5.- Distribución Conjunta

– Ejercicios Resueltos –

- ✓ Distribución Conjunta
- ✓ Distribución Marginal
- ✓ Distribución Condicional
- ✓ Independencia de Variables Aleatorias
- ✓ Valores Esperados

1.- Cierto supermercado tiene una caja de salida común y una caja rápida, en que X_1 es el número de clientes que están esperando en la caja común, en un momento particular del día, y X_2 es el número de clientes que están esperando en la caja rápida, al mismo tiempo. Suponga que la función de probabilidad conjunta de X_1 y X_2 es la siguiente:

$X_1 \setminus X_2$	0	1	2	3
0	.08	.07	.04	.00
1	.06	.15	.05	.04
2	.05	.04	.10	.06
3	.00	.03	.01	.07
4	.00	.01	.05	.06

1.1) Calcule la probabilidad de que haya por lo menos dos clientes más en una línea de espera que en la otra.
1.2) Si se sabe que en la caja común hay dos personas esperando, ¿Cuál es el número esperado de clientes que están en la caja rápida?

1.1) Solución: Lo primero será definir las variables a utilizar:

x_1 = *"Número de clientes que esperan caja común"*
x_2 = *"Número de clientes que esperan caja rápida"*

Luego, debemos representar la probabilidad que la fila x_1 tenga por lo menos dos clientes más que la fila x_2, lo que está dado por:

$$P(x_1 \geq x_2 + 2) = P(x_1 = 2;\ x_2 = 0) + P(x_1 = 3;\ x_2 = 0) + P(x_1 = 4;\ x_2 = 0) + P(x_1 = 3;\ x_2 = 1)$$
$$+P(x_1 = 4;\ x_2 = 1) + P(x_1 = 4;\ x_2 = 2)$$

Y el otro caso está dado por:

$$P(x_1 + 2 \leq x_2) = P(x_1 = 0;\ x_2 = 2) + P(x_1 = 0;\ x_2 = 3) + P(x_1 = 1;\ x_2 = 3) + P(x_1 = 0;\ x_2 = 2)$$

Finalmente, calculando la suma de estas probabilidades, tenemos:

$$P(x_1 \geq x_2 + 2) + P(x_1 + 2 \leq x_2) = 0{,}04 + 0{,}04 + 0{,}05 + 0{,}03 + 0{,}01 + 0{,}05 = 0{,}22$$

<u>Respuesta</u>: *La probabilidad de que haya por lo menos dos clientes más en una línea de espera que en la otra, corresponde a 0,22*

1.2) Solución:

x_2	$f(x_2/x_1 = 2)$
0	$0{,}05/0{,}25 = 0{,}20$
1	$0{,}04/0{,}25 = 0{,}16$
2	$0{,}10/0{,}25 = 0{,}40$
3	$0{,}06/0{,}25 = 0{,}24$

Luego, calculamos el valor esperado:

$$E(x_2/x_1 = 2) = \sum_{Rec\ x_2} x_{2i} \cdot P(x_{2i}/x_1 = 2)$$

$$E(x_2/x_1 = 2) = 0 \cdot 0{,}20 + 1 \cdot 0{,}16 + 2 \cdot 0{,}40 + 3 \cdot 0{,}24$$

$$E(x_2/x_1 = 2) = 1{,}68$$

<u>Respuesta</u>: *Si en la caja común hay dos personas esperando, entonces el número esperado de clientes que están en la caja rápida es 1,68*

2.- En una Financiera, se consideran variables aleatorias: x = Número de préstamos solicitados diariamente y = Número de solicitudes rechazadas diariamente, tal que su distribución de probabilidad conjunta es:

x \ y	0	1	2	3	4
1	0,15	0,01	0,00	0,00	0,00
2	0,20	0,08	0,02	0,02	0,00
3	0,30	0,15	0,05	0,05	0,04

Determine el número esperado de solicitudes rechazadas diariamente, cuando el número de préstamos solicitados en el día es máximo.

2) Solución: Lo primero es definir el número de préstamos solicitados en el día cuando este es máximo, esto se puede definir por simple inspección, cuyo resultado es tres, por lo tanto, creamos una tabla con probabilidad de número de préstamos solicitados diariamente, dado que el número de solicitudes rechazadas diariamente sea igual a tres.

y	$f(y/x=3)$
0	$0{,}30/0{,}54$
1	$0{,}15/0{,}54$
2	$0{,}05/0{,}54$
3	$0{,}04/0{,}54$

En seguida, procedemos a determinar el número esperado de solicitudes rechazadas diariamente:

$$E(y/x=3)=\sum_{Rec\ y} y\cdot p(y/x=3)$$

$$E(y/x=3)=0\cdot\frac{0{,}30}{0{,}54}+1\cdot\frac{0{,}15}{0{,}54}+2\cdot\frac{0{,}05}{0{,}54}+3\cdot\frac{0{,}04}{0{,}54}=0{,}6852$$

<u>Respuesta</u>: *El número esperado de solicitudes rechazadas diariamente, cuando el número de préstamos solicitados en el día es máximo, es igual a 0,6852*

3.- Una empresa vende dos tipos de "chancadoras", ligeras y pesadas. Las cantidades vendidas mensualmente son variables aleatorias, en que x e y representan en número de chancadoras vendidas al mes de tipo ligero y de tipo pesado respectivamente. La correspondiente distribución de probabilidad conjunta es la siguiente:

x \ y	0	1	2
0	0,01	0,04	0,02
1	0,08	0,15	0,10
2	0,06	0,16	0,05
3	0,10	0,06	0,05
4	0,06	0,04	0,02

3.1) Se seleccionan al azar las ventas mensuales, en esta empresa, hasta ubicar un mes en que la cantidad vendida de chancadoras ligeras supera a la de las pesadas. Determine la probabilidad de tener éxito después del tercer mes elegido

3.2) La empresa tiene un costo fijo mensual de \$2.000.000 y la diferencia entre el precio de venta y el costo variable es de \$1.200.000 por chancadora tipo pesada vendida y \$700.000 por chancadora tipo ligera vendida. Calcule utilidad mensual esperada y su varianza en la empresa.

3.1) Solución: Lo primero que debemos hacer es definir las notaciones a utilizar:

$x =$ *"Número de chancadoras vendidas al mes de tipo ligero"*

$y =$ *"Número de chancadoras vendidas al mes de tipo pesado"*

Luego, tenemos que obtener la probabilidad correspondiente a ubicar un mes en que la cantidad vendida de chancadoras ligeras supera a la de las pesadas, lo que se expresa de la siguiente forma:

$$P(x > y) = P(x = 4; y = 0) + P(x = 3; y = 0) + P(x = 2; y = 0) + P(x = 1; y = 0) + P(x = 4; y = 1) + P(x = 3; y = 1) + P(x = 2; y = 1) + P(x = 4; y = 2) + P(x = 3; y = 2)$$

$$P(x > y) = 0{,}06 + 0{,}10 + 0{,}06 + 0{,}08 + 0{,}04 + 0{,}06 + 0{,}16 + 0{,}02 + 0{,}05 = 0{,}63$$

Después, definimos otra variable a utilizar:

$V =$ *"Cantidad de meses seleccionados hasta que la cantidad vendida de chancadoras ligeras, supera a la de las pesadas"*

Además, notemos que estamos en presencia de una distribución Geométrica, lo que se expresa de la siguiente manera:

$$V \sim Geo\ (p = 0{,}63) \quad f(V) = \begin{cases} (0{,}63)(0{,}37)^{y-1} & ; \quad y = 1,2,\dots \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Finalmente calculamos la probabilidad que nos solicita el problema:

$$P(V > 3) = 1 - P(V \geq 3) = 1 - [P(V = 1) + P(V = 2) + P(V = 3)]$$

$$P(V > 3) = 1 - [(0{,}63)(0{,}37)^0 + (0{,}63)(0{,}37)^1 + (0{,}63)(0{,}37)^2] = 0{,}0507$$

Respuesta: *La probabilidad de tener éxito después del tercer mes elegido, es 0,0507.*

3.2) Solución: Utilizaremos la siguiente notación:

$U =$ *"Utilidad mensual de la empresa (MM\$)* $\qquad U = 1{,}2y + 0{,}7x - 2$

Distribuimos lo datos que nos otorga el problema, para así, poder trabajar con ellos de mejor manera.

x	$P(x)$
0	0,07
1	0,33
2	0,27
3	0,21
4	0,12

y	$P(y)$
0	0,31
1	0,45
2	0,24

Después utilizando la fórmula de esperanza, obtenemos:

$$E(y) = \sum_{Rec\ y} y \cdot P(y) = 0 \cdot 0{,}31 + 1 \cdot 0{,}45 + 2 \cdot 0{,}24 = 0{,}93$$

$$E(x) = \sum_{Rec\ x} x \cdot P(x) = 0 \cdot 0{,}7 + 1 \cdot 0{,}33 + 2 \cdot 0{,}27 + 3 \cdot 0{,}21 + 4 \cdot 0{,}12 = 1{,}98$$

En seguida, por propiedades calculamos la esperanza de la Utilidad mensual de la empresa:

$$E(U) = E(1{,}2y + 0{,}7x - 2) = 1{,}2E(y) + 0{,}7E(x) - 2$$

$$E(U) = 1{,}2 \cdot 0{,}93 + 0{,}7 \cdot 1{,}9 - 2 = 0{,}502$$

Por otro lado, nos solicitan la varianza de la Utilidad mensual de la empresa, por lo que calculamos lo siguiente:

$$E(x^2) = \sum_{Rec\ x} x^2 \cdot P(x) = 0^2 \cdot 0{,}07 + 1^2 \cdot 0{,}33 + 2^2 \cdot 0{,}27 + 3^2 \cdot 0{,}21 + 4^2 \cdot 0{,}12 = 5{,}22$$

$$E(y^2) = \sum_{Rec\ y} y^2 \cdot P(y) = 0^2 \cdot 0{,}31 + 1^2 \cdot 0{,}45 + 2^2 \cdot 0{,}24 = 1{,}41$$

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = 5{,}22 - [1{,}98]^2 = 1{,}2996$$

$$V(y) = E(y^2) - [E(y)]^2 = 1{,}41 - [0{,}93]^2 = 0{,}5451$$

$$E(xy) = \sum_{Rec\ x} \sum_{Rec\ y} x \cdot y \cdot P(x,y) = 1{,}67$$

$$Cov\,(x,y) = E(xy) - E(x) \cdot E(y) = 1{,}67 - 1{,}98 \cdot 0{,}93 = -0{,}17$$

Finalmente, como ya tenemos todos los valores necesarios calculamos la varianza de la Utilidad mensual de la empresa.

$$V(U) = V(0{,}7x + 1{,}2y - 2) = 0{,}7^2\ V(x) + 1{,}2^2\ V(y) - 2 \cdot 0{,}7 \cdot 1{,}2\,Cov(x,y)$$

$$V(U) = 1{,}2^2 \cdot 0{,}5451 + 0{,}7^2 \cdot 1{,}2996 - 2 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot (-0{,}17) = 1{,}707$$

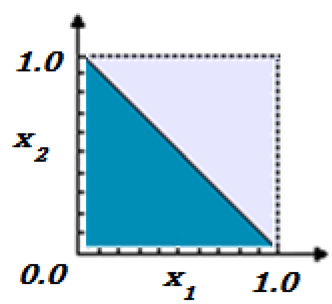
Respuesta: *La Utilidad mensual esperada y la varianza, en la empresa, son respectivamente, 0,502 y 1,707.*

4.- Las proporciones x_1 y x_2, de dos sustancias que se encuentran en muestras de insecticidas, tienen la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} 2 & 0 \le x_1 \le 1 \quad 0 \le x_1 + x_2 \le 1 \\ 0 & en\ o.c \end{cases}$$

Determine la proporción esperada de la sustancia x_1, cuando las muestras de insecticida contienen 0,2 de la sustancia x_2.

4) Solución: Definimos la función marginal de x_2, lo que se obtiene integrando la función con respecto a x_1, con los límites de integración dados gráficamente en la figura, como se muestra a continuación:



$$f(x_2) = \int_{Rec\ x_1} f(x_1,x_2)dx_1 = \int_{x_1=0}^{1-x_2} 2\ dx_1 = 2(1 - x_2)$$

Por lo que queda expresada la función marginal de x_2, de la siguiente forma:

$$f(x_2) = \begin{cases} 2(1 - x_2)\,; & 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Luego, calculamos la función marginal de la sustancia x_1, dado que contiene 0,2 de la sustancia x_2, lo que se expresa como sigue:

$$f(x_1/x_2 = 0{,}2) = \left.\frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)}\right|_{x_2 = 0{,}2} = \left.\frac{2}{2(1 - x_2)}\right|_{x_2 = 0{,}2} = \frac{1}{0{,}8}$$

Y la distribución de dicha función marginal, se ve a continuación:

$$f(x_1/x_2 = 0{,}2) = \begin{cases} \frac{1}{0{,}8} & ; 0 \leq x_1 \leq 0{,}8 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

En seguida calculamos la esperanza, por medio de la fórmula general de esperanza, para distribuciones continuas:

$$E(x_1/x_2 = 0{,}2) = \int_{Rec\ x_1} x_1 \cdot f(x_1/x_2 = 0{,}2)\, dx_1 = \int_{x_1 = 0}^{0{,}8} \frac{x_1}{0{,}8}\, dx_1 = 0{,}4$$

Análogamente, notemos que $x_1/x_2 = 0{,}2$, posee una distribución uniforme, por lo que se puede ocupar la formula de esperanza para distribuciones uniformes, quedando de la siguiente forma:

$$(x_1/x_2 = 0{,}2) \sim U[0; 0{,}8] \qquad E(x_1/x_2 = 0{,}2) = \frac{0 + 0{,}8}{2} = 0{,}4$$

Respuesta: *La proporción esperada de la sustancia x_1, cuando las muestras de insecticida contienen 0,2 de la sustancia x_2, es igual a 0,4.*

5.- El Departamento de Estudios de la Superintendencia de Electricidad y Combustible (SEC) dispone de la información del consumo de gas natural (X), expresada en cientos de m^3, además del consumo de energía eléctrica (Y) en cientos de KW, de un conjunto de viviendas ubicadas en el sector sur oriente de la capital durante el mes de Abril pasado. La función de densidad conjunta de dichas variables es la siguiente:

$$\boldsymbol{f_{xy}(x, y)} = \begin{cases} \boldsymbol{\frac{x + y}{24}} & \boldsymbol{si\ 0 < x} < 2\,; 0 < y < 4 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{c.o.c.} \end{cases}$$

La Superintendencia tiene la intención de revisar los medidores de aquellos hogares donde el consumo de gas y energía eléctrica no sobrepasa las respectivas cantidades esperadas.

5.1) ¿Qué porcentaje de los hogares de este sector debería revisar la SEG?

5.2) Si se considera una revisión aleatoria de 10 hogares del sector, determine la probabilidad de que sólo en uno de ellos se revisen los medidores.

5.3) Si se revisan los consumos de los hogares uno a uno, ¿Cuál es la probabilidad de que al tercer hogar revisado se encuentre el segundo hogar donde el consumo de gas y electricidad no sobrepase lo esperado?

5.4) De los hogares con un consumo de 100 m^3 mensuales en gas ¿Qué proporción consume menos de 100 KW en energía eléctrica?

