

# Modelado de un Controlador PID para un Pololu Gripper

Alejandro Rafael Alvarez Quispe, Joaquin Mateo Cornejo Lema y Jose Martin Cisneros Mandujano  
Universidad de Ingenieria y Tecnologia - UTEC, Lima - Peru

**Abstract**—En el presente artículo, se va a describir el modelado matemático y análisis temporal de un sujetador electro-mecánico al momento de mover ciertos cuerpos y a diferentes ritmos. Además, se va a plantear un controlador PID que servirá para poder dirigir su comportamiento dependiendo de una previa evaluación del contexto en el cual se encuentra el sujetador.

## I. INTRODUCCIÓN

Una de las características más destacadas de un ingeniero es su habilidad de poder describir ciertos fenómenos y comportamientos de la realidad por medio de herramientas matemáticas. Con este tipo de conocimientos, él es capaz de poder recrear posibles situaciones con el objetivo de encontrar una solución a un problema sin la necesidad de utilizar más recursos de los necesarios. Por esta razón, en el siguiente texto se ha propuesto el modelado matemático del comportamiento de un sujetador Pololu al momento de atrapar frijoles con sus garras. Este sistema está compuesto de distintos componentes, tanto mecánicos como eléctricos. Por ende, el objetivo principal de este proyecto es poder describir la respuesta de este sistema a distintas entradas para poder discernir qué parámetros son los adecuados para la situación en la que se encuentra.

## II. PROCEDIMIENTO

### A. Identificación del sistema

En primer lugar, se procedió a identificar los distintos dispositivos que conforman el sistema. Como se muestra en la Fig. 1, la primera parte del sistema está conformado por el motor DC, el cual se puede representar con una bobina, una resistencia y una carga capaz de generar una fuerza electromotriz que causa el giro de un rotor.

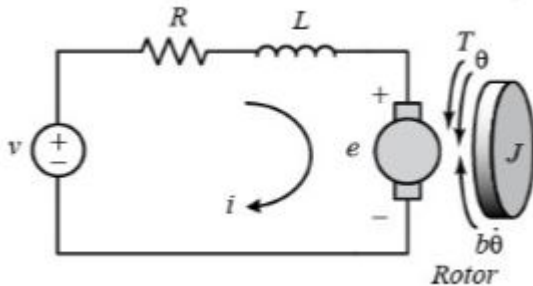


Fig. 1. Circuito eléctrico del motor

El circuito eléctrico cuenta con un voltaje de entrada dependiente del usuario, una resistencia lineal de 56 ohmios,

una bobina de 2 Henrios, una carga que genera una fuerza electromotriz definida como la velocidad angular del rotor multiplicada por una constante de 5 V/rad y un torque, el cual está definido como la corriente del circuito multiplicada por una constante de 5Nm/A.

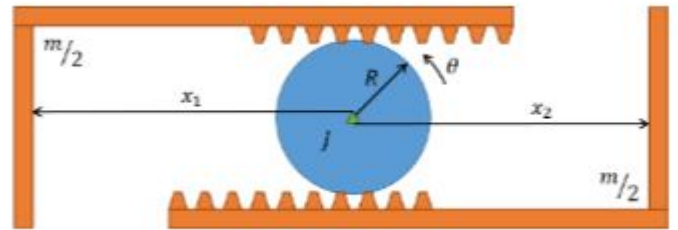


Fig. 2. Representación de piñón y cremalleras del sujetador (vista frontal)

Luego de analizar el motor, se procedió a identificar los componentes del piñón y la cremallera del sujetador. En la Fig. 2, se observa que el rotor está engranado a las 2 cremalleras, las cuales se desplazan de un lado a otro mediante la fuerza generada por el motor DC. A su vez, en el modelo se puede apreciar que el rotor cuenta con un radio de 0.5m, un momento de inercia de  $0.025 \text{ kgm}^2$ , un factor de amortiguamiento de 0.6 Nms/rad y que las cremalleras cuentan con una masa de 0.15kg cada una.

