Probabilidad Condicional e Independencia

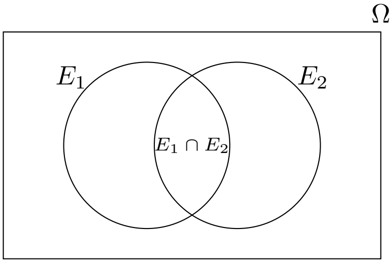
Francisco Vera

FCNM-ESPOL

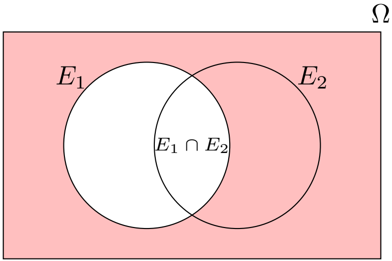
Probabilidad Condicional

- Cuando calculamos la probabilidad de un evento, es posible que tengamos información de otro evento que ya ocurrió.
- Esa información puede afectar la probabilidad del evento que estamos calculando.
- Probabilidad de que alguien pese más de 60 kilos: quizás 0.5.
- Si sabemos que la persona en cuestión mide 1.90 m: la probabilidad de que pese más de 60 kilos: quizás 0.8.
- La probabilidad que llueva un día puede cambiar si estamos en invierno o en verano.

Probabilidad Condicional



Probabilidad Condicional



Probabilidad Condicional

- Suponga que $P(E_1) > 0$.
- Definición:
$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$
- Notación: Probabilidad condicional de E_2 dado E_1.
- La probabilidad condicional cumple los tres axiomas de probabilidad usando E_1 en vez Ω.
  - $P(E_2|E_1) \geq 0$.
  - $P(E_1|E_1) = 1$.
  - $E_2 \cap E_3 = \emptyset \implies P(E_2 \cup E_3|E_1) = P(E_2|E_1) + P(E_3|E_1)$.

Ejemplos de probabilidad condicional

- Lanzo un dado y veo que número sale.
- ¿Cuál es la probabilidad que el número sea primo dado que es par?
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- $E_1 = \{\text{sale número par}\} = \{2, 4, 6\}$.
- $E_2 = \{\text{sale número primo}\} = \{2, 3, 5\}$.
- $P(E_1) = 3/6 = 1/2$.
- $P(E_2) = 3/6 = 1/2$.
- $E_1 \cap E_2 = \{2\}$
- $P(E_1 \cap E_2) = 1/6$.
- $P(E_2|E_1) = (1/6)/(1/2) = 1/3$.

Ejemplos de probabilidad condicional

- ¿Cuál es la probabilidad que el número sea primo dado que es mayor que 4?
- $E_2 = \{\text{sale número primo}\} = \{2, 3, 5\}$.
- $E_3 = \{\text{sale número mayor que } 4\} = \{5, 6\}$.
- $P(E_2) = 3/6 = 1/2$.
- $P(E_3) = 2/6 = 1/3$.
- $E_2 \cap E_3 = \{5\}$
- $P(E_2 \cap E_3) = 1/6$.
- $P(E_2|E_3) = (1/6)/(1/3) = 1/2$.

Independencia

- Decimos que dos eventos son independientes si

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$$

- Cuando dos eventos son independientes

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \frac{P(E_1)P(E_2)}{P(E_1)} = P(E_2)$$

- Ejemplo de los dados:
  - $P(E_1) = 3/6 = 1/2$.
  - $P(E_2) = 3/6 = 1/2$.
  - $P(E_1 \cap E_2) = 1/6$.
  - $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{6}$.
  - E_1 y E_2 no son independientes.
  - $P(E_3) = 2/6 = 1/3$.
  - $P(E_2 \cap E_3) = 1/6$.
  - $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
  - E_2 y E_3 sí son independientes.

Ejemplo: Faltas en el trabajo

- En una oficina hay dos personas entrenadas para atender al público.
- La primera falta por enfermedad el 1% de los días.
- La segunda falta por enfermedad el 2% de los días.
- Suponga que las faltas por enfermedad son independientes entre las dos personas.
- ¿Cuál es la probabalidad que en un día cualquiera falten las dos?
- E_j: falta j-ésima persona, $j = 1, 2$.
- $P(E_1) = 0.01, P(E_2) = 0.02$.
- E_1 y E_2 son independientes.
- $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2) = 0.01 \times 0.02 = 0.0002$.
- 2 días de cada 10000 o 1 de cada 5000 faltarán ambas.
- Año tiene $52 \times 5 - 10 = 250$ días laborables.
- $250 \times 20 = 5000$.
- Esperamos que 1 vez cada 20 años no haya nadie que atienda en esta oficina.

Ejemplo: Avión

- Los mecanismos más críticos de los aviones tienen redundancias.
- Suponga que uno de los mecanismos viene en par: si al menos uno de los dos funciona, el avión permanece en el aire.
- Estudios de confiabilidad de este mecanismo muestran que la probabilidad de que falle es 0.001 si lleva menos de 5000 horas de vuelo.
- Suponga que ambos mecanismos funcionan de forma independiente.
- ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de estos dos mecanismos funcione correctamente en un vuelo realizado antes de que cumplan 5000 horas?
- E_j: mecanismo j funciona correctamente, $j = 1, 2$.
- E_1 y E_2 son independientes.
- $P(E_j^c) = 0.001 \implies P(E_j) = 0.999$.
- $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0.999 + 0.999 - 0.999 \times 0.999 = 0.999999$.
- Probabilidad de 1 en un millón que ambos mecanismos fallen en medio vuelo.