דרכי פתרון

-1

א) כדי להראות שייכות לת"מ, נראה שהווקטור בספאן של הת"מ, זאת ע"י שנראה שהווקטור הוא צירוף של איברי הבסיס.

ב) אם נתון ת"מ הוא מכיל בוודאות את וקטור ה-0, יכול להיות שמיש כדי להציג וקטור ספציפי.

-2

א) ספאן הוא תמיד ת"מ.

ב) כדי למצוא בסיס ומימד נציב את איברי הספאן במטריצה ונדרג. הווקטורים שבעמודות שלהם אין איבר חופשי שייכים לבסיס, שכן הם פורשים את המרחב ובת"ל.

ג) כדי למצוא חיתוך וחיבור של שני מרחבים לרוב נפעל כך:

(i) נתחיל במציאת החיבור ע"י המרת שני המרחבים להצגה של ספאן. בחלק מהמקרים כבר נוכל גם לזהות אם יש איבר משותף בשני המרחבים. נשים את כלל הווקטורים במטריצה ונדרג. הווקטורים שבעמודות שלהם אין איבר חופשי שייכים לבסיס, שכן הם פורשים את המרחב ובת"ל.

(ii) אחרי שמצאנו את החיבור נבדוק האם משפט הממדים יכול לעזור לנו. אם קיבלנו שהמימד של החיתוך שווה ל-0, אין אף וקטור בחיתוך והוא קבוצה ריקה. **<u>כדאי לשים לב</u>** – אם בשלב המעבר לספאן ראינו איבר (או יותר) שמופיע בספאן של שני המרחבים, ויצא לנו שהמימד של החיתוך שווה ל-1 (או יותר, בהתאמה), אזי זכינו. הספאן של הווקטור הנ"ל שווה לחיתוך.

-3

א) כדי לבדוק האם ניתן לבטא ווקטור מסוים ע"י קבוצת ווקטורים (שזה בתכלס לבדוק האם ווקטור תלוי לינארית ע"י ווקטורים אחרים, או אם ווקטור מסוים שייך לספאן של קבוצה וכדו'), נציב את הווקטורים של הקבוצה במטריצה, ואת הווקטור הנדרש בעמודת אם נרצה לבדוק האם הווקטור $\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$ שייך לספאן של הקבוצה A נפעל כך -

$$A=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&5\\2&0&3&4\\0&1&3&3\end{array}\right)$$

נדרג את המטריצה שקיבלנו, והרי לנו התשובה.

באופן כללי כדי לבדוק ווקטור כללי שייך לקבוצה נדרג אותה כאשר בעמודת הפתרונות נציב ווקטור של נעלמים. להלן –

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 0 & 3 & y \\ 0 & 1 & 3 & z \end{array}\right)$$

אם לאחר הדירוג נראה כי בכל מצב אין שורת סתירה, זה אומר שניתן לבטא כל ווקטור מהצורה (x,y,z) ע"י איברי הקבוצה (שוב אותו עקרון של ספאן וקבוצה פורשת וכו').

-4

א) נבדוק האם הע"ל קיימת באופן הבא:

(i) אם ניתנים לנו רק התמונה והגרעין של ה-T ננסה לשלול את קיום ה-הע"ל על ידי שנראה שיש סתירה במשפט הדרגה.

(ii) אם נתונים לנו איברי בסיס וה-T שלהם נבדוק - אם איברי הבסיס הנתונים לנו הם בת"ל, יש הע"ל יחידה המקיימת את הנתון, זאת לפי משפט ההגדרה.

(iii) אחרת נבדוק בעבור אילו α-ות הווקטורים הבלתי תלויים יתנו לנו את הווקטור התלוי, ונבדוק האם כאשר נכפיל את ה -T של אותם וקטורים באותם α-ות נקבל את ה –T של הווקטור התלוי. אם קיבלנו משוואת אמת, יש כזו הע"ל, אחרת אין כזו הע"ל.

נניח ויש לנו את v_3 ומתקיים עבורו ש –

$$α_1 v_1 + α_2 v_2 = v_3$$

אם מתקיים ש -

$$α_1 T(v_1) + α_2 T(v_2) = T(v_3)$$

יש כזו הע"ל.

