angular de $'P'$.

Demostrar que la velocidad $r(t)$ de $'P'$ es el producto vectorial de $'w'$ con el vector de posición $r(t)$ de $'P'$.

El movimiento de $'P'$ está dado por:

$$r(t) = k\cos(wt)\hat{i} + k\sin(wt)\hat{j} + hk$$

$$r'(t) = -wk\sin(wt)\hat{i} + wk\cos(wt)\hat{j}$$

$$w \times r(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & w \\ k\cos(wt) & k\sin(wt) & h \end{vmatrix}$$

$$= -wk\sin(wt)\hat{i} + wk\cos(wt)\hat{j} = r'(t)$$

Img 20

8. Componentes tangencial y normal de la aceleración

Las componentes tangencial y normal de la aceleración son útiles para el estudio de las fuerzas que actúan sobre un objeto en movimiento que recorre una curva $'C'$.

Img 21

$$a_T = \frac{r'(t) \cdot r''(t)}{|r'(t)|}$$

$$a_N = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3}|r'(t)|^2 = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|}$$

Sin importar la forma en que un objeto se mueva por el espacio, su aceleración siempre está en el plano T y N, el plano osculador. (Recuerde que T proporciona la dirección del movimiento y N señala la dirección hacía la cual la curva se tuerce.

Ejemplo 1: Una partícula se mueve de acuerdo con una función de posición $r(t) =< t^2, t^2, t^3 >$. Calcule las componentes tangenciales y la normal de la aceleración.

$$r(t) = t^2\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$$

$$v(t) = r'(t) = 2t\hat{i} + 2t\hat{j} + 3t^2\hat{k}$$

$$|r'(t)| = \sqrt{8t^2 + 9t^4} \tag{1}$$

$$a(t) = v'(t) = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 6t\hat{k}$$

Por lo que:

$$a_T = \frac{(2t\hat{i} + 2t\hat{j} + 3t^2\hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} + 6t\hat{k})}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}} = \frac{4t + 4t + 18t^3}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$$

$$a_T = \frac{8t + 18t^3}{(8t^2 + 9t^4)^{\frac{1}{2}}}$$

$$r'(t) \times r''(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2t & 2t & 3t^2 \\ 2 & 2 & 6t \end{vmatrix} =$$

$$(12t^2 - 6t^2)\hat{i} - (12t^2 - 6t^2)\hat{j} + (4t - 4t)\hat{k}$$

$$r'(t) \times r''(t) = 6t^2\hat{i} - 6t^2\hat{j}$$

$$|r'(t) \times r''(t)| = \sqrt{36t^4 + 36t^4} = \sqrt{72t^4}$$

$$|r'(t) \times r''(t)| = 6\sqrt{2}t^2$$

$$a_N = \frac{6\sqrt{2}t^2}{(8t^2 + 9t^4)^{\frac{1}{2}}}$$

Ejemplo 2: El vector de posición de una partícula al tiempo $'t'$ (en segundos) es: $r(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$, para $1 \leq t \leq 4$.

1. Encontrar las componentes tangenciales y la normal de la $'a'$ en el tiempo $'t'$.

$$v(t) = r'(t) = \hat{i} + 2t\hat{j} + 3t^2\hat{k} = (1 + 4t^2 + 9t^4)^{\frac{1}{2}}$$

$$a(t) = v'(t) = 2\hat{j} + 6t\hat{k}$$

$$a_T = \frac{r'(t) \cdot r''(t)}{|r'(t)|} = \frac{4t + 18t^3}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{\frac{1}{2}}}$$

$$r'(t) \times r''(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = (12t^2 - 6t^2)\hat{i} - 6t\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$r'(t) \times r''(t) = 6t^2\hat{i} - 6t\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$|r'(t) \times r''(t)| = \sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4}$$

$$a_N = \frac{2(9t^4+9t^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(1+4t^2+9t^4)^{\frac{1}{2}}}$$

2. Calcular a_N, a_T y $v(t)$ en los tiempos $t = 1, 2, 3, 4$ con una precisión de dos decimales y describir el movimiento de la partícula.

$$\begin{bmatrix} t & P & a_N & a_T & |v(t)| \\ 1 & (1,1,1) & 2.33 & 5.88 & 3.74 \\ 2 & (2,4,8) & 2.12 & 17.99 & 27.68 \\ 3 & (3,9,27) & 2.06 & 17.99 & 27.68 \\ 4 & (4,16,64) & 2.03 & 24.00 & 48.67 \end{bmatrix}$$

8.1. Ejercicios de reforzamiento del círculo osculador

1. Encuentre las ecuaciones de los círculos osculadores de la elipse $9x^2 + 4y^2$ en los puntos $(2, 0)$ y $(0, 3)$. Utilice una calculadora

   Podemos usar la parametrización: $x = 2\cos(t)$, $y = 3\sin(t)$

$$r(t) = 2\cos(t)\hat{i} + 3\sin(t)\hat{j} \text{ y } k = \frac{|f'(t)g''(t)-g'(t)f''(t)|}{\left[(f'(t))^2+(g'(t))^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$f'(t) = -2\sin(t) \to f''(t) = -2\cos(t)$

$g'(t) = 3\cos(t) \to g''(t) = -3\sin(t)$

$$|f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)| = |\,[(-2\sin(t))(-3\sin(t)) - (3\cos(t)(-2\cos(t)]\,| = \\ |6\sin^2(t) + 6\cos^2(t)| = |6| = 6$$

$(f'(t))^2 = (-2\sin(t))^2 = 4\sin^2(t)$

$(g'(t))^2 = (3\cos(t))^2 = 9\cos^(t)$

$$\left[(f')^2 + (g')^2\right]^{\frac{3}{2}} = \left[4\sin^2(t) + 2\cos^2(t)\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$k(t) = \frac{6}{\left[4\sin^2(t) + 9\cos^2(t)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Para $(2, 0)$, tenemos:

$$x = 2\cos(t) \to 2 = 2\cos(t); \cos(t) = 1$$

$$t = 0$$

$$y = 3\sin(t) \to 0 = 3\sin(t); \sin(t) = 0$$

Img 22

$A(0,3)$ $A'(0,-3)$ $B(2,0)$ $B'(-2,0)$

$C = \sqrt{5}$

$F(0, \sqrt{5}$ $F'(0, -\sqrt{5}$

$E = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Img 23

$$k(0) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} \to k(0) = \frac{2}{9} \to \delta = \frac{1}{k} = \frac{9}{2}$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{81}{4}$$

Para $(0,3)$, tenemos:

$$x = 2\cos(t) \to 0 = 2\cos(t); \cos(t) = 0$$

$$t = \frac{\pi}{2}$$

$$y = 3\sin(t) \to 3 = 3\sin(t); \sin(t) = 1$$

2. Hallar la ecuación del círculo osculador de $y = e^{(-x^2)}$ en el punto $(0,1)$. Primero hallamos $k(x) = \left[\frac{f''(x)}{1+(f'(x))^2}\right]^{\frac{3}{2}}$

$$f(x) = e^{-x^2} \to f'(x) = -2xe^{-x^2} \to f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$$

$$f''(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2) \to |f''(x)| = \sqrt{\left[e^{-x^2}(4x^2-2)\right]^2}$$

$$|f''(x)| = \sqrt{e^{-2x^2}(4x^2-2)^2}$$

$$\left[1 + (f'(x))^2\right]^{\frac{3}{2}} = \left[1 + (4x^2e^{(-2x^2)}\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$k(x) = \frac{\sqrt{e^{-2x^2}(4x^2-2)^2}}{[1+(4x^2e^{(-2x^2)}]^{\frac{3}{2}}}$$

$$k(0) = \frac{\sqrt{1(0-2)^2}}{[1+0\cdot 1]^2} = \frac{\sqrt{1(-2)^2}}{[1]^{\frac{3}{2}}}$$

$$k(0) = \frac{\sqrt{4}}{1} = 2$$

$$k(0) = 2$$

$$\delta = \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$$

$y = e^{-x^2}$

$$\begin{vmatrix} x & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ y & - & 0.01 & 0.36 & 1 & 0.36 & 0.01 & \end{vmatrix}$$

Img 24

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

9. Derivadas parciales

Definición: Una función de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) de un conjunto D un número real único que se denota con $f(x, y)$. El conjunto D es el dominio de f y su rango es el conjunto de valores que toma f, es decir $f(x, y)|(x, y) \in D$.

A menudo se escribe $z = f(x, y)$. x y y son variables independientes y z la variable dependiente. Una f de dos variables es justo una función cuyo dominio es un subconjunto de R.

Una manera de representar tal función es un diagrama de flechas.

Img 25 Para una función f dada mediante una fórmula algebraica, recuerde que el dominio consiste en todos los puntos (x, y) donde f este bien definida.

EJEMPLO 1: Determine los dominios de las funciones siguientes y evalúe $f(3, 2)$.

1. $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

$$f(3, 2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$f(3, 2) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

   f tiene sentido para: $0 \leq x + y + 1$ ó $-x - 1 \leq y$ y para $x \neq 1$

   Por lo que: **Img 26**

$$D = (x, y)|x + y + 1 \geq 0, x \neq 1$$

2. $f(x, y) = xln(y^2 - x)$ **$f(3, 2) = 3ln(2^2 - 3) = 3ln(1) = 0$

   Ya que $ln(y^2 - x)$ se define sólo para $y^2 - x > 0$, es decir $x < y^2$, entonces:

   Img 27

$$D = (x, y)|x < y^2$$

3. $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ **Sin $f(3, 2)$ y con rango? Ya que $9 - x^2 - y^2 \geq 0$ ó $x^2 + y^2 \leq 9$

   $D(x, y)|x^2yy^2 \leq 9$

   El rango de g es:

$$z|z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D$$

$$9-x^2-y^2 \leq 9 \to \sqrt{9-x^2-y^2}=3$$

Por lo que $z|0 \geq z \geq 3 = [0,3]$

3. Encontrar el dominio de $f(x,y) = \frac{x+y}{\tan(x+y)}$

$$D = (x,y)|x+y \neq k\pi, kenteros \tag{2}$$

4. $f(x,y) = \sqrt{x-y}$

$$x-y \geq 0 \to x \geq y \to D = (x,y)|x \geq y$$

$$z|z \geq 0$$

5. $f(x,y,z) = x^2 ln(x-y+z)$

$$x-y+z > 0 \to D = (x,y,z)|x-y+z > 0$$

$$w|w \in R$$

6. $f(x,y,z) = ln(z-y) + xy\sin(z)$

$$z-y > 0 \to D = (x,y,z) \in R^3|z > y$$

$$z > y$$

Definición: Las curvas de nivel de una función f de dos variables son las curvas con ecuaciones $f(x,y) = k$, donde k es un constante (en el recorrido de f).

Ejemplo 1: Dibuje las curvas de nivel de la función $f(x,y) = 6-3x-2y$ para los valores $k = -6, 0, 6, 12$.

Las curvas de nivel son:

$$6-3x-2y = k$$

o bien

$$3x+2y+(k-6) = 0$$

$$\left(y = \frac{-3x-(k-6)}{2}, \text{familia de curvas con } m = -\frac{3}{2}\right)$$

Las curvas son:

$$k = -6 \to 3x + 2y - 12 = 0$$

$$k = 0 \to 3x + 2y - 6 = 0$$

$$k = 6 \to 3x + 2y = 0$$

$$k = 12 \to 23x + 2y + 6 = 0$$

Img 28 Mapa de contorno de $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$

Ejemplo 2: Dibuje las curvas de nivel de la función: $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ para $k = 0, 1, 2, 3$.

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \to 9 - x^2 - y^2 = k^2 \to x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

Familia de círculos concéntricos y radio $\sqrt{9 - k^2}$

$$k = 0 \to x^2 + y^2 = 9$$

$$k = 1 \to x^2 + y^2 = 8$$

$$k = 2 \to x^2 + y^2 = 5$$

$$k = 3 \to x^2 + y^2 = 0$$

Img 29

Ejemplo 3: Dibuje algunas curvas de nivel de la función $h(x, y) = 4x^2 + y^2$

$$4x^2 + y^2 = k \to \frac{4x^2}{k} + \frac{y^2}{k} = 1 \to \frac{4x^2}{\frac{k}{4}} + \frac{y^2}{k} = 1$$

Describen elipses con semiejes $\frac{\sqrt{k}}{2}$ y $\sqrt{k}$.

Ejemplo 4: Encuentre las superficies de nivel de la función: $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ para $k=1,2,3$.

$$x^2+y^2+z^2=k$$

Esferas concéntricas de radio $\sqrt{k}$.

Img 30

9.1. Derivadas parciales

Si $z=f(x,y)$, las derivadas parciales las podemos escribir como:

Si f es una función de dos variables, sus derivadas parciales son las funciones f_x y f_y definidas por:

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

9.2. Notación para derivadas parciales

Si $z=f(x,y)$, escribimos:

$$f_x(x,y)=f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=f_1=D_1f=D_xf$$

$$f_y(x,y)=f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=f_2=D_2f=D_yf$$

9.3. Reglas para calcular las derivadas parciales de z=f(x,y)

1. Para hallar f_x considere y como una constante y derive $f(x,y)$ con respecto de x.
2. Caso igual para y.

Ejemplo 1: Si $f(x,y)=x^3+x^2y^3-2y^2$, encuentre $f_x(2,1)$ y $f_y(2,1)$.

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3 - 2y^2 \to f_x(2,1) = 3(2)^2 + 2(2)(1)^3 - 2(1)^2 = 16$$

$$f_y(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 - 4y \to f_y(2,1) = (2)^3 + 3(2)^2(1)^2 - 4(1) = 8$$

Img 31

Ejemplo 2: Si $f(x,y) = 4 - 4x^2 - 2y^2$, calcule $f_x(1,1)$ y $f_y(1,1)$.

$$f_x(x,y) = -2x \to f_x(1,1) = -2$$

$$f_y(x,y) = -4y \to f_y(1,1) = -4$$

La gráfica de f es el paraboloide $z = 4 - 4x^2 - 2y^2$ y el plano vertical $y = 1$ lo cruza en la parábola $z = 2 - x^2$, $y = 1$. La pendiente de la recta tangente a esta parábola en el punto $(1,1,1)$ es $f_x(1,1) = -2$. De manera similar, la curva C_2 que en el plano $x = 1$ cruza al paraboloide es la parábola $z = 3 - 2y^2$, $x = 1$ y la pendiente de la recta tangente en $(1,1,1)$ es $f_y(1,1) = -4$.

Img 32 y Img33

Ejemplo 3: Obtener $\frac{\partial w}{\partial y}$ para $w = xy^2e^{xy}$.

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \left(xy^2\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy}\right) + \left(e^{xy}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2\right) = xy^2\left(xe^{xy}\right) + e^{xy}\left(2xy\right) = \left(xy+2\right)xe^{xy}$$

Hay fórmulas para las derivadas parciales parecidas a las de funciones de una variables. Por ejemplo, si $u = f(x,y)$ y $v = g(x,y)$, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv) = u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - u \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}{v^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\cos(u) = -\sin(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}e^a = e^a \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

EJEMPLO 4: Si $f(x,y) = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$, calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial d}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{1}{1+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial d}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right) = -\cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{1}{(1+y)^2}$$

9.4. Funciones de dos o más variables

Las derivadas parciales también pueden definirse para funciones de 3 o más variables. Por ejemplo, si f es una función de 3 variables (x, y, z), su derivada parcial con respecto a x se define como:

$$f_x(x,y,z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h}$$

Podemos escribir también:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{xi} = f_i = D_i f$$

EJEMPLO 1: Encuentre f_x, f_y, f_z si $f(x,y,z) = e^{xy} \cdot ln(z)$.

$$f_x = y \cdot e^{xy} ln(z),\ \ f_y = x \cdot e^{xy} ln(z),\ \ f_z = \frac{e^{xy}}{z}$$

EJEMPLO 2: Sea $w = x^2y^3 \cdot \sin(z) + e^{xz}$, encontrar: $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy^3 \sin(z) + ze^{xz}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 3x^2y^2 \sin(z)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = x^2y^3 \cos(z) + xe^{xz}$$

9.5. Derivadas de orden superior

Si f es una función de dos variables, entonces sus derivadas parciales f_x y f_y también son funciones de dos variables; de modo que podemos considerar a sus derivadas parciales $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ y $(f_y)_y$, las cuales se llaman segundas derivadas parciales de f.

Si $z = f(x, y)$, utilizamos la notación:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Ejemplo 1: Calcule las segundas derivadas parciales de:

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

Sabemos que $f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$ y $f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$

$$f_x x = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x - 2y^3$$

$$f_x y = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

$$f_y x = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2$$

$$f_y y = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4$$

9.6. Teorema de Clairaut:

Suponga que f se define en un disco D que contiene al punto (a, b). Si las funciones $f_x y$ y $f_y x$ son continuas en D, entonces:

$$f_x y(a, b) = f_y x(a, b)$$

EJEMPLO 2: Encuentre las segundas derivadas parciales de:

$$f(x, y) = x^3 y^2 - 2x^2 y - 3x$$

$$f_x(x, y) = 3x^2 y^2 - 4xy + 3$$

$$f_y(x, y) = 2x^3 y - 2x^2$$

$$f_{xy}(x, y) = 6x^2 y - 4x = f_{yx}(x, y)$$

Las derivadas parciales de tercer orden o superiores también pueden definirse, por ejemplo: $f_{xyy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$.