5.1) Solución: Sean: x = *"Consumo de gas natural, en cientos de m^3"*

y = *"Consumo de energía eléctrica, en cientos de KW"*

En seguida, procedemos a calcular las funciones marginales de x e y, respectivamente:

$$f_x(x) = \int_{Rec\ y} f_{xy}(x,y)\,dy = \int_{y=0}^{4} \frac{x+y}{24}\,dy = \frac{1}{24}(4x+8) = \frac{(x+2)}{6}$$

$$f_y(y) = \int_{Rec\ x} f_{xy}(x,y)\,dx = \int_{x=0}^{2} \frac{x+y}{24}\,dx = \frac{1}{24}(2+2y) = \frac{(y+1)}{12}$$

Luego, determinamos las esperanzas de cada una de las variables, como se muestra a continuación:

$$E(x) = \int_{Rec\ x} x \cdot f_x(x)\,dx = \int_{x=0}^{2} x \cdot \frac{(x+2)}{6} dx = \frac{1}{6}\int_{x=0}^{2} x^2 + 2x\,dx = \frac{1}{6}\left(\frac{8}{3}+4\right) = \frac{10}{9}$$

$$E(y) = \int_{Rec\ y} y \cdot f_y(y)\,dy = \int_{y=0}^{4} y \cdot \frac{(y+1)}{12} dy = \frac{1}{12}\int_{y=0}^{4} y^2 + y\,dy = \frac{1}{12}\left(\frac{64}{3}+8\right) = \frac{22}{9}$$

Posteriormente, calculamos la probabilidad de los hogares de este sector que debería revisar el Departamento de Estudios de la Superintendencia de Electricidad y Combustible, los que corresponden a aquellos hogares donde el consumo de gas y energía eléctrica no sobrepasa las respectivas cantidades esperadas, por lo que los límites de integración están dados entre cero y el valor esperado de cada variable, lo que se denota de la siguiente forma:

$$P\big(x \le E(x);\ y \le E(y)\big) = P(x \le 10/9\,; y \le 22/9) = \int_{x=0}^{10/9}\int_{y=0}^{22/9} \frac{x+y}{24}\,dy\,dx = 0{,}2011$$

Finalmente, el porcentaje pedido es:

$$\%P(x \le 10/9\,; y \le 22/9) = 0{,}2011 \cdot 100 = 20{,}11\%$$

<u>Respuesta</u>: *El porcentaje de los hogares de este sector que debería revisar la SEG, corresponde al 20,11%*

5.2) Solución: Sea: w = "Número de hogares donde se revisan los medidores, en una revisión aleatoria de 10 hogares del sector"

Donde,

$$w \sim B(n = 10\,; p = 0{,}2011) \qquad P(w) = \begin{cases} \binom{10}{w}\,(0{,}2011)^{w}\,(0{,}7989)^{10-w} & ; w = 0,1,2,\dots,10 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Luego, calculamos la probabilidad de que a sólo uno le revisen el medidor:

$$P(w = 1) = \binom{10}{1}\,(0{,}2011)^{1}\,(0{,}7989)^{9} = 0{,}2666$$

Respuesta: *Si se considera una muestra aleatoria de 10 hogares del sector, la probabilidad de que sólo en uno de ellos se revisen los medidores, es igual a 0,2666.*

5.3) Solución: Sea: v = "Número de hogares revisados hasta encontrar el segundo, cuyo consumo de gas y electricidad no sobrepase lo esperado"

Con: $v \sim B^{*}(r = 2; p = 0{,}2011)$ $$P(v) = \begin{cases} \binom{v-1}{1}(0{,}2011)^{2}\,(0{,}7989)^{v-2} & ; v = 2,3,\dots \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$P(v = 3) = \binom{2}{1}(0{,}2011)^{2}\,(0{,}7989)^{1} = 0{,}065$$

Respuesta: *Si se hace una revisión de los consumos uno a uno, la probabilidad de que al tercer hogar revisado, se encuentre el segundo hogar donde el consumo de gas y electricidad no sobrepase lo esperado, corresponde a 0,065.*

5.4) Solución: Lo primero será definir la función condicional:

$$f(y/x) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x)} = \frac{\frac{x+y}{24}}{\frac{x+2}{6}} = \frac{x+y}{4x+8}$$

Luego, calculamos la función condicional para $x = 1$:

$$f(y/x = 1) = \frac{y+1}{12}$$

Finalmente, determinamos el valor de la probabilidad condicional,

$$P(y < 1/x = 1) = \int_0^1 \frac{y+1}{12}\,dy = \frac{1}{12}\left[\frac{1}{2} + 1\right] = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Respuesta: *De los hogares con un consumo de 100 m^3 mensuales en gas, la proporción consume menos de 100 KW en energía eléctrica, corresponde a 0,125*

6.- Cada neumático delantero de un tipo particular de automóvil se llenará a una presión (requerida) de 26 lb/pulg^2. Suponga que la presión de aire de cada neumático es una variable aleatoria, X para el neumático derecho e Y para el izquierdo, con la siguiente función de densidad conjunta:

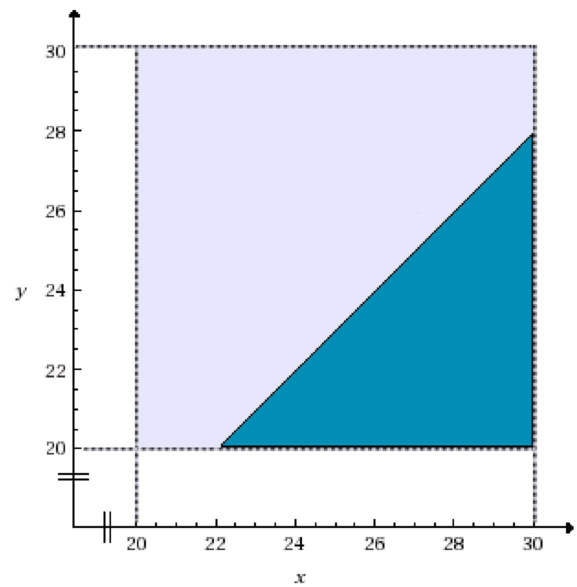
$$\boldsymbol{f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{380000}\left(x^2 + y^2\right) & 20 \le x \le 30 \quad 20 \le y \le 30 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}}$$

¿Cuál es la probabilidad de que la presión del neumático derecho exceda a la presión del neumático izquierdo en al menos dos $\boldsymbol{lb/pulg^2}$?

6) Solución: Debido a que x es la presión de aire de para el neumático derecho, en $lb/pulg^2$, e y la presión de aire para el neumático izquierdo, en $lb/pulg^2$, por lo tanto, la probabilidad de que la presión del neumático derecho exceda a la presión del neumático izquierdo en menos de al menos dos $lb/pulg^2$, se denota se la siguiente forma:

$$P(x-y\geq 2)\ , \qquad \text{o bien,} \qquad P(x\geq y+2)$$

En seguida, calculamos la integral que sigue para obtener la probabilidad requerida, donde sus límites están dados gráficamente por la imagen:



$$P(x\geq y+2)=\int_{x=22}^{30}\int_{y=20}^{x-2} f(x,y)\ dy\, dx$$

$$P(x\geq y+2)=\int_{x=22}^{30}\int_{y=20}^{x-2}\frac{3}{380000}(x^2+y^2)\ dy\, dx$$

$$=\int_{x=22}^{30}\frac{x^3-18x^2+3x-2002}{95000}\ dx=\frac{3804}{11875}$$

$$=0{,}3203$$

Respuesta: *La probabilidad de que la presión del neumático derecho exceda a la presión del neumático izquierdo en al menos dos $lb/pulg^2$, es igual a 0,3203*

7.- Al estudiar el tipo de partículas que contaminan el aire de Santiago, se ha determinado que las cantidades X e Y (en gramos) de partículas tipo A y B respectivamente, que se contabilizan en los filtros colocados diariamente para tal efecto, son variables aleatorias con función de probabilidad de densidad conjunta dada por:

$$\boldsymbol{f(x,y)}=\begin{cases}\boldsymbol{3(x+y)} & \boldsymbol{0<x<1-y} \quad \boldsymbol{0<y<1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{en\ o.c}\end{cases}$$

7.1) Determine la probabilidad de que un día determinado se encuentre más de 0.5 gramos de partículas tipo A y menos de 0.5 gramos de partículas tipo B.
7.2) Determine la cantidad total esperada de partículas que se encuentran diariamente en el filtro.