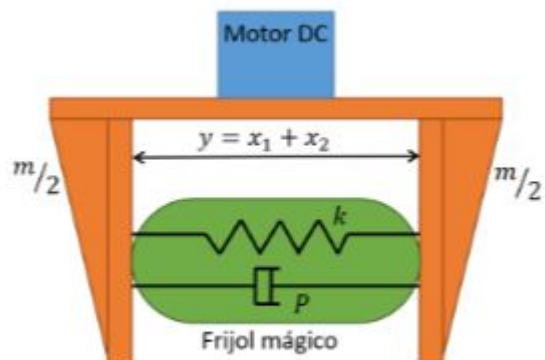


Fig. 3. Representación del sujetador con el objeto agarrado (vista de planta)

Por último, en la Fig. 3 se observa al sistema desde una vista de planta, en donde se identifica que el frijol mágico puede ser simplificado por un resorte de traslación

y un amortiguador con constantes de 12Nm y 0.01Nm/s respectivamente.

### B. Modelamiento matemático

Luego de haber identificado el sistema, se procedió a realizar el modelo matemático. Para ello, se inició con el diagrama de cuerpo libre de todas fuerzas que interactúan en el sistema, las cuales se muestran en los siguientes diagramas:

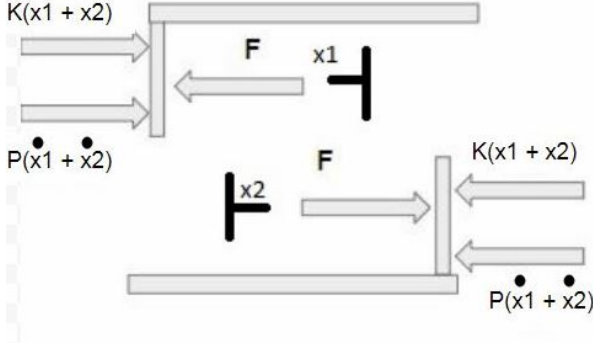


Fig. 4. DCL de las cremalleras

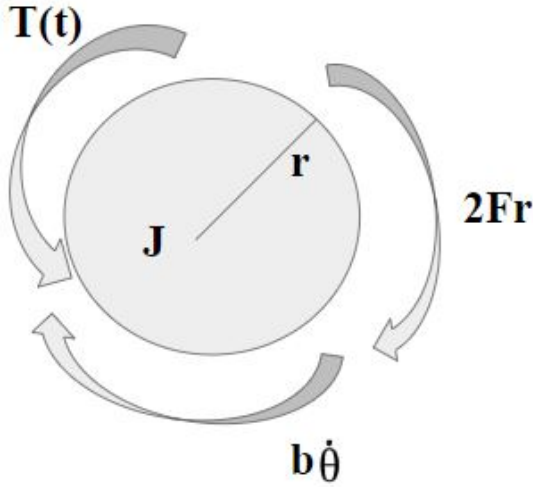


Fig. 5. DCL del rotor

Luego de analizar los diagramas de cuerpo libre, se formularon ciertas ecuaciones matemáticas (1) y (2) que describen el comportamiento del sistema. Si se asume que la salida deseada es la distancia que existe entre las dos garras del sujetador, la cual esta en función de  $x_1$  y  $x_2$ , y que ambas magnitudes son iguales.

$$\frac{\ddot{x}1m}{2} = F(t) - k(x_1 + x_2) - P(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) \quad (1)$$

$$F = \dot{x} \frac{m}{2} + 2P(\dot{x}) + 2kx \quad (2)$$

A su vez, se debe encontrar la ecuación dinámica que describa el comportamiento del rotor, así como se realiza en la ecuación (2)

$$T(t) = kt * I$$

$$\dot{\theta}J = T(t) - 2Fr - b\dot{\theta} \quad (3)$$

Obtenidas las ecuaciones que describen los elementos mecánicos del sistema, ya es posible modelar matemáticamente el circuito eléctrico, el cual está descrito en la ecuación (3).

$$V_{in}(t) = RI + L\dot{I} + kv\dot{\theta} \quad (4)$$

Se puede definir la salida del sistema como la ecuación (4).

$$y = x_1 + x_2$$

$$y = 2x$$

$$\frac{y}{2} = x, \frac{\dot{y}}{2} = \dot{x} \quad (5)$$

Determinada la salida de la sección en función a las distancias de las garras, se la relacionó con la distancia angular de rotor, la cual se aprecia en la ecuación (5).