EJEMPLO 1: Calcular f_{xxyz} si $f(x, y) = \sin(3x + yz)$.

$$f_x = 3\cos(3x + yz)$$

$$f_{xx} = -9\sin(3x + yz)$$

$$f_{xxy} = -9z\cos(3x + yz)$$

$$f_{xxyz} = -9\cos(3x + yz) + 9yz\sin(3x + yz)$$

9.7. Ecuaciones diferenciales parciales

Las derivadas parciales se presentan en las ecuaciones diferenciales parciales que expresan ciertas leyes físicas, por ejemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Se llama *Ecuación de Laplace*, en honor Pierre Laplace. Sus soluciones se llaman *funciones armónicas* e intervienen en los problemas de la conducción de calor, flujo de fluidos y potencial eléctrico.

Ejemplo 1: Pruebe que la función $u(x, y) = e^x \sin(y)$ es una solución para la ecuación de *Laplace*.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} e^x \sin(y) = e^x \sin(y) \to \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \sin(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} e^x \sin(y) = -e^x \cos(y) \to \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \sin(y)$$

Para ver si es solución:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x \sin(y) - e^x \sin(y) = 0$$

9.8. Ecuación de onda

Describe el movimiento de una onda que puede ser una onda del mar, de sonido, de luz o una onda que viaja a lo largo de una cuerda vibrante.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Donde a es una constante que depende de la densidad y tensión de la cuerda.

Ejemplo 2: Probar que la $u(x, t) = \sin(x - at)$ satisface la ec. de la onda.

$$u_x = \cos(x - at) \to u_{xx} = -\sin(x - at)$$

$$u_t = -a \cos(x - at) \to u_t t = -a^2 \sin(x - at) = a^2 \cdot u_{xx}$$

Por lo tanto satisface la ec. de onda.

Ejemplo 3: Compruebe que la función $u = e^{-\alpha^2 k^2 t} \sin(kx)$ sea una solución de la ecuación de conducción de calor $u_t = \alpha^2 \cdot u_{xx}$.

Ejemplo 4:

1. Determine si $u = ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ es una solución de ec. de*Laplace*. $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
2. $u = e^{-x} \cos(y) - e^{-y} \cos(x)$.

9.9. Planos tangentes

Suponga que una superficie S tiene la ecuación $z = f(x, y)$, donde las primeras derivadas de f son continuas y sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre S. Sean C_1 y C_2 las curvas que se obtienen al cortar los planos verticales $y = y_0$ y $x = x_0$ con las superficies entonces el punto P está en C_1 y C_2. Sean T_1 y T_2 las rectas tangentes a las curvas C_1 y C_2 en el punto P. Entonces el plano tangente a la superficie S en el punto P se define como el plano que contiene las dos rectas tangentes T_1 y T_2.

El plano tangente en P es el plano que más se aproxima a la superficie S cerca del punto P.

Img 34

Suponga que f tiene derivadas parciales continuas. Una ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Ejemplo 1: Encuentre el plano tangente al paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ en el punto $(1, 1, 3)$.

$$\text{Sea} f(x, y) = 2x^2 + y^2 \rightarrow$$

$$f_x(x, y) = 4x \rightarrow f_x(1, 1) = 4$$

$$f_y(x, y) = 2y \rightarrow f_y(1, 1) = 2$$

Así la ecuación del plano tangente en $(1, 1, 3)$ es:

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1) = 4x + 2y - 3$$

Ejemplo 2: Encuentre una ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.

1.
$$z = y^2 - x^2, (-4, 5, 9)$$

PREGUNTAR PQE NO ENTENDÍ

Teorema: Sea $f(x, y, z)$ una función en primeras derivadas parciales continuas y sea P_0 un punto en la gráfica S de $f(x, y, z) = 0$. Si f_x, f_y, f_z no son todas cero en P_0, entonces el vector $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es normal al punto tangente a S en P_0.

Corolario: El plano tangente a la gráfica D $f(x, y, z) = 0$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ tiene como ecuación.

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Ejemplo 1: Encontrar una ecuación del plano tangente al elipsoide $\frac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^{12} = 12$ en el punto $P_0(2, 1, \sqrt{6})$.

Consideremos $f(x, y, z) = 0$ como dos puntos

$$f(x, y, z) = \frac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^{12} - 12 = 0, \text{luego:}$$

$$f_x(x, y, z) = \frac{3}{2}x, f_y(x, y, z) = 6y, f_z(x, y, z) = 2z$$

Por lo tanto en $P_0(2, 1, \sqrt{6})$:

$$f_x(2, 1, \sqrt{6}) = 3, f_y(2, 1, \sqrt{6}) = 6, f_z(2, 1, \sqrt{6}) = 2\sqrt{6}$$

La ecuación del plano es:

$$3(x - 2) + 6(y - 1) + 2\sqrt{6}(z - \sqrt{6}) = 0 \rightarrow 3x + 6y - 2\sqrt{6}z - 24 = 0$$

Ejemplo 2: Obtenga las ecuaciones para el plano tangente en el punto P indicado.

1.

$$4x^2 - y^2 + 3z^2 = 10 \text{ en } P(2, -3, 1) \rightarrow R = 16(x - 2) + 6(y + 3) + 6(z - 1) = 0$$

2.

$$z = 4x^2 + 9y^2 \text{ en } P(-2,-1,25) \to R = 16(x+2) + 181(y+1) + (z-25) = 0$$

3.

$$xy + 2yz - xz^2 + 10 = 0 \text{ en } P(-5,5,1) \to R = 4(x+5) - 3(y-5) + 20(z-1) = 0$$

4.

$$z = 2e^{-x}\cos(y) \text{ en } P(0,\frac{x}{3},1) \to R = x + \sqrt{3}(y - \frac{\pi}{3}) + (z-1) = 0$$

5.

$$xyz - 4xz^3 + y^3 = 10 \text{ en } P(-1,2,1)$$

10. Incrementos y Diferenciales

Si f es una función de dos variables x y y, entonces los símbolos Δx y Δy denotan los incrementos de x y y.

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x, y) - (f(x,y))$$

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} f(x, y+\Delta y) - (f(x,y))$$

Entonces el incremento de $w = f(x,y)$ se define como:

Definición: Sea $w = f(x,y)$ y sean Δx y Δy los incrementos de x y y respectivamente. El incremento Δw de $w = f(x,y)$ es:

$$\Delta w = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

Ejemplo 1: Sea $w = f(x,y) = 3x^2 - xy$

1. Suponiendo de los incrementos de x y y son Δx y Δy, determinar Δw

$$\Delta w = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$\Delta w = [3(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x)(y+\Delta y)] - (3x^2 - xy)$$

$$= [3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - (xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y)] - (3x^2 + xy)$$

2. Aplicar Δw para calcular el cambio en $f(x,y)$ cuando (x,y) varía de $(1,2)$ a $(1.01, 1.98)$ Si (x,y) varía de $(1,2)$ a $(1.01, 1.98)$, se tiene que: $x = 1$ y $\Delta x = 0.01$, $y = 2$ y $\Delta y = -0.02$, entonces:

$$\Delta w = 6(1)(0.01) + 3(0.01)^2 - (1)(-0.02) \cdot 2(0.01) - (0.01)(-0.02)$$

$$\to \Delta w = 0.0605$$

*La fórmula solo sirve para calcular la diferencia de los valores funcionales en dos puntos. No es adecuada para obtener los resultados sobre la variación de $f(x,y)$.

Teorema: Sea $w = f(x, y)$, donde f es un función definida en una región rectangular $R = [(x, y)|a < x < b, c < y < d]$ para la cual f_x y f_y existen en toda R y son continuas en el punto (x_0, y_0) de R. Si $(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0)$ está en R y
$\Delta w = f(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0) - f(x_0, y_0)$, entonces:

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + E_1\Delta x + E_2\Delta y$$

donde E_1 y E_2 son funciones de Δx y Δy que tienen límite 0 cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$

Img 35

Ejemplo 1: Sea $w = 3x^2 - xy$, obtener expresiones para E_1 y E_2 que satisfagan el teorema anterior con $(x_0, y_0) = (x, y)$.

Del ejercicio anterior tenemos que:

$$3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - (xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y)] - (3x^2 + xy) \tag{3}$$

que también puede escribirse como:

$$\Delta w = (6x - y)\Delta x + (-x)\Delta y + (3\Delta x)(\Delta x) + (-\Delta x)\Delta y$$

Es decir que:

$$f_x(x, y) = 6x - y, f_y(x, y) = -x, E_1 = 3\Delta x, E_2 = -\Delta x$$

aunque E_1 y E_2 no son únicas, pues podemos escribir:

$$\Delta w = (6x - y)\Delta x + (-x)\Delta y + (3\Delta x - \Delta y)\Delta x + (0) \cdot \Delta y$$

en cuyo caso $E_1 = (3\Delta x - \Delta y)$ y $E_2 = 0$.

Ejemplo 2: Encuentre los valores de E_1 y E_2 que satisfagan el teorema anterior con $f(x) = 4y^2 - 3xy + 2x$.

$$\Delta w = [4(y + \Delta y)^2 - 3(x + \Delta x)(y + \Delta y) + 2(x\Delta x)] - [4y^2 - 3xy + 2x]$$

$$= [4(y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2 - 3(xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y) + 2x + 2\Delta x] - 4y^2 + 3xy - 2x$$

$$= 4y^2 + 8y\Delta y + 4(\Delta y)^2 - 3xy - 3x\Delta y - 3y\Delta x - 3\Delta x\Delta y - 2x + 2\Delta x - 4y^2 - 3xy - 2x$$

$$= 8y\Delta y + 4(\Delta y)(\Delta y) - 3x(\Delta y) - 3y\Delta x - 3\Delta x\Delta y + 2\Delta x$$

$$\Delta w = (2 - 3y)\Delta x + (-3x + 8y)\Delta y - (-3\Delta y)\Delta x + 4\Delta y(\Delta y)$$

Por lo tanto:

$$E_1 = -3\Delta y, E_2 = 4\Delta y$$

Ejemplo 3: Encuentre E_1 y E_2 si $f(x, y) = (2x - y)^2$.

Ejemplo 4: Encuentre E_1 y E_2 si $f(x, y) = x^3 + y^3$.

$$E_1 = 3x\Delta x + (\Delta x)^2, E_2 = 3y\Delta y + (\Delta y)^2$$

Ejemplo 5: Encuentre E_1 y E_2 si $f(x, y) = 2x^2 - xy^2 + 3y$.

Definición: Sea $w = f(x, y)$ y sean Δx y Δy incrementos de x, y respectivamente

1. Las diferenciales ∂x y ∂y de las variables independientes x, y son:

$$\partial x = \Delta x, \partial y = \Delta y$$

2. La diferencial ∂w de la variable dependiente w es:

$$\partial w = f_x(x, y)\partial x + f_y(x, y)\partial y = \frac{\partial w}{\partial x}\partial x + \frac{\partial w}{\partial y}\partial y$$

3. Para una función de dos variables $z = f(x, y)$, definimos la diferencial ∂z (t también llamada diferencial total), se define mediante:

$$\partial z = f_x(x, y)\partial x + f_y(x, y)\partial y = \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}\partial y$$

Img 36

Ejemplo 1: Sea $z = 3x^2 - xy$. Encuentre ∂z y úsela para calcular aprox. el cambio en z cuando (x, y) varía de $(1, 2)$ a $(1.01, 1.98)$. ¿Cómo es esta estimación con el cambio exacto en z?

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}\partial y = (6x - y)\partial x + (-x)\partial y$$

Sustituyendo $x = 1, y = 2, \Delta x = \partial x = 0.01, \Delta y = \partial y = -0.02$, entonces:

$$\partial z = (6 - 2)(0.01) + (-1)(-0.02) = 0.06$$

En el ejemplo anterior demostramos que $\Delta w = 0.0605$. Por lo tanto, el error que se comete al usar ∂z es 0.0005.

Ejemplo 2: si $z = f(x, y) = x^3 + 3xy - y^2$

1. Encuentre la diferencial ∂z

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}\partial y = (2x + 3y)\partial x + (3x - 2y)\partial y$$

2. Si x cambia de 2 a 2.05 y de 3 a 2.96, compare los valores de Δz y ∂z Al hacer que $x = 2$, $\Delta x = \partial x = 0.05$, $y = 3$, $\Delta y = \partial y = -0.04$ entonces
$\partial z = [2(2) + 3(3)] \cdot 0.05 + [3(2) - 2(3)] \cdot (-0.04) \rightarrow \partial z = 0.65$

$$\Delta z = f(2.05, 2.96) - f(2, 3)$$

$$= [(2.05)^2 + 3(2.05)(2.96) - (2.96)^2] - [2^2 + 3(2)(3) - 3^2]$$

$$\rightarrow \Delta z = 0.6449$$

Observe de $\Delta z \approx \partial z$ pero ∂z es más fácil de calcular.

Ejemplo 3: El radio de la base y de la altura de una cono recto circular mide 10cm y 25cm respectivamente, con un posible error en la medición de 0.01cm cuando mucho, para cada medida. Utiliza las diferenciales para calcular el error máximo en volumen calculado del cono.

Sabemos que el volumen v de un cono con el radio r de la base y la altura h es $v = \pi r^2 h/3$, la diferencial de v es:

$$\partial v = \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \partial r + \frac{\partial v}{\partial h} \cdot \partial h = \frac{2\pi \cdot r \cdot h}{3} \cdot \partial r + \frac{\pi \cdot r^2}{3} \cdot \partial h$$

Puesto que los errores son, cuando mucho, de 0.01cm, tenemos:

$$|\Delta x| \leq 0.1, |\Delta y| \leq 0.1$$

Para encontrar el error máximo en el volumen, tomamos el error máximo en la media de r y h. Como consecuencia $\partial r = 0.1$ y $\partial h = 0.1$, $r = 10$ y $h = 25$; entonces:

$$\partial v = \frac{500\pi}{3}(0.1) + \frac{100\pi}{3}(0.1) = 20\pi$$

Por lo tanto el error máximo en el volumen calculado es de:

$$20\pi cm^3 = 63cm^3$$

Ejemplo 4: Encuentre la diferencial de $z = f(x, y) = x^2 \sin(y) + 2y^{\frac{3}{2}}$.

$$R = \partial z = 2x \sin(y)\partial x + (x^2 \cos(y) + 3y^{\frac{1}{2}}\partial y$$

Ejemplo 5: Si $z = 5x^2 + y^2$ cambia de $(1, 2)$ a $(1.05, 2.1)$ compare los valores de Δz y ∂z.

$$\Delta z = 0.9225, \partial z = 0.9$$

10.1. Lista de ejercicios

1. Hallar el dominio de las funciones vectoriales:

   a) $r(t) = \sqrt{t-1} \cdot \hat{i} + \sqrt{2-t} \cdot \hat{j}$.

   b) $r(t) = \tan(t) \cdot \hat{i} + (t^2 + 8t)\hat{j}$.

2. Encuentre el límite:

   c) $\lim_{t \to 1} \left(\sqrt{t+3} \cdot \hat{i} + \frac{t-1}{t^2-1} \cdot \hat{j} + \frac{\tan(t)}{t} \cdot \hat{k} \right)$

   d) $\lim_{t \to \infty} \left(e^{-t} \cdot \hat{i} + \frac{t-1}{t+1} \cdot \hat{j} + \tan^{-1}(t) \cdot \hat{k} \right)$

3. Trace la curva de la ecuación vectorial dada. Indique con una flecha la dirección en que t se incrementa:

   e) $r(t) = \langle t^4 + 1, t \rangle$

   f) $r(t) = \langle \sin(t), 3, \cos(t) \rangle$

   g) $r(t) = 3t\hat{i} + (1 - 9t^2)\hat{j}$

   h) $r(t) = t\hat{i} + 4\cos(t)\hat{j} + 9\sin(t)\hat{k}$

4. Trace la curva en el plano xy, determine $r'(t)$ y trace los vectores correspondientes a $r(t)$ y $r'(t)$ para el valor de t indicado.

   i) $r(t) = -\frac{1}{4}t^4\hat{i} + t^2\hat{j}$, $t = 2$.

   j) $r(t) = 4\cos(t)\hat{i} + 2\sin(t)\hat{j}$, $t = \frac{3\pi}{4}$.

   k) $r(t) = (1 + t)\hat{i} + t^2\hat{j}$, $t = 1$.

   l) $r(t) = e^t\hat{i} + e^{-2t}\hat{j}$, $t = 0$.

5. Hallar $r'(t)$ y $r''(t)$

   m) $r(t) = t^2\hat{\imath} + \tan(t)\hat{\jmath} + 3\hat{k}$.

   n) $r(t) = \sqrt{t}\hat{\imath} + e^{2t}\hat{\jmath} + t\hat{k}$.

   ñ) $t \cdot e^{2t}\hat{\imath} + \frac{t-1}{t+1}\hat{\jmath} + \tan^{-1}\hat{k}$. **LE FALTA ARG.**

   o) $r(t) = ln(4-t^2)\hat{\imath} + \sqrt{1+t}\hat{\jmath} - 4e^{3t}\hat{k}$.

   p) Encuentre las ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva con las ecuaciones dadas en el punto especificado. $x = t$, $y = \sqrt{2}\cos(t)$, $z = \sqrt{2}\sin(t)$; $(\frac{\pi}{4}, 1, 1)$

   q) Determine si la curva es suave

      1) $r(t) = \langle t^3, t^9, t^5 \rangle$.
      2) $r(t) = \left\langle \cos^3(t), \sin^3(t) \right\rangle$.

