Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический
университет имени Н.Э.Баумана (национальный
исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

Дисциплина:
«Математическая статистика»

Лабораторная работа №2.
Интервальные оценки
Вариант 15

Студент: Рязанов М.С.
Группа: ИУ7-62Б
Преподаватель: Власов П. А.

Москва, 2020 г.

Содержание

1 Задание

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Содержание работы

- 1.Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
  - а)вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\overrightarrow{x_n}))$ и $S^2(\overrightarrow{x_n})$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
  - б)вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\overrightarrow{x_n}), \overline{\mu}(\overrightarrow{x_n})$ для γ - доверительного интервала для математического ожидания MX;
  - в)вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\overrightarrow{x_n}), \overline{\sigma}^2(\overrightarrow{x_n})$ для γ - доверительного интервала для дисперсии DX;
- 2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
- 3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объема выборки из индивидуального варианта
  - а)на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\overrightarrow{x_N})$,также графики функций $y = \hat{\mu}(\overrightarrow{x_n}), y = \underline{\mu}(\overrightarrow{x_n})$ и $y = \overline{\mu}(\overrightarrow{x_n})$ как функций объема n выборки,где n изменяется от 1 до N;
  - б)на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\overrightarrow{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\overrightarrow{x_n}), z = \underline{\sigma}^2(\overrightarrow{x_n})$ и $z = \overline{\sigma}^2(\overrightarrow{x_n})$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

2 Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Рассмотрим вторую основную задачу математической статистики: дана случайная величина X, закон рапределения которой известен с точностью до вектор $\overrightarrow{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_r)$ неизвестных параметров; требуется оценить значение вектора $\overrightarrow{\theta}$. Для упрощения дальнийших рассуждений будем считать, что $r = 1$ и

$$\overrightarrow{\theta} = (\theta_1) = (\theta) \in \mathbb{R}^1$$

то есть закон распределения случайной величины X зависит от одного скалярного неизвестного параметра θ.

Интервальной оценкой с коэффициентом доверия γ(γ-доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}(\overrightarrow{X})$ и $\overline{\theta}(\overrightarrow{X})$ таких, что

$$P\left\{\underline{\theta}(\overrightarrow{X}) < \theta < \overline{\theta}(\overrightarrow{X})\right\} = \gamma$$

То есть γ-доверительная интервальная оценка для параметра θ - такой интервал $(\underline{\theta}(\overrightarrow{X}), \overline{\theta}(\overrightarrow{X}))$ со случайными границами, который накрывает теоретическое значение этого параметра с вероятностью γ. Поскольку границы интервала являются случайными величинами, то для различных реализаций случайной выборки $\overrightarrow{X}$ статистики $\underline{\theta}(\overrightarrow{X}), \overline{\theta}(\overrightarrow{X})$ могут принимать различные значения.

Доверительным интервалом с коэфициентом доверия γ (γ-доверительным интервалом) называют интервал $(\underline{\theta}(\overrightarrow{x}), \overline{\theta}(\overrightarrow{x}))$, отвечающий выборочным значениям статистик $\underline{\theta}(\overrightarrow{X}), \overline{\theta}(\overrightarrow{X})$.

3 Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Пусть $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, требуется построить доверительный интервал уровня γ для параметров распределения.

При незвестных μ и σ, формулы для нахождения верхней и нижней границы доверительного интервала уровня γ выглядят следующим образом:

Математическое ожидание:

$$\underline{\mu}(\overrightarrow{X}) = \overline{X} - \frac{S(\overrightarrow{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{\mu}(\overrightarrow{X}) = \overline{X} + \frac{S(\overrightarrow{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

Дисперсия:

$$\underline{\sigma}^2(\overrightarrow{X}) = \frac{(n-1)S^2(\overrightarrow{X})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}$$

$$\overline{\sigma}^2(\overrightarrow{X}) = \frac{(n-1)S^2(\overrightarrow{X})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}$$

Где n - объем выборки, $\overline{X}$ - выборочное среднее, $S^2(\overrightarrow{X})$ - исправленная выборочная дисперсия, символы t с индексами обозначают квантили соответствующего уровня распределения Стьюдента с числом степеней свободы $n-1$, символы h с индексами обозначают квантили соответствующего уровня распределения хи-квадрат с числом степеней свободы $n-1$.

