Trabalho Prático 1 de Otimização : Modelagem do problema de Produção de produtos químicos

Erick Eckermann Cardoso GRR20186075
Dante Eleutério dos Santos GRR20206686

Resumo

O objetivo deste trabalho consiste em procurar uma solução em programação linear para o problema de Produção de produtos químicos, onde se busca maximizar os lucros de uma empresa, dado a quantidade o preço de cada item que será vendido e o custo junto da quantidade necessária de cada composto utilizado na fabricação deste item. Para solucionar esse problema utilizando programação linear, foi criado um programa onde o problema é modelado e interpretado de uma forma a gerar um arquivo de saída que será usado pelo resolvedor lp solve, este que utiliza do método simplex para retornar uma solução. A modelagem é simples e os resultados confiáveis, onde dentro dos limites e restrições que são dados na restrição do problema, resultados satisfatórios são retornados [4].

Palavras-chave: programação-linear, modelagem, maximização, simplex.

1 Introdução

Existem diversos problemas, das mais variadas naturezas, onde uma solução ótima pode ser encontrada por meio de uma interpretação do problema em um problema de programação linear [1][3]. A isto damos o nome de modelagem. Essa modelagem possibilita que problemas complexos sejam resolvidos em, na maioria dos casos, poucos segundos, por meio do método simplex. Para o problema de produção de produtos químicos, essa abordagem se mostra extremamente eficiente e satisfatória. O objetivo deste trabalho é modelar e implementar uma solução para o problema pelo método simplex [2], e para isso um algoritmo que realiza a modelagem foi implementado.

2 Desenvolvimento

2.1 O problema de produção de produtos químicos

O problema de produção de produtos químicos consiste em **maximizar** o lucro das vendas de uma empresa que produz certos tipos de produtos químicos. Digamos que essa empresa produz **n** diferentes tipos de produtos, e para a produção de cada um deles, diferentes proporções de **m** compostos são utilizadas. Cada item que será vendido tem um preço fixado de venda por litro. Cada composto tem um certo custo, também em litros, tanto quanto um limite de quantidade em litros que a empresa pode usar do composto.

O problema se torna complexo pois para maximizar os lucros da empresa, é necessário saber a quantidade que deverá ser produzida para cada item, a fim de que o lucro seja o mais alto o possível e o custo de produção não seja tão alto. Existem milhares de soluções para esse problema, porém é difícil decidir qual seria a ótima. Porém, se visualizarmos este problema como um problema de programação linear,a solução ótima se torna garantida pelo método simplex. Por isso, iremos realizar um esforço a fim de modelá-lo como um problema de programação linear, e assim encontrar a solução ótima.

2.2 Modelagem utilizada

Seja o número de produtos químicos produzidos **n**, e **m** o número de diferentes compostos utilizados na produção. Cada produto químico **i** tem valor de venda (por litro), **vi**. Cada composto **j** usado tem um preço (por litro), **pj**, e um limite diário de volume (em litros), **qj**. A quantidade (em litros) de uso de cada composto j na produção de 1 litro do produto i é dada por **cij** . Ou seja, para produzir 1 litro do produto i são necessários **ci1** litros do composto 1, **ci2** litros do composto 2, e assim até **cim** litros do composto m.

Todos os dados sendo nomeados, podemos trabalhar na modelagem. O objetivo do problema é maximizar os lucros da empresa com as vendas dos produtos químicos. Para isso, é necessário balancear o custo de produção para que não seja tão alto e a quantidade ótima de cada produto que será produzida, portanto, podemos definir a seguinte função objetivo do problema: [1]

$$Max : \sum_{i=1}^{n} xi \cdot \left(vi \; - \sum_{j=1}^{m} \; (pj \cdot \; cij) \right)$$

Nesta função, **xi** representa a quantidade que deverá ser produzida do produto químico i, e essa quantidade é multiplicada pelo lucro na venda de uma unidade deste produto. Portanto, essa função representa a soma do lucro total nas vendas de cada produto xi, e nosso objetivo é maximizar o seu valor.

