

Tutorium 13

THEMA: Gebietsintegrale

Zusammenfassung

- Integration skalarer Funktionen (mehrere Veränderliche)

$f: G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$
 stetig
 $\iint_G \dots \int f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n)$

← analoges Vorgehen wie bei Funktionen mit 2 Veränderlichen

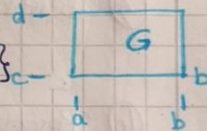
- 2 Veränderliche:

$f: G \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$
 stetig

→ Volumen gesucht

G ist Rechteck

$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$



$\Rightarrow S = \iint_G f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$
 x als konstante auffassen

$= \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$
 y als konstante auffassen

Satz von Fubini
 f stetig in G
 → Integrationsreihenfolge vertauschbar

G KEN Rechteck

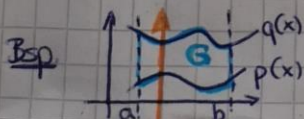
y-projizierbar

⇔ x zwischen festen Grenzen
 y zwischen variablen Grenzen

→ erst nach y integrieren

$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, p(x) \leq y \leq q(x)\}$
 stetig

$S = \iint_G f(x, y) d(x, y)$
 iteriertes Integral
 $= \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y) dy dx$



x-projizierbar

⇔ y zwischen festen Grenzen
 x zwischen variablen Grenzen

→ erst nach x integrieren

$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, r(y) \leq x \leq s(y)\}$
 stetig

$S = \iint_G f(x, y) d(x, y)$
 iteriertes Integral
 $= \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} f(x, y) dx dy$



Aufgaben

zusätzliche Regel: Gerade durch $P_1 = (x_1, y_1)$
und $P_2 = (x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\rightarrow y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1$$

$$\rightarrow x = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \cdot (y - y_1) + x_1$$

- ① Berechne das Gebietsintegral

$$\iint_G (x^2 + y) d(x, y)$$

mit $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x\}$
und skizziere das Integrationsgebiet G .

- ② G ist das Dreieck mit den Eckpunkten $(-1, 0), (0, -2), (4, 0)$.

Skizziere den Integrationsbereich G und berechne das Gebietsintegral

$$\iint_G 3y d(x, y).$$

- ③ Berechne das Gebietsintegral $\int_0^{\pi} \int_1^2 \int_{-2}^0 (\sin(x) + xy - 2z^2) dz dy dx$

- ④ Berechne das Gebietsintegral $\iint_G (2y + 3x + 2) d(x, y)$

a y-projizierbar (Tipp: Aufteilen)

b x-projizierbar

