Prof. Dr. habil.
H.-J. Dobner

Mathematatik für Informatiker (MfI) II

Seminar KW 19

Thema:

Bestimmtes Integral

$F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$: $F'(x) = f(x)$

f stetig in $[a,b]$, bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

MWS der Integralrechnung

$$\exists \xi \in [a,b]: \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\underbrace{\int_a^b 1 \cdot dx}_{(b-a)}$$

Fläche A, welche von zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossen wird.

$$A = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| dx$$

Dreiecksungleichung

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right| dx$$

1. Aufgabe

Berechnen Sie mittels der Substitution $u=x^3+1$ das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$

Lösung

Wir haben zwei Möglichkeiten

Methode 1: Wir behandeln das Integral wie ein unbestimmtes Integral, integrieren mithilfe der Substitutionsregel, kehren zur Ausgangsvariable x zurück und setzen zur Berechnung des bestimmten Integrals die ursprünglichen Integrationsgrenzen ein

$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \quad u = g(x)$

Substitution $u=x^3+1$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x) = 3x^2 \Rightarrow \underline{\underline{du = 3x^2 dx}}$$

$$\int \underline{\underline{3x^2}}\sqrt{x^3+1}\,\underline{\underline{dx}} = \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

Rücksubstitution nicht vergessen!!!

$$= \frac{2}{3}\left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Berechnen des bestimmten Integrals mit der eben berechneten Stammfunktion und den Integrationsgrenzen für x

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \left[\frac{2}{3}\left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{3}\left(1^3+1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\left(\underbrace{\left(-1\right)^3}_{-1}+1\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}2\sqrt{2} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

$$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = \sqrt{2\cdot 4}$$

Methode 2: Wir transformieren das Integral und berechnen das bestimmte Integral mit den transformierten Grenzen.

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$

Substitution $u = x^3+1$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = g'\left(x\right) = 3x^2 \Rightarrow \underline{\underline{du = 3x^2 dx}}$$

$$x = -1 \Rightarrow u = \left(-1\right)^3 + 1 = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow u = \left(1\right)^3 + 1 = 2$$

$$\int_{-1}^{1} \underline{\underline{3x^2}}\sqrt{x^3+1}\,\underline{\underline{dx}} = \int_{0}^{2} \sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{2} = \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}0^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}2\sqrt{2} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$