UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA LINEAL

SERIE 1

GRUPOS Y CAMPOS

---

1. Sea el sistema $(\mathbb{N}, *)$, donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales y $a*b = a+2b+1 \quad \forall a,b \in \mathbb{N}$ ¿Cuál es el resultado de $2*\big(1*(3*2)\big)$?

---

2. Sea el conjunto $\{m,n,p,r\}$ y la operación binaria $*$ definida por la siguiente tabla

$*$	m	n	p	r
m	p	r	m	n
n	r	m	n	p
p	m	n	p	r
r	n	p	r	m

Determinar el elemento inverso de n.

---

3. Sean el conjunto $G = \{a,b\}$ y Δ la operación binaria en G definida por

Δ	a	b
a	a	b
b	b	a

Determinar si el sistema algebraico (G,Δ) cumple con asociatividad.

---

4. Sea el conjunto $A = \{-1,0,1\}$ y las operaciones binarias $\oplus$ y $\odot$ definida por:

$\oplus$	-1	0	1
-1	-1	0	1
0	0	1	-1
1	1	-1	0

$\odot$	-1	0	1
-1	-1	-1	-1
0	-1	0	1
1	-1	1	1

Determinar:

a) El elemento idéntico para la operación $\oplus$ y para la operación $\odot$

b) El elemento inverso para cada elemento de A respecto a la operación $\oplus$

c) Calcular la operación $\big(-1\oplus(-1)\big)\oplus(1\oplus 0)$

5. Sea el conjunto M matrices cuadradas de orden 2 de la forma

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

y la operación binaria Δ tal que

$$A \Delta B = A + B + I$$

donde $A, B \in M$ e I es la matriz identidad de orden 2.

Determinar para el sistema (M, Δ)

a) Si la operación Δ en el conjunto M es asociativa
b) El elemento idéntico
c) Los elementos inversos

---

6. Sean el conjunto $B = \{ e^v \mid v \in \mathbb{Z} \}$ y la operación $*$ definida como:

$$e^{v_1} * e^{v_2} = e^{v_1 + v_2}$$

Demostrar que el sistema $(B, *)$ tiene estructura de grupo.

---

7. Sea el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y la operación binaria

$$p * q = p + q + 2$$

Determinar si $(\mathbb{Z}, *)$ es un grupo.

---

8. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros y $*$ la operación definida por

$$a * b = a \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

Determinar si el sistema $(\mathbb{Z}, *)$ tiene estructura de grupo. En caso afirmativo, obtener el inverso de 5.
En caso negativo indicar todos los axiomas que no se satisfacen.

---

9. Sean el conjunto de funciones reales de variable real $M = \{ f, g, h \}$ cuyas reglas de correspondencia son

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad g(x) = \frac{x-1}{x} \qquad h(x) = x$$

y la operación $\circ$ en M definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

a) Completar la siguiente tabla para la operación $\circ$

$\circ$	f	g	h
f		h	
g	h	f	
h			h

b) Considerando que $\circ$ es asociativa, determinar si $(M, \circ)$ es un grupo. Si lo es, obtener su elemento idéntico. En caso negativo, indicar todos los axiomas que no se satisfacen.

10. El sistema $(R,\oplus)$ tiene estructura de grupo abeliano. Determinar el elemento idéntico y a partir de éste obtener el elemento inverso de 5, si la operación está definida por:

$$a \oplus b = a + b + 1; \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

---

11. Sea el sistema $(A,+)$ donde $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$ y $+$ es la adición usual en las matrices, determinar si A es grupo abeliano.

---

12. Dado el conjunto $A = \{u, a, b\}$ donde estos tres elementos son distintos y u es el elemento idéntico con respecto a la operación $*$. Complete la siguiente tabla para que $(A,*)$ sea un grupo abeliano.

*	u	a	b
u			
a		b	
b			a

---

13. Sean el conjunto $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x \neq -1\}$ y la operación binaria $*$ definida como:

$$a * b = a + b + ab; \qquad \forall a, b \in \mathbb{Q}$$

Determinar si el sistema $(A,*)$ es un grupo abeliano, de cumplirse lo anterior, obtener el elemento inverso del número 2.

---

14. Sea el sistema $(G,\oplus)$ donde $G = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$ y la operación $\oplus$ está definida como:

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$$

Determinar si el sistema $(G,\oplus)$ es un grupo abeliano.