6. Evalúe la integral

   r)

$$\int_0^1 (t\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath} + t^3\hat{k})\partial t$$

   s)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2t)\hat{\imath} + \sin(2t)\hat{\jmath} + t\sin(t)\hat{k})\partial t$$

   t)

$$\int (e^{t^2}t\hat{\imath} + \sqrt{t}\hat{\jmath} + (t^2+1)^{-1}\hat{k})\partial t$$

   u) Encuentre $r(t)$ si $r'(t) = t^2\hat{\imath} + 4t^3\hat{\jmath} - t^2\hat{k}$ y $r(0) = \hat{\jmath}$

7. Halle la longitud de las curvas

   v) $r(t) = \langle 2t, 3\sin(t), 3\cos(t) \rangle$, $a \leq t \leq b$.

   w) $r(t) = 6t\hat{\imath} + 3\sqrt{2}t^2\hat{\jmath} + 2t^3\hat{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

   x) Re-parametrice la curva con respecto a la longitud de arco, medida desde el punto donde $t = 0$ en la dirección en la que t se incrementa.
   $r(t) = 3\sin(t)\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 3\cos(t)\hat{k}$.

   y) Encuentre los vectores de la tangente unitaria y de la normal unitaria $T(t)$ y $N(t)$ y utilice: $k(t) = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|}$ para calcular la curvatura de

      1) $r(t) = \langle \sin(4t), 3t, \cos(4t) \rangle$.
      2) $r(t) = \left\langle \sqrt{2}\cos(t), \sin(t), \sin(t) \right\rangle$.

   ECUACIONES DESDE LA 27 DE LA SIG PAGINA, CHECAR

z) Utilice $k(t) = \frac{|r'(t)x \cdot r''(t)|}{|r'(t)|^3}$ para hallar la curvatura

1) $r(t) = \hat{i} + t\hat{j} + t^2\hat{k}$
2) $r(t) = \sin t\hat{i} + \cos t\hat{j} + \sin t\hat{k}$

) Utilice la fórmula: $k(x) = \frac{|f''(x)|}{[1+(f'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}$ para:

1) $y = x^3$
2) $y = \sin x$

) Encuentre las ecuaciones de los círculos osculadores de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ en los puntos $(0, 2)$ y $(0, 3)$.

) Encuentre la ecuación del círculo osculador de la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ en el punto $(0, 0)$.

) Encuentre la velocidad, la aceleración y la rapidez de una partícula con una función de posición dada. Dibuje la trayectoria de la partícula, los vectores aceleración y velocidad a partir de los valores dados de t.

1) $r(t) \langle t^2 - 1, t \rangle, t = 1$
2) $r(t) = e^t\hat{i} + e^{-t}\hat{j}, t = 0$
3) $r(t) = \sin t\hat{i} + t\hat{j} + \cos t\hat{k}$

) Hallar el vector de posición de una partícula que tiene la aceleración dada, la velocidad inicial y posición señaladas.

1) $a(t) = \hat{i} + 2\hat{j} + 2t\hat{k}, v(0) = 0, r(0) = \hat{i} + \hat{k}$
2) $a(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + \cos 2t\hat{k}, v(0) = \hat{i} + \hat{k}, r(0) = \hat{j}$

10.2. Funciones de tres o más variables

Para una función de tres variables, la diferencia ∂w se define en términos de las diferenciales $\partial x, \partial y$ y ∂z de las variables independientes, mediante:

$$\partial w = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \partial x + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \partial y + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \partial z$$

Ejemplo 1: Las dimensiones de una caja rectangular son $75cm, 60cm$ y $40cm$, y cada medida tiene una corrección de $0.2cm$. Utilice las diferenciales para calcular el máximo error posible cuando se calcule el volumen de la caja a partir de esas mediciones.

Si las dimensiones de la caja son x, y y z, su volumen es $v = xyz$

$$\to \partial v = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \partial x + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \partial y + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \partial z$$

$$\partial v = yz\partial x + xz\partial y + xy\partial z$$

Como $|\Delta x| \leq 0.2$, $|\Delta y| \leq 0.2$ y $|\Delta z| \leq 0.2$, para hallar el error máximo en el volumen, utilizamos $\partial x = \partial y = \partial z = 0.2$ y $x = 75, y = 60, z = 40$.

$$\rightarrow \Delta v \approx \partial v = (60)(40)(0.2) + (75)(40)(0.2) + (75)(60)(0.2)$$

$$\rightarrow \Delta v \approx \partial v = 1980$$

Ejemplo 2: Los lados de un paralelepípedo rectagular son $9cm, 6cm$ y $4cm$, y cambian a $0.02cm, 5.97cm$ y $4.01cm$, respectivamente. ¿Cuál es la variación exacta del volumen?

Sabemos que $v = xyx$ y $\partial x, \partial y, \partial z$ son los errores de medición, entonces el error en el cálculo del volumen es:

$$\Delta v \approx \partial v = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \partial x + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \partial y + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \partial z$$

Entonces

$$\partial x = 0.02, \partial y = -0.03, \partial z = 0.01 \text{ y } x = 9, y = 6, z = 4$$

$$\partial v = (24)(0.02) + (36)(-0.03) + (54)(0.01) = 0.48 - 1.08 + 0.54 = -0.06$$

Por lo tanto, el volumen aumenta en aproximadamente $0.06cm^3$

El cambio del volumen, exactamente, es:

$$\partial v = (9.02)(5.97)(4.01) - (9)(6)(4) = -0.063906$$

Ejemplo 3: Si R es la resistencia total de tres resistores en paralelo, con resistencias R_1, R_2 y R_3, entonces:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Si las resistencias medidas en Ohms(Ω) son $R_1 = 25\Omega, R_2 = 40\Omega, R_3 = 80\Omega$ con posibles errores de 0.57 en cada caso, estime el error máximo en el valor calculado de R.

$$25\Omega \rightarrow 24.995\Omega, 0.005$$

$$40\Omega \rightarrow 39.995\Omega, 0.005$$

$$80\Omega \rightarrow 49.995\Omega, 0.005$$

CHECAR

10.3. Regla de la cadena

Caso I: Supongamos que $z = f(x, y)$ es una función diferenciable de x y de y, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones diferenciables de t. Entonces, z es una función diferenciable de t y:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Puesto que a menudo escribimos $\frac{\partial z}{\partial x}$ en lugar de $\frac{\partial f}{\partial x}$, entonces podemos escribir:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Ejemplo 1: Si $z = x^2y + 3xy^4$ donde $x = \sin 2t$ y $y = \cos t$, calcule $\frac{\partial z}{\partial t}$ cuando $t = 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial (x^2y + 3xy^4}{\partial x} \cdot \frac{\partial \sin t}{\partial t} + \frac{\partial (x^2y + 3xy^4}{\partial y} \cdot \frac{\partial \cos t}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12y^3)(-\sin t)$$

Para cuando $t = 0$, entonces $\frac{\partial z}{\partial t}|_{t=0} =$

$$[2(\sin 0 + 3(\cos 0)^4][2\cos 0] + [(\sin 0)^2 + 12(\cos 0)^3](0) = (0+3)(2) + (0+12)(0) = 6$$

Ejemplo 2: Utilice la regla de la cadena para calcular $\frac{\partial z}{\partial t}$:

1. $z = x^2 + y^2; x = t^3, y = 1 + t^2$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} \cdot \frac{\partial t^3}{\partial t} + \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y} \cdot \frac{\partial(1+t^2)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (2x)(3t^2) + (2y)(2t)$$

2. $z = xe^{\frac{x}{y}}, x = \cos(t), y = e^{2t}$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial(xe^{\frac{x}{y}}}{\partial x} \cdot \frac{\partial(\cos(t)}{\partial t} + \frac{\partial(xe^{\frac{x}{y}}}{\partial y} \cdot \frac{\partial(e^{2t}}{\partial t}$$

$$= \left[x\left(\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\right) + e^{\frac{x}{y}}\right][-\sin t] + [x(e^{\frac{x}{y}}(-y))][2e^{2t}]$$

$$= e\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}+1\right)(-\sin t) - xye^{\frac{x}{y}}(2e^{2t})$$

$$= -e^{\frac{x}{y}}\left[\left(\frac{x}{y}+1\right)(\sin t) + 2xye^{2t}\right]$$

Ejemplo 3: La presión P (en kilopascales), el volumen V (en litros), y la temperatura T (en kelvins) de un mol de un gas ideal, se relaciona mediante la ecuación $PV = 8.31T$. Calcule la razón en la que la presión cambia cuando la temperatura es de $300K$ y se incrementa a una tasa de $0.1\frac{k}{s}$, y el volumen es de $100L$ y aumenta a una tasa de $0.2\frac{L}{s}$.

Si t representa el tiempo transcurrido en segundos, entones en un instante dado tenemos:

$T = 300$, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0.1$, $V = 100$, $\frac{\partial V}{\partial t} = 0.2$ puesto que $P = 8.31\frac{T}{V}$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{8.31}{V} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{8.31T}{V^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial T}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{8.31}{100}(0.1) - \frac{8.31(300)}{100^2}(0.2) = -0.04155\frac{k \cdot Pa}{s}$$

Ejemplo 4: El radio de un cono circular recto decrece a una razón de $1.8\frac{in}{s}$, en tanto que su altura disminuye a una razón de $2.5\frac{in}{s}$. ¿A qué razón cambia el volumen del cono, si el radio es $120in$ y $h = 140in$?

$r = 120in$, $\frac{\partial r}{\partial t} = 1.8\frac{in}{s}$, $h = 140in$, $\frac{\partial h}{\partial t} = 2.5\frac{in}{s}$, $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{2\pi \cdot r \cdot h}{3} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\pi \cdot r^2}{3} \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{2\pi(120)(140)(-1.8)}{3} + \frac{\pi(-120)^2}{3}(-2.5) = -20160\pi - 12000\pi = 32160\pi$$

10.4. Regla de la cadena (caso 2)

Img 37 Suponga que $z = f(x, y)$ es una función diferenciable de x y de y, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son funciones diferenciables de s y t. Así pues:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \text{ y } \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Ejemplo 1: Si $z = e^x \sin y$, donde $x = st^2$, $y = s^2 t$, calcule $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = (e^x \sin y)(t^2) + (e^x \cos y)(2st)$$

$$\rightarrow \frac{\partial z}{\partial s} = t^2 e^x \sin y + 2ste^x \cos y = t^2 e^{st^2} \sin s^2 t + 2ste^{st^2} \cos s^2 t$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = (e^x \sin y)(2st) + (e^x \cos y)(s^2)$$

$$\rightarrow \frac{\partial z}{\partial t} = 2ste^{st^2} \sin s^2 t + s^2 e^{st^2} \cos s^2 t$$

Ejemplo 2: Use la regla de la cadena para calcular $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$

1. $z = x^2 \sin y, x = s^2 + t^2, y = 2st$
2. $z = \sin x \cos y, y = (s - t)^2, y = s^2 - t^2$
3. $x = \tan^{-1} xy, x = t^2, y = se^t$

Ejemplo 3: Escriba la regla de la cadena para el caso en que $w = f(x, y, z, t)$ y $x = (u, v)$, $y = (u, v)$, $z = (u, v)$ y $t(u, v)$.

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial u}$$

10.5. Regla de la cadena (versión general)

Suponga que u es una función diferenciable de n variables $x_1, x_2, ..., x_n$, donde cada x_j es una función de m variables $t_1, t_2, ..., t_m$. Por consiguiente, u es una función de $t_1, t_2, ..., t_m$ y:

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial v}$$

Ejemplo 4: Si $u = x^4 y + y^2 z^3$ donde $x = rse^t$, $y = rs^2 e^{-t}$ y $z = r^2 s \sin t$, encuentre $\frac{\partial u}{\partial s}$ cuando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

Img 38

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (4x^3 y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^{-t}) + (3y^2 z^2)(r^2 \sin t)$$

Cuando $r = 2$, $s = 1$ y $t = 0$, entonces $x = 2$, $y = 2$ y $z = 0$, así

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192$$

***Alumnos $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$**

Ejemplo 5: Si $g(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ y f es diferenciable, muestre que g satisface la ecuación:

$$t \cdot \frac{\partial g}{\partial s} + s \cdot \frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

Img 39

Sea $x = s^2 - t^2$ y $y = t^2 - s^2$, entonces $g(s,t) = f(x,y)$, entonces

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}(2s) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(-2t) + \frac{\partial f}{\partial y}(2t)$$

$$\to t \cdot \frac{\partial g}{\partial s} + s \cdot \frac{\partial g}{\partial t} = \left(2st \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - 2st \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(-2st \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + 2st \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

EJEMPLO 6: Si $z = f(x,y)$, donde $x = r\cos\theta$ y $y = r\sin\theta$.

Calcular:

1. $\frac{\partial z}{\partial r}$ y $\frac{\partial z}{\partial \theta}$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin\theta$$
$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (r\cos\theta)$$

2. Demuestre que: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin\theta\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot \cos^2\theta + 2\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot \sin^2\theta$$
$$\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot (-r \cdot \sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (r \cdot \cos\theta)\right)^2$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot r^2 \cdot \sin^2\theta - 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot r^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot r^2 \cdot \cos^2\theta$$
$$\to \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot \left(\sin^2\theta - 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot \cos^2\theta$$
$$\to \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 =$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot \cos^2\theta + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot \sin^2\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot \sin^2\theta -$$

$$-2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot \cos^2\theta$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot (\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

EJEMPLO 7: Si $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales de segunda orden continuas y $x = r^2 + s^2$ y $y = 2rs$, determine:

1. $\frac{\partial z}{\partial r}$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}(2r) + \frac{\partial z}{\partial y}(2s)$$

2. $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$ Al aplicar la regla del producto a la expresión anterior

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(2r \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2s \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2s \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Aplicando otra vez la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(2s)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2s)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2r\left(2r \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2s \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) + 2s\left(2r \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

10.6. Diferenciación implícita

Si f está definida sobre un disco abierto que contiene (a, b), donde $f(a, b) = 0$, $f_y(a, b) \neq 0$, y f_x y f_y son continuas en el disco, entonces $f(x, y) = 0$ define a y como función de x, cerca del punto (a, b).

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{f_x}{f_y}$$

Ejemplo 1: Determine y' si $x^3 + y^3 = 6xy$ Podemos escribir $f(x, y) = 0$ como $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$, así:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$

Ahora suponemos que una ecuación de la forma $f(x, y, z) = 0$ da z de manera implícita como una función $z = f(x, y)$. Esto significa que $f(x, y, f(x, y)) = 0$ para toda (x, y) en el dominio de f. Sí f es diferenciable y f_x, f_y existen, aplicamos la regla de la cadena para diferenciar $f(x, y, z) = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0;$$

entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{f_x}{f_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{f_y}{f_z}$$

Ejemplo 2: Encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ sí $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

Sea $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1 = 0$, entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

Ejemplo 3: Utilice las ecuaciones anteriores para calcular: $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1. $xe^y + yz + ze^x =$
2. $xy^2z^3 + x^3y^2z = x + y + z$

10.7. Derivada direccional

Sea f una función de dos variables x y y. Si v es el vector unitario $\cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}$, entonces la derivada direccional de f en la dirección de v, denotada por $D_u f$, está determinada por:

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\cos\theta + f_y(x,y)\sin\theta$$

$$D_u f(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h\cos\theta, y+h\sin\theta) - f(x,y)}{h}$$

Ejemplo 1: Encuentre la derivada direccional $D_u f(x,y)$, si:

$f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ y u el vector unitario dado por $\theta = \frac{\pi}{6}$. ¿Qué es $D_u f(1,2)$?

$$\begin{aligned} D_u f(x,y) &= f_x(x,y)\cos\frac{\pi}{6} + f_y(x,y)\sin\frac{\pi}{6} \\ &= (3x^2 - 3y)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[3\sqrt{3}x^2 - 3x + (8 - 3\sqrt{3})y\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow D_u f(1,2) &= \frac{1}{2}\left[3\sqrt{3}(1)^2 - 3(1) + (8 - 3\sqrt{3})(2)\right] \\ &= \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

NOTA: La derivada direccional permite calcular la razón de cambio de una función de dos o más variables en cualquier dirección.

Ejemplo 2: Calcular la derivada direccional $D_u f(x,y)$ si:

$$f(x,y) = 12 - x^2 - 4y^2, \text{ y } u = \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}$$

Ejemplo 8: Derivadas parciales de 2do orden

1. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r^2 + s^2$, $y = 2rs$. Obtener $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s}$
2. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r \cos\theta$, y $y = r \sin\theta$. Hallar

$$\frac{\partial z}{\partial r}; \frac{\partial z}{\partial \theta}; \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}$$

Teorema: Si f es una función diferenciable de x y y, y $u = \cos\theta \hat{\imath} + \sin\theta \hat{\jmath}$, entonces:

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y) \cos\theta + f_y(x, y) \sin\theta$$

Ejemplo 2: Encuentre la derivada direccional de f en el punto dado en la dirección que señala el ángulo θ.