4 Текст программы

```
function lab2()
    % Выборка
    X = [-2.79,-3.01,-4.07,-2.85,-2.43,-3.20,-3.72,-4.27,-5.48,-2.38,
    -4.69,-4.34,-5.08,-5.01,-4.08,-4.20,-4.74,-1.88,-3.25,-2.78,-3.56,
    -3.54,-3.79,-3.18,-5.08,-4.30,-2.86,-2.45,-3.08,-3.22,-2.76,-3.20,
    -3.33,-4.91,-4.06,-3.81,-3.96,-3.65,-3.77,-4.60,-5.21,-2.67,-1.95,
    -2.43,-1.73,-2.50,-3.96,-3.75,-2.70,-4.26,-3.42,-4.07,-4.74,-3.00,
    -4.37,-5.42,-5.00,-4.08,-2.46,-4.33,-4.08,-3.72,-4.09,-2.96,-3.71,
    -1.51,-3.70,-6.48,-4.26,-4.39,-3.16,-4.63,-2.66,-2.22,-4.79,-2.46,
    -3.69,-3.35,-2.32,-4.17,-3.85,-4.93,-2.05,-3.15,-3.49,-5.70,-2.53,
    -3.85,-4.32,-3.37,-3.98,-3.74,-5.28,-2.56,-3.21,-3.10,-3.78,-3.36,
    -3.32,-2.59,-2.45,-3.34,-3.20,-4.14,-4.00,-4.79,-4.02,-4.58,-4.45,
    -3.69,-4.53,-3.98,-4.51,-4.44,-3.78,-4.24,-4.00,-2.46,-2.58,-4.04];

    % Объем выборки
    N = length(X);

    % Оценка математического ожидания
    mu = mean(X)
    s_sqr = std(X, 0)^2 % Исправленная выборочная дисперсия

    % Функция определения доверительного интервала для мат. ожидания
    % Аргументы: 1. Выборочное среднее 2. КОС
    % 3. Объем выборки
    % 4. Уровень доверительного интервала
    % Результат: 1. Нижняя 2. Верхняя границы
    function [odown, oup] = exp_value_estimate(mu, s, n, gamma)
        q = tinv((1 + gamma) / 2, n - 1);
        odown = mu - s * q / sqrt(n);
        oup = mu + s * q / sqrt(n);
    end

    % Функция определения доверительного интервала для дисперсии
    % Аргументы: 1. Исправленная выборочная дисперсия.
    % 2. Объем выборки
    % Уровень3. дов. интервала
    % Результат: 1. Нижняя 2. Верхняя границы
    function [odown, oup] = std_sqr_estimate(s_sqr, n, gamma)
        q1 = chi2inv((1 + gamma) / 2, n-1);
        q2 = chi2inv((1 - gamma) / 2, n-1);
        tmp = (n - 1) * s_sqr;
        odown = tmp / q1;
        oup = tmp / q2;
    end

    % Уровень доверительного интервала
    gamma = 0.9;

    n = []; % Массив размеров выборки
    mu_n = []; % Значения реднегос в зависимости от объема выборки
    mu_down = []; % Нижняя граница дов. интервала для мат. ожидания
    mu_up = []; % Верхняя граница довинтервала.

```

```
    s_n = []; % Значения испр. выборочной дисперсии от объема выборки
    s_down = []; % Нижня граница дов. интервала для дисперсии
    s_up = []; % Верхняя граница

    % Вычисление значений для разных объемов выборки
    for i=1:N
        n(i) = i;
        mu_n(i) = mean(X(1:i));
        sigma = std(X(1:i), 0);
        s_n(i) = sigma^2;

        [mu_down(i), mu_up(i)] = exp_value_estimate(mu_n(i), sigma, i, gamma
    );
        [s_down(i), s_up(i)] = std_sqr_estimate(s_n(i), i, gamma);
    end


    % График мат. ожиданий последняя( пара - значение для всей выборки)
    figure(1)
    plot(n, mu_n, n, mu_down, n, mu_up, n, mu * ones(1, N));
    xlabel('n');
    ylabel('y');
    legend({'$y = \hat{\mu}(\overrightarrow{x}_n)$', ...
        '$y = \underline{\mu}(\overrightarrow{x}_n)$', ...
        '$y = \overline{\mu}(\overrightarrow{x}_n)$', ...
        '$y = \hat{\mu}(\overrightarrow{x}_N$)'},...
        'Location','northeast', 'Interpreter', 'latex', 'Fontsize', 14);


    % График дисперсий последняя( пара - значение для всей выборки)
    figure(2)
    plot(n, s_n, n, s_down, n, s_up, n, s_sqr * ones(1, N));
    xlabel('n');
    ylabel('z');
    legend({'$z = S^2(\overrightarrow{x}_n)$', ...
        '$z = \underline{\sigma}^2(\overrightarrow{x}_n)$',...
        '$z = \overline{\sigma}^2(\overrightarrow{x}_n)$',...
        '$z = S^2(\overrightarrow{x}_N)$'}, ...
        'Location', 'northeast', 'Interpreter', 'latex', 'Fontsize', 14);
end
```

5 Результат расчетов для выборки из индивидуального варианта

Оценка математического ожидания:

$$\hat{\mu} = -3.6762$$

Исправленная выборочная дисперсия:

$$S^2 = 0.8664$$

На рисунке 1 изображены графики верхней и нижней границ доверительного интервала для математического ожидания, а также значение точечной оценки мат. ожидания в зависимости от объема выборки.

