תוכן העניינים:

אלגברה

נוסחאות וייטה

הגדרת נוסחאות וייטה וחישובים יסודיים:

סיכום כללי:

הגדרה:

נתונה הפונקציה הריבועית: $y = ax^2 + bx + c$, כאשר: $\Delta > 0$, $a \neq 0$.

אם x_1 ו- x_2 הם שורשי המשוואה: $ax^2 + bx + c = 0$ אז מתקיים:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

לקשרים אלו קוראים בשם **נוסחאות וייטה** והם תקפים רק במשוואה ריבועית שבה $\Delta > 0$.

שאלות:

1) לפניך משוואות ריבועיות. מבלי לפתור, מצא את הסכום ואת מכפלת השורשים שלהם.

א. $x^2 + 5x - 8 = 0$.

ב. $3x^2 - 7x + 4 = 0$.

ג. $x^2 + 9x - 14 = 0$.

ד. $13x - 6x^2 + 7 = 0$.

2) נתונה משוואה ריבועית: $ax^2 + 3x + 5 = 0$. מצא את a אם ידוע כי למשוואה שני שורשים ממשיים שונים אשר סכומם הוא 3.

3) נתונה משוואה ריבועית: $\alpha x^2 + (\beta - \alpha)x - 16 = 0$, ($\alpha, \beta$ פרמטרים).
מצא את ערכי הפרמטרים α ו- β אם ידוע כי למשוואה שני שורשים ממשיים שונים אשר סכומם הוא 2- ומכפלתם היא 16-.

4) כתוב משוואה ריבועית אשר לה שני שורשים ממשיים שונים, x_1 ו- x_2 שמקיימים: $x_1 + x_2 = 5$ ו- $x_1 \cdot x_2 = -2$. כמה משוואות כאלה תיתכנה? נמק.

תשובות סופיות:

1) א. $x_1+x_2=-5\ ,\ x_1x_2=-8$ ב. $x_1+x_2=2\frac{1}{3}\ ,\ x_1x_2=1\frac{1}{3}$

ג. $x_1+x_2=-9\ ,\ x_1x_2=-14$ ד. $x_1+x_2=\frac{6}{13}\ ,\ x_1x_2=\frac{7}{13}$.

2) $a=-1$.

3) $\alpha=1\ ,\ \beta=3$.

4) אם $a=1$ אז: $x^2-5x-2=0$.

יש אינסוף משוואות מהצורה: $ax^2-5ax-2a=0$.

חקירת משוואות עם נוסחאות וייטה:

סיכום כללי:

להלן ריכוז התנאים שיש לדרוש עבור סימני השורשים של משוואה ריבועית:

- שני שורשים בעלי סימנים שונים: $\frac{c}{a}<0$.
  - שני שורשים בעלי סימנים שונים והשורש הגדול בערכו המוחלט הוא החיובי: $\frac{c}{a}<0$ וגם $-\frac{b}{a}>0$.
  - שני שורשים בעלי סימנים שונים והשורש הגדול בערכו המוחלט הוא השלילי: $\frac{c}{a}<0$ וגם $-\frac{b}{a}<0$.
- שני שורשים בעלי אותו סימן: $\Delta>0$ וגם $\frac{c}{a}>0$.
  - שני שורשים חיוביים: $\Delta>0$ וגם $\frac{c}{a}>0$ וגם $-\frac{b}{a}>0$.
  - שני שורשים שליליים: $\Delta>0$ וגם $\frac{c}{a}>0$ וגם $-\frac{b}{a}<0$.

הערות:

1) שני קשרים שכיחים בשאלות הם:
- סכום ההופכיים של השורשים: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{b}{c}$.
- סכום ריבועי השורשים: $x_1^2+x_2^2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$.

2) ניתן לנסח את כל הנ"ל עבור פונקציה ריבועית.
במקום שורשים מתייחסים לנקודות האפס של הפונקציה (נקודות החיתוך עם ציר ה- x של הפונקציה).

שאלות:

1) נתונה המשוואה הריבועית הבאה: $(m^2-2m-8)x^2+(3m+6)x+2=0$.

א. עבור אלו ערכי m יתקבלו שני שורשים ממשיים שונים בעלי סימנים שונים?
ב. עבור אלו ערכי m יתקבלו שני שורשים ממשיים שונים בעלי אותו סימן?
ג. עבור אלו ערכי m יתקבלו שני שורשים ממשיים שונים חיוביים?
ד. עבור אלו ערכי m יתקבלו שני שורשים ממשיים שונים שליליים?

2) נתונה המשוואה: $(m+1)x^2+(m+7)x+m+1=0$.