1. $f(x, y) = x^2 y^3 + 2x^4 y$, $(1, -2)$, $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$D_u f(x, y) = \frac{\partial(x^2y^3 + 2x^4y)}{\partial x} \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \frac{\partial(x^2y^3 + 2x^4y)}{\partial y} \cdot \sin\frac{\pi}{3}$$
$$= (2xy^3 + 8x^3y) \cdot \cos\frac{\pi}{3} + (3x^2y^2 + 2x^4) \cdot \sin\frac{\pi}{3}$$
$$= xy^3 + 4x^3y + \frac{3}{2}\sqrt{3}x^2y^2 + \sqrt{3}x^4$$

   Evaluando el punto referido:

$$D_u f(1, -2) = (1)(-2)^3 + 4(1)^3(-2) + \frac{3}{2}\sqrt{3}(1)^2(-2)^2 + \sqrt{3}(1)^4$$
$$= -8 - 8 + 6\sqrt{3} + \sqrt{3} = 7\sqrt{3} - 16$$

2. $f(x, y) = \sin x + 2y$, $(4, -2)$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$

$$D_u f(x, y) = \frac{\partial(\sin x + 2y)}{\partial x} \cdot \cos\frac{3\pi}{4} + \frac{\partial(\sin x + 2y)}{\partial y} \cdot \sin\frac{3\pi}{4}$$
$$= \cos x + 2y \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\cos x + 2y \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

   Evaluando el punto referido:

$$D_u f(4, -2) = \cos 4 - 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\cos 4 - 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Definición: La derivada direccional de f en (X_0, Y_0, Z_0) en dirección de un vector unitario $u = < a, b, c >$

$$D_u f(X_0, Y_0, Z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(X_0 + ha, Y_0 + hb, Z_0 + hc) - f(X_0, Y_0, Z_0)}{h}$$

si el límite existe.

Si $f(x, y)$ es diferenciable y $u = < a, b, c >$, entonces: se puede utilizar el mismo método para mostrar

$$D_u f(x, y, z) = f_x(x, y, z)a + f_y(x, y, z)b + f_z(x, y, z)c$$

EJEMPLO 1: Dada $f(x, y, z) = 3x^2 + xy - 2y^2 - yz + z^2$, calcule la tasa de variación de $f(x, y, z)$ en $(1, -2, -1)$ en la dirección del vector $2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - \hat{k}$.

El vector unitario es:

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - \hat{k}}{3} = \frac{2}{3}\hat{\imath} - \frac{2}{3}\hat{\jmath} - \frac{1}{3}\hat{k}$$

$$D_u f(x, y, z) = \frac{2}{3}(6x + y) - \frac{2}{3}(x - 4y - z) - \frac{1}{3}(-y + 2z)$$

Evaluando en el punto:

$$D_u f(1, -2, -1) = \frac{2}{3}\left[6(1) + (-2)\right] - \frac{2}{3}\left[1 - 4(-2) - (-1)\right] - \frac{1}{3}\left[-(-2) + 2(-1)\right]$$

$$D_u f(1, -2, -1) = \frac{2}{3}(4) - \frac{2}{3}(10) - \frac{1}{3}(0) = -4$$

EJEMPLO 2: Determine la derivada direccional de la función en el punto dado, en dirección del vector v.

1. $f(x, y, z) = x \tan^{-1}\left(\frac{y}{z}\right), (1, 2, -2), v = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$
2. $f(x, y, z) = z^3 - x^2 y, (1, 6, 2), v = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 12\hat{k}$
3. $g(x, y, z) = \cos(xy) + \sin(yz), (2, 0, -3), u = -\frac{1}{3}\hat{\imath} + \frac{2}{3}\hat{\jmath} + \frac{2}{3}\hat{k}$
4. $g(x, y, z) = ln(x^2 + y^2 + z^2), (1, 3, 2), u = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k})$

Definición: Si f es una función de dos variables y x, y, entonces el gradiente de f es la función vectorial ∇f definida como:

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath}$$

Antes:

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$$
$$< f_x(x,y), f_y(x,y) > \cdot < a, b >$$
$$< f_x(x,y), f_y(x,y) > \cdot u$$

Ejemplo 1: Sea $f(x,y) = \sin x + e^{xy}$, hallar:

1. $\nabla f(x,y) = \frac{\partial(\sin x + e^{xy})}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial(\sin x + e^{xy})}{\partial y}\hat{\jmath}$

$$\nabla f(x,y) = (\cos x + ye^{xy})\hat{\imath} + (xe^{xy})\hat{\jmath} = \langle \cos x + ye^{xy}, xe^{xy} \rangle$$

2. $\nabla(0,1) = 2\hat{\imath} = \langle 2, 0 \rangle$

Ejemplo 2: Hallar el gradiente de la función.

1. $f(x,y) = ln(\sqrt{(x^2 + y^2}$

$$\frac{x}{x^2 + y^2}\hat{\imath} + \frac{y}{x^2 + y^2}\hat{\jmath}$$

2. $g(x,y) = 4x^2 - 3xy + y^2$

$$(8x - 3y)\hat{\imath} + (2y - 3x)\hat{\jmath}$$

Con esta notación para el vector gradiente, podemos volver a escribir la derivada direccional como:

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot u$$

Ejemplo 1: Encuentre la derivada direccional de $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ en el punto $(2,-1)$ en dirección del vector $v = 2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$.

$$\nabla f(x,y) = 2xy^3\hat{\imath} + (3x^2y^2 - 4)\hat{\jmath}$$
$$\nabla f(2,-1) = -4\hat{\jmath} + 8\hat{\jmath}$$
$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}}{\sqrt{29}}$$

$$\rightarrow D_u f(2,-1) = -4\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} \cdot \frac{2\hat{\imath}+5\hat{\jmath}}{\sqrt{29}} = \frac{-8+40}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

Ejemplo 2: Si $f(x,y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$, determine:

1. ∇f el gradiente de f en $R(4,3)$

$$\nabla f(x,y) = \frac{x}{8}\hat{\imath} + \frac{2y}{9}\hat{\jmath}$$

$$\nabla f(4,3) = \frac{1}{2}\hat{\imath} + \frac{2}{3}\hat{\jmath}$$

2. Utilice el gradiente para calcular la derivada direccional de f en R en la dirección de R a $Q(5,6)$.

$$V(\overrightarrow{RQ}) = (5-4)\hat{\imath} + (6-3)\hat{\jmath} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$$

$$\rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{10}}(\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} \rightarrow Div = \frac{5}{2\sqrt{10}}$$

Para una función de tres variables, el vector gradiente, denotado por ∇f o $gradf$, es:

$$\nabla f(x,y,z) = \langle f_x(x,yz), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)\rangle$$

$$\nabla f(x,y,z) = \langle f_x, f_y, f_z\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Ejemplo 1: Si $f(x,y,z) = x\sin(yz)$, obtener:

1. ∇f

$$\nabla f(x,y,z) = \sin xyz\hat{\imath} + xz\cos(yz)\hat{\jmath} + xy\cos(yz)\hat{k}$$

2. La derivada direccional de f en $(1,3,0)$ en la dirección de $v = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$.

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k})$$

$$\nabla f(1,3,0) = 3\hat{k}$$

$$\rightarrow D_u f(x,y,z) = 3\hat{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}) = -\frac{3}{\sqrt{6}}$$

NOTA: La derivada dirección para una función de tres variables se puede escribir como:

$$D_u f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot u$$

Supongamos que tenemos una función f de dos o tres variables y consideramos todas las derivadas direccionales de f en un punto dado. Esto proporciona las tasas de cambio de f en todas las posibles direcciones, de modo que, nos preguntamos en cuál de estas direcciones f cambia con mayor velocidad y cuál es la máxima razón de cambio. **? DONDE COMIENZA LA PREGUNTA**

Teorema Suponga que f es una función diferenciable de dos o tres variables, donde $\nabla f \neq 0$. Sea u cualquier vector unitario, tal que $D_u f$ es una función de u.

1. El valor máximo de $D_u f(x)$ es $||\nabla f(x)||$. Este valor máximo e obtiene cuando la dirección se u es la de $\nabla f(x)$.
2. El valor mínimo de $D_u f(x)$ es $-||\nabla f(x)||$. Este valor mínimo se alcanza cuando la dirección de u es la opuesta de la dirección de $\nabla f(x)$.

Ejemplo 1:

1. Si $f(x, y) = xe^y$, encuentre la razón de cambio de f en el punto $P(2, 0)$ en la dirección de P a $Q(\frac{1}{2}, 2)$.

   Buscamos $D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot u$.

   $$\nabla f(x, y) = e^y \hat{\imath} + xe^y \hat{\jmath} \to \nabla f(2, 0) = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$$

   Para el vector unitario:

   $$\overrightarrow{PQ} = -1.5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$$

   $$\to u = \frac{PQ}{|PQ|} = \frac{-\frac{3}{2}\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}}{\frac{5}{2}} = -\frac{3}{5}\hat{\imath} + \frac{4}{5}\hat{\jmath}$$

   Así:

   $$D_u f(2, 0) = \nabla f(2, 0) \cdot u = (\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) \cdot \left(-\frac{3}{5}\hat{\imath} + \frac{4}{5}\hat{\jmath}\right)$$

   $$D_u f(2, 0) = 1$$

2. ¿En qué dirección f tiene la razón máxima de cambio? ¿Cuál es dicha razón?

   De acuerdo al Teorema anterior, f se incrementa más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla f(2, 0) =< 1, 2 >$. La razón máxima de cambio es:

   $$|\nabla f(2, 0)| = 1\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}| = \sqrt{5}$$

Ejemplo 2: Suponga que $T(x,y,z)=\frac{80}{(1+x^2+2y^2+3z^2)}$ da la temperatura en su punto (x,y,z) en el espacio, donde T se mide en C y x,y,z en metro. ¿En qué dirección aumenta más rápido la temperatura en el punto $(1,1,-2)$? ¿Cuál es la razón máxima de incremento?

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla T = -\frac{160x}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}\hat{\imath} - \frac{320x}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}\hat{\jmath} - \frac{420x}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}\hat{k}$$

$$\nabla T = \frac{160x}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}\hat{\imath}\cdot(-x\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath} - 3z\hat{k})$$

En el punto $(1,1,-2)$ el vector gradiente es:

$$\nabla T(1,1,-2) = \frac{160}{256}(-\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 6\hat{k}) = \frac{5}{8}(-\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 6\hat{k})$$

La temperatura se incrementa con mayor rapidez en dirección del vector gradiente $\nabla T(1,1,-2) = \frac{5}{8}(-\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 6\hat{k})$ de manera equivalente, en dirección de $-\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 6\hat{k}$ ó del $\overrightarrow{u}$

$$u = \frac{(-\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 6\hat{k})}{\sqrt{41}}$$

La razón máxima de incremento es la longitud del vector gradiente

$$|\nabla T(1,1,-2)| = \frac{5}{8}|\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 6\hat{k}| = \frac{5\sqrt{41}}{8}$$

Como consecuencia, la razón máxima de incremento de T es $\frac{5\sqrt{41}}{8} \approx 4\frac{C}{m}$

Ejemplo 3: La temperatura en cualquier punto (x,y) de una placa rectangular situada en el plano xy está determinada por: $T(x,y) = x^2 + y^2$.

1. Calcule la tasa de variación de la temperatura en el punto $(3,4)$ en la dirección que forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ rad con la parte + del eje x.

   Calculamos $D_uT(x,y)$, entonces: $u = \cos\frac{\pi}{3}\hat{\jmath} = \frac{1}{2}\hat{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}$

   $$\nabla T(x,y) = 2x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} \rightarrow D_uT(x,y) = (2x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath})\cdot\left(\frac{1}{2}\hat{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}\right)$$

   $$\rightarrow D_uT(x,y) = x + \sqrt{3}y \rightarrow D_uT(3,4) = 3 + 4\sqrt{3} \approx 9.93$$

   Podemos decir que en el punto $(3,4)$ la temperatura crece aproximadamente a la tasa de 9.93 unidades por unidad de variación en la distancia medida en la dirección de u.

2. Determine el $---->$ **QUE??** igual al ejemplo anterior el ángulo de la dirección en la que la tasa de variación de la temperatura en el punto $(-3,1)$ es un máximo.

   $D_uT(-3,1)$ es un máximo cuando u está en la dirección de $\nabla T(-3,1)$.

   $\nabla T(-3,1) = -6\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$, entonces la medida en radianes del ángulo que indica la dirección de $\nabla T(-3,1)$ es θ, donde:

$$\tan\theta = -\frac{1}{3}$$

$$\theta = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 2.82$$

Ejemplo 4: Suponga que $V(x,y,z)$ volts es el potencial eléctrico en cualquier punto (x,y,z) del espacio tridimensional y que

$$V(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

1. Calcule la tasa de variación de V en el punto $(2,2,-1)$ en la dirección del vector $2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}$.

   $D_uV(x,y,z)$, entonces $u = \frac{2\hat{\imath}-3\hat{\jmath}+6\hat{k}}{7} = \frac{2}{7}\hat{\imath} - \frac{3}{7}\hat{\jmath} + \frac{6}{7}\hat{k}$.

   SEGUN YO ES RAIZ DE 27

$$\nabla V(,x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}V\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}V\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}V\hat{k}$$

$$\nabla V(x,y,z) = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\imath} - \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\jmath} - \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}$$

$$\rightarrow \nabla V(2,2,-1) = -\frac{2}{27}\hat{\imath} - \frac{2}{27}\hat{\jmath} + \frac{1}{27}\hat{k}.$$

$$\rightarrow D_uV(2,2,-1) = \nabla V(2,2,-1)\cdot u$$

$$D_uV(2,2,-1) = \left(-\frac{2}{27}\hat{\imath} - \frac{2}{27}\hat{\jmath} + \frac{1}{27}\hat{k}\right)\cdot\left(-\frac{2}{27}\hat{\imath} - \frac{2}{27}\hat{\jmath} + \frac{1}{27}\hat{k}\right)$$

$$D_uV(2,2,-1) = -\frac{4}{189} + \frac{6}{189} + \frac{6}{189} = \frac{8}{189} \approx 0.042$$

2. Determine la razón máxima de variación y la dirección de la máxima tasa de variación de V en $(2,2,-1)$.

$$\nabla V(2,2,-1) = -\frac{2}{27}\hat{\imath} - \frac{2}{27}\hat{\jmath} + \frac{1}{27}\hat{k}$$

$$||\nabla(2,2,-1)|| = \frac{3}{27}$$

Para la dirección del vector unitario hallamos el vector unitario: $u' = \frac{\nabla V}{|\nabla V|}$

$$u' = -\frac{2}{3}\hat{\imath} - \frac{2}{3}\hat{\jmath} + \frac{1}{3}\hat{k}$$

11. Planos tangentes a las superficies de nivel

Si $\nabla f(X_0, Y_0, Z_0) \neq 0$ resulta natural definir el plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = k$ en $P(X_0, Y_0, Z_0)$.

$$\nabla f(X_0, Y_0, Z_0) \cdot [(X - X_0)\hat{i} + (Y - Y_0)\hat{j} + (Z - Z_0)\hat{k}] = 0$$

Img 41

11.1. Recta normal:

La recta normal a S en P es la que pasa por P y es perpendicular al plano tangente; por lo tanto, el vector gradiente $\nabla f(X_0, Y_0, Z_0)$ da su dirección, por lo tanto la ecuación de su plano tangente es:

$$\frac{X - X_0}{f_x(X_0, Y_0, Z_0)} = \frac{Y - Y_0}{f_y(X_0, Y_0, Z_0)} = \frac{Z - Z_0}{f_z(X_0, Y_0, Z_0)}$$

Ejemplo 1: Halle las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal para el punto $(-2, 1, -3)$ de la elipsoide:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

La elipsoide es la superficie de nivel (con $k = 3$) de la función.

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{x}{2}\hat{i} + 2y\hat{j} + \frac{2z}{9}\hat{k} \rightarrow \nabla f(-2, 1 - 3) = -\hat{i} + 2\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k}$$

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente es:

$$\left(-\hat{i} + 2\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k}\right) \cdot \left[(x + 2)\hat{i} + 2(y - 1)\hat{j} - \frac{2}{3}(z + 3)\hat{k}\right] = 0$$

$$\rightarrow -1(x + 2) + 2(y - 1) - \frac{2}{3}(z + 3) = 3x - 6y + 2z + 18 = 0$$

Para la recta normal se tiene que:

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-\frac{2}{3}}$$

Ejemplo 2: Obtenga las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal para el punto $(2,4,2)$ del paraboloide elíptico:

$$4x^2 + y^2 - 16 = 0$$

Sea $F(x,y,z) = 4x^2 + y^2 - 16$, entonces:

$$\nabla f(x,y,z) = 8x\hat{i} + 2y\hat{j} - 16\hat{k} \rightarrow \nabla F(2,4,2) = 16\hat{i} + 8\hat{j} - 16\hat{k}$$

la ecuación del plano es:

$$16(x-2) + 8(y-4) - 16(z-2) = 0$$

$$\rightarrow 2x + y - 2z - 4 = 0$$

La ecuación de la recta normal es: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{-2}$

11.2. Valores máximos y mínimos

Definición: Una función de dos variables tiene un máximo local en (a,b) sí $f(x,y) \leq f(a,b)$ cuando (x,y) está cerca de (a,b). *Esto significa que $f(x,y) \leq f(a,b)$ para todo los puntos (x,y), en algún disco con centro en (a,b).* El número $f(a,b)$ se llama máximo local. Si $f(x,y) \geq f(a,b)$ cuando (x,y) está cerca de (a,b) entonces $f(a,b)$es un mínimo local.