ב) אם מבקשים לבדוק חח"ע או הפיכה או על, שווה לבדוק אם התחום והטווח של ה-הע"ל שווים. במקרה כזה מספיק להוכיח רק אחד והוא גורר את השניים האחרים (A.K.A. איזומורפיזם).

ג) אם מצאנו מסעיף (ii) שיש איבר תלוי, ניתן להוסיף איבר לקבוצה ועדיין להשאיר אותה בת"ל. באופן זה הקבוצה "המעודכנת" פורשת את כל התחום (אם עדיין לא נוסיף עד שכן), ונוכל לדרוש שווקטור שהוספנו "ילך" ליעד מסוים. כך ניתן להוכיח קיימות של איבר מסוים כגרעין של ה- הע"ל (במידה ולא ידוע לנו כבר על אחד כזה). כלומר, נוסיף וקטור שלא תלוי בווקטורים הקיימים, נדרוש שה- T שלו שווה ל-0, ואם ע"פ משפט המימדים, מימד הגרעין של ה-הע"ל שווה ל-1 (או יותר, בהתאמה לכמה שהוספנו), הרי שהספאן של הווקטור/ים שהוספנו שווה ל-kerT (בעזרת שימוש בלמה החשובה).

5-

א) הצורה הקנונית של מטריצה הפיכה A היא I , לכן המימד של – N(A) יהיה 0. ניתן למצוא כך את ה – dimRank בהינתן המימד של התחום.

6-

א) <u>כדאי לזכור את המטריצות הטריוויאליות ותכונותיהן</u> –

(i) המטריצה – $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ היא אכן שונה מ-0, אך $A^2 = 0$.

(ii) המטריצה – $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ מקיימת - $A^2 = A$. שימו לב למשמעות של זה מבחינת מרחבי המטריצה וממדיהם.

(iii) ככלל המטריצות הללו על שלל סוגן מאוד פשוטות ושימושיות להפרכות.

ב) אם במטריצה הנתונה יש פרמטר, הדירוג אמור מאוד "להסתדר" ככה שהפרמטר מצמצם את עצמו בהרבה מקומות. אם משהו מתחיל להתחרבש, כנראה שאחד מהשלבים היה לא נכון. לא באופן גורף, אבל לרוב זה ככה.

ג) למשוואה - $Ax = b$ יש פתרון אמ"מ $b \in C(A)$. נתון מאוד שימושי בהוכחות של "האם לכל ווקטור מסוים יש פתרון למערכת..". שילוב נפוץ של הנתון הוא שילוב שלו במשפט הדרגה יחד עם נתון אחר שכבר ידוע לכם מרחבי המטריצה.

7-

א) בשאלות הגדרת בסיסים נדרש להראות שקיים (או שלא) בסיס למרחב כך שמתבצע משהו ספציפי. יכול להיות שה-Ker שווה ל-Im, או שאף אחד מהווקטורים לא הולך ל-0 וכדו'. עקרונית מה שצריך לעשות זה לבנות בסיס סביב הנתון שקיבלנו, להשלימו לבסיס לכל המרחב (כמובן שלאורך כל הדרך נציין שוב ושוב כי הווקטורים בת"ל וכל ההערות הפורמליות שצריך..), ואז להסביר למה הבסיס הנ"ל מקיים את הדרוש. ברוב המקרים (כיוון שמדובר באיברי בסיס אזי לפי משפט ההגדרה -) יהיה לנו מרחב די גדול לשחק עם **ההגדרה של ה-הע"ל** עצמה באופן שיעזור לנו להוכחה (כמובן שאם מדובר ב-"יהי" צריך להוכיח להע"ל כללית, ואז זה פחות עוזר). זה מסוג השאלות שמשלבות ידע פורמלי ותיאורטי ברמה קצת יותר גבוהה, ולכן הכי טוב זה לתרגל כמה שיותר שאלות כאלו.