---

15. Sea el conjunto $(S,*)$ una estructura de grupo abeliano, $S = \{a, b, c, d\}$ y la operación binaria definida por la siguiente tabla

*	a	b	c	d
a	d	c	a	b
b	c	d	b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c

Efectuar la operación $a * e * (\hat{c} * b)$ donde e es el idéntico del grupo $(S,*)$ y $\hat{c}$ es el inverso de c.

16. Sean el conjunto $H=\{(1,1),(-1,1),(1,-1),(-1,-1)\}$ y la operación $*$ definida por

$$(a,b)*(m,n)=(am,bn) \qquad \forall (a,b),(m,n)\in H.$$

Determinar si el sistema $(H,*)$ es un grupo abeliano, tomando en cuenta que * es asociativa en H.

---

17. Sea el sistema $(\mathbb{R},\oplus,\otimes)$, determinar si tiene estructura de campo, las operaciones están definida por:

$$a\oplus b=a+b+1, \quad a\otimes b=a+b+ab \qquad \forall a,b\in\mathbb{R}$$

---

18. Sea el conjunto $E=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \,\middle|\, a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ y la operación binaria $*$ definida como:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}*\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+x & b+y \\ 0 & cz \end{bmatrix},\ \forall \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix},\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}\in E$$

Determinar si el sistema $(E,*)$ tiene estructura de grupo abeliano.

---

19. Sea el sistema $(A,\Delta,*)$, donde $A=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$ y las operaciones definidas de la siguiente manera:

$$(a,b)\,\Delta(c,d)=(ac,bd)$$
$$(a,b)*(c,d)=(a+c,b+d)$$

Determinar si A es campo.

---

20. Sean el conjunto $F=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ y las operaciones $\oplus,\otimes$ definidas por

$$(x,y)\oplus(m,n)=(x+m,y+n)$$
$$(x,y)\otimes(m,n)=(0,yn) \qquad \forall (x,y),(m,n)\in F$$

Considerando que el sistema $(F,\oplus)$ es un grupo, determinar si el sistema $(F,\oplus,\otimes)$ es un campo.
En caso negativo, indicar los axiomas que no se satisfacen.

Soluciones

1. 39
2. Elemento inverso de n: r
3. El sistema algebraico (G,Δ) cumple con asociatividad
4. a) Elemento idéntico para la operación $\oplus$: -1
   Elemento idéntico para la operación $\odot$: 0
   b) Elementos inversos para la operación $\oplus$:
   Elemento inverso de -1: -1
   Elemento inverso de 0: 1
   Elemento inverso de 1: 0
   c) -1
5. a) El sistema algebraico (M,Δ) cumple con asociatividad
   b) Elemento idéntico: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
   c) Elementos inversos: $\begin{pmatrix} -a-2 & 0 \\ 0 & -b-2 \end{pmatrix}$
6. El sistema algebraico $(B,*)$ es un grupo
7. El sistema algebraico $(\mathbb{Z},*)$ es un grupo
8. El sistema algebraico $(\mathbb{Z},*)$ no es un grupo.
   No se cumplen los axiomas:
   Existencia de elemento idéntico
   Existencia de elementos inversos
9. a)

$\circ$	f	g	h
f	g	h	f
g	h	f	g
h	f	g	h

   b) Elemento idéntico: h
   El sistema algebraico $(M,\circ)$ es un grupo
10. Elemento idéntico: -1
    Elemento inverso de 5: -7
11. El sistema algebraico $(A,+)$ es un grupo abeliano
12.

$*$	u	a	b
u	u	a	b
a	a	b	u
b	b	u	a

13. El sistema algebraico $(A,*)$ es un grupo abeliano
    Elemento inverso de 2: $-\dfrac{2}{3}$
14. El sistema algebraico $(G,\oplus)$ no es un grupo abeliano
15. c
16. El sistema algebraico $(H,*)$ es un grupo abeliano

17. El sistema algebraico $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ no es un campo

18. El sistema algebraico $(E, *)$ no es un grupo abeliano

19. El sistema algebraico $(A, \Delta, *)$ no es un campo

20. El sistema algebraico $(F, \oplus, \otimes)$ no es un campo

    Axiomas que no se cumplen para la operación $\otimes$:
    Existencia de elemento idéntico
    Existencia de elementos inversos