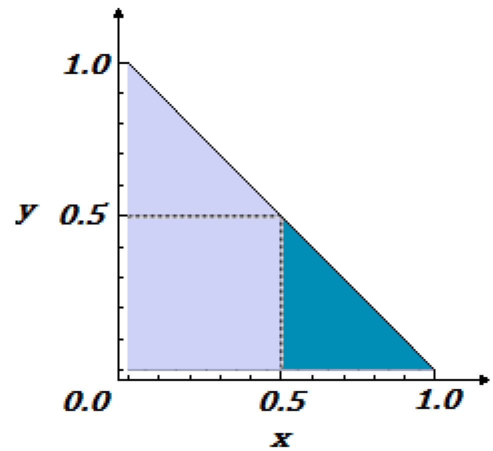
7.1) Solución: Sean: $x=$ *"Cantidad de partículas tipo A"*

$y=$ *"Cantidad de partículas tipo B"*

Luego, nos piden determinar la probabilidad de que se encuentre más de 0.5 gramos de partículas tipo A y menos de 0.5 gramos de partículas tipo B, lo que se expresada de la siguiente forma:

$$P(x > 0{,}5; y < 0{,}5)$$

Cuyos límites de integración se ven gráficamente en la imagen, quedando de la siguiente forma:



$$P(x > 0{,}5; y < 0{,}5) = \int_{x=0{,}5}^{1} \int_{y=0}^{1-x} 3(x+y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0{,}5}^{1} -\frac{3}{2}(x^2 - 1)\, dx = 0{,}3125$$

Respuesta: *La probabilidad de se encuentre más de 0,5 gramos de partículas tipo A y menos de 0,5 gramos de partículas tipo B, en un determinado día es 0,3125.*

7.2) Solución: Lo primero que debemos determinar son las funciones marginales de cada variable, como se muestra ahora:

$$f(x) = \int_{Rec\ y} f(x,y)\, dy = \int_{y=0}^{1-x} 3(x+y)\, dy = \frac{3}{2}(1-x^2)$$

$$f(y) = \int_{Rec\ x} f(x,y)\, dx = \int_{x=0}^{1-y} 3(x+y)\, dx = \frac{3}{2}(1-y^2)$$

Posteriormente, para determinar el valor esperado de la cantidad total de partículas, debemos calcular los valores esperados de ambas variables, como se muestra a continuación:

$$E(x) = \int_{Rec\ x} x \cdot f(x) = \int_{x=0}^{1} x \cdot \frac{3}{2}(1-x^2)\, dx = \frac{3}{2}\int_{x=0}^{1} x - x^3\, dx = 0{,}375$$

$$E(y) = \int_{Rec\ y} y \cdot f(y) = \int_{y=0}^{1} y \cdot \frac{3}{2}(1-y^2)\, dy = \frac{3}{2}\int_{y=0}^{1} y - y^3\, dy = 0{,}375$$

Finalmente, para obtener el valor esperado total de partículas que se encuentran diariamente en el filtro, debemos sumar las esperanzas de cada variable, calculadas en el paso anterior:

$$E(x+y) = E(x) + E(y) = 0{,}375 + 0{,}375 = 0{,}75$$

Respuesta: *La cantidad total esperada de partículas que se encuentran diariamente en el filtro, es 0,75.*

8.- **La mezcla adecuada de polvos finos y gruesos, antes de sintetizar cobre, es esencial para lograr uniformidad en el producto terminado. La cantidad de polvos finos (X) y polvos gruesos (Y), ambos en toneladas, utilizadas en las mezclas, son variables aleatorias modeladas por la siguiente función de densidad de probabilidad conjunta:**

$$\boldsymbol{f(x,y)} = \begin{cases} \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}(\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y}) & \mathbf{0} < \boldsymbol{x} < 1; 1 < \boldsymbol{y} < 2 \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{en\ otro\ caso} \end{cases}$$

8.1) Se toman al azar 10 muestras de estas mezclas. ¿Cuál es la probabilidad de que en cuatros de ellas el doble de la cantidad de polvos finos sea superior que la cantidad de polvos gruesos?

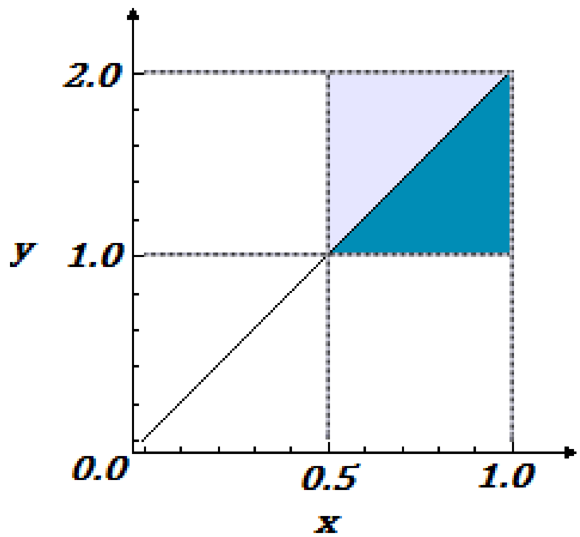
8.2) Determine la probabilidad de que la cantidad de polvos finos sea inferior a la esperada y la cantidad de polvos gruesos fluctúe entre 1,3 y 1,5 toneladas.

8.3) El número promedio de irregularidades que se encuentran en tubos de cobre, fabricados con esta mezcla, es 6 por metro lineal de tubo. Se toma al azar un tubo de 90 centímetros de largo. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar por lo menos dos irregularidades en el tubo? Considere válidos los supuestos de Poisson.

8.1) Solución: Sean: x = *"Cantidad de polvos finos, en toneladas"*

y = *"Cantidad de polvos gruesos, en toneladas"*

Luego, determinamos la probabilidad de que el doble de la cantidad de polvos finos sea superior que la cantidad de polvos gruesos, donde los límites de integración están definidos gráficamente en la imagen:



$$P(2x > y) = \int_{y=1}^{2} \int_{x=\frac{y}{2}}^{1} \frac{2}{7}(x + 2y)\ dx\,dy$$

$$= \int_{y=1}^{2} \frac{-9y^2 + 16y + 4}{28}\ dy = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

En seguida, utilizaremos la siguiente variable:

w = *"Número de mezclas en el cual el doble de la cantidad de polvos finos es superior que la cantidad de polvos gruesos de un total de diez mezclas analizadas elegidas independientemente"*

Cuya variable se distribuye de forma binomial, como se ve en la siguiente expresión:

$$w \sim B(n = 10; p = 0{,}25) \qquad P(w) = \begin{cases} \binom{10}{w}\ (0{,}25)^w\ (0{,}75)^{10-w} & ; w = 0,1,2,\ldots,10 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Finalmente, hacemos los cálculos para $w = 4$:

$$P(w=4) = \binom{10}{4}\,(0{,}25)^4\,(0{,}75)^6 = 0{,}14599$$

<u>Respuesta</u>: *De una muestra de 10 mezclas, la probabilidad de que en cuatros de ellas se cumpla que el doble de la cantidad de polvos finos sea superior que la cantidad de polvos gruesos, es igual a 0,14599.*

8.2) Solución: Notemos que debemos calcular la siguiente notación:

$$P(x < E(x);\ 1{,}3 \leq y \leq 1{,}5)$$

Por lo que, lo primero que debemos hacer en este ítem, es calcular la función marginal de x, usando la siguiente fórmula:

$$f(x) = \int_{Rec\ y} f(x,y)\,dy = \int_1^2 \frac{2}{7}(x+2y)\,dy = \frac{2}{7}(x+3)$$

Luego, la esperanza de la cantidad de polvos finos, la determinamos por fórmula:

$$E(x) = \int_{Rec\ x} x \cdot f(x)\,dx = \int_{x=0}^{1} x \cdot \frac{2}{7}(x+3)\,dx = \frac{2}{7}\int_{x=0}^{1} x^2 + 3x\ \ dx = 0{,}5238$$

En seguida, reemplazamos los valores determinados anteriormente, quedando de la siguiente forma:

$$P(x < 0{,}5238;\ 1{,}3 \leq y \leq 1{,}5) = \int_{y=1{,}3}^{1{,}5}\int_{x=0}^{0{,}5238} \frac{2}{7}(x+2y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{y=1{,}3}^{1{,}5} \frac{(0.5238)^2}{7} + \frac{2.0952\,y}{7}\,dy = 0{,}09164$$

