РК №1
Переписывание 30.06.2021
Жуков Георгий Алексеевич
ИУ7-66Б

Вариант: 39

Общее число листов в работе: 4

Задача №1

Непрерывная случайная величина X имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \frac{x^6}{\Gamma(7)\theta^7} e^{-x/\theta}, \quad x \geq 0$$

где значение $\theta > 0$ неизвестно. Для оценки параметра θ используется статистика:

$\hat{\theta}(\vec{X}) = \frac{1}{7}\overline{X}$, где $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ – случайная выборка из генеральной совокупности

X. Является ли оценка $\hat{\theta}(\vec{X})$

а) несмещенной?

б) эффективной по Рао-Крамеру?

Решение.

а) Условия несмещения: $M[\hat{\theta}(\vec{X_n})] = \theta$

$$M[\hat{\theta}(\vec{X_n})] = M[\tfrac{1}{7}\overline{X}] = \frac{1}{7n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = \frac{1}{7} MX_i$$

$$MX_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{x^6}{\Gamma(7)\theta^7} e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx = \frac{\theta}{\Gamma(7)} \cdot \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{\theta}\right)^7 e^{-\frac{x}{\theta}}\, d\left(\frac{x}{\theta}\right) \quad \left\{ dx = \theta \cdot d\left(\frac{x}{\theta}\right) \right.$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{x}{\theta} \\ x=0,\ t=0 \\ x\to\infty,\ t\to\infty \end{array} \right\} = \frac{\theta}{\Gamma(7)} \cdot \int_0^{+\infty} t^7 e^{-t}\,dt = \frac{\theta\,\Gamma(8)}{\Gamma(7)} = 7\theta$$

$M[\hat{\theta}(\vec{X_n})] = \frac{1}{7} MX_i = \frac{1}{7} \cdot 7\theta = \theta \implies$ несмещенная оценка.

б) Условия эффективности по Рао-Крамеру:

$$D[\hat{\theta}(\vec{X})] = \frac{1}{I(\theta)}$$

$$I(\theta) = M\left[\left(\frac{\partial \ln(\vec{X}, \theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]$$

$$L(\vec{X}_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^6}{\Gamma(7)\theta^7} e^{-\frac{x}{\theta}} = \frac{1}{[\Gamma(7)\theta^7]^n} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^6 \cdot e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i / \theta}$$

$$\ln L(\vec{x}_n, \theta) = -n \ln(\Gamma(7)\theta^7) + 6\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i =$$

$$= -n \ln(\Gamma(7)) - 7n \ln\theta + 6\sum \dots - \frac{1}{\theta}\sum \dots$$

$$\frac{\partial \ln L(\vec{X}_n, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{7n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} X_i = -\frac{7n}{\theta} + \frac{n}{\theta^2}\bar{X}$$

$$\left(\frac{\partial \ln L(\vec{X}_n, \theta)}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{49n^2}{\theta^2} + \frac{n^2}{\theta^4}(\bar{X})^2 - \frac{14n^2}{\theta^3}\bar{X}$$

$$M\left(\frac{\partial \ln L(\vec{X}_n, \theta)}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{49n^2}{\theta^2} + \frac{n^2}{\theta^4}M(\bar{X}^2) - \frac{14n^2}{\theta^3}\underbrace{M\bar{X}}_{7\theta}$$

Задача №2

Пусть $X \sim N(m, \delta^2)$, где значения m и δ^2 неизвестны.
Построить для m доверительный интервал уровня $\gamma = 0,85$
Если после $n = 31$ испытаний получены значения $\overline{x} = 97$, $S(\vec{x}) = 2.25$

Решение:

$X \sim N(m, \delta^2)$

m, δ - неизвестны, отыщем m

1) $T(\vec{X_n}) = \dfrac{\overline{X} - m}{\sqrt{S^2(\vec{X_n})}} \sqrt{n} \sim St(n-1)$

2) $P\left\{ -t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}} < T(\vec{X_n}) < t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}} \right\} = \gamma$

$P\left\{ -t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}} < \dfrac{\overline{X} - m}{\sqrt{S^2(\vec{X_n})}} \sqrt{n} < t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}} \right\} = \gamma$

3) $P\left\{ \overline{X} - \dfrac{S(\vec{X_n})}{\sqrt{n}} t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}} < m < \overline{X} + \dfrac{S(\vec{X_n})}{\sqrt{n}} t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}} \right\} = \gamma$

$n = 31$
$\overline{X} = 97$
$S(\vec{X}) = 2.25$
$\gamma = 0,85$

$$t^{St(31-1)}_{\frac{1+0,85}{2}} = t^{St(30)}_{0,925} \approx 1,48$$

$m \in \left(97 - \dfrac{2,25}{\sqrt{31}} \cdot 1,48 \ ; \ 97 + \dfrac{2,25}{\sqrt{31}} \cdot 1,48 \right)$

$m \in (96,4 \ , \ 97,6)$