$$r\theta = \frac{y}{2}$$

$$\theta = \frac{y}{2r}, \dot{\theta} = \frac{\dot{y}}{2r}, \quad (6)$$

La ecuación (1), la forma derivada de la (5) y (4) se introdujeron en la (2). A partir de este punto, se llevaron las ecuaciones al dominio de la frecuencia (Laplace). Luego se la relacionó con la ecuación (3). Finalmente, se obtuvo la función de transferencia deseada, la cual se traduce como la razón de la salida sobre la entrada del mismo sistema, lo cual relaciona ambas ecuaciones; asimismo, se reemplazan las constantes.

$$V(s) = I(s)(56 + 2s) + Y(s)5s$$

$$I(s) = \frac{Y(s)(s^2 + s0.61 + 12)}{5}$$

$$G(s) = \frac{1}{134.4 + 16.632s + 1.364s^2 + 0.04s^3} \quad (7)$$

### III. POLOS Y CEROS

El análisis de los polos y ceros de la función de transferencia obtenida permite al evaluador realizar distintas conclusiones en relación al sistema, como su tipo de estabilidad y su comportamiento temporal.

En la Fig. 6 y 8, se puede denotar que el sistema cuenta con la presencia de tres polos: un polo real y 2 polos complejos conjugados. Al tener los polos complejos conjugados como polos dominantes, aquellos más cercanos al origen, se puede afirmar que el sistema tiene un comportamiento temporal subamortiguado. Además, al poseer todos sus polos en el lado izquierdo, se concluye que el sistema es asintóticamente estable.

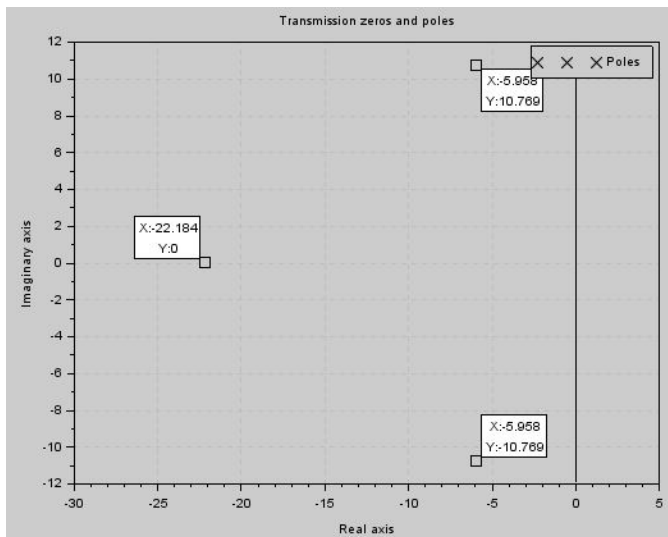


Fig. 6. Diagrama de polos y ceros

#### IV. ANÁLISIS TEMPORAL Y FRECUENCIAL

A partir de la función de transferencia del sistema, se va a analizar como se desenvuelve este sistema tanto en el tiempo como en la frecuencia. Estos resultados serán los responsables de las conclusiones que el evaluador realice sobre la situación planteada.

##### A. Respuesta temporal para una entrada escalón unitario

Como se muestra en la Fig. 7, se puede denotar que las suposiciones realizadas anteriormente a partir de los polos del sistema son correctas, ya que sus gráficas lo presentan como un sistema asintóticamente estable y de comportamiento subamortiguado a lazo abierto. Además, su %OS es de aproximadamente 17.58% y su tiempo de establecimiento al 98% es de 0.67 segundos. También, el sistema cuenta con un error en estado estable de 0.993, el cual es un valor problemático para situaciones reales. Por otro lado, en la Fig. 7 se observa la respuesta al escalón unitario en lazo cerrado, la cual es muy similar a la respuesta en lazo abierto; por ello, se asume que la retroalimentación del sistema es innecesario en esta etapa del análisis, ya que sus respuestas son similares y la retroalimentación de un sistema significa un esfuerzo añadido.