<u>Respuesta</u>: *La probabilidad de que la cantidad de polvos finos sea inferior a la esperada y la cantidad de polvos gruesos fluctúe entre 1,3 y 1,5 toneladas, corresponde a 0,09164.*

8.3) Solución: Sean las variables con sus respectivas distribuciones:

t = *"Número de irregularidades en un tubo de 100 cm"*

$$t \sim Poisson\,(\lambda = 6) \qquad P(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-6}\cdot\ 6^t}{t!} & ;\, t = 0{,}1{,}2, \ldots \\ 0\ \ en\ otro\ caso & \end{cases}$$

v = *"Número de irregularidades en un tubo de 90 cm"*

$$v \sim Posson\left(\lambda = \frac{6 \cdot 90}{100} = 5{,}4\right) \qquad P(v) = \begin{cases} \dfrac{e^{-5{,}4}\cdot\ 5{,}4^t}{t!} & ;\, t = 0{,}1{,}2, \ldots \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Finalmente, calculamos la probabilidad requerida:

$$P(v \geq 2) = 1 - P(v < 2) = 1 - [P(v = 0) + P(v = 1)]$$

$$= 1 - \left[\frac{e^{-5,4} \cdot 5,4^0}{0!} + \frac{e^{-5,4} \cdot 5,4^1}{1!}\right] = 1 - [0,00452 + 0,0243] = 0,97118$$

Respuesta: *La probabilidad de encontrar por lo menos dos irregularidades en el tubo de 90 centímetros de largo, es igual 0,97118*

***9.-* Una instalación de servicio telefónico opera con dos líneas de servicio. En un día seleccionado aleatoriamente, considere X la proporción de tiempo que se utiliza la primera línea e Y la proporción de tiempo que se utiliza la segunda línea. Suponga que la función de probabilidad conjunta es:**

$$\boldsymbol{f(x,y)} = \begin{cases} \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\left(\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{y^2}\right) & \boldsymbol{si\ 0} < \boldsymbol{x} < 1\,;\ \ 0 < \boldsymbol{y} < 1 \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{en\ otro\ caso} \end{cases}$$

9.1) ¿Cuál es la probabilidad de que un día la primera línea esté ocupada más de la mitad del tiempo?
9.2) Determine la probabilidad de que en un día la primera línea se ocupe menos tiempo que la segunda.
9.3) Si un día la segunda línea se ocupa el 75% del tiempo, ¿cuál es la proporción esperada de tiempo que se ocupa la primera línea ese día?

9.1) Solución: Sean: x = *"Proporción de tiempo que se usa en la primera línea"*
y = *"Proporción de tiempo que se usa en la segunda línea"*

En seguida, determinamos la función marginal de la proporción de tiempo que se usa en la primera línea, lo que se ve a continuación:

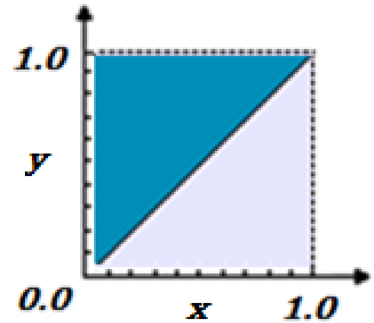
$$f(x) = \int_{Rec\ y} f(x,y)\,dy = \int_{y=0}^{1} \frac{3}{2}(x^2 + y^2)\,dy = \frac{3}{2}\left(x^2 + \frac{1}{3}\right)$$

Luego, procedemos a determinar la probabilidad que nos pide el ejercicio:

$$P(x > 0,5) = 1 - P(x \leq 0,5) = 1 - \int_{x=0}^{0,5} f(x)\,dx = 1 - 0,3125 = 0,6875$$

Respuesta: *La probabilidad de que un día, la primera línea esté ocupada más de la mitad del tiempo, corresponde a 0,6875.*

9.2) Solución: La probabilidad a determinar se calcula por medio de la función de densidad, con los límites de integración plasmados en la imagen:



$$P(x<y)=\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y}\frac{3}{2}(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_{y=0}^{1}\frac{y^3}{2}+\frac{3y^3}{2}\,dy=\frac{1}{2}=0{,}5$$

Respuesta: *La probabilidad de que en un día, la primera línea se ocupe menos tiempo que en la segunda línea, es igual a 0,5.*

9.3) Solución: Debido a que debemos calcular la proporción esperada de tiempo que ocupa la primera línea, dado que la segunda línea ocupa el 75% del tiempo, es conveniente partir por calcular la función marginal de la proporción de tiempo de la segunda línea:

$$f(y)=\int_{Rec\ x} f(x,y)\ dx=\int_{x=0}^{1}\frac{3}{2}(x^2+y^2)\,dx=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}+y^2\right)$$

Luego, calculamos la función condicional, que se expone a continuación:

$$f(x/y=0{,}75)=\frac{f(x,y)}{f(y)}\Bigg|_{y=0{,}75}=\frac{\frac{3}{2}(x^2+0{,}75^2)}{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}+0{,}75^2\right)}=\frac{x^2+0{,}5625}{\frac{1}{3}+0{,}5625}$$

Finalmente, determinamos la esperanza que nos solicitan:

$$E(x/y=0{,}75)=\int_{Rec\ x} x\cdot f(x/y=0{,}75)\,dx=\int_{x=0}^{1} x\cdot\frac{x^2+0{,}5625}{\frac{1}{3}+0{,}5625}\,dx=\frac{0{,}5325}{0{,}8958}=0{,}5944$$

Respuesta: *Si un día aleatorio, la segunda línea se ocupa el 75% del tiempo, la proporción esperada de tiempo que se ocupa la primera línea ese día, es igual a 0,5944.*

***10.-* Un empleado cada día debe tomar dos buses del Transantiago para llegar a su trabajo: el alimentador H-201 y el troncal 401. Los tiempos de espera de las respectivas líneas, expresadas en minutos, son variables aleatorias independientes T_1 y T_2 , cuyas funciones de densidad se muestran a continuación:**

$$f_{T_1}(t_1)=\begin{cases}\frac{1}{20} & 0<t_1<20\\ 0 & o.c\end{cases}\quad;\quad f_{T_2}(t_2)=\begin{cases}\frac{1}{20}e^{-\frac{t_2}{20}} & t_2>0\\ 0 & o.c\end{cases}$$

¿Cuál es la probabilidad que el empleado deba esperar mayor cantidad de minutos al bus alimentador que al bus troncal?

10) Solución: Sean:

T_1 = *"Tiempo que espera el empleado hasta que pasa el alimentador H-201"*

T_2 = *"Tiempo que espera el empleado hasta que pasa el troncal 401"*

Luego, por se T_1 y T_2 variables aleatorias independientes, se tiene que:

$$f_{T_1 T_2}(t_1, t_2) = f_{T_1}(t_1) \cdot f_{T_2}(t_2)$$

Por lo tanto, la función conjunta queda expresada de la siguiente forma:

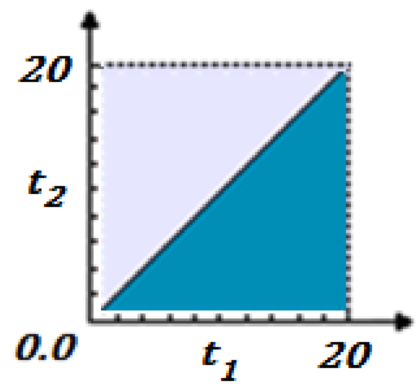
$$f_{T_1 T_2}(t_1, t_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{400} e^{-\frac{t_2}{20}} & ; \quad 0 < t_1 < 20 \; ; \; t_2 > 0 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Entonces, calculamos la probabilidad requerida por el ejercicio, con los límites de integraciones que se ven en la imagen

$$P(T_1 > T_2) = \int_{t_1=0}^{20} \int_{t_2=0}^{t_1} f_{T_1 T_2}(t_1, t_2)\, dt_2\, dt_1$$

$$= \int_{t_1=0}^{20} \int_{t_2=0}^{t_1} \frac{1}{400} e^{-\frac{t_2}{20}}\, dt_2\, dt_1 = \int_{t_1=0}^{20} \frac{1}{20}\left(1 - e^{-\frac{t_1}{20}}\right) dt_1$$

$$= \frac{1}{20}(20 + 20e^{-1} + 20) = e^{-1} = 0{,}3678$$



Respuesta: *La probabilidad de que el empleado deba esperar mayor cantidad de minutos al bus alimentador que al bus trocal, corresponde a 0,3678.*