8-

א) במקרה של שרשרת העתקות כגון $T = TST$ (כמובן התחום והטווח של- S ו-T הם הפכים), בו אנו נדרשים להוכיח על קיום של וקטור ספציפי או תכונה של וקטור "שעובר" בשרשרת, שווה לנסות להציב ממש ולראות האם כתוצאה מהשרשור נקבל את ההוכחה הנדרשת.

ב) <u>הע"ל כדוגמאות להוכחה</u> – לרוב ההפרכות יש דוגמה די פשוטה להע"ל סותרת. נסו את העתקת ה-0, העתקת הזהות, העתקה מחליפה, או העתקה שמשלבת כמה מהקודמות–

$$T\binom{x}{y}=\binom{y}{0}**,\quad T\binom{x}{y}=\binom{y}{x},\quad T\binom{x}{y}=(0),\quad T\binom{x}{y}=\binom{x}{y}$$

וכדו'.

שימו לב שאם צריך להוכיח משהו שקשור ל-2 הע"ל אם לא דרשו במפורש או אין משהו לוגי שסותר, נוכל לדרוש שהן יהיו אותה הע"ל אם זה עוזר לנו להוכחה (יכול להיות מאוד יעיל במקרים של שרשרת כמו זו מהסעיף הקודם).

ההעתקה הזו **מאוד שימושית להפרכות, שכן ההרכבה שלה עם עצמה נותנת-0, אך היא שונה מ-0.

-9

א) דברים פשוטים וסופר שימושיים:

(i) אם מכפלה של מטריצות **ריבועיות** שווה ל- I, כל אחת מהמטריצות היא ההופכית של השנייה. תקף גם ביותר מ-2. כלומר תהי מכפלת מטריצות באופן הבא - $ABC=I$ אזי, $AB=C^{-1}\Leftarrow BC=A^{-1}\Leftarrow$ ובפרט כל אחת מהמטריצות הפיכה כולל B.

(ii) בהינתן שאלה עם t (transpose) יש שתי אפשרויות. אם זה משהו אלגברי "משוואתי" כגון הוכחת אי סימטריות, אפשר ממש להציב ולשחק עם המשוואה לפי הכללים של t, ולרוב זה יספיק (אם זה בא לא כסעיף ראשון, סביר שנצטרך להשתמש בנתון שכבר מצאנו בסעיפים קודמים). אם זה יותר משהו ממשי ומפורש, פשוט נייצג את הדרוש לפי הכלל של t, לפיו העמודות והשורות מתחלפות. בדר"כ זה לא משהו שאמור להיות מסובך מידי.

(iii) כשנרצה להוכיח סכום ישר ($\oplus$) נשלב את משפט המימדים יחד עם משפט הדרגה על מנת להוכיח $KerT+ImT=V$, כמובן לפי הלמה החשובה.

(iv) מטריצה הפיכה אמ"מ הצורה הקנונית שלה שווה ל- I.

(v) עוד משהו שלפחות לי היה פחות אינטואיטיבי – לכל מטריצה ריבועית (ואולי לא רק אבל אני לא מתחייב) שהיא לא הפיכה, תהיה מטריצה אחרת (לכאורה אינסוף כאלו) שונה מ-0, שהמכפלה ביניהם שווה ל-0.

הסיבה לכך היא שלמטריצה לא הפיכה יש אינסוף וקטורים שמאפסים אותה למעשה כל ווקטור v ששייך ל- $N(A)$. מכאן שהמטריצה $\begin{pmatrix} | & | & | \\ v & v & v \\ | & | & | \end{pmatrix}$ או אפילו עם חלק עמודות אפסים תאפס את המטריצה A.

(vi) כשמבקשים להוכיח משהו על מטריצות **לא** ריבועיות נוכל לקחת מטריצות ריבועיות המקיימות את מה שאנחנו מחפשים, ופשוט להוסיף להן שורות/עמודות אפסים. דוגמה קלאסית –

הוכח או הפרך: תהיינה מטריצות $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ כך של A יש עמודת אפסים וכך של B יש שורת אפסים, אזי $AB \neq I$.

