

## בחינה באלגברה לינארית 1 א

### סמיון אלסקר, דוד גינזבורג

יש לענות על כל השאלות. אין להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבוניס. לכל השאלות ניקוד שווה. בשאלה בה יש יותר מסעיף אחד, אם לא צויין אחרת, לכל סעיף ניקוד שווה. יש לנמק היטב את דרך הפיתרון.

משך הבחינה: 3 שעות.

**שאלה 1:** נסמן ב  $P_2(x)$  את המרחב הוקטורי של אוסף כל הפולינומים מדרגה עד וכולל שתיים עם מקדמים ממשיים. תהי  $T : P_2(x) \rightarrow P_2(x)$  ההעתקה הלינארית המוגדרת על ידי  $T(p(x)) = \alpha p''(x) + \beta p'(x) + \gamma p(x)$ . מצאו את כל הערכים של  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  כך שיתקיים  $\ker T = \{0\}$ .

**שאלה 2:** תהי  $A$  מטריצה מסדר שלוש עם איברים בשדה  $\mathbb{Q}$ . נתונה המטריצה

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הוכיחו כי למערכת

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix}$$

יש פתרון לא טריביאלי אם ורק אם  $|A - B| = 0$ .

**שאלה 3:** יהי  $V$  מרחב וקטורי ויהיו  $W, W'$  ו  $W''$  שלושה תתי מרחב של  $V$  המקימים  $V = W \oplus W' = W \oplus W''$ . הוכיחו כי

$$\dim(W' \cap W'') \geq \dim V - 2\dim W$$

**שאלה 4:** יהי  $V$  מרחב וקטורי המוגדר מעל השדה  $\mathbb{R}$ . תהיינה  $T, S : V \rightarrow \mathbb{R}$  שתי העתקות לינאריות שאינן העתקות האפס. נניח שמתקיים התנאי שלכל  $v \in V$  אם  $T(v) \geq 0$  אז  $S(v) \geq 0$ . הוכיחו כי קים סקלר ממשי  $\alpha > 0$  המקיים  $T = \alpha S$ .

בהצלחה!