

בחינה באלגברה לינארית 1

דוד גינזבורג

מועד א - 2011

משך הבחינה שלוש שעות.

אין להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבוניס.

יש לענות על כל השאלות.

שאלה 1

להוכיח את המשפט הבא:

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F . תהי $K \subset V$ קבוצה סופית המכילה לפחות שני וקטורים. להוכיח כי K קבוצה תלויה אם ורק אם לפחות אחד מהוקטורים ב- K הינו צרוף לינארי של האחרים.

שאלה 2

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F . תהי $T : V \mapsto V$ העתקה לינארית. נגדיר:

$$U = \{S \in \text{Hom}_F(V, V) : S \circ T = 0\}$$

א. להוכיח כי U הינו תת מרחב של $\text{Hom}_F(V, V)$.

ב. אם $\dim V = 2$, מהו $\dim U$?

שאלה 3

יהיו V ו- W שני מרחבים וקטורים מעל שדה F . תהי $T : V \mapsto W$ העתקה לינארית. לפניכם שלוש טענות. עבור כל אחת מהם יש לקבוע אם היא נכונה או לא. אם הטענה נכונה יש להוכיחה, ואם לא יש להביא דוגמא נגדית. יש לנמק היטב. אין קשר בין הסעיפים השונים. א. אם $\dim V = 6$ וגם $\dim W = 4$ אז בהכרח $\ker T \neq \{0\}$.

ב. יהי q מספר רציונלי. נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3q+4 & 4q+4 & 5q+6 & 2q+8 \\ 0 & -1 & 1 & 8 \\ 5 & 9 & 7 & a \end{pmatrix}$. אז קיים

a רציונלי אחד ויחיד כך ש- $|A| = q$.

ג. תהי A מטריצה רבועית מסדר n ונניח כי $A = AA^t$. האם בהכרח $A^2 = A$?

שאלה 4

כמטריצה מעל הרציונלים, יש לקבוע את הדרגה של המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 2 & 1 \\ -1 & a & 5 & 2 \\ 10 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

בהצלחה!