Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический
университет имени Н.Э.Баумана (национальный
исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

Дисциплина:
«Математическая статистика»

Домашняя работа №1.
Вариант 15

Студент: Рязанов М.С.
Группа: ИУ7-62Б
Преподаватель: Власов П. А.

Москва, 2020 г.

Задача 1 (Предельные теоремы теории вероятностей)

В Москве рождается в год около 122500 детей. Считая вероятность рождения мальчика равной 0.51, найти вероятность того, что число мальчиков, которые родятся в Москве в текущем году, превысит число родившихся девочек не менее, чем на 1500.

По условию случайная величина X - число родившихся мальчиков, имеет биномиальное распределение с вероятностью "успеха"$p = 0.51$ и числом испытаний $n = 122500$.

Необходимо найти вероятность выполнения следующего неравенства:

$$X - (122500 - X) \geqslant 1500 \tag{1}$$

Упростив 1 получим

$$X \geqslant 62000 \tag{2}$$

Следовательно необходимо найти вероятность:

$$P\{62000 \leqslant X \leqslant 122500\}$$

Так как вероятность рождения мальчика постоянна и число испытаний велико, то согласно интегральной теореме Муавра-Лапласа:

$$P\{62000 \leqslant X \leqslant 122500\} \approx \Phi(x2) - \Phi(x1)$$

где

$$x2 = \frac{122500 - 122500 \cdot 0.51}{\sqrt{122500 \cdot 0.51 \cdot 0.49}} = 343, x1 = \frac{62000 - 122500 \cdot 0.51}{\sqrt{122500 \cdot 0.51 \cdot 0.49}} = -2.70$$

Искомая вероятность: $0.5 + 0.4965 = 0.9965$

Ответ: 0.9965

Задача 2. (метод моментов)

С использованием метода моментов для случайной выборки $\overrightarrow{X} = (X_1, .., X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки указанных параметров заданного закона распределения.

Закон распределения

$f_X(x) = \frac{1}{2^{\theta/2}\Gamma(\theta/2)} x^{\theta/2-1} e^{-x/2}, x > 0$

Решение

Случайная величина X имеет гамма-распределение с параметрами $\lambda = \frac{1}{2}$ и $\alpha = \frac{\theta}{2}$. Закон распределения случайной величины содержит одну неизвестную, поэтому система уравнений метода моментов будет содержать 1 уравнение, записанное для момента 1-го порядка.

$M[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$, для $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$

В нашем случае: $M[X] = \frac{\theta/2}{1/2} = \theta$

Уравнение: $\theta = \overline{X}$

Ответ: $\hat{\theta} = \overline{X}$

Задача 3. Метод максимального правдоподобия

С использованием метода максимального правдоподобия для случайной выборки $\overrightarrow{X} = (X_1, .., X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки параметров заданного закона распределения. Вычислить выборочные значения найденных оценок, для выборки $\overrightarrow{x_5} = (x_1, .., x_5)$.

Закон распределения

$f_X(x) = \frac{4\theta^3}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-\theta^2 x^2}$

Выборка

$\overrightarrow{x_5} = (1, 4, 7, 2, 3)$

Решение

Функция правдоподобия будет иметь вид:

$$L(\overrightarrow{X}, \theta) = \frac{4\theta^3}{\sqrt{\pi}} X_1^2 e^{-\theta^2 X_1^2} \cdot ... \cdot \frac{4\theta^3}{\sqrt{\pi}} X_n^2 e^{-\theta^2 X_n^2}$$

$$L(\overrightarrow{X}, \theta) = (\frac{4\theta^3}{\sqrt{\pi}})^n \cdot X_1 \cdot .. \cdot X_n \cdot e^{-\theta^2 X_1^2} \cdot .. \cdot e^{-\theta^2 X_n^2}$$

Логарифм функции правдоподобия:

$$lnL(\overrightarrow{X}, \theta) = n(ln4 + 3ln\theta - \frac{1}{2}ln\pi) + 2\sum_{i=1}^{n} lnX_i - \theta^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Воспользуемся необходимым условием экстремума, для этого найдем производную функции правдоподобия по θ.

$$\frac{\partial lnL(\overrightarrow{X}, \theta)}{\partial \theta} = \frac{3n}{\theta} - 2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Решим уравнение

$$\frac{3n}{\theta} - 2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0$$

$$\hat{\theta} = \pm \sqrt{\frac{3n}{2\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}}$$

Воспользуемся достаточным условием локального максимума(вторая производная в стационарной точке должна быть отрицательная).

$$\frac{\partial^2 lnL(\overrightarrow{X}, \theta)}{\partial^2 \theta} = -\frac{3n}{\theta^2} - 2\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Подставляя полученные выше корня, в обоих случаях получаем:

$$-4\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Что меньше нуля, значит обе корня являются подходящим решением.