##### B. Diagrama de bode

Para el análisis frecuencial, se procedió a graficar el Diagrama de Bode del sistema mostrado en la Fig. 9.

El sistema cuentan con tres polos y ningún cero, por lo que la fase caerá hasta -270 grados sexagesimales. Luego, observamos que el sistema cuenta con un pico de frecuencia natural, el cual se ubica en 12.31 rad/s. Esta frecuencia genera el efecto de resonancia en el sistema. Por último, podemos verificar que el sistema es estable en lazo cerrado, debido a que cuenta con un margen de ganancia igual a 52.72 dB y un margen de fase infinito para cualquier frecuencia.

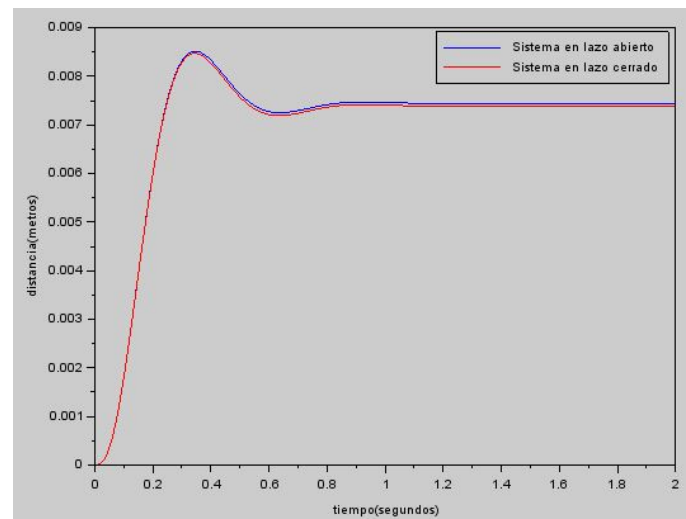


Fig. 7. Respuesta del sistema al escalón unitario en lazo abierto y lazo cerrado

Tabla 1: Polos, frecuencias naturales y factor de amortiguamientos

	Polos	Wn	psi
Polo 1	-5.9578521 + 10.768588i	12.306847	0.4841087
Polo 2	-5.9578521 + 10.768588i	12.306847	0.4841087
Polo 3	-22.184296	22.184296	1

Tabla 2: Margen de ganancia y fase en lazo abierto

	dB	Magnitud
Margen de ganancia	52.7247	432.7512
Margen de fase	Infinito	

Fig. 8. Análisis en lazo abierto

#### V. DISEÑO DE UN CONTROLADOR PID

Previamente mencionado, el sistema cuenta con error en estado estable en su respuesta temporal, por lo cual, se propuso desarrollar un controlador que elimine el error. Para este diseño, se utilizó el mtodo de Ziegler y Nichols, el cual nos ayuda a eliminar el error en estado estable. Como primer paso, se hallan los valores de "km", el cual es el margen de ganancia crítica, y "wm", que es la frecuencia donde se ubica el margen de ganancia. Luego, se procedió a diseñar el controlador calculando las constantes "kp", "ki" y "kd". La ecuación (7) muestras el diseno del controlador PID de nuestro sistema.

$$kp = 259.65072$$

$$ki = 1685.31$$

$$kd = 10.000856$$

$$K(s) = 259.65072 + \frac{1685.31}{s} + 10.000856s$$

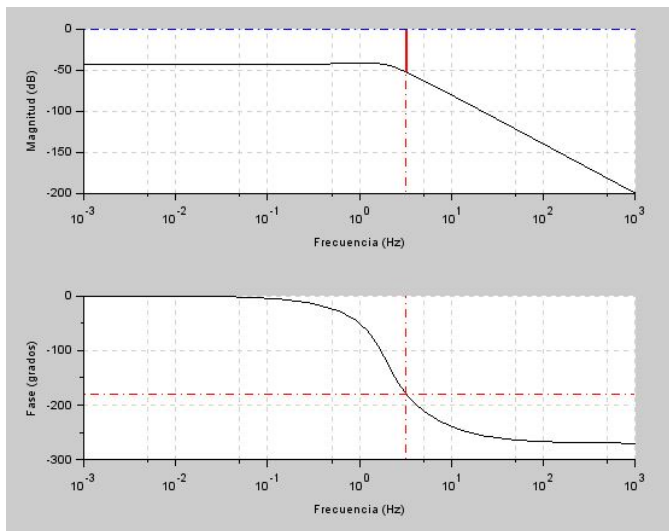


Fig. 9. Diagrama de Bode

$$K(s)G(s) = \frac{8426.5908 + 1298.2536s + 50.004280s^2}{672s + 83.16s^2 + 6.82s^3 + 0.2s^4} \quad (8)$$