Img 42

Si las desigualdades de la definición se cumplen para todos los puntos (x,y) en el dominio de f, entonces f tiene un máximo absoluto (o mínimo absoluto) en (a,b).

Teorema: Sí f tiene un máximo o mínimo local en (a,b) y ahí hay derivadas parciales de primer orden de f, entonces: $f_x(a,b) = 0$ y $f_y(a,b) = 0$

Ejemplo 1: Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

Un punto en (a,b) se llama punto crítico (o punto estacionario) de f si $f_x(a,b) = 0$ y $f_y(a,b) = 0$ o sí una de las derivadas parciales no existe.

Sin embargo, como el caso del cálculo de una sola variable, no todos los puntos críticos originan máximos y mínimos. En un punto crítico una f puede tener un mínimo o máximo local o ninguno.

Ahora sí el ejemplo 1:

$$f_x(x, y) = 2x - 2$$
$$\rightarrow 2x - 2 = 0$$
$$\rightarrow x = 1$$

$$f_y(x, y) = 2y - 6$$
$$\rightarrow 2y - 6 = 0$$
$$y = 3$$

El punto crítico es $(1, 3)$, entonces:

$$f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 6y + 14 = (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + 4$$

Puesto que $(x - 1)^2 \geq 0$, $(y - 3)^2 \geq 0$, tenemos que $f(x, y) \geq 4$ para todo (x, y).

Img 43

Por consiguiente

$f(1, 3) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2$ $f(1, 3) = 4$

Es un mínimo local y, de hecho, es el mínimo absoluto de f.

Ejemplo 2: Determine los punto crítico de $f(x, y) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$.

$$f_x(x, y) = 6 - 2x$$
$$\rightarrow 6 - 2x = 0$$
$$\rightarrow x = 3$$

$$f_y(x, y) = -4 - 4y$$
$$\rightarrow -4 - 4y = 0$$
$$y = -1$$

Por lo que queda: $(3, -1)$

Luego $f(3, -1) = 11$. Para determinar si tiene un máximo local en $(3, -1)$ se completan los cuadrados en $f(x, y)$.

$$\to f(x,y) = -(x^2 - 6x + 9) - 2(y^2 + 2y - 1) + 9 + 2$$
$$f(x,y) = -(x-3)^2 - 2(y+1)^1 + 11$$

Si $(x,y) \neq (3,-1)$, $f(x,y) < 11$. Es un máximo relativo.

Img 44 *Eje 2. Img 45 *Eje 3.

Ejemplo 3: Determinar los puntos críticos de $f(x,y) = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$.

$$f_x(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_y(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Observemos que no pueden existir indeterminaciones, quedando:

$$f_x(x,y) = 0 \text{ si } x = 0$$

$$f_y(x,y) = 0 \text{ si } y = 0$$

El punto crítico es $(0,0)$

Analicemos:

$$f(x,y) \text{ con } f(0,0) = 4 \text{ y si } (x,y) \neq (0,0) \text{ entonces}$$
$$f(x,y) = 4 - \sqrt{x^2+y^2} < 4; \text{ así sabes que es un máximo.}$$

***NOTA:** máximo x, mínimo y.

Ejemplo 4: Encuentre los valores extremos de $f(x,y) = -x^2 + y^2$.

Img 46

Puesto que: $f_x = -2x$ y $f_y = 2y$ entonces el punto crítico es $(0,0)$.

Analizando las expresiones vemos que:

$$f(x,y) = -2x < 0$$
$$f(x,y) = 2y > 0$$

cuando $(x, y) \neq (0,0)$

Por lo tanto, $f(0,0) = 0$ no puede ser un valor extremo. A este punto se le llama punto silla de f.

Es necesario poder determinar si una función tiene un valor extremo en un punto crítico.

11.3. Prueba de las segundas derivadas

Suponga que las segundas derivadas parciales de f son continuas en un disco con centro en (a, b) y que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ (es decir, (a, b) es un punto crítico). Sea

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

1. Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un mínimo local.
2. Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ es un máximo local.
3. Si $D < 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un extremo local.

Notas:

1. En el caso c), el punto (a, b) se denomina punto de silla de f y la gráfica de f atraviesa su plano tangente en (a, b).
2. Si $D = 0$, la prueba no proporciona información; f puede tener un máximo o un mínimo local en (a, b) o es posible que (a, b) sea un punto silla de f.
3. Para recordar la fórmula para D, podemos usar una definición.

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} = (f_{xy})^2$$

Ejemplo 1: Encuentre el máximo o mínimo local y los puntos sillas de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 4y \ \rightarrow x^3 - y = 0$$
$$f_y(x, y) = 4y^3 - 4x \ \rightarrow y^3 - x = 0$$

Para resolver las ecuaciones hacemos $y = x^3$ de **(1)** y sustituye en **(2)**.

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

de modo que las raíces son $x = 0, 1, -1$. Los tres puntos críticos son:

$$(0,0) \quad (1,1) \quad (-1,-1)$$

Las segundas derivadas son:

$$f_{xx} = 12x^2 \quad f_{yy} = -4 \quad f_{yy} = 12y^2$$

$$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

$D(0,0) = -16 < 0 \rightarrow$ el origen es un punto silla, es decir, f no tiene mínimo o máximo en $(0,0)$.

$$\begin{array}{rcr} D(1,1) = 128 > 0 & f_{xx}(1,1) = 12 > 0 \rightarrow & f(1,1) = -1 \text{ mínimo local} \\ D(-1,-1) = 128 > 0 & f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0 \rightarrow & f(-1,-1) = -1 \text{ mínimo local} \end{array}$$

Ejemplo 2: Sea $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$ determine los extremos relativos de f si es que existen.

Ejemplo 3: Determine la distancia más corta desde el punto $(1, 0, -2)$ hasta el plano $x + 2y + z = 4$.

La distancia desde cualquier punto (x, y, z) a $(1, 0, -2)$ está dada por:

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2}$$

Si (x, y) está en el plano $x + 2y + z = 4$, entonces $z = 4 - x - 2y$m así:

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2}$$

para resolver algo más sencillo

$$d^2 = f(x,y) = (x-1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

así

$$f_x = 2(x-1) - 2(6 - x - 2y) = 4x + 4y - 14 = 0$$

$$f_y = 2y - 4(6 - x - 2y) = 4x + 10y - 24 = 0$$

Al resolver el sistema los valores son $x = \frac{11}{6}$, $y = \frac{5}{3}$, luego:

$$f_{xx} = 4 \quad f_{yy} = 10 \quad f_{xy} = 4$$

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 24 > 0$$

$$f_{xx} > 0$$

$\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$ mínimo local

La distancia es $d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$

Ejemplo 4: Una caja rectangular, sin tapa, se va a fabricar con $12cm^3$ de cartulina. Encuentre el volumen máximo de dicha caja.

Img 48

Sean la longitud, el ancho y la altura de la caja x, y, z respectivamente, el volumen de la caja

$$V = xyz$$

Podemos escribir V como función de dos variables si consideramos:

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

$$\rightarrow z(2x + 2y) - xy = 12$$

$$z = \frac{12 - xy}{2(x + y)}; \text{ así}$$

$$V = xy \cdot \frac{12 - xy}{2(x + y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x + y)},$$

calculando las derivadas parciales:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2} = 0$$

$$\begin{array}{cc} 12 - 2xy - x^2 = 0 & 12 - 2xy - y^2 = 0 \\ 12 - 2xy = x^2 & 12 - 2xy = y^2 \end{array}$$

$$x^2 = y^2$$

$$x = y$$

Considerando esto en las ecuaciones anteriores:

$$12 - 2x^2 - x^2 \rightarrow 12 - 3x^2 = 0 \rightarrow x = 2 = y$$

entonces

$$z = \frac{12-4}{8} = \frac{8}{8} = 1 \rightarrow z = 1$$

$$\text{punto crítico } (2,2,1)$$

El volumen máximo es $V(2,2,1) = (2)(2)(1) = 4$

11.4. Teorema del valor extremo para funciones de dos variables

Si f es continua en un conjunto D cerrado y acotado en R^2, entonces f tiene un máximo $f(x_1, y_1)$ y un mínimo $f(x_2, y_2)$ absolutos en algunos puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) en D.

Para determinar los máximos o mínimos absolutos de una función continua en f sobre un conjunto D cerrado y acotado:

1. Determine los valores de f en los puntos críticos de f en D.
2. Halle los valores extremos de f sobre la frontera D.
3. El más grande de los valores obtenidos en los pasos 1 y 2, es el máximo absoluto; el más pequeño es el mínimo absoluto.

Ejemplo 1: Determine los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ sobre el rectángulo $D = (x,y)|0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2$

$$f_x = 2x - 2y = 0$$

$$f_y = -2x + 2 = 0$$

$$x = 1$$

$$\rightarrow 2(1) - 2y = 0$$

$$y = 1$$

el punto crítico es $(1,1)$, luego $f(1,1) = 1$

Los valores de f en la frontera de D, los cuales consisten en cuatro rectas L_1, L_2, L_3, L_4.

Img 49

En L_1: tenemos $y = 0$ y $f(x, 0) = x^2$, $0 \leq x \leq 3$. Ésta función es creciente en x, de modo que su valor mínimo es $f(0, 0) = 0$ y su valor máximo es $f(3, 0) = 9$.

En L_2: $x = 3$ y $f(3, y) = 9 - 4y$, $0 \leq y \leq 2$. Ésta función es decreciente en ym por lo que su valor máximo es $f(3, 0) = 9$ y su valor mínimo es $f(3, 2) = 1$.

En L_3: $y = 2$ y $f(x, 2) = x^2 - 4x + 4$, $0 \leq x \leq 3$. Analizando $f(x, 2) = (x - 2)^2$ tenemos que el valor mínimo es $f(2, 2) = 0$ t el máximo es $f(0, 2) = 4$.

En L_4: $x = 0$ y $f(0, y) = 2y$, $0 \leq y \leq 2$. El máximo es $f(0, 2) = 4$ y el mínimo $f(0, 0) = 0$.

Así que, en la frontera el valor mínimo de $f = 0$ y su máximo es 9.

En el paso 3, comparamos estos valores con el valor $f(1, 1) = 1$ en el punto crítico, y concluimos que el valor máximo absoluto de f en D es $f(3, 0) = 9$ y el valor mínimo absoluto es $f(0, 0) = f(2, 2)$.

Ejemplo 2: Calcule los extremos absolutos de la función: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 7$, si el dominio de f es la región triangular cerrada cuyos lados están sobre el eje x, el eje y y la recta $x + y = 5$.

$$f_x(x, y) = 2x - 4$$

$$f_y(x, y) = 2y - 2$$

12. Integrales múltiples

12.1. Coordenadas cartesianas y coordenadas cilíndricas

Img 50 Se relacionan por:

$$x = r\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\theta)$$

$$z = z$$

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x};\ \text{si } x \neq 0$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

12.2. Coordenadas cartesianas y coordenadas esféricas

Img 51 Se relacionan por:

$$x = \rho\sin(\phi)\cos(\theta)$$

$$y = \rho\sin(\phi)\sin(\theta)$$

$$z = \rho\cos(\phi)$$

12.3. Integrales dobles

Sea f una función de dos variables definida en una región rectangular cerrada R. La integral doble de f en R, denotada por:

$$\iint_R f(x,y)dA \text{ está definida por}$$

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{||\triangle|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i) \triangle_i A$$

si el límite existe.

NOTA: Y ESTO?

$$\lim_{min \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_i) \triangle A$$

EJEMPLO 1: Obtenga el valor aproximado de la integral doble $\iint_R (3y - 2x^2) dA$, donde R es la región rectangular que tiene vértices en $(-1, 1)$ y $(2, 3)$.

Considere una región de R generada por las rectas $x = 0$, $x = 1$ y $y = 2$ y tome el centro de la ÿ-ésima subregión como (x_i, y_i).

Img 52

Checar alineado

1. $(-0.5,\ \ 2.5)$
2. $(0.5,\ \ 2.5)$
3. $(1.5,\ \ 2.5)$
4. $(-0.5,\ \ 1.5)$
5. $(0.5,\ \ 1.5)$
6. $(1.5,\ \ 1.5)$

La región R dividida en seis subregiones que son cuadrados cuyos lados miden 1. Así, para cada ij, $\triangle$A $= 1$. En cada subregión el punto (x_i, y_i) es el centro del cuadrado. Con $f(x, y) = 3y - 2x^2$, una aproximación es:

$$\begin{aligned} \iint_R (3y - 2x^2) dA &= f(-0.5, 1.5) \cdot 1 + f(0.5, 1.5) \cdot 1 + f(1.5, 1.5) \cdot 1 \\ &+ f(1.5, 2.5) \cdot 1 + f(0.5, 2.5) \cdot 1 + f(-0.5, 2.5) \cdot 1 \end{aligned}$$

$$\to \iint_R (3y - 2x^2) dA = 4.1 + 4.1 + 0.1 + 3.7 + 7.1 + 7.1$$

Teorema: Sea f una función de dos unidades y continúa en una región cerrada R del plano xy tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) de R. Si V unidades cúbicas es el volumen del sólido S que tiene la región R como base y cuya altura es $f(x, y)$ unidades en el punto (x, y) de R, entonces:

$$V = \lim_{min \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_i) \triangle A = \iint_R f(x, y) dA$$

Ejemplo 1: Estime el volumen de un sólido que está por arriba del cuadrado $R = [0,2]x[0,2]$ y debajo del paraboloide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$, divida R en cuatro cuadrados iguales y tome como punto muestra (x_i, y_i) la esquina superior derecha $d'R_{ij}$.

Img 53

1. (1,2)
2. (2,2)
3. (1,1)
4. (2,1)

Sea $z = f(x,y) = 16 - x^2 - 2y^2$. El área de cada cuadrado es 1.

$$V = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_i) \triangle A$$

$$\begin{aligned} &= f(1,1)\cdot 1 + f(1,2)\cdot 1 + f(2,1)\cdot 1 + f(2,2)\cdot 1 \\ &= 13 + 7 + 10 + 4 \\ &= 34 \end{aligned}$$

12.4. Propiedades de las integrales múltiples

1. $\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA$
2. $\iint_R c \cdot f(x,y)dA = c\iint_R f(x,y)dA$, c = constante

Si $f(x,y) \geq g(x,y)$ para toda (x,y) en R, entonces

$$\iint_R f(x,y)dA \geq \iint_R g(x,y)dA$$

Las propiedades 1 y 2 se les conoce como linealidad de la integral.

12.5. Integrales iteradas

La evaluación de las integrales dobles desde su definición resulta muy compleja, veremos la forma de expresar una integral doble como una integral iterada, la cual puede determinarse después al calcular dos integrales sencillas.

Suponga que f es una función de dos variables continuas sobre el rectangulo $R = [a, b]x[c, d]$. Utilizamos la notación $\int_c^d f(x, y)dy$ para dar a entender que x se mantiene fija y $f(x, y)$ se integra con respecto a y, desde $y = c$ hasta $y = d$. Ahora $\int_c^d f(x, y)dy$ es un número que depende del valor de x, de modo que define una función de x:

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

si ahora integramos la función A con respecto a x, desde $x = a$ hasta $x = b$, obtenemos:

$$\int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy\right] dx$$

A la integral del lado $\rightarrow$ se llama integral iterada.

Entonces:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy\right] dx$$

De manera semejante:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx\right] dy$$

Ejemplo 1: Evalúe las integrales:

1. $\int_0^3 \int_1^2 x^2ydydx$

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2dy &= x^2 \cdot \frac{y^2}{2}\bigg|_1^2 \\ &= x^2\left(\frac{2^2}{2}\right) - x^2\left(\frac{1^2}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2}x^2 \\ \int_0^3 \int_1^2 x^2dydx &= \int_0^3 \frac{3}{2}x^2dx \\ &= \frac{3}{2}\int_0^3 x^2dx \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^3 \\ &= \frac{x^3}{2}\bigg|_0^3 \\ &= \frac{27}{2}\end{aligned}$$

2. $\int_2^1 \int_0^3 x^2ydxdy$

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left[\frac{x^3}{3}\bigg|_0^3 y\right]dy &= 9\int_1^2 ydy \\ &= 9\left[\frac{y^2}{2}\bigg|_1^2\right] \\ &= \frac{27}{2}\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Evaluar las siguientes integrales dobles:

1. $\iint_R (3y - 2x^2)dA$ Si R es la región del plano xy que consiste de todos los puntos (x, y) para las cuales $-1 \leq x \leq 2$ y $1 \leq y \leq 3$.

   $R = 24$

Teorema de Fubini: Si f es continua en el rectángulo $R = (x, y) = |a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, entonces:

$$\iint_R f(x,y) = dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

De manera más general, lo anterior se cumple si supones que f es acotada en R, es discontinua sólo es un número finito de curvas suaves y las integrales iteradas existen.

EJEMPLO 3: Evalúe la integral doble $\iint_R (x^2 - 3y^2)dA$, donde
$R = (x, y)|0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$.