א. עבור אלו ערכי m יש למשוואה שני פתרונות ממשיים שונים?
ב. עבור אלו ערכי m סכום שורשי המשוואה קטן מ-1 ?
ג. עבור אלו ערכי m יתקיימו התנאים של סעיף א' ושל סעיף ב' יחד?
ד. הוכח כי שורשי המשוואה הם מספרים הופכיים.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=(m^2-8m+12)x^2+(3m-10)x+2$.

א. הוכח כי עבור כל ערך של m גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x לפחות פעם אחת.
ב. מצא עבור אלו ערכי m שורשי הפונקציה הם חיוביים וסכומם גדול ממכפלתם.
ג. נסמן ב-x_1 וב-x_2 את שורשי הפונקציה.

i. הבע באמצעות m את שורשי המשוואה x_1 ו-x_2.
ii. מצא עבור אלו ערכי m השורשים נמצאים משני צידי הישר $x=2$ ונסח תנאי מתאים על השורשים x_1 ו-x_2 עבורו יהיה פתרון לדרישה.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=mx^2+3(m+1)x+2(m+2)$.

א. עבור אלו ערכי m יש לפונקציה שתי נקודות חיתוך עם ציר ה-x ?
ב. מצא עבור אלו ערכי m הפונקציה תחתוך את ציר ה-x בשתי נקודות הנמצאות משני צידי ציר ה-y.
ג. מסמנים את שורשי הפונקציה ב-x_1 וב-x_2.
עבור אלו ערכי m סכום ריבועי השורשים קטן מ-4? $(x_1^2+x_2^2<4)$.
ד. עבור אלו ערכי m יתקיימו כל התנאים של הסעיפים הקודמים יחד?

5) נתונה המשוואה: $x^2+(3k-1)x+k^2-4k-12=0$.

א. הוכח כי עבור כל ערך של k יש למשוואה שני פתרונות שונים וממשיים.

ב. מסמנים את שורשי המשוואה ב- x_1 וב- x_2.

הבע באמצעות k את ערך הביטוי: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

ג. עבור אלו ערכי k אחד משורשי המשוואה יהיה וודאי אפס?

ד. הראה כי עבור ערכי ה- k המקיימים שאחד משורשי המשוואה הוא אפס,

אין משמעות לערך הביטוי $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2+(k+3)x+k^2+3k-9$.

א. עבור אלו ערכי k יש לפונקציה שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x ?

ב. עבור אלו ערכי k מכפלת שורשי הפונקציה תהיה וודאי קטנה מ-1 ?

ג. מצא ערך של k עבורו מתקיימים שני התנאים הנ"ל ונקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x הם מספרים נגדיים.

ד. הצב את ערך ה- k שמצאת בסעיף הקודם בפונקציה ומצא את שורשי הפונקציה והראה כי הם מקיימים את התנאי של סעיף ב'.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=(m+3)x^2+(3m+7)x+2m+4$.

א. הוכח את הטענות הבאות:

i. גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x לפחות פעם אחת עבור כל ערך של m.

ii. אחד משורשי הפונקציה הוא מספר קבוע שלא תלוי ב- m.

iii. ההפרש בין השורש הקבוע לשורש שתלוי ב- m הוא $\frac{m+1}{m+3}$.

ב. נסמן ב- x_1 את השורש הקבוע וב- x_2 את השורש התלוי ב- m.

הבע באמצעות m את סכום ריבועי השורשים ואת הפרש ריבועי השורשים.

$\left(x_1^2+x_2^2\ ,\ x_1^2-x_2^2\right)$.

ג. העזר בסעיפים הקודמים ומצא עבור אלו ערכי m ערך הביטוי $x_1^4-x_2^4$ חיובי.

(העזר בנוסחה: $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$).

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=(12m+8)x^2+(7m+6)x+m+1$.

א. עבור אלו ערכי m יש לגרף הפונקציה שני שורשים ממשיים שונים מצדו השמאלי של ציר ה- y ?

ב. הראה כי אחד השורשים תמיד יהיה בצידו השמאלי של ציר ה- y ללא קשר ל- m .

ג. עבור אלו ערכי m שורשי הפונקציה יהיו משני צידי ציר ה- y אך השורש בעל הערך המוחלט הגדול יותר יהיה הימני לציר ה- y ?

ד. האם קיים ערך של m עבורו גרף הפונקציה יחתוך את ציר ה- x בשתי נקודות הנמצאות במרחק שווה מציר ה- y ? אם כן מהו?!

9) נתונה המשוואה: $kx^2+(k+6)x+k=0$.

א. מצא שלושה ערכים שונים של k עבורם יש למשוואה פתרון ממשי אחד.

ב. עבור אלו ערכי k יהיו למשוואה שני פתרונות בעלי אותו סימן?

ג. האם קיים ערך של k עבורו שני פתרונות המשוואה יהיו מספרים נגדיים? אם כן מצא אותו. אם לא נמק מדוע.

