Рубежный контроль №1

Переписывание

19.11.2021

Нечитайло Д.В. ИУ7-66Б

Вариант: 11

Листов в работе: 5

Задача 1

Непрерывная СВ X имеет плотность

$$f_X(x) = \frac{3x^2}{\theta(1+x^3)^{1/\theta+1}}, \quad x \geq 0, \text{ где}$$

$\theta > 0$ – неизвестно. Для оценки θ используется статистика

$$\hat{\theta}(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1+X_i^3), \text{ где}$$

$\vec{X} = (X_1 .. X_n)$ – случ. выб. из ген. совокуп. X. Является ли оценка $\hat{\theta}(\vec{X})$

а) несмещенной

б) эффективной по Рао-Крамеру

Решение:

$\hat{\theta}(x)$ несмещенная тогда, когда $M[\hat{\theta}] = \theta$

$$M[\hat{\theta}] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1+X_i^3)\right]$$

~~Сделаем замену~~

$$\cancel{Y_i = \ln(1+X_i^3)}$$

$$\cancel{M[\hat{\theta}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MY_i}$$

$$\cancel{MY = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx =}$$

Пусть $Y = g(X) = \ln(1+X^3)$

$$g^{-1}(Y) = \sqrt[3]{e^Y - 1}$$

$$f_X(g^{-1}(Y)) = \frac{3(e^Y-1)^{2/3}}{\theta(e^Y)^{1/\theta+1}}$$

$$|(g^{-1})'(Y)| = \frac{e^Y}{3(e^Y-1)^{2/3}}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\theta e^{y/\theta}}, \quad y \geq 0$$

$$MY = \frac{1}{\theta}\int_0^{\infty} \frac{1}{e^{y/\theta}}\, y\,dy = -(y+\theta)e^{-\frac{y}{\theta}}\Big|_0^{\infty} = \theta$$

Т.о. $M[\hat{\theta}] = M\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\cdot n\theta = \theta$

Оценка $\hat{\theta}(\vec{x})$ несмещенная

Задача 2

Для определение стойкости резца из сплава Т15К6 были испытаны $n=11$ образцов при скорости резание 0.33 м/с и подаче 0.12 мм/об, в результате чего получены следующие характеристики времени работы резца до затупливания: $\overline{x} = 37$ мин, $S(\vec{x}) = 3.45$ мин. Построить доверительный интервал уровня $\gamma = 0.9$ для среднего времени работы резца до затупливания

Решение:

$n = 11$

$\overline{x} = 37$ мин

$S(\vec{x}) = 3.45$ мин

$\gamma = 0.9$

Построим доверительный интервал для среднего времени работы (мат ожид m), при неизвестной дисперсии по формуле:

$$\overline{X} - t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \text{ где}$$

t_γ – квантиль уровня $1-\gamma$ для степени свободы $n-1$ по расп. Стьюдента

Запишем центральную статистику:

$$T(\vec{x}, m) = \frac{m - \overline{x}}{S(\vec{x}_n)}\sqrt{n} \sim St(n-1) \sim St(10)$$

$$P\{t_{\alpha_1} < T(\vec{x}, m) < t_{\alpha_2}\} = \gamma$$

$$P\{-t_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{m - \overline{x}}{S(\vec{x})}\sqrt{n} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}\} = \gamma$$

$$P\{\overline{x} - \frac{S(\vec{x}) \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} < m < \overline{x} + \frac{S(\vec{x}) \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\} = \gamma$$

$$\underline{m}(\vec{x}) = \overline{x} - \frac{S(\vec{x}) \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{m}(\vec{x}) = \overline{x} + \frac{S(\vec{x}) \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$\frac{1+\alpha}{2} = \frac{1+0,9}{2} = 0,95$

$t_{0,95} = \{n = 10\} = 2.26$

$\underline{m}(\vec{x}) = 37 - \frac{3,45 \cdot 2,26}{\sqrt{11}} = 37 - \frac{3,45 \cdot 2,26}{3,31} = 34,65$

$\overline{m}(\vec{x}) = 37 + \frac{3,45 \cdot 2,26}{\sqrt{11}} = 37 + \frac{3,45 \cdot 2,26}{3,31} = 39,35$

$m \in [34,65 ; 39,35]$

5