$R = -12$

EJEMPLO 4: Evalúe $\iint_R y \sin{(xy)} dA$, donde $R = [1, 2]x[0, \pi]$

$$
\begin{aligned}
\iint_R y \sin{(xy)} dA &= \int_0^\pi \int_1^2 y \sin{(xy)} dx dy \\
&= \int_0^\pi [-\cos{(xy)}] \mid_1^2 \\
= \int_0^{2\pi} &(-\cos(2y) + \cos{(y)})dy \\
&= -\frac{1}{2} \sin{(2y)} + \sin{(y)} \mid_0^\pi \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Si invertimos el orden de integración:

$$\int_1^2 \int_0^\pi y \sin{(xy)} dy dx$$

aplicamos integración por partes:

$$
\begin{array}{cc}
u = y & dv = \sin{(xy)} dy \\
du = dy & v = -\frac{\cos{(xy)}}{x}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi y \sin{(xy)} dy &= -y \frac{\cos{(xy)}}{x} \mid_0^\pi + \frac{1}{x} \int_0^\pi \cos{(xy)} dy \\
&= -\frac{\pi \cos{(\pi x)}}{x} - \frac{\sin{(\pi x)}}{x^2}
\end{aligned}
$$

ahora

$$\int_1^2 \left[-\frac{\pi \cos{(\pi x)}}{x} + \frac{\sin{(\pi x)}}{x^2} \right] dx$$

Nuevamente por partes:

$$
\begin{array}{cc}
u = -\frac{1}{x} & dv = \pi \cos \pi x dx \\
du = \frac{dx}{x^2} & v = \sin{(\pi x)}
\end{array}
$$

Así

$$\begin{aligned}
\int_1^2 -\frac{\pi\cos(\pi x)}{x}dx &= -\frac{\sin(\pi x)}{x}\,|_1^2 - \int_1^2 \frac{\sin \pi x}{x^2}dx \\
&\to \int_1^2 \left[-\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right] dx \\
&= -\frac{\sin(\pi x)}{x}\,|_1^2 = -\frac{\sin(2\pi)}{2} + \sin(\pi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ejemplo 5: Calcule el volumen del sólido limitado por la superficie $f(x,y) = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$, así como, por los planos $x = 3$ y $y = 2$, y los tres planos coordenados.

$$V = \iint_R f(x,y)dA = \int_0^3 \int_0^2 \left(4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}\right) dydx$$

$R = 21.5$

Ejemplo 6: Calcule el volumen del sólido S acotado por el paraboloide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, los plano $x = 2$ y $y = 2$ y los tres planos coordenados.

Sea $z = 16 - x^2 - 2y^2$

$$V = \iint_R (16 - x^2 - 2y^2)dA = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)dxdy$$

$R = 48$

En el caso en que la integral doble de f pueda expresarse como el producto de dos integrales sencillas, entonces:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R g(x,y)dA = \int_a^b g(x)dx \cdot \int_c^d h(y)dy$$

donde $R = [a,b]x[c,d]$

Ejemplo 1: Si $R = [0, \frac{\pi}{2}]x[0, \frac{\pi}{2}]$ y $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$ hallar:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R \sin(x)\cos(y)dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)dy = 1$$

12.6. Integrales dobles sobre regiones generadas

Si f es continua sobre una región D tipo I, tal que:

$$D = (x, y)|a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$$

entonces:

$$\iint_D f(x, y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dydx$$

-Si f es continua sobre una región D tipo II, tal que:

$$D = (x, y)|c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$$

entonces:

$$\iint_D f(x, y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dxdy$$

Ejemplo 1: Evalué $\iint_D (x + 2y)dA$, donde D es la región acotada por las parábolas $y = 2x^2$ y $y = 1 + x^2$

Las parábolas se cruzan cuando: $2x^2 = 1 + x^2$; $x^2 = 1 \rightarrow x = \pm$

Img 54

Región tipo I, así:

$$D = (x, y)| - 1 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2$$

La frontera inferior es: $2x^2$ y la frontera superior es: $1 + x^2$

$$\rightarrow \iint_D (x + 2y)dA = \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)dydx = \int_{-1}^{1} [xy + y2]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2\right] dx = \frac{32}{15}$$

Ejemplo 2: Encuentre el volumen del sólido que está bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ t encima de la región D en el plano xy acotado por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.

Img 55

La región cuando $y = y \rightarrow 2x = x^2$

$$\rightarrow x^2 - 2x = 0$$
$$\rightarrow x(x-2) = 0$$
$$x_1 = 0 x_2 = 2$$

$$D = (x,y)|0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x$$

$$V = \iint_D (x^2+y^2)dA = \int_0^2 \int_{x^2}^2 x(x^2+y^2)dydx$$
$$= \int_0^2 \left[x^2 + y\frac{y^3}{3}\right] |_{x^2}^2 \, xdx$$
$$= \int_0^2 \left[x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2x^2 - \frac{(x^2)^3}{3}\right] dx$$
$$= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3}\right) dx$$
$$= -\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6} \, |_0^2$$
$$= \frac{216}{35}$$

Pero si observamos la figura anterior a D también la podemos escribir como Región tipo II

$$D = (x,y)|d \leq x \leq 4, \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y}$$

$$\frac{y}{2} = x = \sqrt{y}$$
$$\frac{y^2}{4} = y$$
$$y^2 - 4y = 0$$
$$y(y-4) = 0$$
$$y_1 = 0 y_2 = 4$$

La integral es:

$$V = \iint_D (x^2+y^2)dA = \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)dxdy$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2x\right]\Bigg|_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} dy \\
&= \int_0^4 \left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} + y^{\frac{5}{2}} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2}\right) dy \\
&= \frac{2}{15}y^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}} - \frac{13}{96}y^4\Bigg|_0^4 \\
&= \frac{216}{35}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3: Evalúe $\iint_D xydA$, donde D es la región acotada por la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 16$.

Img 56

Para región tipo II: $x = y + 1$ y $x = \frac{y^2-6}{2}$

$$\begin{aligned}
y + 1 &= \frac{y^2-6}{2} \\
y^2 - 2y - 8 &= 0 \\
(y-4)(y+2) &= 0 \\
y_1 &= 4y_2 = -2
\end{aligned}$$

$$D = (x,y)| -2 \leq y \leq 4, \frac{y^2}{2} - 3 \leq x \leq y + 1$$

$$\begin{aligned}
\iint_D xydA &= \int_{-2}^4 \int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} xydxdy \\
&= 36
\end{aligned}$$

Para la región tipo I: $y = y$ y $x - 1 = \sqrt{2x+6}$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &= 2x + 6 \\ x^2 - 2x - 2x + 1 - 6 &= 0 \\ x^2 - 4x - 5 &= 0 \\ (x-5)(x+1) &= 0 \\ x_1 = 5 x_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$D(x,y) | -1 \leq x \leq 5, x - 1 \leq y \leq \sqrt{2x+6}$$

$$\iint_D xydA = \int_{-1}^{5} \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xydydx + \int_{-3}^{-1} \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xydydx$$

Img 57 e Img 58 **Junto con las anotaciones

Ejemplo 4: Calcular el área de la región acotada por $2y = 16 - x^2$ y $x + 2y - 4 = 0$.

Img 59

$$\begin{aligned} y = 8 - \frac{1}{2}x^2 ; y &= 2 - \frac{1}{2}x \\ 8 - \frac{x^2}{2} &= 2 - \frac{x}{2} \\ \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} &+ 2 - 8 \\ x^2 - x - 12 &= 0 \\ (x-4)(x+3) &= 0 \\ x_1 = 4 x_2 &= -3 \\ y_1 = 0 y &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Así

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-3}^{4}\int_{2-\frac{x}{2}}^{8-\frac{x^2}{2}} dydx \\
&= \int_{-3}^{4} y\Big|_{2-\frac{x}{2}}^{8-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \int_{-3}^{4} \left[\left(8-\frac{x^2}{2}\right)-\left(2-\frac{x}{2}\right)\right] dx \\
&= 6x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{4}\Big|_{-3}^{4} \\
&= \frac{343}{12}
\end{aligned}
$$

12.7. Propiedades de las integrables dobles

Supongamos que todas las siguientes integrales existen

1.
$$\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]dA = \iint_D f(x,y)dA + \iint_D g(x,y)dA$$

2.
$$\iint_D c\cdot f(x,y)dA = c\cdot \iint_D f(x,y)dA$$

3. Si $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo (x,y) en D, entonces
$$\iint_D f(x,y)dA \geq \iint_D g(x,y)dA$$

4.
$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA$$

5.
$$\iint_D 1dA = A(D) \text{ Área evaluada en la región}$$

6. Si $m \geq f(x,y) \geq M$ para toda (x,y) en D, entonces
$$mA(D) \geq \iint_D f(x,y)dA \geq MA(D)$$

Img 60

Ejemplo 1: Utilice la propiedad 6 para estimar la integral $\iint_D e^{\sin x \cos y} dA$, donde D es el disco con centro en el origen y radio 2.

Puesto que $-1 \leq \sin x \leq 1$ y $-1 \leq \cos y \leq 1$, tenemos que $-1 \leq \sin x \cos y \leq 1$, entonces $e^{-1} \leq e^{\sin x \cos x} \leq e^1 = e$.

Así $m = e^{-1}$ y $M = e$ y $A(D) = \pi(2)^2$, de 6.

$$\frac{4\pi}{e} \leq \iint_D e^{\sin x \cos y} dA \leq 4\pi e$$

12.8. Integrales en coordenadas polares

Suponga que queremos evaluar $\iint_R f(x,y)dA$, donde R es una de las regiones de la fig. 1. En cualquier caso, la discripción de R en términos de las coordenadas rectangulares es un tanto complicada.

a) **Img 61**

$$R = (r, \theta) | 0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

b) **Img 62**

$$R = (r, \theta) | 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Recuerde que las componentes coordenadas polares (r, θ) de un punto, se relacionan con las coordenadas rectangulares (x, y) mediante las ecuaciones:

Img 63

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \sin \theta$$
$$R = (x, y) | a \leq r \leq b, \alpha\theta \leq \beta$$

12.9. Cambio de coordenadas polares en una integral doble

QUE LETRA ES EN 'K'??? Si f es continua en un rectángulo K polar R dado $0 \leq a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta\beta$, donde $a \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, entonces:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \cdot dr d\theta$$

Img 64

Ejemplo 1: Evalúe $\iint_R (3x+4y^2)dA$, donde R es la región dle semiplano superior acotado por los círculos $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$.

Img 65

$$R = (x,y)|y \geq 0, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4$$
$$R = (r,\theta)|1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\begin{aligned}
\iint_R (3x+4y^2)dA &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta)r \cdot drd\theta \\
&= \int_0^\pi \int_1^2 (3r^2\cos\theta + 4r^3\sin^2\theta)drd\theta \\
&= \int_0^\pi \left(r^3\cos\theta + r^4\sin^2\theta\right)\Big|_1^2 d\theta \\
&= \int_0^\pi \left(7\cos\theta + 15\sin^2\theta\right) d\theta \\
&\left[\text{ Recordemos: } \sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2}\right] \\
&= \int_0^\pi \left[7\cos\theta + \frac{15}{2}(1-\cos 2\theta\right] d\theta \\
&= \left[7\sin\theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4}\sin 2\theta\right] \Big|_0^\pi \\
&= \frac{15\pi}{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Usar coordenadas polares para evaluar $\int_{-a}^{a}\int_0^{\sqrt{a-x^2}}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dydx$.

Img 66

Observemos

$$r^2 = x^2+y^2 \quad ; \quad dA = drd\theta$$

$$\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dydx = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{a} r^3\cdot rdrd\theta$$
$$= \int_{0}^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]\Big|_0^a d\theta$$
$$= \frac{a^5}{5}\theta\Big|_0^{\pi}$$
$$= \frac{\pi a^5}{5}$$

Ejemplo 3: Evalúe la integral doble $\iint_R e^{(-x^2+y^2)}dA$, donde la región R se encuentra en el primer cuadrante y está limitada por la circunferencia $x^2+y^2=a^2$ y los ejes coordenados.

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a e^{-r^2}\cdot rdrd\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{2}\int_0^a e^{-r^2}(-2rdr)\right]d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]\Big|_0^a d\theta$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{a^2}-1)d\theta$$
$$= -\frac{1}{2}(e^{-a^2}-1)\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Determine el volumen del sólido acotado por el plano $z=0$ y paraboloide $z=1-x^2-y^2$. Si hacemos $z=0$ en la ecuación del paraboloide, obtenemos $x^2+y^2=1$, esto significa que el plano corta al paraboloide en el círculo $x^2+y^2=1$, de forma que el sólido está debajo del paraboloide y encima del disco D dado por $x^2+y^2\leq 1$, entonces $0\leq r\leq 1$, $0\leq\theta\leq 2\pi$.

$$V = \iint_D (1-x^2-y^2)dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)\cdot rdrd\theta = \frac{\pi}{2}$$

Si f es continua en una región polar de la forma $D=(r,\theta)|\alpha\leq\theta\leq\beta, h_1(\theta)\leq r\leq h_2(\theta)$, entonces

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\cdot rdrd\theta$$

Img 67

$$D=(r,\theta)|\alpha\leq\beta, h_1(\theta)\leq r\leq h_2(\theta)$$

Ejemplo 1: Encuentre el volumen de un sólido que está bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$, encima del plano xy y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2x \\ &\rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ &\rightarrow r^2 = 2r\cos\theta \end{aligned}$$

Así

$$D = (r,\theta)| -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2\cos\theta$$

Img 68

$$V = \iint_D (x^2+y^2)dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^2 \cdot r dr d\theta$$

$$\begin{aligned} &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(\theta) d\theta \\ &= 8\left[\frac{1}{4}\cos^3\theta\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{pi}{2}} \cos^2\theta d\theta\right] \\ &= g\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \\ &= 6\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

ESTO DE ROJO NO SUPE QUE ONDA, EN DONDE LO PONGO 15.Un pétalo de la rosa $r = \cos(3\theta)$

Img 69

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

$$D = (r,\theta)| -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, 0 \leq r \leq \cos(3\theta)$$

$$
\begin{aligned}
\iint_D dA &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\cos 3\theta} r dr d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{1}{2}r^2\right]\Big|_0^{\cos 3\theta} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}\cos^2 3\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}\left(\frac{1+\cos 6\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{6}\sin 6\theta\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{\pi}{12}
\end{aligned}
$$

$$
r = \begin{array}{ll} \pm a\cos\theta & \text{círculos} \\ \sin\theta & \end{array}
$$

$$
r = \begin{array}{ll} a\sin(n\theta) & n, \text{ impar de pet} \\ a\cos(n\theta) & n, \text{ par tiene 2n pet} \end{array}
$$

Ejemplo 2: De uno de los pétalos de una rosa de cuatro hojas $r = \cos 2\theta$

Img 70

Graficamos

θ	r
45	0
30	$\frac{1}{2}$
15	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
0	1

Como queremos calcular el de un sólo pétalo:

$$r = \cos 2\theta \to 0 \leq r \leq \cos 2\theta$$

Observemos para el ángulo cuando $\cos\theta = 0$.

$$\text{Cuando } \theta = \frac{\pi}{2} \to 2\theta = \frac{\pi}{2} \to \theta = \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \text{ así}$$

$$D = (r,\theta)|0 \leq r \leq \cos 2\theta, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

El área de cualquier figura es $A(D) = \iint_D dA$; entonces;

$$
\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos 2\theta} r dr d\theta &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2}\right]\Bigg|_0^{2\cos 2\theta} d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 2\theta}{2} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 2\theta(2d\theta)}{2} \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta(2d\theta) \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}2\theta + \frac{1}{4}\sin 2(2\theta)\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\theta}{4}\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\sin 4\theta|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right] + \frac{1}{4}\left[\sin 4\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin 4\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right] \\
&= \frac{\pi}{8}
\end{aligned}
$$

$$A(D) = \frac{\pi}{8}$$

Ejercicio 3: La región entre los círculos $r = 2\cos\theta$ y $r = 2\sin\theta$.

Multiplicamos ambas ecuaciones por r: $r^2 = 2r\cos\theta$ y $r^2 = 2r\sin\theta$

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 = 2x \quad &\to (x-1)^2 + y^2 = 1 \\
x^2 + y^2 = 2y \quad &\to x^2 + (y-1)^2 = 1
\end{aligned}
$$

Img 71

Para cuando se tocan las regiones:

$$r = r \quad \to \cos\theta = \sin\theta;$$

es decir para $\theta = \frac{\pi}{4}$

Es más fácil si obtenemos el de una región u por simetría la multiplicamos por 2; así:

$$D(r,\theta)|0 \le r \le 2\sin\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

$$
\begin{aligned}
2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\sin\theta} r dr d\theta &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2}\right]\Bigg|_0^{2\sin\theta} d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\sin^2\theta}{2} d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta d\theta; \\
&\text{Usemos: } \int \sin^2 u du \\
&= \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin 2u + C \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta d\theta \\
&= \left[\frac{4}{2}\theta - \frac{4}{4}\sin 2\theta\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= 2\left[\frac{\pi}{4}\right] - \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

$$
A(D) = \frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1
$$

Aqui puso algo que no entendí el orden

EJERCICIOS: Calcular por medio de integración doble el área de la región limitada por una hoja de la rosa $r = \sin(3)\theta$

$$
\text{El } \sin(\theta) = 0 \text{ cuando } \theta = \pi
$$
$$
3\theta = \pi; \quad \theta = \tfrac{\pi}{3}, -\tfrac{\pi}{3}
$$

12.10. Aplicaciones de la doble integral

La integral doble sirve para calcular la densidad de masa de un cuerpo mediante subrectángulos, y también la masa.

