בחינה באלגברה לינארית 1

דוד גינזבורג

משך הבחינה שלוש שעות.
אין להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים.
יש לענות על כל השאלות.

שאלה 1
לכל $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbf{R}$ לחשב

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ c & d & e \\ f & g & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b \\ e & c & d \\ f & g & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b \\ d & e & c \\ f & g & g \end{vmatrix}$$

שאלה 2
יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי. יהיו U, W תתי מרחב של V. נניח כי קימת פונקציה $f : V \to \mathbf{R}$ המקימת $f(u) < f(w)$ לכל $0 \neq u \in U$ ולכל $0 \neq w \in W$. להוכיח כי

$$\mathrm{dim} W + \mathrm{dim} U \leq \mathrm{dim} V$$

שאלה 3
יהי $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ בסיס למרחב F^3. תהי $T : F^3 \to F^3$ העתקה לינארית המקימת

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -5 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

למצוא את הגרעין של T.

שאלה 4
תהי $A = (a_{i,j})$ מטריצה מסדר n המוגדרת באופן הבא. יהי c מספר ממשי. אם $i + j$ הינו מספר זוגי אז $a_{i,j} = c$ ואם $i + j$ איזוגי אז $a_{i,j} = 0$. למצוא k מינימלי כך שהקבוצה $\{A, A^2, \ldots, A^k\}$ תהיה תלויה לינארית.

שאלה 5
תהי $T : Mat_{2\times2}(\mathbf{Q}) \to Mat_{2\times2}(\mathbf{Q})$ העתקה לינארית המקימת $T(AB) = T(A)T(B)$ לכל $A, B \in Mat_{2\times2}(\mathbf{Q})$. להוכיח כי $T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \neq I$.