**Вариант 18**. В соответствии с техническими условиями среднее время безотказной работы для приборов должно составлять не менее $m = 1000$ ч. После проверки $n = 25$ случайно выбранных из партии приборов было получено среднее значение $\bar{x}_n = 970$ ч. Считая распределение контролируемого признака нормальным со СКО $\sigma = 100$ ч, при уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу о том, что вся партия удовлетворяет техническим условиям.

РЕШЕНИЕ

Обозначим случайную величину X – среднее время безотказной работы. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, причем известно генеральное среднеквадратичное отклонение $\sqrt{D(X)} = \sigma = 100$, мат.ожидание не известно $M(X) = m$.

Основная гипотеза:

$$H_0 = \{m \geq 1000\}$$
$$H'_0 = \{m = m\}$$

Где m0 >= 1000

Альтернативная гипотеза односторонняя, т.к. время безотказной работы для приборов должно составлять не менее 1000:

$$H_1 = \{m < 1000\}$$
$$H'_1 = \{m = m1\}$$

Где m1 < 1000

При проверке $H_0$ против $H_1$ (в случае известной дисперсии) используется статистика:

$$T(\bar{x}_n) = \frac{m_0 - \bar{x}_n}{\sigma}\sqrt{n}$$

Для W, примем статистику:

$$T_0(\bar{x}_n) = -\frac{\bar{x}_n}{\sigma}\sqrt{n}$$

При истинном значении $H_0$ статистика имеет стандартное нормальное распределение $T(\bar{x}_n) \sim N(0,1)$. Критическое множество:

$$W = \{\bar{x}_n : T_0(\bar{x}_n) \geq C\}$$

$$\text{P} = \{\bar{x}_n \in \text{W} \mid \text{H}_0\} = \alpha$$

$$\text{P}\ \{\text{T}_0(\bar{x}_n) >= \text{C}\}$$

$$P\ \{ -\frac{\bar{x}_n}{\sigma}\sqrt{n} + \frac{m_0}{\sigma}\sqrt{n} >= C + \frac{m_0}{\sigma}\sqrt{n} \}$$

$$P\ \{T(\bar{x}_n) >= C + \frac{m_0}{\sigma}\sqrt{n}\}$$

Где $T(\bar{x}_n) \sim N(0,1)$

$$P = 1 - \Phi(C + \frac{m_0}{\sigma}\sqrt{n})$$

Необходимо, чтобы P было максимально, тогда Ф должно быть минимально, тогда $m_0 = 1000$.

$$\text{Тогда } \alpha = 1 - \Phi(C + \frac{1000}{\sigma}\sqrt{n})$$
$$\Phi(C + \frac{1000}{\sigma}\sqrt{n}) = 1 - \alpha$$

$$U_{1-\alpha} = C + \frac{1000}{\sigma}\sqrt{n} \text{ – квантиль с уровнем } 1 - \alpha$$

где $U_{1-\alpha}$ – квантиль стандартного нормального распределения

$$\text{Тогда } C = 2.33 - \frac{1000}{100}\sqrt{25} = -47{,}67$$

$$W = \{-\frac{\bar{x}_n}{\sigma}\sqrt{n} \geq -47{,}67\ \}$$
$$W = \{-\frac{970}{100}\sqrt{25} \geq -47{,}67\ \}$$
$$W = \{-48{,}5 \geq -47{,}67\ \}$$

Из этого следует, что основная гипотеза НЕ отвергается при уровне значимости 1%. Партия удовлетворяет техническим условиям.