Tutorium 7

THEMA: Fourier-Reihen

Zusammenfassung

- **Taylor-Reihe**: differenzierbare Funktionen durch Potenzreihen darstellen

  Fourier-Reihe: unstetige, periodische Funktionen durch trigonometrische Reihen darstellen
  ↳ nicht differenzierbare

- f hat Periode p / p-periodisch $\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}: f(x) = f(x+p)$

  Fourier-Reihe mit Periode $p = 2\pi$ → jede p-periodische Funktion mit $p \neq 2\pi$ in 2π-periodische umformen durch

  Subst. $f^*(x) = f\left(\frac{p}{2\pi} t\right)$

  → Fourier-Reihe von f^*

  Resubst. $t = \frac{2\pi}{p} x$ → Fourier-Reihe von f

- f 2π-periodisch und in $[0, 2\pi]$ integrierbar

$$\Longrightarrow \underbrace{f \sim}_{\text{f formale Fourier-Reihe zugeordnet}} \underbrace{a_0 + \sum_{k=1}^{\infty \; (n\text{ [statt } \infty])} \left(a_k \cdot \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)}_{\text{Fourier-Reihe von } f} = \underbrace{F_n(f(x))}_{\text{n-tes Fourier-Polynom zu f}} \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

$, x \in \mathbb{R}$

mit Fourier-Koeffizienten

		allgemein	gerade (symmetrisch zum Ursprung) $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = f(-x)$	ungerade (schiefsymm. zum Ursprung) $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = -f(-x)$
	a_0	$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$	$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$	0
$k=1,2,\ldots$	a_k	$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$	$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$	0
$k=1,2,\ldots$	b_k	$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$	0	$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$

[Grenzen je nach integrierbarem Intervall $0, 2\pi$ / $-\pi, \pi$ / etc.]

- f • 2π-periodisch
  - stückweise stetig, differenzierbar in $[0, 2\pi]$-Periodenintervall
    in $[a,b]$
    wenn f in Intervallen stetig + an Nahtstellen existiert Grenzwert
    f und f' in $[a,b]$ stückweise stetig
    also zusammengesetzte Funktionen differenzierbar

$\Longrightarrow$ dann **konvergiert die Fourier-Reihe** von f $\forall x \in \mathbb{R}$ gegen einen Wert:

- $\forall x_s$, wo f stetig: konvergiert gegen Funktionswert $f(x_s)$
- $\forall x_s$, wo f unstetig: konvergiert gegen arithmetisches Mittel aus

links- und rechtsseitigem Grenzwert:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x_s - h) + f(x_s + h)}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}\left(\lim_{\substack{x\to x_s\\ x<x_s}} f(x) + \lim_{\substack{x\to x_s\\ x>x_s}} f(x)\right)$$

(x_s einsetzen)

- Mittelwerteigenschaft (MWE)

MWE an x_0 gültig $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{f(x_0)}_{\text{Funktionswert}} = \underbrace{\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x_0-h)+f(x_0+h)}{2}}_{\text{arithm. Mittel aus l. und r. seitigem Grenzwert}}$

→ dann konvergiert die Fourier-Reihe an x_0 gegen den Funktionswert

also gilt die MWE $\forall x$, an denen f stetig sowieso,
nur unstetige Stellen auf MWE prüfen

⇒ f besitzt MWE, wenn $\forall x \in \mathbb{R}$ die MWE gilt

- Fourier-Analyse

1. Skizze
2. Symmetrie? [Nahtstellen egal]
   → gerade / ungerade / nichts
3. MWE untersuchen
4. Integrationsbereich festlegen
5. Fourier-Koeffizienten berechnen

→ Fourier-Reihe

- Regeln:

- $\int_a^b x \sin(kx)\,dx = \left[\frac{\sin(kx)}{k^2} - \frac{x\cos(kx)}{k}\right]_a^b$, $k \neq 0$

  $\int_a^b x \cos(kx)\,dx = \left[\frac{\cos(kx)}{k^2} + \frac{x\sin(kx)}{k}\right]_a^b$, $k \neq 0$

- $\sin(\pi k) = 0$

  $\cos(\pi k) = (-1)^k$

- $\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) = \begin{cases} 0 & , k \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{k+3}{2}} & , k \text{ ungerade} \end{cases}$

  $\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) = \begin{cases} (-1)^{k/2} & , k \text{ gerade} \\ 0 & , k \text{ ungerade} \end{cases}$

- $\sin(-x) = -\sin(x)$ da ungerade Funktion

  $\cos(-x) = \cos(x)$ da gerade Funktion

- $\int_a^b x^2 \sin(kx)\,dx = \left[\frac{2x\sin(kx)}{k^2} + \frac{(2-k^2x^2)\cos(kx)}{k^3}\right]_a^b$, $k \neq 0$

  $\int_a^b x^2 \cos(kx)\,dx = \left[\frac{2x\cos(kx)}{k^2} + \frac{(2-k^2x^2)\sin(kx)}{k^3}\right]_a^b$, $k \neq 0$

Aufgaben

(1) Die Werte der 2π-periodischen Funktion f sind im Periodenintervall $0 < x < 2\pi$ gegeben durch $f(x) = x \quad , 0 < x < 2\pi$

a. Wie muss f an den Nahtstellen definiert werden, sodass f die MWE erfüllt?

b. Berechne die Fourier-Reihe mithilfe der Fourier-Koeffizienten.

(2) Die Werte der 2π-periodischen Funktion f sind im Periodenintervall $(-\pi, \pi]$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

a. Berechne die Fourier-Koeffizienten der Funktion

b. Erfüllt f die MWE an den Punkten $x_0 = 0$ und $x_1 = \pi$?

(3) Die Werte der 2π-periodischen Funktion f sind im Periodenintervall $-\pi < x \leq \pi$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 3, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

a. Skizziere f im Intervall $-3\pi \leq x \leq 3\pi$.

b. Berechne die Fourierkoeffizienten a_2 und b_5.

c. Gegen welchen Wert konvergiert die Fourier-Reihe an der Stelle $x_0 = 0$?

(4) Die Werte der 2π-periodischen Funktion f sind im Periodenintervall $0 < x < 2\pi$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

a. Wie muss f an den Nahtstellen definiert sein, damit sie die MWE erfüllt?

b. Berechne die Fourierreihe von f.

⑤ Die Werte der 2π-periodischen Funktion f sind im Periodenintervalle $[0,2\pi]$ gegeben durch:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , 0 \le x < \pi/2 \\ -\cos(x) & , \pi/2 \le x \le 3\pi/2 \\ 0 & , 3\pi/2 < x < 2\pi \end{cases}$$

a. Skizziere f im Intervalle $-3\pi \le x \le 3\pi$

b. Berechne a_0, a_1 und a_5 [HINWEIS: $2\cos(x)\cos(kx) = \cos((k+1)x) + \cos((k-1)x)$ trigonometrische Identität $k=2,3,\ldots$]

c. Berechne alle b_k

⑥ Die Werte der 2π-periodischen Funktion f sind im Periodenintervalle $[0,2\pi]$ gegeben durch $f(x)=x^2$, $0 \le x < 2\pi$

a. Berechne die Fourier-Reihe mithilfe der Fourier-Koeffizienten.
(Nutze eine Regel aus der Zusammenfassung)

b. Ist die MWE an den Stellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ erfüllt? Begründe.