11.- Las piezas de metal, que tienen determinadas sillas para oficinas, llevan una capa de níquel y sobre ella una de cromo. Ambas capas se miden en micras de milímetros. El grosor de la capa de níquel (X) y de la capa de cromo (Y) son variables aleatorias que tienen la siguiente función de densidad conjunta.

$$\boldsymbol{f(x, y)} = \begin{cases} \boldsymbol{2(x+1)} & \boldsymbol{0} < x < 0{,}5 \; ; \; 0 < y < 0{,}8 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{en\ otro\ caso} \end{cases}$$

11.1) ¿Cuál es la probabilidad de que la capa de cromo sea más gruesa que la capa de níquel?

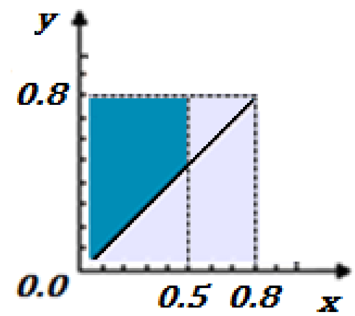
11.2) Si la capa de cromo es menor que 0,3 micras de milímetros. ¿Cuál es la probabilidad de que la capa de níquel sea inferior a 0,2 micras de milímetros?

11.3) Se realiza control de calidad de estas sillas, se sabe que el grosor óptimo de la capa de cromo debe ser superior a 0,6 micras de milímetros. ¿Cuál es la probabilidad de tener que revisar a lo más cuatro sillas hasta encontrar la segunda con un grosor óptimo de la capa de cromo?

11.4) Pruebe, con una medida estadística adecuada, si es posible afirmar que mientras mayor es el grosor de la capa de níquel, mayor es el grosor de la capa de cromo, si las variables están relacionadas.

11.1) Solución: Sean: x = *"Capa de níquel en una silla, en micras de milímetros"*
y = *"Capa de cromo en una silla, en micras de milímetros"*

Procedemos a calcular la probabilidad, con los límites de integración que se muestran en la imagen:



$$P(y > x) = \int_{x=0}^{0,5}\int_{y=x}^{0,8} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{0,5}\int_{y=x}^{0,8} 2(x+1)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{0,5} -2x^2 - 0,4x + 1,6\ dx = \frac{2}{3} = 0,6667$$

Respuesta: *La probabilidad de que la capa de cromo sea más gruesa que la capa de níquel, es igual a 0,6667.*

11.2) Solución: Lo primero determinamos la función marginal de y, como se ve a continuación:

$$f(y) = \int_{Rec\ x} 2\,(x+1)\,dx = \int_{x=0}^{0,5} 2\,(x+1)\,dx = 1,25$$

Luego, calculamos la probabilidad condicional de la siguiente manera:

$$P(x/y < 0,3) = \frac{P(x < 0,2 \cap y < 0,3)}{P(y < 3)}$$

Con:

$$P(x < 0,2 \cap y < 0,3) = \int_{x=0}^{0,2}\int_{y=0}^{0,3} 2(x+1)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{0,2} 0,6x + 0,6\,dx = 0,132$$

$$P(y < 0,3) = \int_{y=0}^{0,3} f(y)\,dy = \int_{y=0}^{0,3} 1,25\,dy = 0,375$$

Por lo que, la probabilidad posee el siguiente valor:

$$P(x/y < 0,3) = \frac{0,132}{0,375} = 0,352$$

Respuesta: *Si la capa de cromo es menor que 0,3 micras de milímetros, la probabilidad de que la capa de níquel sea inferior a 0,2 micras de milímetros, es igual a 0,352*

11.3) Solución: Lo primero que debemos hacer es determinar la probabilidad de encontrar una silla con grosor óptimo, lo que se hace de la siguiente forma:

$$P(y > 0{,}6) = \int_{y=0{,}6}^{0{,}8} f(y)\, dy = \int_{y=0{,}6}^{0{,}8} 1{,}25\, dy = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Definimos la siguiente variable a utilizar, la que tiene una distribución Pascal o binomial negativa, como se ve a continuación:

$w =$ *"Número de sillas revisadas hasta encontrar la segunda con un grosor optimo"*

$$w \sim B^*(r = 2; p = 0{,}25) \qquad P(w) = \begin{cases} \binom{w-1}{1} (0{,}25)^2\, (0{,}75)^{w-2} \ ; & w = 2,3,4,\dots \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Finalmente, determinamos la probabilidad que nos solicitan:

$$P(w \leq 4) = P(w = 2) + P(w = 3) + P(w = 4)$$

$$= \binom{1}{1} (0{,}25)^2\, (0{,}75)^0 + \binom{2}{1} (0{,}25)^2\, (0{,}75)^1 + \binom{3}{1} (0{,}25)^2\, (0{,}75)^2 = 0{,}2617$$

Respuesta: *Al hacer un control de calidad de estas sillas, la probabilidad de tener que revisar a lo más cuatro sillas hasta encontrar la segunda con un grosor óptimo de la capa de cromo, es igual a 0,2617.*

11.4) Solución: En este ítem, calculamos la función marginal de cada variable definidas anteriormente, de la siguiente forma:

$$f(x) = \int_{Rec\ y} f(x,y)\, dy = \int_{y=0}^{0{,}8} 2(x+1)\, dy = 1{,}6\,(x+1)$$

$$f(y) = \int_{Rec\ x} f(x,y)\, dx = \int_{x=0}^{0{,}5} 2(x+1)\, dx = 1{,}25$$

Luego, notemos que la multiplicación de las funciones marginales son iguales a la función conjunta, como se muestra:

$$f(x,y) = 2\,(x+1) = f(x) \cdot f(y)$$

Lo que implica que ambas variables son variables aleatorias independientes, es decir la covarianza es cero. En conclusión el Coeficiente de Pearson es igual a cero, por ende no se puede afirmar que a mayor grosor de la capa de níquel, mayor grosor de la capa de cromo.

12.- Sean X e Y variables aleatorias que denotan la producción diaria de cable (en miles de metros) en los turnos A y B respectivamente de cierta Empresa. Por disposición de la gerencia de comercialización la producción en el turno B no debe superar a la del turno A.
El comportamiento conjunto de ambas variables se modela mediante función de densidad:

$$\boldsymbol{f(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{5}(2x+y) & 0\le x\le 1\,;\quad 0\le y\le x\\ 0 & en\ otro\ caso\end{cases}}$$

Las funciones de densidad para cada variable son:

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}3x^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & en\ otro\ caso\end{cases}}\quad ; \quad \boldsymbol{f(y)=\begin{cases}\frac{6}{5}(1+y-2y^2) & 0\le y\le 1\\ 0 & en\ otro\ caso\end{cases}}$$

La empresa clasifica su productividad diaria de acuerdo al siguiente criterio:

Nivel de Productividad	Producción diaria (en miles de metros)
Baja	X ≤ 0.5 e Y ≤ 0.5
Alta	X ≥ 0.7 e Y ≥ 0.7
Normal	X > 0.5 e Y < 0.7

12.1) Cuando en el turno A se producen 800 metros de cable, ¿Cuál es la producción esperada en el turno B?
12.2) ¿Cuál es la probabilidad de que la producción en el turno B supere los 600 metros de cable?
12.3) Si el costo de producir un metro de cable es de $1800 en el turno A y de $2100 en el turno B. ¿Cuál es el costo total esperado de la producción diaria de cables en esta empresa?
12.4) Al observar el consumo diario de energía eléctrica para los distintos niveles de productividad, se observó un comportamiento de tipo exponencial con media de 30, 50 y 40 Kw respectivamente. Determine la probabilidad que el consumo de energía diario, en la empresa, sea mayor a 35 Kw.

