Probabilidad: Cálculos

Francisco Vera

FCNM-ESPOL

Espacios muestrales finitos

- Suponga que Ω es finito y $\mathcal{S}$ es su conjunto potencia.
- Regla de Laplace para calcular probabilidad:
  - Suponga que todos los eventos unitarios son equiprobables.
  - La probabilidad de un evento es

$$P(E) = \frac{\#(E)}{\#(\Omega)}$$

- Ejemplo: $\Omega = \{HH, HM, MH, MM\}$
  - $P(\text{no tener ningún varón}) = P(\{MM\}) = \frac{1}{4} = 0.25$.
  - $P(\text{tener exactamente un varón}) = P(\{HM, MH\}) = \frac{2}{4} = 0.5$.
  - $P(\text{tener dos varones}) = P(\{HH\}) = \frac{1}{4} = 0.25$.
- El problema es ahora un problema de conteo.

Conteo

- Seleccionar k elementos de entre n.
- ¿Cómo se toma la muestra?
  - ¿Con reemplazo o sin reemplazo?
  - ¿Ordenadas o sin ordenar?
- Cuatro formas distintas de muestreo.

Muestreo con reemplazo ordenado.

- Conjunto $\{a, b, c\}$.
- Seleccione 2.
- Posibilidades

$$\begin{array}{ccc} aa & ab & ac \\ ba & bb & bc \\ ca & cb & cc \end{array}$$

- Número de posibilidades: $n \times n \times \cdots \times n$ (k veces).
- Expresión general n^k.
- $3^2 = 9$.

Muestreo sin reemplazo ordenado.

- Conjunto $\{a, b, c\}$.
- Seleccione 2.
- Posibilidades

$$\begin{array}{ccc} \cdot & ab & ac \\ ba & \cdot & bc \\ ca & cb & \cdot \end{array}$$

- Número de posibilidades: $n \times (n-1) \cdots \times (n-k+1)$.
- Expresión general: permutaciones de k en n

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

  - $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.
  - $0! = 1$.
- $P_2^3 = 3 \times 2 = 6$.

Permutaciones de un conjunto

- ¿De cuántas maneras diferentes se puede ordenar un conjunto?
- Conjunto $\{a, b, c\}$.
- Permutaciones
$$abc, acb, bac, bca, cab, cba$$
- Muestra ordenada sin reemplazo del mismo tamaño que el conjunto.
- Permutaciones de n en n
$$P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$
- $P_3^3 = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.

Muestreo sin reemplazo sin ordenadar.

- Conjunto $\{a, b, c\}$.
- Seleccione subconjuntos de tamaño 2.
- Posibilidades

$$\begin{array}{ccc} \cdot & ab & ac \\ \cdot & \cdot & bc \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

- Número de posibilidades: combinaciones de k en n: $\binom{n}{k}$.
- Permutaciones de k en n: $P_k^n = \binom{n}{k} k!$
- Expresión general

$$\binom{n}{k} = \frac{P_k^n}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

- $\binom{3}{2} = \frac{3 \times 2}{2!} = 3$.

Muestreo con reemplazo sin ordenar

- Conjunto $\{a, b, c\}$.
- Seleccione subconjuntos de tamaño 2.
- Posibilidades

$$\begin{array}{ccc} aa & ab & ac \\ \cdot & bb & bc \\ \cdot & \cdot & cc \end{array}$$

- Expresión general:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

- En ejemplo:

$$\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2!} = 6$$

Ejemplo de dados

- Experimento: lanzo tres dados.
- ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?
- $\Omega = \{111, 112, \ldots, 116, 121, 122, \ldots 126, \ldots, 666\}$
- Escoger 3 números de entre las 6 caras del dado con reemplazo y en orden.
- $\#\Omega = 6^3 = 216$.
- E: Suma de los dados es 5.
- $E = \{113, 122, 131, 212, 221, 311\}$.
- $P(E) = 6/216 = 0.0277778$.
- Si lanzo dos dados:
  - ¿Cuál es el valor más probable de la suma?
  - ¿Tiene el valor más probable una probabilidad alta?

