בחינה באלגברה לינארית 1

דוד גינזבורג

מועד ב-2011

משך הבחינה שלוש שעות. הניקוד על כל שאלה שווה. אין להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים. יש לענות על כל השאלות. אם לא נאמר אחרת, אין קשר בין הסעיפים השונים.

שאלה 1

להוכיח את המשפט הבא:
תהי $Ax = b$ מערכת משוואות לינארית. להוכיח כי למערכת יש פתרון אם ורק אם דרגת המטריצה המצומצמת של המערכת שווה לדרגת המטריצה המורחבת של המערכת.

שאלה 2

א. תהי $T : \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbf{R}) \mapsto \mathbf{R}$ ההעתקה הלינארית המוגדרת באופן הבא. אם $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbf{R})$ אז $T(A) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{i,j}$. למצוא בסיס עבור $\ker T$.
ב. תהי $\{v_1, \ldots, v_m\}$ קבוצה בלתי תלויה של וקטורים ב- $\mathbf{R}^n$. נסתכל על קבוצה זו כעל קבוצת וקטורים במרחב $\mathbf{C}^n$. האם במרחב זה , קבוצת וקטורים זו הינה בהכרח בלתי תלויה?

שאלה 3

א.(15 נקודות) יהי $F = \mathbf{Z}_5$ השדה הסופי עם חמישה איברים. לרשום מערכת משוואות הומוגנית שמרחב הפתרונות שלה נתון על ידי

$$Sp\{(1,2,3);\ (1,1,0);\ (1,1,1)\}$$

ב.(10 נקודות) למצוא את כל המספרים השלמים b, a ו- c כך שהדטרמיננטה הבאה

$$\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & a+c \end{vmatrix}$$

תתחלק ללא שארית בשמונה.

שאלה 4

יהי V מרחב וקטורי ממימד n. תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית. להוכיח כי לכל $k \geq n$ החתוך של $kerT^k$ עם ImT^k הינו אפס.

בהצלחה!