Вычислим выборочные значения найденных оценок:

$$\pm\frac{3n}{2\cdot(1+4^2+7^2+2^2+3^3} \approx \pm 0.0949$$

Ответ: $\hat{\theta} = \pm\sqrt{\frac{3n}{2\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}}$, ± 0.0949

Задача 4. (доверительные интервалы)

По результатам $n = 10$ измерений прибором, не имеющим систематической ошибки, получены следующие отклонения емкости конденсатора от номинального значения(пФ):

$5.4, -13.9, -11.0, 7.2, -15.6, 29.2, 1.4, -0.3, 6.6, -9.9$

Найти 90%-ые доверительные интервалы для среднего значения отклонения емкости от номинального значения и ее среднего квадратичного отклонения.

Решение:

Пусть a - точно значение отклонения емкости конденсатора от номинального значения, пФ. Обозначим через ε ошибку измерений прибора, пФ. Из условия $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ где $M[\varepsilon] = 0$, т.к систематическая ошибка равна 0, σ - среднеквадратичное отклонение ошибки измерений прибора, которое неизвестно.

Тогда $X = a + \varepsilon$ - случайна величина, принимающая значения, равные отклонениям емкости конденсатора от номинального значения. Из свойств нормальных случайных величин следует, что $X \sim N(a, \sigma^2)$. Отсюда среднеквадратичное отклонение отклонений емкости равно среднеквадратичному ошибки измерений.

Таким образом требуется построить 90%-ые доверительные интервалы для математатического ожидания(а) и среднеквадратичного отклонения(σ)

1. Доверительный интервал для математического ожидания

Поскольку дисперсия случайной величины X неизвестна, используем центральную статистику

$$T(\overrightarrow{X}, a) = \frac{a - \overline{X}}{S(\overrightarrow{X})}\sqrt{n} \sim St(n-1)$$

Тогда

$$\gamma = P\left\{t_{\frac{1-\gamma}{2}} < \frac{a - \overline{X}}{S(\overrightarrow{X})}\sqrt{n} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\}$$

В силу нечетности функции плотности распределения Стьюдента $t_{\frac{1-\gamma}{2}} = -t_{\frac{1+\gamma}{2}}$

$$\gamma = P\left\{-t_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{a - \overline{X}}{S(\overrightarrow{X})}\sqrt{n} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\}$$

$$\gamma = P\left\{\overline{X} - \frac{S(\overrightarrow{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + \frac{S(\overrightarrow{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\right\}$$

В качестве нижней и верхней границ γ-доверительного интервала для параметра a могут быть использованы стастики:

$$\underline{a}(\overrightarrow{X}) = \overline{X} - \frac{S(\overrightarrow{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{a}(\overrightarrow{X}) = \overline{X} + \frac{S(\overrightarrow{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

Вычисления:

$$\frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0.9}{2} = 0.95$$

Из таблицы квантилей для распределения Стьюдента с 10 - 1 $=$ 9 степеням свободы $t_{0.95} = 1.833$

$$\overline{X} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{10} X_i}{10} = -0.09$$

$$S^2(\overrightarrow{X}) = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(X_i - \overline{X})^2 = 181.6$$

$$\frac{S(\overrightarrow{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{181.6}\cdot 1.833}{\sqrt{10}} \approx 7.811$$

Оценки: $\underline{a} = -0.09 - 7.811 = -7.901$, $\overline{a} = -0.09 + 7.811 = 7.721$

2. Доверительный интервал для среднеквадратичного отклонения

Используем центральную статистику:

$$T(\overrightarrow{X}, \sigma^2) = \frac{S^2(\overrightarrow{X})}{\sigma^2}(n-1) \sim \chi^2(n-1)$$

Тогда:

$$\gamma = P\left\{h_{\frac{1-\gamma}{2}} < \frac{S^2(\overrightarrow{X})}{\sigma^2}(n-1) < h_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\}$$

$$\gamma = P\left\{\frac{1}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}} < \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2(\overrightarrow{X})} < \frac{1}{h_{\frac{1-r}{2}}}\right\} = P\left\{\frac{(n-1)S^2(\overrightarrow{X})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2(\overrightarrow{X})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}\right\}$$

Отсюда:

$$\underline{\sigma^2}(\overrightarrow{X}) = \frac{(n-1)S^2(\overrightarrow{X})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}$$

$$\overline{\sigma^2}(\overrightarrow{X}) = \frac{(n-1)S^2(\overrightarrow{X})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}$$

Вычисления:

Из таблицы квантилей для распределения хи-квадрат с 9 степеням свободы $h_{0.95} = 16.92, h_{0.05} = 3.325$

$$\underline{\sigma^2} = \frac{181 \cdot 9}{16.92} \approx 96.27$$

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{181 \cdot 9}{3.325} \approx 489.92$$

Оценки: $\underline{\sigma} = \sqrt{96.27} = 9.81, \overline{\sigma} = \sqrt{489.92} = 22.13$

Ответ:

90%-ый доверительный интервал для:

- Среднего отклонения емкости - $(-7.901; 7.721)$
- Среднеквадратичного отклонения отклонения емкости - $(9.81; 22.13)$