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}*, y_{ij}*)\Delta A \\
&= \iint_D \rho(x,y)dA
\end{aligned}
$$

También se puede hacer un análisis para otros tipos de densidad que se clasifican de la misma manera

que letra es esa

Proporciona la carga total

$$
\rho = \iint_D r(x,y)dA
$$

EJEMPLO 1: Una carga se distribuye sobre la región triangular D de la figura, de modo que la densidad de carga $m(xiy)$ es $\rho(x,y) = xy$, la cual se mide en coulombs por metro cuadrado $\left(\frac{c}{m^2}\right)$. Encuentre la carga total.

Img 72

$$
\begin{aligned}
\rho &= \iint_D \rho(x,y)dA \\
&= \int_0^1 \int_{1-x}^1 xydydx \\
&= \int_0^1 \left[x \cdot \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_{1-x}^1 dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^2}{2}[1^2 - (1-x)^2]dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (2x^2 - x^3)dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{5}{24} \\
\rho &= \frac{5}{24}C
\end{aligned}
$$

12.11. Momentos y centros de masa

Busquemos el centro de masa de un lámina que tiene una función de densidad $\rho(x, y)$ y ocupa una región D. el momento de toda la lámina al rededor del eje x:

$$\bar{x}_i = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad M = \sum m_i x_i$$

$$\begin{aligned} M_x &= \lim_{min \to \infty} \sum_i^n \sum_j^n y_{ij}^* \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \\ &= \iint_D y\rho(x, y) dA \end{aligned}$$

De manera semejante, el momento al rededor del eje y es:

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{min \to \infty} \sum_i^n \sum_j^n x_{ij}^* \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \\ &= \iint_D x\rho(x, y) dA \end{aligned}$$

12.12. Coordenadas del centro de masa

Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa de una lámina que ocupa la región D, y que contiene como función de densidad a $\rho(x, y)$ son:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x, y) dA; \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x, y) dA$$

donde

$$m = \iint_D \rho(x, y) dA$$

EJERCICIO 1: Halle la masa y el centro de masa de una lámpara triangular con vértices $(0, 0), (1, 0)$ y $(0, 2)$, si la función de densidad es $1 + 3x + y$

Img 73

$$
\begin{aligned}
(y - y_1) &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \\
(y - 0) &= \frac{(2 - 0)}{(0 - 1)} \cdot (x - 1) \\
y &= 2 - 2x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m &= \iint_D \rho(x, y) dA \\
&= \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y) dy dx \\
&= \int_0^1 \left[y + 3xy + \frac{y^2}{2} \right] \Bigg|_0^{2-2x} dx \\
&= 4 \int_0^1 (1 - x^2) dx \\
&= 4 \left[x - \frac{x^3}{3} \right] \Bigg|_0^1 \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x, y) dA \\
&= \frac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x + 3x^2 + xy) dy dx \\
&= \frac{3}{8} \int_0^1 \left[xy + 3x^2y + x\frac{y^2}{2} \right] \Bigg|_0^{2-2x} dx \\
&= \frac{3}{2} \int_0^1 (x - x^3) dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right] \Bigg|_0^1 \\
&= \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)dA \\
&= \frac{3}{8}\int_0^1\int_0^{2-2x}(y+3xy+y^2)dydx \\
&= \frac{3}{8}\int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}+3x\cdot\frac{y^2}{2}+x\frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_0^{2-2x} dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 (7-9x-3x^2+5x^3)dx \\
&= \frac{11}{16}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2: La densidad en cualquier punto de una lámina semicircular es proporcional a la distancia desde el centro del círculo. Determine el centro de la masa de la lámina.

Img 74

Observemos que la distancia desde un punto (x, y) al centro del círculo es:

$$
r = a = \sqrt{x^2+y^2} \quad \to \quad \rho(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}
$$

Usando coordenadas polares $D = (r,\theta)|0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi$

$$
\begin{aligned}
m &= \iint_D \rho(x,y)dA \\
&= \iint_D k\sqrt{x^2+y^2}dA \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{a}(kr)rdrd\theta \\
&= k\int_0^{p} i\int_0^{a} r^2drd\theta
\end{aligned}
$$

$$
\frac{ka^3}{3}\int_0^{\pi} d\theta = \frac{k\pi a^3}{3}
$$

$$
m = \frac{k\pi a^3}{3}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)dA \\
&= \frac{3}{k\pi a^3}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r\sin\theta(kr)rdrd\theta \\
&= \frac{3}{\pi a^3}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{a} r^3dr \\
&= \frac{3}{\pi a^3}\left[-\cos\theta\right]\Big|_0^{\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]\Big|_0^{a} \\
&= \frac{3}{\pi a^3}\cdot\frac{2a^4}{4} \\
&= \frac{3a}{2\pi}
\end{aligned}
$$

La lámina y la $\rho(x,y)$ son simétricas con respecto al eje y, de modo que el centro de masa debe estar sobre el eje y, es decir $x = 0$.

12.13. Momento de inercia

Momento de inercia de una lámina al rededor del eje x:

$$
I_x = \lim_{min\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}^*)^2\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A = \iint_D y^2\rho(x,y)dA
$$

Momento de inercia de una lámina al rededor del eje y:

$$
I_y = \lim_{min\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}^*)^2\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A = \iint_D x^2\rho(x,y)dA
$$

Momento de inercia de una lámina al rededor del origen (momento polar de inercia):

$$
I_0 = \lim_{min\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[(x_{ij}^*)^2 + (y_{ij}^*)^2\right]\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dA
$$

Ejemplo 1: Determine los momentos de inercia I_x, I_y y I_0 de un disco homogéneo D con densidad $\rho(x,y) = \rho$, centro en el origen y radio a.

Usando coordenadas polares:

$$
D = (r,\theta)|0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi
$$

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \iint_D (x^2+y^2)\rho dA \\
&= \rho \int_0^{2\pi}\int_0^a r^2 r dr d\theta \\
&= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr \\
&= 2\pi\rho \left[\frac{r^4}{4}\right]\Bigg|_0^a \\
&= \frac{\pi\rho a^4}{2}
\end{aligned}
$$

Como es una circunferencia

$$I_x + I_y = I_0 \quad \to \quad I_x = I_y$$

Por lo que

$$
\begin{aligned}
2I_x &= I_0 \\
I_x &= \frac{I_0}{2} \\
I_x &= \frac{\pi\rho a^4}{4}
\end{aligned}
$$

Observe:

$$m = \rho A \quad \to \quad m = \rho\pi a^2 \quad \to \quad \rho = \tfrac{m}{\pi a^2}$$

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \frac{\pi m a^4}{2\pi a^2} \\
&= \frac{1}{2} m a^2
\end{aligned}
$$

1.

$$0 \le x \le 2, \quad 1 \le y \le 2, \quad \text{sigo sin saber la letra} = x^2 + 3y^2$$

$$\text{letra} = \int_0^2 \int_1^2 (x^2+3y^2) dy dx$$

$$R = \tfrac{50}{3} C$$

Ejemplo 2: Halle la masa y el centro de masa de la lámina cuya región D es la región en el primer cuadrante, acotada por la parábola $y = 2$ y la recta $y = 1$. $\rho(x, y) = xy$

$$R = \frac{1}{6}\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{4}\right)$$

Ejemplo 3: Encuentre los momentos de inercia I_x, I_y y I_0

$$\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{16}, \frac{13}{80}\right)$$

Img 75

$$\begin{aligned}
m &= \int_0^1 \int_{x^2}^1 xydydx \\
&= \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_{x^2}^1 dx \\
&= \int_1^1 \frac{x \cdot x^4}{2} dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^5}{2} dx \\
&= \left[\frac{x^6}{12}\right]\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= 12 \int_0^1 \int_{x^2}^1 x(xy)dydx \\
&= 12 \int_0^1 \int_{x^2}^1 x^2 ydydx \\
&= 12 \int_0^1 \left[x^2 \cdot \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_{x^2}^1 dx \\
&= 12 \left[x^2 \cdot \frac{1}{2} - x^2 \cdot \frac{x^4}{2}\right] \\
&= \frac{12x^2}{2} - \frac{12x^5}{2} \\
&= 6x^2 - 6x^3 \\
&= 6 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 - 6 \cdot \left[\frac{x^6}{6}\right]\Bigg|_0^1 \\
&= \left[2x^3\right]\Big|_0^1 - x^6 \\
&= 2 - 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

aqui puso un ejercicio que no sé que onda

12.14. Área superficial

Sí la ecuación $r(u,v) = x(u,v)\hat{i} + y(u,v)\hat{j} + z(u,v)\hat{k}$ con $(u,v) \in D$ proporciona una superficie paramétrica suave S, la cual cubre solo una vez conforme (u,v) recorre el dominio del parámetro D, entonces el área superficial de S es:

$$A(S) = \iint_D |r_u \times r_y| dA$$

donde

$$r_u = \tfrac{\partial x}{\partial u}\hat{i} + \tfrac{\partial y}{\partial u}\hat{j} + \tfrac{\partial z}{\partial u}\hat{k} \quad \text{y} \quad r_v = \tfrac{\partial x}{\partial v}\hat{i} + \tfrac{\partial y}{\partial v}\hat{j} + \tfrac{\partial z}{\partial v}\hat{k}$$

Ejemplo 1: Encuentre el área superficial e una esfera de radio a, cuya representación paramétrica $x = a\sin\phi\cos\theta, y = a\sin\phi\theta, z = a\cos\phi$; con $0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

El dominio es $D = (\phi,\theta)|0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\begin{aligned}
r_\phi &= \frac{\partial x}{\partial \phi}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial \phi}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\hat{k} \\
&= a\cos\phi\cos\theta\hat{i} + a\cos\phi\sin\theta\hat{j} - a\sin\phi \\
r_\theta &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\hat{k} \\
&= -a\sin\phi\sin\theta\hat{i} + a\sin\phi\cos\theta\hat{j} + 0\hat{k}
\end{aligned}$$

$$r_\phi \times r_\theta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -a^2\sin^2\phi\cos\theta\hat{i} + a^2\sin^2\phi\sin\theta\hat{j} + a^2\sin\phi\cos\phi\hat{k}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow |r_\phi \times r_\theta| &= \sqrt{a^4\sin^2\phi\cos^2\theta + a^4\sin^2\theta + a^4\sin^2\phi\cos^2\phi} \\
&= \sqrt{a^4\sin^4\phi + a^4\sin^2\phi\cos^2\phi} \\
&= \sqrt{a^4\sin^2\phi(\sin^2\phi + \cos^2\phi)} \\
&= a^2\sin\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow A &= \iint_D |r_\phi \times r_\theta| dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin\phi d\phi d\theta \\
&= a^2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\phi d\phi \\
&= a^2(2\pi)2 \\
&= 4\pi a^2
\end{aligned}$$

12.15. Área de una gráfica

Para el caso especial de una superficie S con ecuación $z = f(x, y)$, donde (xy) está en D y f tiene derivadas parciales continuas, tomamos x, y como parámetros. Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned}
x &= x \\
y &= y \quad \text{de modo que} \quad r_x = \hat{i} + \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\right)\hat{k} \quad \text{y} \quad r_y = \hat{j} + \left(\tfrac{\partial f}{\partial y}\right)\hat{k} \\
z &= z
\end{aligned}$$

$$\rightarrow r_x \times r_y = -\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \hat{k}$$

Entonces,

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA$$

EJEMPLO 1: Calcule el área de la parte de la paraboloide de $z = x^2 + y^2$ que está debajo del plano $z = 9$.

El plano cruza el paraboloide en el círculo $x^3 + y^2 = 9, z = 9$. La superficie está encima del disco D. El círculo está en el origen y tiene radio 3.

$$\tfrac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad \text{y} \quad \tfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

$$\begin{aligned} \rightarrow A(S) &= \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dA \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dA \end{aligned}$$

La podemos resolver en coordenadas polares $D = (r, \theta) | 0 \leq r \leq 3, 0 \leq r \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r} \cdot r dr d\theta \\ &= \left[2\pi \left(\frac{1}{8}\right) \frac{2}{3}(1 + 4r)^{\frac{3}{2}} \right]\Big|_0^3 \\ &= \frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 1) \end{aligned}$$

EJEMPLO 2: Sea R la región triangular del plano xy con vértices $(0,0,0), (0,1,0)$ y $(1,1,0)$. Calcular el área de la superficie de la parte de la gráfica $z = 3x + y^2$ que se encuentra sobre R.

Img 78

$$x = x \quad x = y \quad z = 3x + y^2$$

$$
\begin{aligned}
A(S) &= \iint_D \sqrt{1+[f_x]^2+[f_y]^2}dA \\
&= \int_0^1 \int_0^y \sqrt{1+3^2+(2y)^2}dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^y (10+4y^2)^{\frac{1}{2}} dxdy \\
&= \int_0^1 \left[(10+4y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot x\right]\Big|_0^y dy \\
&= \int_0^1 (10+4y^2)^{\frac{1}{2}} ydy
\end{aligned}
$$

Completando la integral

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{(10+4y)^{\frac{1}{2}}(8ydy)}{8} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{(10+4y^2)^{\frac{3}{2}}}{8}\right]\Bigg|_0^1 \\
&= \left[\frac{2}{24}(10+4y^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^1 \\
&= \left[\frac{1}{12}(10+4y^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{12}\left[(10+4)^{\frac{3}{2}} - 10^{\frac{3}{2}}\right] \\
&= \frac{14^{\frac{3}{2}} - 10^{\frac{3}{2}}}{12} \\
&= 1.7
\end{aligned}
$$

13. Integrales triples

Si f es continua sobre una caja rectangular $B = [a, b] \times [c\, d] \times [r, s]$, entonces:

$$\iiint_B f(x, y, z)dv = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)dxdydz$$

Ejemplo 1: Evalúe la integral triple $\iiint xyz^2 dv$, donde B es la caja rectangular, dada por:

$$B = (x, y, z)|0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3$$

$$\begin{aligned}
\iiint_B xyz^2 dv &= \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^3 xyz^2 dxdydz \\
&= \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2yz^2}{2}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=1} dydz \\
&= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2} dydz \\
&= \int_0^3 []|_{y=-1}^{y=2} dz \\
&= \int_0^3 \frac{3z^2}{4} dz \\
&= \left[\frac{z^3}{4}\right]\Bigg|_0^3 \\
&= \frac{27}{4}
\end{aligned}$$

13.1. Integrales triples sobre regiones generales. Acotada E:

Se dice que una región sólida E es de tipo 1 si se halla entre las gráficas de dos funciones continuas x y y; es decir, si la proyección D de E sobre el plano xy es una región plana de tipo I, entonces:

Img 79

$$E = (x, y, z)|a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)$$

Y por lo tanto:

$$\iiint_E f(x, y, z)dv = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x, y, z)dzdydx$$

Sí por otra parte D es una región plana tipo II, entonces: **Img 80**

$$E = (x, y, z)|c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)$$

$$\iiint_E f(x, y, z)dv = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x, y, z)dzdydx$$

Ejemplo 1: Evalúe $\iiint zdv$, donde E es el tetraedro sólido, acotado por los cuatro planos $x = 0, y = 0, z = 0$ y $x + y + z = 1$.

Img 81 y 82

$$E = (x, y, z)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y$$

$$\begin{aligned}
\iiint_E zdv &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} zdzdydx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 -x\, []\Big|_{z=0}^{z=1-x-y} dydx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2 dydx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{(1 - x - y)^3}{3} \right]\Bigg|_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 (1 - x)^3 dx \\
&= \frac{1}{6} \left[-\frac{(1 - x)^4}{4} \right]\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

13.2. Aplicaciones de las integrales triples

Sí tenemos el caso especial en $f(x,y,z)=1$ para todos los puntos en E. Así que la integral triple representa el volumen de E:

$$V(E)=\iiint_E dv; \quad dv=dzdydx$$

Un ejemplo es considerar una región tipo 1 y haciendo $f(x,y,z)=1$, así:

$$\iiint_E 1dv=\iint_D\left[\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)}dz\right]dA=\iint_D[\phi_2(x,y)-\phi_1(x,y)]dA$$

Sabemos que esto es el volumen que está entre las sup. $z=\phi_1(x,y)$ y $z=\phi_2(x,y)$

Ejemplo 1: Utilice una integral triple para encontrar el volumen del tetraedro T acotado por los $x+2y+z=2$, $x=2y$, $x=0$ y $z=0$.