Porém, neste problema existe limitação, que seria a quantidade limite de cada composto que poderá ser utilizada no total das produções. Isso pode ser expresso no sistema de equações limitantes, onde para cada composto j E {1..m} existe uma equação que limita o seu uso. Essa equação é da forma:

$$\sum_{i=1}^{n} xi \; \cdot \; cij \; \leq \; qj$$

Sabemos que não se pode haver produções em negativo, portanto, naturalmente **xi >= 0**, para todo i E {1..n}.

Essa modelagem interpreta o problema como um problema de programação linear e torna possível que uma solução ótima seja encontrada e também possibilita que utilizemos o método simplex [2] para a solução.

2.3 Implementação do algoritmo

O algoritmo foi implementado em c++ e faz uso das funções de "vector" da biblioteca padrão da linguagem para armazenar as variáveis de preços de venda de cada item, custos de produção do litro de cada composto, limites máximos de produção em litros de cada composto e a quantidade de cada composto presente em cada produto.

É efetuada a leitura das variáveis e armazenada em suas respectivas estruturas e então a saída é construída pelos padrões do lp_solve. Para tal, inicialmente é escrita a função objetivo, que na situação problema se trata de uma função de maximização, subtraindo do preço de venda do litro de cada produto o custo de produção de todos os compostos com base nos percentuais por litro e seus respectivos custos de modo a obter o lucro por litro de cada produto. Após isso são então construídas as funções de limitação buscando limitar a produção máxima de cada composto com base nos percentuais necessários para produzir cada produto.

3 Resultados e testes

Alguns testes foram efetuados de modo a observar o comportamento do algoritmo.

3.1 Teste 1

Primeiramente foi-se efetuado o teste apresentado no enunciado do trabalho:

		Compostos				
	n/m	1	2	3	4	Valor
produtos	1 2 3	0,2 1,0 0,4	0,5 0,1 0,2	1,0 0,3 0,2	0,1 0,3 0,0	10 7 3
	custo limite	1 1000	2 2000	5 500	10 2000	

Foram-se encontrados os mesmos resultados descritos no enunciado:
Valor da função objetivo : 3755,31
Litros do produto 1 a serem produzidos: 212.76
Litros do produto 2 a serem produzidos: 957.447
Litros do produto 3 a serem produzidos: 0

3.2 Teste 2

No segundo teste foi abordado o que ocorreria caso o produto 2 (o qual foi o mais produzido no teste 1) tivesse o seu valor de venda menor que o seu custo de produção.

		Compostos				
	n/m	1	2	3	4	Valor
pro dut os	1 2 3	0,2 2,0 0,4	0,5 2,0 0,2	1,0 2,0 0,2	0,1 2,0 0,0	10 7 3
	custo limite	1 1000	2 2000	5 500	10 2000	

Foram-se encontrados os seguintes resultados:
Valor da função objetivo : 3000,00
Litros do produto 1 a serem produzidos: 0
Litros do produto 2 a serem produzidos: 0
Litros do produto 3 a serem produzidos: 2500

Interessante se notar que nesse caso o produto 3 passou a ser o único produzido, diferentemente do primeiro teste em que ele era o único a não ser produzido.

3.3 Teste 3

No terceiro teste foi abordado o que ocorreria caso houvesse apenas um item a ser produzido.

		Compostos				
	n/m	1	2	3	4	Valor
produtos	1	0,2	0,5	1,0	0,1	10
	custo limite	1 1000	2 2000	5 500	10 2000	

Foram-se encontrados os seguintes resultados:

Valor da função objetivo : 1400,00

Litros do produto 1 a serem produzidos: 500

REFERÊNCIAS

[1] MATOUSEK JIRI; GARTNER B. Understanding and Using Linear Programming. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag., 2007. Chapter 2.

[2] MATOUSEK JIRI; GARTNER B. Understanding and Using Linear Programming. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag., 2007. Chapter 4 and 5.

[3] STINSON, D. L. COMBINATORIAL ALGORITHMS : generation, enumeration,and search. S.L.: Crc Press, 2019.

[4] PAPADIMITRIOU, C. H.; STEIGLITZ, K. Combinatorial Optimization. [s.l.] Courier Corporation, 2013.