

בחינה באלגברה לינארית 1

דוד גינובורג

משך הבחינה שלוש שעות.
אין להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבוני.
יש לענות על כל השאלות.

שאלה 1

תהי A מטריצה מסדר n עם איברים בשדה F . נסתכל על עמודות A כעל וקטורים במרחב F^n . נניח כי סכום הוקטורים המתאימים לעמודות הזוגיות במטריצה, שווה לסכום הוקטורים המתאימים לעמודות האי זוגיות במטריצה. לחשב את הדטרמיננטה של A .

שאלה 2

תהי $A = (a_{i,j})$ המטריצה מסדר n המוגדרת על ידי $a_{i,j} = 1$ לכל $1 \leq i, j \leq n$. למצוא סקלר c כך שיתקיים $(I - A)^{-1} = I - cA$.

הערה: אין צורך להוכיח כי המטריצה $I - A$ הינה הפיכה.

שאלה 3

יהיו $a, b, c \in \mathbf{R}$. לחשב את דרגת המטריצה
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$$

שאלה 4

יהי V המרחב הוקטורי המורכב מכל הפולינומים עם מקדמים בשדה F שדרגתם היא לכל היותר n . נגדיר העתקה לינארית $T: V \rightarrow V$ על ידי $T(p(x)) = p(x+1) - p(x)$. לחשב את הגרעין והתמונה של T .

הערה: אין צורך להוכיח כי ההעתקה היא לינארית.

שאלה 5

יהי V מרחב וקטורי. תהיינה $T, S: V \rightarrow V$ שתי העתקות לינאריות המקימות $TS = T$ וגם $ST = S$. להוכיח כי $\ker T = \ker S$, $T^2 = T$, וגם $S^2 = S$.