Img 83 y 84

El tetraedro y su proyección D sobre el plano xy. La frontera inferior de T es el plano $z=0$ y la superior $x+2y+z=2$; es decir $z=2-x-2y$.

$$T=(x,y,z)|0\leq x\leq 1,\frac{x}{2}\leq y\leq 1-\frac{x}{2},0\leq z\leq 2-x-2y$$

$$\begin{aligned}
V(T)&=\iiint_T dv\\
&=\int_0^1\int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}}\int_0^{2-x-2y}dzdydx\\
&=\int_0^1\int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}}(2-x-2y)dydx\\
&=\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Todas las aplicaciones de las integrales dobles pueden extenderse a las integrales triples. Por ejemplo, si la ρ de un objeto sólido de ocupa la región E es $\rho(x,y,z)$, dada en unidades de masa por unidad de volumen en cualquier punto dado (x,y,z), entonces:

Su masa es $m=\iiint_E\rho(x,y,z)dv$ y sus momentos al rededor de los 3 planos son:

$$M_{yz}=\iiint_E x\rho(x,y,z)dv; \quad M_{xz}=\iiint_E y\rho(x,y,z)dv; \quad M_{xy}z\rho(x,y,z)dv$$

El centro de masa se localiza en el punto $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ donde:

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{m}; \quad \bar{y}=\frac{M_{xz}}{m}; \quad \bar{z}=\frac{M_{xy}}{m}$$

Si la densidad es constante, el centro de masa del sólido se llama centroide de E. Los momentos de inercia al rededor de los 3 ejes son:

$$I_x = \iiint_E (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv; \quad I_y \iiint_E (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dv;$$

$$I_z = \iiint_E (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dv$$

Al igual, la carga eléctrica total de un objeto sólido que ocupa una región E y tiene una densidad de carga $\sigma(x,y,z)$ es:

$$\text{letra} = \iiint_E \sigma(x,y,z)dv$$

Ejemplo 1: Encuentre el centro de masa de un sólido con densidad constante que está acotado por el cilindro parabólico $x = y^2$ y los planos $x = z$, $z = 0$ y $x = 1$.

Img 85 y 86

Podemos ver que la proyección está en el plano xy y así es región tipo 1.

$$E = (x,y,z)| -1 \leq y \leq 1; y^2 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x$$

Por lo tanto, si la ρ es constante $\rho(x,y,z) = \rho$, la masa es:

$$\begin{aligned}
m &= \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} \rho dzdxdy \\
&= \rho \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} xdxdy \\
&= \rho \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{y^2}^{1} dy \\
&= \frac{\rho}{2}\left[[1+1] - \left[\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right]\right] \\
&= \frac{\rho}{2}\left(2-\frac{2}{5}\right) \\
&= \frac{\rho}{2}\left(\frac{8}{5}\right) \\
&= \frac{4}{5}\rho
\end{aligned}$$

Debido a la simetría de E y de ρ respecto al plano xz, podemos decir que $M_{xz} = 0$, por consiguiente $\bar{y} = 0$. Los otros momentos son:

$$\begin{aligned}
M_{yz} &= \iiint_E x\rho dv \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} x\rho dz dx dy \\
&= \rho\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x^2 dx dy \\
&= \rho\int_{-1}^{1}\left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{y^2}^{1} dy \\
&= \frac{2\rho}{3}\int_{0}^{1}(1-y^2)dy \\
&= \frac{2\rho}{3}\left[y-\frac{y^7}{7}\right]\Bigg|_{0}^{1} \\
&= \frac{4\rho}{7}
\end{aligned}$$

$$M_{xz} = 0$$

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} z\rho dz dx dy \\
&= \rho\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\left[\frac{z^2}{2}\right]\Bigg|_{0}^{x} dx dy \\
&= \frac{\rho}{2}\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x^2 dx dy \\
&= \frac{\rho}{3}\int_{0}^{1}(1-y^6)dy \\
&= \frac{2\rho}{7}
\end{aligned}$$

El centro de masa es:

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m}\right) = \left(\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14}\right)$$

13.3. Integrales triples en coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas de un punto P son (r, θ, z), y donde r, θ, z se muestran en la figura.

Img 87 y 88

1. Suponga que E es una región tipo 1, cuya proyección D sobre el plano xy se describe bien mediante coordenadas polares. En particular, suponga que f es continua y que

$$E = (x, y, z)|(x, y) \in D, \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)$$

2. donde D aparece en coordenadas polares mediante

$$D = (r, \theta)|\alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)$$

Sabemos que:

$$\iiint_E f(x, y, z)dv = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \left[\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right] dA$$

$$\rightarrow \iiint_E f(x, y, z)dv = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{\phi_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{\phi_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot rdzdrd\theta$$

*Ésta fórmula resulta útil E es una región sólida que se describe con facilidad en coordenadas cilíndricas y sobre todo, cuando la función $f(x, y, z)$ comprende al expresión $x^2 + y^2$.

Ejemplo 1: Un sólido E está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, debajo del plano $z = 4$ y encima del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. La densidad... Determine la masa de E.

Img 89

En coordenadas cilíndricas, el cilindro es $r = 1$ y el paraboloide $z = 1 - r^2$, así:

$$E = (r, \theta, z)|0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 1 - r^2 \leq z \leq 4$$

Puesto que la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia al eje del cilindro (z).

$$f(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2} = kr, k = \text{constante}.$$

Así:

$$\begin{aligned}
m &= \iiint_E k\sqrt{x^+y^2}dv \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-r^2}^4 (kr)\cdot rdzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-r^2}^4 kr^2dzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 kr^2[4-(1-r^2)]dr \\
&= 2\pi k\int_0^1 (3r^2+r^4)dr \\
&= 2\pi k\left[r^3+\frac{r^5}{5}\right]\Big|_0^1 \\
&= \frac{12\pi k}{5}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Evalúe

$$\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2+y^2)dzdydx$$

Tenemos $E = (x,y,z)|-2\leq x\leq 2, -\sqrt{4-x^2}\leq y\leq\sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 2$.

Img 90

La proyección de E sobre el plano xy es el disco $x^2+y^2\leq 4$. La superficie inferior de E es el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$, y su superficie superior es el plano $z=2$.

Ésta región tiene una descripción mucho más simple en coordenadas cilíndricos.

$$E = (r,\theta,z)|0\leq\theta\leq 2\pi, 0\leq r\leq 2, r\leq z\leq 2$$

$$
\begin{aligned}
\iiint_E (x^2+y^2) &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{4-x^2}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)dzdydx \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2\cdot rdzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3(2-r)dr \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{2}r^4-\frac{1}{5}r^5\right]\Big|_0^2 \\
&= \frac{16\pi}{5}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3: Evalúe $\iiint_E (x^2+y^2)dv$, donde E es la región acotada por el cilindro $x^2+y^2=4$ y por los planos $z=-1$ y $z=2$.

Img 91

$$E = (x,y,z)|0\leq\theta\leq 2\pi, 0\leq r\leq 2, -1\leq z\leq 2$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-1}^2 r^3 dzdrd\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[r^3z\right]\Big|_{-1}^2 drd\theta \\
&= 3\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3drd\theta \\
&= 3\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]\Big|_0^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 3\left(\frac{16}{4}\right)d\theta \\
&= [4\cdot 3\theta]|_0^{2\pi} \\
&= 3[4(2\pi)] \\
&= 24\pi
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4: Evalúe $\iiint_E ydv$, donde E es el sólido que está entre los cilindros $x^2y^2=1$ y $x^2+y^2=4$ encima del plano xy y debajo $Z=x+2$.

Img 92

$$\text{Para el plano:} \quad \begin{array}{rcl} z=2 & \rightarrow & (0,0,2) \\ x=-2 & \rightarrow & (-2,0,0) \end{array}$$

$$E = (x,y,z)|0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 \leq r \leq 2, 0 \leq z \leq r\cos\theta + 2$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{r\cos\theta+2} r^2\sin\theta dzdrd\theta &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left[(r^2\sin\theta)\right]\Big|_0^{r\cos\theta+2} drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^2 [r^3\sin\theta\cos\theta + 2r^2\sin\theta]drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\sin\theta\cos\theta + \frac{2r^3}{3}\sin\theta\right]\Big|_1^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{\sin\theta\cos\theta}{4}(2^4-1^4) + \frac{2\sin\theta}{3}(2^3-1^3\right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{15}{4}\sin\theta\cos\theta + \frac{14}{3}\sin\theta\right] d\theta \\
&= \frac{15}{4}\int_0^{2\pi} udu \\
& u = \sin x; du = \cos x dx \\
&= \frac{15}{4}\int_0^{2\pi}\sin\theta(\cos\theta d\theta) + \frac{14}{3}\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta \\
&= \frac{15}{4}\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]\Big|_0^{2\pi} + \left[\frac{14}{3}(-\cos\theta)\right]\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{14}{3}[-1-(-1)] \\
&= \frac{16}{3}(-1+1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ejemplo 5: Evalúe $\iiint_E x^2 dv$, donde E es el sólido que se halla entre el cilindro $x^2+y^2=1$, encima del plano $z=0$ y debajo del cono $z^2=4x^2+4y^2$.

Img 93

$$E = (x,y,z)|0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq 2r$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2r} r^3\cos^2\theta dzdrd\theta = \frac{2\pi}{5}$$

13.4. Coordenadas esféricas

La relación entre coordenadas rectangulares (x, y, z) y las esféricas (ρ, θ, ϕ) es:

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta; \quad y = \rho \sin\phi \cos\theta; \quad z = \rho \cos\phi; \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Éstas ecuaciones son de esféricas rectangulares

Img 94

De rectangulares a esféricas:

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho \sin\phi} = 0$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad \tan\theta = \tfrac{y}{x}; \quad \cos\phi = \left(\tfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

De esféricas a cilíndricas $r > 0$:

Cilíndricas a esféricas $(r > 0)$:

$$r^2 = \rho^2 \sin^2\phi; \quad \theta = \theta; \quad z = \rho\cos\phi$$

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \theta = \theta, \quad \phi = \arccos\left(\tfrac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)$$

Ejemplo 1: Expresar en coordenadas rectangulares el punto $(r, \theta, z) = \left(4, \frac{5\pi}{6}, 3\right)$.

$$\begin{array}{llll} x & = 4\cos\frac{5\pi}{6} & = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & = -2\sqrt{3} \\ y & = 4\sin\frac{5\pi}{6} & = 4\left(\frac{1}{2}\right) & = 2 \\ z & = 3 & (-2\sqrt{3}, 2, 3) & \end{array}$$

Ejemplo 2: Hallar ecuaciones en coordenadas cilíndricas para las superficies cuyas ecuaciones rectangulares son: a)$x^2 + y^2 = 4z^2$ y b)$y^2 = x$.

a)

$$r^2 = 4z^2$$

b)

$$\begin{array}{ccccc} r^2\sin^2\theta = r\cos\theta & \to & r^2\sin^2\theta - r\cos\theta = 0 & \to & r(r\sin^2\theta - \cos\theta) = 0 \\ r^2\sin^2\theta - \cos\theta = 0 & ; & r = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} & = & \csc\theta\cot\theta \end{array}$$

Ejemplo 3: El punto $\left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ se da en coordenadas esféricas. Localice el punto y encuentre sus coordenadas rectangulares.

$$
\begin{aligned}
x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\
&= 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} \\
&= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\
&= 2 \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\
&= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z &= \rho \cos \phi \\
&= 2 \cos \frac{\pi}{3} \\
&= 2 \left(\frac{1}{2} \right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\text{El punto es: } \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1 \right)
$$

EJEMPLO 4: El punto $(0, 2\sqrt{3}, -2)$ está dado en coordenadas rectangulares. Encuentre coordenadas esféricas para ese punto.

$$
\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0 + 12 + 4} = 4
$$

$$
\cos \phi = \frac{z}{\rho} = -\frac{1}{2} \rightarrow \phi = \frac{2\pi}{3}
$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho\sin\phi} = 0 \to \cos\theta = \frac{0}{4\sin\frac{2\pi}{3}} = 0 \to \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{Pero } \theta = \frac{\pi}{2}, \text{ ya que para } \theta = \frac{3}{2}\pi \to y = 2\sqrt{3} > 0.$$

$$\text{Las coordenadas esféricas del punto son: } \left(4, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right).$$

Ejemplo 5: Hallar una ecuación en coordenadas esféricas para las superficies, cuya ecuación en coordenadas rectangulares es: a)$x^{+}y^{2} = z^{2}$.

$$\begin{aligned}
\rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta &= \rho^2\cos^2\phi \\
\rho^2\sin^2\phi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) &= \rho^2\cos^2\phi \\
\rho^2\sin^2\phi &= \rho^2\cos^2\phi
\end{aligned}$$

$$\tfrac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi} = 1; \quad \rho > 0 \quad \to \quad \tan^2\phi = 1; \quad \phi = \tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3}{4}\pi$$

La ecuación $\phi = \frac{\pi}{4}$ mitad superior del cono y $\phi = \frac{3}{4}\pi$ mitad inferior del cono.

Para la integración triple en coordenadas esféricas:

$$\iiint_E f(x,y,z)dv = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi d\rho d\theta d\phi$$

donde E es la región (es un trozo esférico) dada por:

$$E = (\rho,\theta,\phi)|a \le \rho \le b, \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d$$

Ésta fórmula puede extenderse para incluir regiones esféricas más generales como:

$$E = (\rho,\theta,\phi)|\alpha \le \beta, c \le \phi \le d, g_1(\theta,\phi) \le \rho \le g_2(\theta,\phi)$$

Ejemplo 1:

$$\text{Evalúe } \iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dv, \text{ donde } B \text{ es la bola unitaria:}$$

$$B = (x,y,z)|x^2 + y^2 + z^2 \le 1$$

Ya que es una esfera:

$$B = (\rho, \theta, \phi) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$$

Además:

$$\rho = x^2 + y^2 + z^2; \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned}
\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dv &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{(\rho^2)^{\frac{3}{2}}} \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\pi} \sin \phi d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} d\rho \\
&= [-\cos \phi]\Big|_0^{\pi} (2\pi) \left[\frac{1}{3} e^{\rho^3} \right]\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{4}{3}\pi(e-1)
\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Utilice las coordenadas esféricas para determinar el volumen del sólido que está encima del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$

Img 95

Observemos:

$$\begin{aligned}
z &= x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \\
z &= \rho \cos \phi \\
\rho^2 &= \rho \cos \phi \\
\rho &= \cos \phi
\end{aligned}$$

Para el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\begin{aligned}
\rho \cos \phi &= \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi} \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta \\
&= \rho \sin \phi \\
\rho \cos \phi &= \rho \sin \phi \\
\cos \phi &= \sin \phi \\
\phi &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$E = (\rho, \theta, \phi) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \cos \phi$$

$$
\begin{aligned}
V(E) &= \iiint_E dv \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos\phi} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi 4} \sin\phi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]\Big|_0^{\cos\phi} d\phi \\
&= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\phi \cos^3\phi d\phi \\
u &= \cos\phi; du = -\sin\phi d\phi \\
&\therefore -\frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} u^3 du \\
&= -\frac{2\pi}{3} \left[\frac{u^4}{4}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{2\pi}{3} \left[-\frac{\cos^4\phi}{4}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\pi}{8}
\end{aligned}
$$

14. Funciones de tres variables $f(x,y), f(x,y,z)$

1. Encuentre el dominio y el rango de $g(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$

   El dominio de g es

$$D = (x,y)|9-x^2-y^2 \geq 0 = (x,y)|x^2+y^2 \leq 9$$

   Si $C(0,0)$ y $r=3$, el rango es:

$$\begin{aligned} z|z = \sqrt{9-x^2-y^2}, (x,y) \in 0, \text{ entonces} \\ 9-x^2-y^2 \leq 9 \to \sqrt{9-x^2-y^2} \geq 3 \\ \text{Así } z|0 \leq z \leq 3 = [0,3] \end{aligned}$$

   Para graficar

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \sqrt{9-x^2+y^2} \\ z &= \sqrt{9-x^2-y^2} \\ z^2 &= 9-x^2-y^2 \\ x^2+y^2+z^2 &= 9 \end{aligned}$$

$$\text{pero como } z \geq 0, esmediaesfera$$

2. Determinar el dominio y rango $f(x,y) = \sqrt{x-y}$

$$\begin{aligned} D &= (x,y)|x-y \geq 0 = (x,y)|x \geq y \\ R &= z|\sqrt{x-y}, (x,y) \in D, z|z \geq 0 \end{aligned}$$

3. $f(x,y) = \sqrt{4-2x^2-y^2}$

$$\begin{aligned} D = (x,y)|4-2x^2-y^2 \geq 0 = (x,y)|2x^2+y^2 \leq 4 \\ z|z = \sqrt{4-2x^2-y^2}, (x,y) \in D \\ 4-2x^2-y^2 \leq 4 \to \sqrt{4-2x^2-y^2} \leq 2 \\ z|0 \leq z \leq 2 = [0,2] \end{aligned}$$

4. $f(x,y,z) = x^2 ln(x-y+z)$

   a) Evaluar $f(3,6,4)$

b) Dominio

$$D = (x, y, z)|x - y + z > 0$$

c) Rango

$$z|z \in R$$

5. $f(x, y, z) = 1\sqrt{x^2 + y^2 z^2 - 1}$

   a) $f(1, 3, -4)$

   b) Dominio

$$D = (x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 - 1 \geq 0 = x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$$

   c) Rango

$$z|z \in R$$

6. $f(x, y) = \frac{x+y}{\tan{(x+y)}}$

$$f(x, y) = \frac{(x + y)\cos{(x + y)}}{\sin{(x + y)}}$$

$$D = (x, y)|x + y \neq n\pi, n \in Z$$

7. $f(x, y) = \frac{1}{lnx \cdot lny}$.

$$lnx \cdot lny \neq 0$$

$$D = (x, y)1x > 1, y > 1$$

8. $f(x, y) = ln(ln(x - y))$

$$D = (x, y)|x - y > 1$$

9. $f(x, y) = (x^2 - y)^x$

.

[]|

Prueba

15. Titulo 2

15.1. Subtítulo

15.1.1. Subtítulo más bajo

16. Título 3