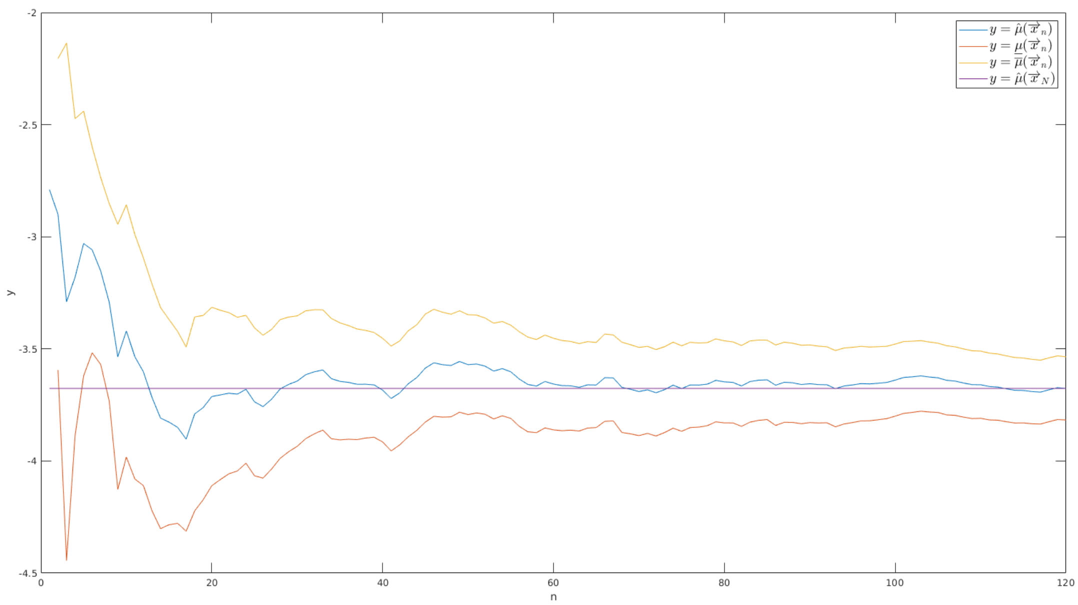

Рисунок 1: Оценка математического ожидания

На рисунке 2 изображены графики верхней и нижней границ доверительного интервала для дисперсии, а также значение точечной оценки дисперсии в зависимости от объема выборки.

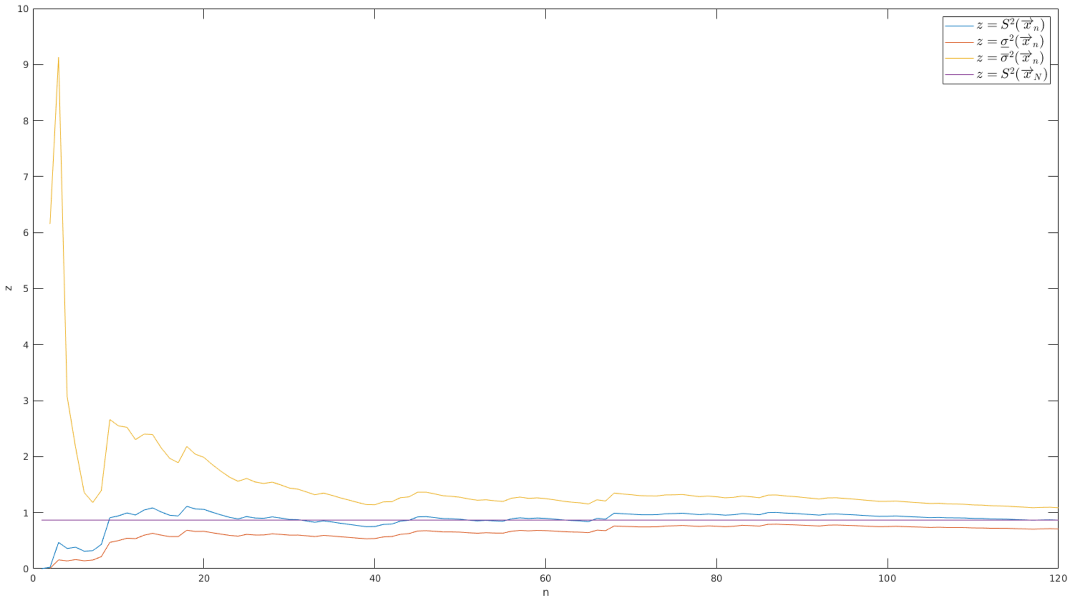

Рисунок 2: Оценка дисперсии

Значения интервальных оценок приведены для доверительного интервала уровня 0.9.