Para una mejor estabilidad (debido a que la constante 'ki' podría desestabilizar el sistema), se procedió a realimentar el sistema. En la figura 10 se muestran el diagrama de bloques que representa el sistema controlado con realimentación.

En la figura 11 observamos la respuesta temporal de nuestro sistema controlado y no controlado. Como vemos, la respuesta temporal muestra un error en estado estable nulo, pero, al tratarse de un sistema que debe sujetar objetos (en este caso un frijol), tener un OS% de 21.2%, podrá generar fisuras en el frijol mágico, e incluso la ruptura del mismo. Debido a que el método por el cual diseñó el controlador es empírico, se han realizado modificaciones posteriores para acrecentar su precisión.

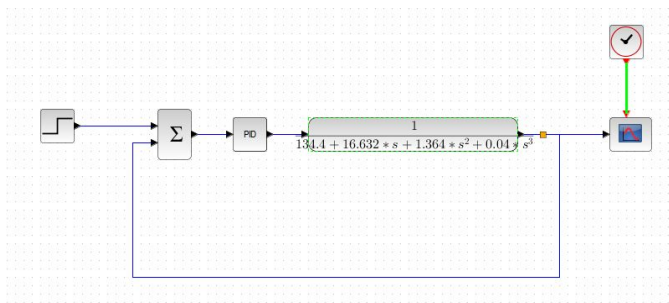


Fig. 10. Diagrama de bloques del sistema controlado con realimentación

Para este caso, decidimos disminuir la constante proporcional "kp", la constante derivativa "kd" y la constante "ki". La ecuación (8) muestra el diseño de nuestro controlador con valores kp, ki y kd sintonizados.

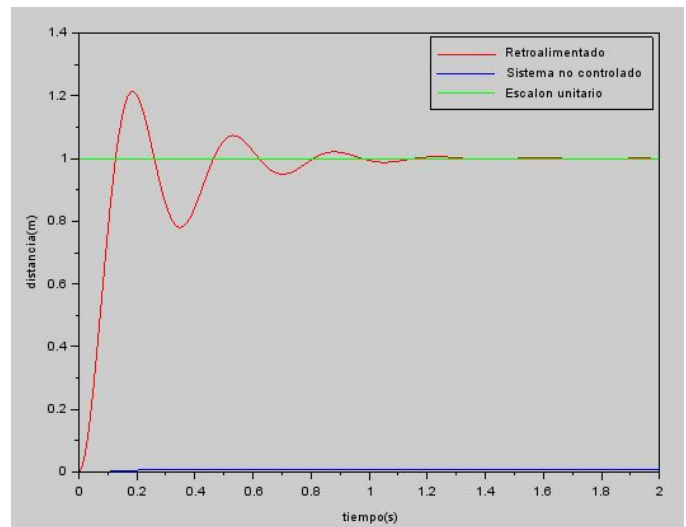


Fig. 11. Sistema controlado con realimentación

$$\begin{aligned} k_p &= 220 \\ k_i &= 30 \\ k_d &= 1100 \\ K(s) &= 220 + \frac{30}{s} + 1100s \end{aligned}$$

(9)

Estas modificaciones han permitido obtener el diseño de un controlador PID que cumple todo lo requerido para nuestro sistema. En la Fig. 12 podemos observar la diferencia entre las respuestas temporales del sistema con Overshoot y sin Overshoot.