10) נתונה הפונקציה: $f(x)=(m^2-4)x^2+mx+3$.

א. מצא עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בחלקו החיובי והשלילי.

מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=-x^2-(4m+10)x-3$.

ב. הראה כי לא קיים ערך של m עבורו גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- x פעם אחת בחלקו החיובי ופעם אחת בחלקו השלילי.

הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ חותכים זה את זה בנקודות ששיעורי ה- x שלהן הם x_1 ו- x_2 .

ג. מצא עבור אלו ערכי m היחס בין מכפלת שיעורי ה- x של הנקודות לסכומם הוא חיובי.

ד. האם קיימים ערכי m המקיימים את התנאים של סעיף א' ושל סעיף ג' יחד?

11) נתונות שתי משפחות הפונקציות הבאות:

$f(x)=mx^2+mx+m$, $g(x)=x^2-4mx-5m-7$.

א. הוכח כי שתי הפונקציות וודאי לא יחתכו את ציר ה- x פעם אחת בלבד.

ב. הוכח כי לא קיימים ערכי m עבורם גרף הפונקציה $f(x)$ יהיה כולו מעל לגרף הפונקציה $g(x)$.

ג. מצא עבור אלו ערכי m גרפים נחתכים בשתי נקודות הנמצאות משמאל לציר ה- y .

12) לפניך המשוואה הריבועית הבאה: $x^2-(2m+1)x+m^2+3=0$.
מצא עבור אלו ערכים של m יהיו למשוואה שני שורשים ממשיים שונים x_1 ו- x_2
אשר מקיימים: $x_1^2+x_2^2=25$.

13) לפניך המשוואה הריבועית הבאה: $x^2-2x+m+2=0$.
מצא עבור אלו ערכים של m יהיו למשוואה שני שורשים ממשיים שונים x_1 ו- x_2
אשר מקיימים: $x_1-x_2=2$.

14) לפניך המשוואה הריבועית הבאה: $x^2-mx+m-1=0$.
האם קיים ערך m עבורו יהיו למשוואה שני שורשים ממשיים שונים x_1 ו- x_2
אשר מקיימים: $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=2$? נמק.

15) לפניך המשוואה הריבועית הבאה: $x^2-(m+5)x-m+6=0$.
מצא עבור אלו ערכים של m יהיו למשוואה שני שורשים ממשיים שונים x_1 ו- x_2
אשר מקיימים: $2x_1+3x_2=13$.

16) לפניך המשוואה הריבועית הבאה: $x^2-2mx+3m-2=0$.
מצא עבור אלו ערכים של m יהיו למשוואה שני שורשים ממשיים שונים x_1 ו- x_2
אשר מקיימים: $2x_1-3x_2=1$.

17) לפניך המשוואה הריבועית הבאה: $x^2-2x-m^2-2m=0$.
מצא עבור אלו ערכים של m יהיו למשוואה שני שורשים ממשיים שונים x_1 ו- x_2
אשר מקיימים: $x_1<2<x_2$.

18) לפניך המשוואה הריבועית הבאה: $2x^2-(m+3)x-m^2+3m-2=0$.
מצא עבור אלו ערכים של m יהיו למשוואה שני שורשים ממשיים שונים x_1 ו- x_2
אשר מקיימים: $x_1<x_2<3$.

19) לפניך המשוואה הריבועית הבאה: $2x^2+(m-6)x-m^2-3m=0$.
מצא עבור אלו ערכים של m יהיו למשוואה שני שורשים ממשיים שונים x_1 ו- x_2
אשר מקיימים: $-1\le x_1<x_2$.

20) לפניך המשוואה הבאה: $\left(m^2-2m\right)x^2+2\left(m^2-m-1\right)x+m^2-1=0$.
מצא עבור אלו ערכים של m יהיו למשוואה שני שורשים ממשיים שונים x_1 ו- x_2
אשר מקיימים: $x_1<-2<x_2$.

תשובות סופיות:

1) א. $-2<m<4$ ב. $m>4$, $m<-50$ ג. $m<-50$ ד. $m>4$.

2) א. $-3<m<5$, $m\neq -1$ ב. $m>-1$, $m<-4$ ג. $-1<m<5$
ד. המכפלה: $\frac{m+1}{m+1}=1=\frac{c}{a}$ ומכפלת מספרים הופכיים תמיד אחד.

3) א. מתקבל: $\Delta=\left(m+2\right)^2$ שתמיד אי-שלילי ולכן תמיד תהיה נקודת חיתוך עם ציר ה- x.
כאשר $A=0$ מתקבל ישר שחותך את ציר ה- x.
ב. התנאים: $\frac{c}{a}>-\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}>0$, $\frac{-b}{a}>0$ והפתרון: $m<2$.
ג. i. השורשים הם (בלי הגבלת הכלליות): $x_2=\frac{1}{2-m}$, $x_1=\frac{2}{6-m}$.
ג. ii. התנאי הוא $x_1>x_2$ (לפי הסימון לעיל) ואז הדרישה היא: $x_2<2<x_1$
והפתרון: $2<m<6$, $-5<m<-1.5$. במקרה ההפוך, $x_1<2<x_2$, לא יתקבל פתרון.

