Algorithmen und Wahrscheinlichkeiten

Danny Camenisch (dcamenisch)

February 24, 2021

Contents

Chapter 1

Template

1.1 tcolorbox

My Heading

This is a **tcolorbox**.

Here, you see the lower part of the box.

1.2 minted

```java
// Hello.java
import javax.swing.JApplet;
import java.awt.Graphics;

public class Hello extends JApplet {
    public void paintComponent(Graphics g) {
        g.drawString("Hello, world!", 65, 95);
    }
}
```

Chapter 2

Graphentheorie

2.1 Zusammenhang

Wir erinnern uns an die Definition eines **zusammenhängenden** Graphen:

> **Definition**
>
> Ein Graph $G = (V, E)$ heisst **zusammenhängend**, wenn $\forall u, v \in V, u \neq v$ ein Pfad von u nach v in G existiert.
>
> X heisst **u-v-Seperator**, wenn u und v in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $G[V \backslash X]$ liegen.

Diese Definition besagt zwar ob ein Graph zusammenhängend ist oder nicht, man kann aber nichts darüber sagen, wie stark ein Graph zusammenhängend ist. Dafür definieren wir sowohl Knoten- als auch Kantenzusammenhang:

> **Definition**
>
> Ein Graph $G = (V, E)$ heisst **k-zusammenhängend**, falls $|V| \geq k + 1$ und $\forall X \subseteq V$ mit $|X| \geq k$ gilt: $G[V \backslash X]$ ist zusammenhängend.
>
> Ein Graph $G = (V, E)$ heisst **k-kanten-zusammenhängend**, falls $\forall X \subseteq E$ mit $|X| \geq k$ gilt: $(V, E \backslash X)$ ist zusammenhängend.

Ein Graph der 3-zusammenhängend ist, besitzt keine Seperator der Grösse 2 und ist dadurch auch 2-zusammenhängend.

Anschaulich zu merken: Wie viele Knoten oder Kanten muss man mindestens entfernen, bis der Graph nicht mehr zusammenhängend ist.

Es Gilt

Knoten-Zusammenhang $\leq$ Kanten-Zusammenhang $\leq$ minimaler Knotengrad

Ein (teils schwer zu beweisender) Satz erlaubt uns, eine äquivalente Definition von Zusammenhang verwenden:

Satz von Menger

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann gilt:

1. G ist k-zusammenhängend $\Leftrightarrow \forall u, v \in V, u \neq v$ gibt es mindestens k intern-knotendisjunkte u-v-Pfade.
2. G ist k-kanten-zusammenhängend $\Leftrightarrow \forall u, v \in V, u \neq v$ gibt es mindestens k intern-kantendisjunkte u-v-Pfade.

2.2 Artikulationsknoten und Brücken

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Ein Knoten $v \in V$ heisst **Artikulationsknoten** (eng. cut vertex) genau dann wenn $G[V \backslash \{v\}]$ nicht zusammenhängend ist.

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Eine Kante $e \in E$ heisst **Brücke** (eng. cut edge) genau dann wenn $G[E \backslash \{e\}]$ nicht zusammenhängend ist.

Es Gilt

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Ist $\{x, y\} \in E$ eine Brücke so gilt für x (und analog auch für y):

$$deg(x) = 1 \text{ oder } x \text{ ist ein Artikulationsknoten}$$

Die Umkehrung ist hier aber nicht immer wahr!

Definition

Sei $G = (V, E)$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf E wie folgt:

$$e \sim f :\Leftrightarrow e = f \text{ oder } \exists \text{ Kreis durch } e \text{ und } f$$

Diese Äquivalenzklassen nennen wir auch **Blöcke**. Eine alternative Definition lautet wiefolgt:

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Ein **Block** ist eine maximale Menge von Kanten, so dass je zwei dieser Kanten auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Merke: Ein Block ist ein Subgraph, der 2-zusammenhängend ist.

Es Gilt

Zwei Blöcke schneiden sich - wenn überhaupt - immer in einem Artikulationsknoten.

2.3 Block-Graphen

Wir erinnern uns an die Definition von bipartiten Graphen.

Definition

Ein Graph ist **bipartit**, wenn sich die Knotenmenge in zwei disjunkte Mengen A und B zerlegen lässt, sodass Kanten von G nur zwischen A und B verlaufen. Wir verwenden dafür folgende Notation:

$$V = A \uplus B$$

Ein Block-Graph ist nun wiefolgt definitert:

Definition

Der Block-Graph von G ist der bipartite Graph $T = (A \uplus B, E_T)$ mit

- $A =$ Artikulationsknoten von G
- $B =$ Blöcke von G
- $\forall a \in A, b \in B : \{a, b\} \in E_T \Leftrightarrow a$ inzident zu einer Kante in b