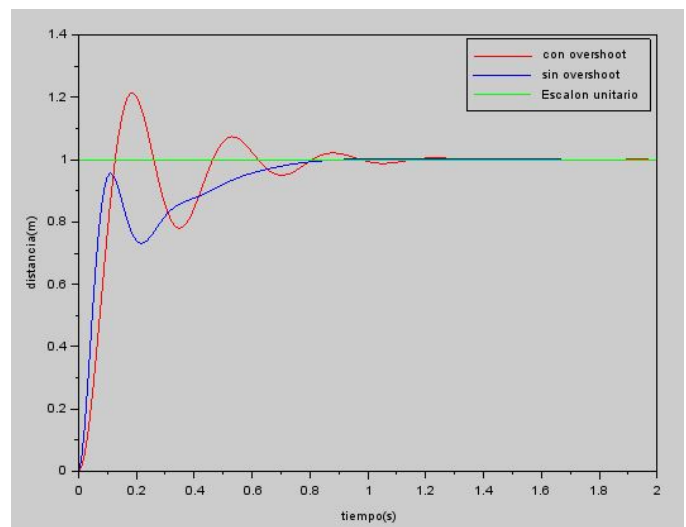


Fig. 12. Con Overshoot vs Sin Overshoot

Como apartado final de este artículo, utilizamos una entrada distinta al escalón unitario para observar si nuestro

controlador es capaz de responder adecuadamente. Como resultado positivo, el sistema es capaz de responder a entradas distintas, como una entrada de  $5u(t)$  al igual que la Fig. 13.

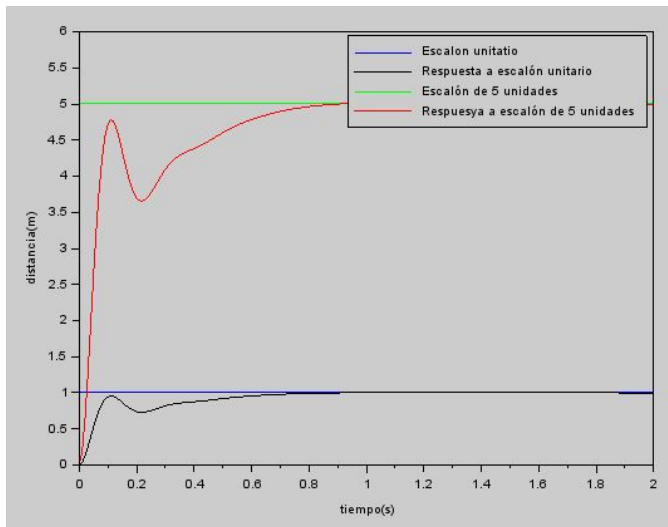


Fig. 13. Respuesta del sistema al escalón unitario vs escalón de cinco unidades

## VI. CONCLUSIONES

En síntesis, el contexto planteado relacionado al sujetador de frijoles mágicos ha necesitado de una serie de análisis para poder controlar de manera correcta su comportamiento deseado por el usuario a un largo plazo. Como se ha observado, uno de los primeros pasos para poder analizar un sistema cualquiera es describir su comportamiento con ayuda de la física matemática. Esta acción se ha logrado por medio del planteamiento de las ecuaciones dinámicas. Luego, la formulación de la función de transferencia del sistema es capaz de abrir distintas herramientas de estudio que ayuda al evaluador a decidir cuales son los mejores parámetros para un determinado contexto.

Con los indicadores ya obtenidos, se ha sido capaz de modificar el comportamiento de este sistema por medio de un controlador PID, el cual ha sido el objetivo principal de este trabajo de investigación, ya que gracias a las variaciones únicas que tiene la creación de un controlador, brinda a los estudiantes la oportunidad de poder discernir acerca de cual es el modelo que más se adecua a la problemática en cuestión. En este caso, se ha decidido ir por una opción en la cual el objeto bajo presión del sujetador no sea sobrecomprimido; y así, se conservan las propiedades mecánicas del objeto en cuestión.

## REFERENCES

- [1] [1]"Método de Ziegler-Nichols - Pícuino", Sites.google.com, 2017. [Online]. Available: <https://sites.google.com/site/picuino/ziegler-nichols>.
- [2] [2]"Sistemas de segundo orden", Es.wikipedia.org, 2017. [Online]. Available: [https://es.wikipedia.org/wiki/Sistemas\\_de\\_segundo\\_orden](https://es.wikipedia.org/wiki/Sistemas_de_segundo_orden).