4) א. $m\neq 0$ ב. $-2<m<0$ ג. $-9<m<-1$ ד. $-2<m<-1$.

5) א. מתקבל: $\Delta=5k^2+10k+49$ שתמיד חיובי. ב. $\frac{1-3k}{k^2-4k-12}$. ג. $k_{1,2}=6,-2$
ד. הערכים $k_{1,2}=6,-2$ מאפסים את המכנה של הביטוי.

6) א. $-5<k<3$ ב. $-5<k<2$ ג. $k=-3$ ד. $x_1=3$, $x_2=-3$, $x_1\cdot x_2=-9<1$.

7) א. (i) מתקבל: $\Delta=\left(m+1\right)^2$ שמשמעו שתמיד יש חיתוך עם ציר ה- x. כאשר $m=-3$
מתקבל ישר שגם חותך את ציר ה- x. (ii) השורשים הם: $x_2=-\frac{2m+4}{m+3}$, $x_1=-1$.
(iii) חיסור יבוצע: $\frac{m+1}{m+3}=-1+\frac{2m+4}{m+3}$.
ב. $x_1^2+x_2^2=\frac{5m^2+22m+25}{\left(m+3\right)^2}$, $x_1^2-x_2^2=\frac{-3m^2-10m-7}{\left(m+3\right)^2}$.

ג. מתקבל האי שוויון ממעלה גבוהה הבא:

$$\frac{-3m^2-10m-7}{(m+3)^2}\cdot\frac{5m^2+22m+25}{(m+3)^2}=-\frac{(3m+7)(m+1)\cdot(5m^2+22m+25)}{(m+3)^4}>0$$

המורכב מביטויים חיוביים למעט $\left(-(3m+7)(m+1)\right)$. על כן יש לפתור את אי השוויון הבא: $(3m+7)(m+1)<0$ שפתרונו הוא: $-2\frac{1}{3}<m<-1$.

8) א. $m>-\frac{2}{3}$, $m<-1$, $m\neq-2$ ב. שורשי הפונקציה הם: $x_2=-\frac{m+1}{3m+2}$, $x_1=-\frac{1}{4}$

ג. $-\frac{6}{7}<m<-\frac{2}{3}$. ד. $m=-\frac{6}{7}$.

9) א. $k_{1,2}=6,-2$, $k_3=0$ ב. $-2<k<6$, $k\neq0$. ג. לא. מספרים נגדיים מקיימים:

$\frac{C}{A}<0$ וכאן תמיד יתקבל: $\frac{C}{A}=1>0$. הסבר נוסף – כאשר המקדם B הוא אפס אז יהיו למשוואה פתרונות נגדיים וכאן הערך $k=-6$ מאפסו אך מתקבלת משוואה ללא פתרון.

10) א. $-2<m<2$ ב. מספרים נגדיים מקיימים: $\frac{C}{A}<0$ וכאן תמיד יתקבל: $\frac{C}{A}=3>0$.

הסבר נוסף – כאשר המקדם B הוא אפס אז יהיו למשוואה פתרונות נגדיים וכאן הערך $m=0$ מאפסו אך מתקבלת משוואה ללא פתרון. ג. $m<-2$ ד. לא.

11) א. עבור $f(x)$ מתקבל: $\Delta=-3m^2$ ועל כן גרף תמיד ללא חיתוכים. כאשר $m=0$ הפונקציה מתלכדת עם ציר ה- x. עבור גרף הפרבולה $g(x)$ מתקבל:

$\Delta=16m^2+20m+28$ שתמיד חיובי ועל כן הגרף תמיד חותך את ציר ה- x בשתי נקודות. ב. אין פתרון לאי שוויון: $f(x)>g(x)$. ג. $m>1$, $m<-\frac{7}{6}$.

12) $m=3$.

13) $m=-2$.

14) לא, מכיוון שהפתרון $m=2$ נפסל כי הוא מקיים: $\Delta=0$ ולא $\Delta>0$ כנדרש עבור שני שורשים ממשיים שונים.

15) $m=0\,,\,1$.

16) $m=\frac{7}{3};\frac{7}{8}$.

17) $m<-2\ ;\ m>0$.

18) $-\sqrt{7}<m<\sqrt{7}$.

19) $-2-2\sqrt{3}\le m\le-2+2\sqrt{3}$.

20) $0<m<1\ ;\ 2<m<3$.