<u>נפריך זאת בקלות באופן הבא -</u> נוכל לקחת כל מטריצה וההופכית שלה ולהוסיף להן שורות/עמודות אפסים לפי הדרישה. לדוגמה –

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \mathbf{0} \\ 0 & 2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \Rightarrow AB = I$$

*כמובן שיכולנו פשוט לקחת פעמים את המטריצה I, זה בכוונה לצורך המחשה.

-10

א) לגבי מטריצות מייצגות הע"ל. הרבה התבלבלו פה עם מטריצת מעבר בין בסיסים וכל זה. אנסה לעשות טיפה סדר. המטריצה הנ"ל $[T]_C^B$ היא מטריצה שאם ניקח ווקטור מבסיס למרחב כלשהו B ונכפול אותו בה, נקבל את "התוצאה" שלו אחרי שהפעלנו עליו T, אבל בייצוג לפי הבסיס C. דהיינו –

תהי $T: V \longrightarrow W$ הע"ל ובסיסים $B_V = \{v_1 \dots v_n\}$, $C_W = \{w_1 \dots w_k\}$ אם נפעיל את ה-הע"ל על כל ווקטור מ-B כך ש - $T(v_i) = u_i$ ונציג את הווקטור- u_i שקיבלנו לפי הבסיס-C (הכוונה עבור אילו מקדמים נכפיל את איברי הבסיס-C על מנת לקבל את הווקטור u_i), נקבל את אותה תוצאה שהיינו מקבלים אם היינו פשוט כופלים את v_i במטריצה שמייצגת את ה-הע"ל - $[T]_C^B$.

<u>**שימו לב-**</u> מטריצת מעבר בין בסיסים היא סה"כ מקרה פרטי של מטריצה מייצגת העתקה, כאשר במקרה הזה T היא העתקת הזהות (שזה בתכלס אומר שלא באמת נגענו בווקטור עצמו - $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$). כיוון שהבסיסים הם המשתנה היחיד, היא נקראת מטריצת מעבר בין בסיסים (אם גם הבסיסים יהיו שווים, באמת המטריצה לא עושה שום דבר..)).

באופן כללי כדי למצוא את המטריצה המטורפת הזו ניקח את התמונות של איברי הבסיס הראשון, ונציגן לפי "בסיס היעד". <u>**שורה תחתונה –**</u>

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(v_1)]_c & [T(v_2)]_c & \rightarrow & [T(v_n)]_c \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

<u>שורה עוד יותר תחתונה-</u> מצד אחד נשים את "בסיס היעד" מצד שני את התמונות של ווקטורי "בסיס המקור", ונדרג את המטריצה של "בסיס היעד" עד שנקבל במקומה את המטריצה I.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ (w_1) & (w_2) \longrightarrow & (w_k) & T(v_1) & T(v_2) \longrightarrow & T(v_n) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right)$$

דירוג אגרסיבי – לא נעים, לא נורא. $\Downarrow$

$$\left(I \middle| [T]_C^B\right)$$

שימו לב כאשר מדובר במטריצת הזהות, כך שלמעשה זוהי "מטריצת מעבר בין בסיסים" ה-T חסרת משמעות לכן נוכל לדרג ישירות כך-

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ (w_1) & (w_2) \longrightarrow & (w_k) & (v_1) & (v_2) \longrightarrow & (v_n) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right)$$

עוד דירוג אגרסיבי – לא נעים, לא נורא. $\Downarrow$

$$\left(I \middle| [I]_C^B\right)$$

11-

א) **טיפים של אלעד** (♛) -

(*i*) בשאלות הוכח או הפרך ננסה קודם להפריך כיוון שזה דורש רק דוגמה, אם אנחנו רואים שזה לא הכי הולך נעבור להוכחה.

(*ii*) אם נרצה להוכיח טענת לכל, ניקח איבר כללי ללא תנאים ונראה כי הטענה נכונה לגביו. במינוח המקצועי - נכתוב "יהי", "יהי" זה תמיד טוב.

(*iii*) אם נרצה להוכיח טענת קיים, ניתן דוגמה מסוימת, או נוכיח שדוגמה כזו קיימת (מבלי שממש נביא אותה במפורש).

זה הכל. מקווה שעזרתי ולו במעט. אם שרדתם עד כאן אשריכם!

בהצלחה רבה!