Ejemplo de fecha de nacimiento

- Se juntan 30 personas.
- ¿Cuál es la probabilidad de que haya una repetición en el mes y día de nacimiento?
- Suponemos año de 365 días equiprobables.
- $\Omega = \{(1, 1, \ldots, 1), \ldots, (365, 365, \ldots, 365)\}$
- $\#\Omega = 365^{30}$ (número de 77 cifras).
- Evento E: hay al menos una repetición.
- E^c: no hay ninguna repetición.
- Muestreo ordenado sin reemplazo.
- $\#E^c = P_{30}^{365} = \frac{365!}{335!} = 365 \times 364 \times \cdots \times 336.$
- Probabilidad de E^c:

$$P(E^c) = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \cdots \times \frac{336}{365} = 0.2936898$$

- $P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - 0.2936898 = 0.7063162.$
- Si se juntan 40 personas, la probabilidad es 0.8912318.

Ejemplo de Póker

- Un pilo de 52 naipes, agrupados en 4 grupos: $\heartsuit$, $\diamondsuit$, $\clubsuit$, $\spadesuit$.
- Cada grupo tiene 13 cartas numeradas: $A, 2, 3, \ldots, 9, 10, J, Q, K$.
- En póker se toman al azar 5 cartas.
- No importa el orden en que salgan las cartas, sino qué cartas salen.
- $\#\Omega = \binom{52}{5} = \frac{52\times51\times50\times49\times48}{1\times2\times3\times4\times5} = 2,598,960$
- E_1: exactamente un par: 2 cartas del mismo número y tres de distintos números.
- $\#E_1 = \binom{13}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} = 1,098,240$.
- $P(E_1) = \frac{1,098,240}{2,598,960} = 0.422569$.
- E_2: full house: un par del mismo número y un trío del mismo número.
- $\#E_2 = \binom{13}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{1} \times \binom{4}{3} = 3,744$.
- $P(E_2) = \frac{3,744}{2,598,960} = 0.0014406$.

Ejemplo de pedidos

- Una mesa ordena 5 mantecados en una heladería que tiene 3 sabores: chocolate, vainilla y mixto.
- ¿Cuántas posibles ordenes existen?
- Selecciona 5 elementos de entre tres con reemplazo.
- El orden no importa: 2 de vainilla y 3 de chocolate es lo mismo que 3 de chocolate y 2 de vainilla.
- Hay $\binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = 21$.
- Enumeración (cvm): 500, 410, 401, 320, 311, 302, 230, 221, 212, 203, 140, 131, 123, 114, 105, 050, 041, 032, 023, 014, 005.
- Pudiéramos vernos tentados a decir que la probabilidad de que no se ordene mixto es $6/21 = 0.2857143$.
- Aunque estas son las posibles ordenes, no se puede usar estas para el cálculo de probabilidades.
- $\Omega = \{ccccc, ccccv, cccvc, ccvcc, cvccc, vcccc, \ldots, mmmmm\}$.
- $\#\Omega = 3^5 = 243$.
- Probabilidad de que no se ordene mixto es $2^5/3^5 = 0.1316872$.

Ejemplo de urnas

- Seleccione una bola de un ánfora. Si sale roja gana, si sale azul pierde.
- $A_1 = [①②③④①②③]$, $B_1 = [①②①②]$.
- $P_{A_1}(r) = 4/7 = 0.5714$, $P_{B_1}(r) = 2/4 = 0.5$.
- En otra mesa hay otras ánforas.
- $A_2 = [⑤⑥⑦④]$, $B_2 = [③④⑤⑥⑦⑧⑨③④⑤]$.
- $P_{A_2}(r) = 3/4 = 0.75$, $P_{B_2}(r) = 7/10 = 0.7$.
- Unimos las ánforas $A_1 \cup A_2$ y las ánforas $B_1 \cup B_2$.
- $A_1 \cup A_2 = [①②③④⑤⑥⑦①②③④] \implies P_{A_1 \cup A_2}(r) = 7/11 = 0.6364$
- $B_1 \cup B_2 = [①②③④⑤⑥⑦⑧⑨①②③④⑤] \implies P_{B_1 \cup B_2}(r) = 9/14 = 0.6429$.
- Ejemplo de paradoja de Simpson.