Sea $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$ un vector no nulo con su i-ésima componente igual a 1, demuestre que $span(e_1, ..., e_n) = \mathbb{R}^n$.

Recuerde que:

1. Sean A y B conjuntos, $A = B \equiv A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
2. El símbolo " $=$ " no representa lo mismo que el símbolo " $\equiv$ "

Demostración de $span(e_1 ..., e_n) \subseteq \mathbb{R}^n$

Sea $x \in span(e_1 ..., e_n)$, por definición de span:
$x \in span(e_1 ..., e_n) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n\}$. Por lo tanto, $x \in \mathbb{R}^n$

Demostración de $\mathbb{R}^n \subseteq span(e_1 ..., e_n)$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$, queremos encontrar escalares α_i tales que:
$x = \sum \alpha_i e_i \equiv (x_1, ..., x_n) = \alpha_1(1, 0 ..., 0) + ... + \alpha_n(0, ..., 0, 1) \equiv (x_1, ... x_n) = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \equiv x_i = \alpha_i \forall i \in \{1, \cdots, n\}$
Por lo tanto, como existen α_i tales que $x = \sum \alpha_i e_i$, se tiene que $x \in span(e_1, ..., e_n)$