2. Aufgabe

Prüfen sie mit dem Nullfolgenkriterium ob Divergenz vorliegt.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$, b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$,c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3k-1}$.

Lösung

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \Rightarrow a_k = \frac{1}{2k-1}$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k-1} = 0$$

Das Nullfolgenkriterium liefert keine Aussage, denn es ist nur ein notwendiges Kriterium.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \Rightarrow a_k = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{1}{e} \neq 0 \quad \Rightarrow \text{Reihe divergent}$$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3k-1} \Rightarrow a_k = \frac{k}{3k-1}$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{3k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3-\frac{1}{k}} = \frac{1}{3} \neq 0 \quad \Rightarrow \text{Reihe divergent}$$

3. Aufgabe

Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k+5}{3^k}$

Lösung

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k+5}{3^k} \Rightarrow a_k = \frac{2^k+5}{3^k} = \frac{2^k}{3^k} + \frac{5}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{5}{3^k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k+5}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{5}{3^k}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5}{3^k}$$

$$|q| < 1: \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k + 5\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} + 5 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{21}{2}$$