12.1) Solución: Sean:

x = *"Producción diaria de cable en el turno A, de cierta empresa, en miles de metros"*

y = *"Producción diaria de cable en el turno B, de cierta empresa, en miles de metros"*

Lo primero será definir la función condicional, dado que la producción diaria de cable sea 0,8 en el turno A, lo que se hace con la siguiente fórmula:

$$f(y/x=0{,}8)=\left.\frac{f(x,y)}{f(x)}\right|_{x=0{,}8}=\left.\frac{\frac{6}{5}(2x+y)}{3x^2}\right|_{x=0{,}8}=\frac{\frac{6}{5}(2\,(0{,}8)+y)}{3\,(0{,}8)^2}=1+\frac{5y}{8}$$

Luego, calculamos la esperanza de la función que definimos en el paso anterior, de la siguiente forma:

$$E(y/x=0{,}8)=\int_{y=0}^{0{,}8} y\,f(y/x=0{,}8)\,dy=\int_{y=0}^{0{,}8} y\left(1+\frac{5y}{8}\right)dy=\int_{y=0}^{0{,}8} y+\frac{5y^2}{8}\,dy=\frac{32}{75}=0{,}4267$$

***<u>Respuesta</u>:** Cuando en el turno A se producen 800 metros de cable, la producción esperada en el turno B, corresponde a 0,4267 miles de metros, o 4267 metros.*

12.2) Solución: Debido a que nos preguntan sobre la producción en el turno B, donde esta supere los 600 metros de cable, por lo tanto, utilizaremos la función de densidad de la producción diaria de cable en el turno B, quedando de la siguiente forma:

$$P(x>0{,}6)=\int_{x=0{,}6}^{1} f(y)\,dy=\int_{x=0{,}6}^{1}\frac{6}{5}(1+y-2y^2)\,dy=\frac{148}{625}=0{,}2368$$

***<u>Respuesta</u>:** La probabilidad de que la producción en el turno B supere los 600 metros de cable, es igual a 0,2368*

12.3) Solución: Lo primero será definir el costo total de la producción diaria de cable en esta empresa, la que por la información que nos suministra el ejercicio, está dada por la siguiente ecuación:

$$C=1800\,x+2100\,y\,,\ \ con\,x\,e\,y\ \ expresados\,en\,metros$$

Luego, nos piden el valor esperado de esta ecuación, la que por medio de propiedades nos queda expresada de la siguiente forma:

$$E(C)=E\,(1800\,x+2100\,y)=1800\,E(x)+2100\,E(y)$$

Entonces, debemos calcular los valores esperados de la producción diaria de cable, en el turno A y B, respectivamente.

$$E(x)=\int_{Rec\ x} x\cdot f(x)\,dx=\int_{x=0}^{1} x\cdot(3x^2)\,dx=\int_{x=0}^{1} 3x^3\,dx=0{,}75=750\ m$$

$$E(y)=\int_{Rec\ y} y\cdot\ f(y)\,dy=\int_{y=0}^{1} y\cdot\left(\frac{6}{5}(1+y-2y^2)\right)dy=\int_{x=0}^{1}\frac{6}{5}(y+y^2-2y^3)\,dy=0{,}4=400\ m$$

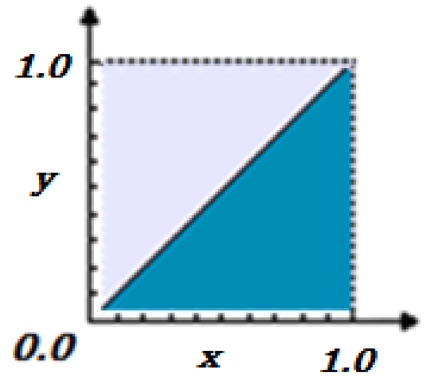
Finalmente, reemplazamos los valores obtenidos, quedando como se ve a continuación:

$$E(C)=1800\,E(x)+2100\,E(y)=1800\cdot 750+2100\cdot 400=\$2.190.000$$

***<u>Respuesta</u>:** El costo total esperado de la producción diaria de cables en esta empresa, es $2.190.000.*

12.4) Solución: Sean: B = *"Nivel de Productividad Baja"*
A = *"Nivel de Productividad Alta"*
N = *"Nivel de Productividad Normal"*
c = *"Consumo diario de energía"*

Luego calculamos las probabilidades de cada nivel de producción, sin perder de vista que los límites de integración están dados gráficamente por la imagen, lo que se realiza de la siguiente forma:



$$P(B) = P(x \le 0{,}5; y \le 0{,}5) = \int_{x=0}^{0{,}5} \int_{y=0}^{x} \frac{6}{5}\,(2x+y)\,dy\,dx = 0{,}125$$

$$P(A) = P(x \ge 0{,}7; y \ge 0{,}7) = \int_{x=0{,}7}^{1} \int_{y=0{,}7}^{x} \frac{6}{5}\,(2x+y)\,dy\,dx = 0{,}1404$$

$$P(N) = P(x > 0{,}5; y < 0{,}7) = 1 - [P(B) + P(A)] = 0{,}7346$$

Posteriormente, definimos las probabilidades condicionales:

$$c/B \sim exp\left(\lambda = \frac{1}{30}\right) \quad \rightarrow \quad P(c > 35/B) = e^{-\frac{35}{30}} = 0{,}3114$$

$$c/A \sim exp\left(\lambda = \frac{1}{50}\right) \quad \rightarrow \quad P(c > 35/A) = e^{-\frac{35}{50}} = 0{,}4966$$

$$c/N \sim exp\left(\lambda = \frac{1}{40}\right) \quad \rightarrow \quad P(c > 35/N) = e^{-\frac{35}{40}} = 0{,}4169$$

Finalmente, calculamos la probabilidad total de consumo diario de energía, por medio de fórmulas, quedando de la siguiente forma:

$$P(c > 35) = P(c > 35/B)\cdot P(B) + P(c > 35/A)\cdot P(A) + P(c > 35/N)\cdot P(N)$$

$$P(c > 35) = 0{,}3114\cdot 0{,}125 + 0{,}4966\cdot 0{,}1404 + 0{,}4169\cdot 0{,}7346 = 0{,}4149$$

Respuesta: *La probabilidad que el consumo de energía diario, en la empresa, sea mayor a 35 Kw, es igual a 0,4149.*

13.- La cantidad de sustancia contaminante corrosiva (X) y de sustancia contaminante tóxica (Y), expresadas en grs., que se encuentran al examinar las emisiones de gases, en vehículos elegidos al azar, son variables aleatorias con función de densidad conjunta dada por:

$$\boldsymbol{f(x,y)} = \begin{cases} \mathbf{2}\,\boldsymbol{e^{-x-y}} & ; \quad \mathbf{0} < y < x < \infty \\ \mathbf{0} & \quad \textbf{\textit{en otro caso}} \end{cases}$$

Si en un vehículo elegido al azar, la cantidad de la sustancia contaminante tóxica que emite es de 2 grs. Calcule la probabilidad que la cantidad de sustancia contaminante corrosiva que emite supere a 4 grs.

