РК1 Переписывание

30. 06.21

Шиленков

Алексей

ИУ7-65Б

Вариант N 21

30.06.21

Листов в работе: 5

№1.
Непрерывная сл. вел. U имеет плотность распределения $f_U(u) = \frac{u^6}{\Gamma(7)\theta^7} e^{-u/\theta}$, $u \geq 0$

где значение $\theta > 0$ неизвестно.
Для оценки параметра θ используем статистику $\hat{\theta}(\vec{U}) = \frac{1}{7}\overline{U}$
где $\vec{U} = (U_1, \dots, U_n)$ - сл. выборка из ген. совок. U. Является ли оценка $\hat{\theta}(\vec{U})$. а) несмещенной? б) эффективной по Рао-Крамеру?

Решение:

а) $$M[\hat{\theta}(\vec{U})] = M\left[\frac{1}{7n}\sum_{i=1}^{n} U_i\right] = \left\{\begin{matrix}\text{св-во} \\ \text{мат.} \\ \text{ожидан}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{7n}\sum_{i=1}^{n} MU_i = (*)$$

$$MU = \int_{-\infty}^{+\infty} u f(u)\,du = \int_{0}^{+\infty} \frac{u^7}{\Gamma(7)\theta^7} e^{-u/\theta}\,du =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(7)\theta^7}\int_{0}^{+\infty} u^7 e^{-u/\theta}\,du = \left\{\begin{matrix} t = u/\theta \\ dt = \frac{du}{\theta}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(7)\theta^7}\int_{0}^{+\infty} \theta^7 \cdot t^7 e^{-t}\,\theta\,dt = \frac{\theta}{\Gamma(7)} \cdot \int_{0}^{+\infty} t^7 e^{-t}\,dt =$$

$$= \frac{\theta}{\Gamma(7)} \cdot \Gamma(8) = 7\theta$$

$$(*) = \frac{1}{7n} \cdot n \cdot 7\theta = \theta \Rightarrow \text{несмещенная.}$$

б) $L(\vec{u},\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(u_i)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i^6}{\Gamma(7)\,\theta^7}e^{-u_i/\theta}\right)=$

$$=\frac{1}{\Gamma(7)^n\,\theta^{7n}}\left(\prod_{i=1}^{n}u_i^6\right)e^{-\sum u_i/\theta}$$

$$Ln(L(\vec{u},\theta))=6\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)-n\ln(\Gamma(7))-7\ln\theta+$$

$$+\left(-\sum_{i=1}^{n}u_i/\theta\right)$$

$$\frac{\partial \ln L(L(\vec{u},\theta))}{\partial\theta}==0-\frac{7n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}u_i$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(-//-)}{\partial\theta^2}=\frac{7n}{\theta^2}-\frac{+2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}u_i$$

$$I(\theta)=M\left(-\frac{\partial Ln(L(\vec{u},\theta))}{\partial\theta^2}\right)=-\left(\frac{7n}{\theta^2}-\frac{2}{\theta^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}(7\theta)\right)$$

$$I(\theta)=-\left(\frac{7n}{\theta^2}-\frac{2\cdot7n}{\theta^3}\right)=\frac{7n}{\theta^2}$$

$$M(u^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}u^2f(u)\,du=\int_{0}^{+\infty}u^2\frac{u^6}{\Gamma(7)\theta^7}e^{-u/\theta}\,du=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(7)\,\theta^7}\int_{0}^{+\infty}u^8e^{-u/\theta}\,du=\left\{\begin{array}{l}t=u/\theta\\ dt=\frac{du}{\theta}\end{array}\right\}=$$

$$\frac{1}{\Gamma(7)\,\theta^7}\int_{0}^{+\infty}\theta^8\cdot t^8\cdot e^{-t}\,\theta\,dt=\frac{\theta^2}{\Gamma(7)}\cdot\Gamma(9)=9\cdot7\cdot\theta^2$$

$$D\left[\hat{\theta}(\vec{u})\right]=D\left[\frac{1}{7n}\sum_{i=1}^{n}u_i\right]=\left\{u_i \text{ нез. сл. вел}\right\}=\frac{1}{7n}\sum_{i=1}^{n}Du_i=\frac{1}{7}\cdot Du$$

$$Du=M(u^2)-(Mu)^2=8\cdot7\theta^2-7\cdot7\theta^2=7\theta^2$$

$$D\left[\hat{\theta}(\vec{u})\right]=\frac{1}{7}\cdot7\theta^2=\theta^2$$

$$\frac{1}{}=\frac{\theta^2}{7}\neq\theta^2$$

$$D[\hat{\theta}(\vec{u})] = D\left[\frac{1}{7n}\sum_{i=1}^{n} u_i\right] = \left\{ u_i \text{ нез. ед. вел.} \right\} =$$

$$= \frac{1}{7^2 n^2}\sum_{i=1}^{n} D u_i = \frac{1}{7^2 n} D u$$

$$D u = M(u^2) - (M u)^2 = 8\cdot 7\theta^2 - 7\cdot 7\theta^2 =$$

$$= 7\theta^2$$

$$D[\hat{\theta}(\vec{u})] = \frac{1}{7^2 n}\cdot 7\theta^2 = \frac{\theta^2}{7n}$$

$I(\theta)D(\hat{\theta}) = 1$ — эффективна по Рао-Крамеру

Ответ: а) несмещённая

б) эффективна по Рао-Крамеру.

(Решение №2 далее)

№2.

Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$ где значения m и σ^2 неизвестны.
Построить для m доверительный интервал уровня $\gamma = 0{,}8$, если после $n = 31$ испытаний получены значения $\overline{X} = 64.25$
$S(\vec{X}) = 4.96$

Решение:

$n = 31;$ $\Rightarrow$ оценить m $\gamma = 0{,}8.$
$\overline{X} = 64.25;$
$S(\vec{X}) = 4.96;$
$m - ?$
$\sigma^2 - ?$

Используем статистику

$$T(\vec{X}) = \frac{m - \overline{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim St(n-1)$$

$$\gamma = P\left\{ q_{-0,9} < \frac{m - \overline{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} < q_{0,9} \right\} = 0{,}8$$

$$q_{0,9}^{St(30)} = 1{,}310;$$

$$P\left\{ \overline{X} - \frac{q_{0,9} \cdot S(\vec{X})}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + \frac{q_{0,9} \cdot S(\vec{X})}{\sqrt{n}} \right\} \Leftrightarrow$$

$$P\left\{ 64.25 - \frac{1{,}310 \cdot 4{,}96}{\sqrt{31}} < m < 64.25 + \frac{1{,}310 \cdot 4{,}96}{\sqrt{31}} \right\}$$

$$P\left\{ 63{,}083 < m < 65{,}417 \right\}$$

Ответ: $(63.083, 65.417)$