2. Aufgabe

Für welche reellen Zahlen x, konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)\cdot k} x^k$$

Lösung

$$a_k = (-1)^k \cdot \frac{1}{(k-1)\cdot k}, \; x_0 = 0$$

Bestimmung des Konvergenzradius ρ mit dem Quotientenkriterium

$$a_{k+1} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k\cdot(k+1)}$$

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^k}{(k-1)\cdot \cancel{k}} \cdot \frac{\cancel{k}\cdot(k+1)}{(-1)^{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k-1} = \lim_{k\to\infty}\frac{1+\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{k}} = 1$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)\cdot k} x^k$$ absolut konvergent für $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

Untersuchung der Randpunkte

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)\cdot k}(-1)^k = \sum_{k=2}^{\infty} \boxed{\frac{1}{(k-1)\cdot k}} \qquad \boxed{a_k = \frac{1}{(k-1)\cdot k}}$$

$$x = 1 \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)\cdot k}(1)^k = \sum_{k=2}^{\infty} \boxed{\frac{(-1)^k}{(k-1)\cdot k}} \qquad \boxed{b_k = \frac{(-1)^k}{(k-1)\cdot k}}$$

$$\Rightarrow |a_k| = |b_k| = \frac{1}{(k-1)\cdot k}$$

Seminar KW 16, Aufgabe 1 $\underset{\text{Monotoniekriterium}}{\Rightarrow} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k-1)}$ konvergent

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)\cdot k} x^k$$ absolut konvergent für $|x| \le 1$

3. Aufgabe

Welche Funktion wird durch die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+2} x^{k+1}$ dargestellt?

Lösung

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+2} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k} x \cdot x^{k} = \frac{x}{9}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^{k}$$

$$= \frac{x}{9}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)\left(-\frac{x}{3}\right)^{k-1} = \frac{x}{9}\cdot\left(-\frac{x}{3}\right)\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^{k}}$$

$$|q| < 1: \sum_{k=0}^{\infty} q^{k} = \frac{1}{1-q}$$

$$= -\frac{x^2}{27}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)} \text{ für } \left|\left(-\frac{x}{3}\right)\right| < 1 \Rightarrow -\frac{x^2}{27+9x}, |x| < 3$$