13) Solución: Sean: $x =$ *"Sustancia contaminante corrosiva, en gramos"*
$y =$ *"Sustancia contaminante tóxica, en gramos"*

Luego, debemos definir la función densidad de la sustancia contaminante tóxica, como se ve a continuación:

$$f(y) = \int_{Rec\ x} f(x,y)\, dx = \int_{x=y}^{\infty} 2\, e^{-x-y}\, dx = 2\, e^{-2y}$$

En seguida, definimos la función condicional que nos servirá para determinar la probabilidad requerida por el ejercicio, para lo que se utiliza la siguiente fórmula:

$$f(x/y=2) = \frac{f(x,y)}{f(y)}\bigg|_{y=2} = \frac{2\, e^{-x-y}}{2\, e^{-2y}}\bigg|_{y=2} = e^{-x+y}\bigg|_{y=2} = e^{-x+2}$$

Finalmente, calculamos la probabilidad pedida por el problema, de la siguiente forma:

$$P(x > 4/y=2) = \int_{x=4}^{\infty} f(x/y=2)\, dx = \int_{x=4}^{\infty} e^{-x+2}\, dx = e^{-2} = 0{,}1353$$

Respuesta: *Al elegir de forma aleatoria un vehículo, y la cantidad de sustancia contaminante tóxica que emite es de 2 gramos, la probabilidad que la cantidad de sustancia contaminante corrosiva que emite supere a 4 gramos es 0,1353.*

1.- En empresas que prestan servicio de soporte computacional los fines de semana, se ha estudiado que el número (Y) de llamadas recibidas solicitando atención de emergencia cada fin de semana y el número (X) de especialistas disponibles, son variables aleatorias con distribución de probabilidad conjunta:

x \ y	0	1	2	3	4
1	0,15	0,10	0,05	0,02	0,00
2	0,04	0,23	0,12	0,02	0,01
3	0,01	0,12	0,08	0,03	0,02

1.1) En los fines de semana en que hay dos especialistas disponibles ¿Cuál es el número esperado de llamadas de emergencia recibidas?
1.2) ¿Cuál es la probabilidad que en un fin de semana el número de llamadas solicitando atención de emergencia sobrepase el número de especialistas disponibles?
1.3) Determine el porcentaje de variabilidad del número de llamadas que solicitan atención de emergencia los fines de semana.

2.- Un servicio de estudios económicos, ha investigado el comportamiento de las variables: tasa de crecimiento de las exportaciones (X), y el producto interno bruto: PIB (Y). Al analizarlas se encontró que dichas variables se pueden describir según la siguiente función de densidad conjunta, (expresadas en porcentaje):

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x-y}{2010} & ;si \;\; 5 \leq x \leq 20 \;\;\; 2 \leq y \leq 6 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

2.1) Si la tasa de crecimiento de las exportaciones es de un 10% ¿Cuál es el producto interno bruto esperado?
2.2) Calcular la probabilidad de que la tasa de crecimiento de las exportaciones sea superior a cinco veces el producto interno bruto.

3.- Una persona tiene dos bombillas para una lámpara en particular. Sea X = La duración de la primera bombilla, e Y = La duración de la segunda bombilla (ambas en miles de horas). Suponga que X e Y son independientes y con función densidad conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 3 \cdot e^{-\,(1{,}5\,x+2y)} & x > 0 \;\;\; y > 0 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

3.1) ¿Cuál es la probabilidad que la primera bombilla dure a lo sumo 1500 horas y que la segunda también dure a lo sumo 1500 horas?
3.2) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración total, de ambas bombillas, esté entre 1000 y 2000 horas?

3.3) En una investigación con respecto a la duración de la primera bombilla, un proveedor selecciona al azar 8 bombillas de distintas partidas. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 6 de las bombillas duren más de 700 horas?

4.- Las variables X e Y representan los espesores, en milímetros, del teflón tipo A y B que llevan en el interior determinadas tuberías de agua potable y cuya función de densidad de probabilidad conjunta está dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3\ (x+1)}{2} & si\ \ x > 0\ ;\ y > 0\ ;\ x + y \leq 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

4.1) Calcular el espesor medio del teflón A.
4.2) Si el espesor del teflón tipo A es inferior a 0,6 milímetros ¿Cuál es la probabilidad de que el teflón tipo B tenga un espesor inferior a 0,8 milímetros?

5.- Una empresa que exporta cierta variedad de manzanas al mercado Europeo, ha modelado el peso (X), en cientos de gramos y el diámetro máximo (Y) de cada manzana, en decenas de centímetros. La función de densidad conjunta, para estas dos variables aleatorias, es la siguiente:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{4} & 1 < x < 2 \quad 2 < y < 3 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Además, de acuerdo a las exigencias de los clientes, las manzanas son embaladas en bandejas de 4 unidades.
5.1) Las manzanas son clasificadas tipo A, si su diámetro máximo supera los 25 cm., y el peso es de al menos 150 gr. ¿Cuál es la probabilidad que una bandeja contenga más de dos unidades del tipo A, si al momento del embalaje fueron elegidas al azar por un sistema robotizado y colocadas en la bandeja?
5.2) En las manzanas que pesan 190 gramos. ¿Cuál es la probabilidad que tengan un diámetro máximo superior al diámetro máximo esperado?

6.- En el proceso mecanizado de torneado de piezas, el diámetro exterior de la pieza (D, en mm) y la velocidad de giro de ella (G, en rpm) se puede modelar por la siguiente función de densidad de probabilidad conjunta:

$$f_{DG}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(g-2)}{320}, & 2mm < d < 12\ mm;\ \ 2\ rpm < g < 10\ rpm \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

6.1) Si se elige al azar una pieza ¿Cuál es la probabilidad que el diámetro exterior supere los 10 mm y la velocidad de giro sea inferior a 6 (rpm)?
6.2) ¿Cuál es el diámetro esperado de las piezas que son sometidas al proceso de torneado?
6.3) Se elige al azar una pieza con un diámetro exterior de 10 mm ¿Cuál es la probabilidad que su velocidad de giro sea superior a 5 rpm?

7.- En un experimento sobre cierto tipo de mezcla de hormigón se determinó que la densidad (X), medida en kg/m^3, la fuerza compresiva (Y), medida en N/mm^2, son variables aleatorias que tienen la siguiente función densidad conjunta:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2000}\left(\dfrac{y-40}{20}\right) & si\ 2400\leq x\leq 2500;\quad 40\leq y\leq 60\\ \dfrac{1}{2000}\left(1-\dfrac{y-60}{20}\right) & si\ 2400\leq x\leq 2500;\quad 60\leq y\leq 80\\ 0 & en\ otro\ caso\end{cases}$$

7.1) Determine la densidad esperada para este tipo de mezcla de hormigón.
7.2) ¿En qué porcentaje, de este tipo de mezcla de hormigón, la fuerza compresiva es inferior a 45 (Kg/m^3) y la densidad es inferior a 2,480 (N/mm^2)?

8.- En cierta población, se ha estudiado que el ingreso mensual (X) en millones de $ y el gasto mensual (Y) en millones de $ de las familias, considerados variables aleatorias con función de densidad conjunta:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{10}{54}(x+y) & si\ 0{,}5<x<2\ \ ;\ \ 0{,}2<y<1{,}6\\ 0 & en\ otro\ caso\end{cases}$$

8.1) Determine el gasto mensual esperado, para las familias cuyo ingreso mensual es de $1.500.000.
8.2) Se eligen al azar y en forma independiente 10 familias de la población en estudio, ¿Cuál es la probabilidad que por lo menos en dos familias el gasto mensual sea superior al ingreso mensual?

9. El Servicio de Meteorología ha modelado la cantidad de agua caída (X) en milímetros y la duración (Y) en días, de los sistemas frontales que afectan a la zona central. De acuerdo a la información histórica las variables presentan la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{5400} & si\ 0<x<50\,mm\ ;\ \ 0<y<4\,días\\ 0 & en\ otro\ caso\end{cases}$$

En la zona central:

9.1) Un sistema frontal es intenso si dura más de un día y la precipitación es sobre 30 mm. Determine la probabilidad que entre cinco sistemas frontales independientes, más de uno sea intenso.
9.2) Se sabe que el próximo sistema frontal tendrá una duración de tres días, ¿Cuál es la probabilidad que la precipitación sobrepase los 40 mm?

Soluciones: 05. Distribución Conjunta

1.1) 1,357	*1.2) 0,12*	*1.3) 75%*	*6.1) 0,05*	*6.2) 8,75*	*6.3) 0,011*
2.1) 3,95	*2.2) 0,235*		*7.1) 2450*	*7.2) 2,5%*	
3.1) 0,8501	*3.2)*		*8.1) $1.085.333*	*8.2) 0,076*	
4.1) 0,375	*4.2) 0,806*		*9.1) 0,7758*	*9.2) 0,3429*	
5.1) 0,3162	*5.2) 0,507*				