РК1 Переписывание 19.06.2021

Гаврилов Дмитрий Андреевич

ИУ7-66

Вариант № 29

Общее число листов: 5

19.06.2021

№1 Непрерывная случайная величина $Z$ имеет плотность распределения $\cancel{f(x)}$ $f_Z(z) = \dfrac{3z^2}{\theta(1+z^3)^{1/\theta+1}}$, $z \geqslant 0$,

где значение $\theta > 0$ неизвестно. Для оценки параметра $\theta$ используется статистика $\theta(\vec{z}) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln(1+z_i^3)$,

где $\vec{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ - случайная выборка из генеральной совокупности $Z$. Является ли оценка $\hat{\theta}(\vec{Z})$ а) несмещённой. б) эффективной по Рао-Крамеру?

а) оценка является несмещённой, если $M\hat{\theta}(\vec{Z}_n) = \theta$

Пусть $X := g(Z) = \ln(1+Z^3)$

$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{e^x - 1}$ $\quad f_Z(g^{-1}(x)) = \dfrac{3(e^x-1)^{2/3}}{\theta(e^x)^{1/\theta+1}}$

$|(g^{-1})'(x)| = \dfrac{e^x}{3(e^x-1)^{2/3}}$

$f_X(x) = \dfrac{1}{\theta e^{x/\theta}}$, $x \geqslant 0$

$$MX = \frac{1}{\theta}\int\limits_0^\infty \frac{1}{e^{x/\theta}}\, x\, dx = -(x+\theta)e^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_0^\infty = \theta$$

Т.о. $M\hat{\theta}(\vec{Z}_n) = M\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\theta = \theta$

<u>Оценка и является несмещённой</u>

б) Чтобы найти проверить эфф-ть по Рао-Крамеру, нужно найти показатель эффективности, который равен

$$e(\hat{\lambda}) = \frac{1}{I(\lambda) D[\hat{\lambda}]} \cdot I = n I_0(\lambda), \text{ где}$$

$$I_0(\lambda) = M\left\{\left[\frac{\partial \ln f(X,\lambda)}{\partial \lambda}\right]^2\right\};$$

$$DX = M[X^2] - (MX)^2$$

$$DX = \frac{1}{\Theta}\int_0^\infty \frac{x^2}{e^{x/\Theta}}\,dx - \Theta = -(x^2 + 2\Theta x + 2\Theta^2)e^{-\frac{x}{\Theta}}\Big|_0^\infty - \Theta^2 =$$

$$= 2\Theta^2 - \Theta^2 = \Theta^2;$$

$$D\hat{\Theta}(\overrightarrow{Z_n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n} D(\bar{X}_i) = \frac{\Theta^2}{n}$$

$$\left(\frac{\partial \ln f_X(x)}{\partial \Theta}\right)^2 = \left(-\frac{1}{\Theta} + \frac{\bar{X}}{\Theta^2}\right)^2 = \frac{(\bar{X} - \Theta)^2}{\Theta^4};$$

$$M\left(\frac{(\bar{X}-\Theta)^2}{\Theta^4}\right) = M\frac{(\bar{X}-\Theta)^2}{\Theta^4} = \frac{\Theta^2}{\Theta^4} = \frac{1}{\Theta^2}$$

Следовательно: $\frac{1 \cdot n}{n \cdot \frac{1}{\Theta^2} \cdot \Theta^2} = 1$ — эффективна по Рао-Крамеру

№2. Для определения стойкости резцы из сплава Т15К6 были испытаны $n = 11$ образцов при скорости резания 0,33 м/с и подаче 0,12 мм/об, в результате чего получили следующие характеристики времени работы резца до затупливания: $\bar{X} = 152{,}3$ мин, $S(\vec{X}) = 3.43$ мин. Построить доверительный интервал уровня $\gamma = 0{,}95$ для среднего времени работы резца до затупливания.

Дано: $n = 11$
$\gamma = 0{,}95$
$\bar{X} = 152{,}3$
$S(\bar{X}) = 3{,}43$

$S^2(X_n) = 11.76$ – исправленная несмещенная оценка дисперсии $X$

Строим доверительный интервал для среднего (мат. ожидания) при неизвестной дисперсии ($S$ – СКО для выборки) по формуле.

$$\bar{X} - t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$t_\gamma$ – квантиль уровня $1-\gamma$ для $n-1$ степени свободы из распределения Стьюдента

Возьмём статистику $T(\vec{X}, a) = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - a)}{S(\vec{X_n})} \sim St(n-1) \sim St(10)$

$$\gamma = P\{t_{\gamma_1} < T(\vec{X}, a) < t_{1-\gamma_2}\}$$

$$\gamma = P\left\{-t_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{a - \bar{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\}$$

$$\gamma = P\left\{\bar{X} - \frac{S(\vec{X}) \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + \frac{S(\vec{X}) \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\right\}$$

$$\underline{a}(\vec{X}) = \bar{X} - \frac{S(\vec{X}) \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \qquad \bar{a} = \bar{X} + \frac{S(\vec{X}) \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0,95}{2} = 0,975$$

$$t_{0.975} = 2,2281$$

$$\frac{S(\vec{X}) \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} = \frac{3.43 \cdot 2,2281}{\sqrt{11}} = \frac{7,64}{3,31} = 2,30$$

$$\underline{a} = 152,3 - 2,3 = 150$$

$$\overline{a} = 152,3 + 2,3 = 154,6$$

Ответ: $(150;\ 154,6)$