2. Aufgabe

Gegeben ist die 3x3 Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie det(A) . Was folgt daraus für die Eigenwerte von **A**?

b) Beweisen Sie, dass $\lambda=1$ ein Eigenwert von **A** ist.

c) Bestimmen Sie alle weiteren Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix **A** und geben Sie das charakteristische Polynom an.

Lösung

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a)

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ + \\ \hookleftarrow \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ da zwei Zeilen gleich sind.}$$

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

b)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

λ=1 Eigenwert von **A**

$$\boxed{\exists \vec{x} \neq} \vec{0}: \quad \mathbf{A}\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} \quad \Leftrightarrow \boxed{(\mathbf{A} - \mathbf{E})\vec{x} = \vec{0}}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{x_1} \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = -t$$

$\Rightarrow$ λ=1 ist Eigenwert von **A**

Alle Eigenvektoren zum Eigenwert λ=1 $\vec{x} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$4 = spur(\mathbf{A}) = \underbrace{\lambda_1}_{=0} + \underbrace{\lambda_2}_{=1} + \lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = 3$$

$$spur(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)$$

$$\Rightarrow p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (1 - \lambda)\lambda(\lambda - 3) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda$$

Alle Eigenwerte von **A**

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E})\vec{x}=\vec{0}$$

$$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=3$$

Eigenvektor zum EW $\lambda_1=0$

$$\mathbf{A}-0\cdot\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-1)\\+\\ \end{matrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cancel{x_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\cancel{0}\end{pmatrix}$$

$$x_1+x_3=0 \qquad x_3=t,t\in\mathbb{R}$$
$$x_2+x_3=0 \qquad x_2=-t$$
$$x_1=-t$$

EV zum EW $\lambda_1=0:\overrightarrow{x^{(1)}}=t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},t\neq 0$

Bereits berechnet EV zum EW $\lambda_2=1:\overrightarrow{x^{(2)}}=t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},t\neq 0$

Eigenvektor zum EW $\lambda_3=3$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{E})\vec{x}=\vec{0}$$

$$\mathbf{A}-3\cdot\mathbf{E}=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-2&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-2&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2&0&1&0\\0&-2&1&0\\1&1&-1&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&-2&1&0\\-2&0&1&0\end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot 2 \\ + \\ \hookleftarrow \end{array} \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{0} \end{array}\right) \longleftrightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{array}$$

$$x_3 = t, t \in \mathbb{R}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} t$$

$$x_1 = -x_2 + x_3 = \frac{1}{2} t$$

EV zum EW $\lambda_3 = 3$ $\quad \overrightarrow{x^{(3)}} = t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0$