Definition 2

$$X : [0,10] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} t \cdot \cos(2\pi t) \\ t \cdot \sin(2\pi t) \\ 2+t \end{pmatrix}$$

Eine Raum-Kurve C ist eine Abbildung

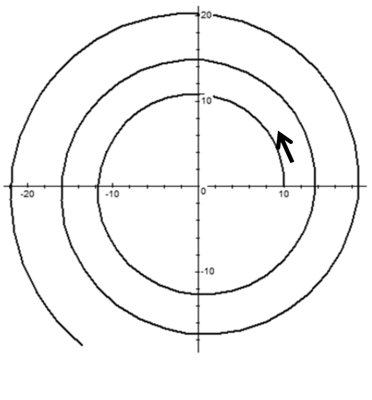
$$X : \underbrace{[\alpha,\beta]}_{\text{Parameter-intervall}} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \underbrace{t}_{\text{Kurven-parameter}} \mapsto X(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}}_{\text{Parameter-darstellung}}$$

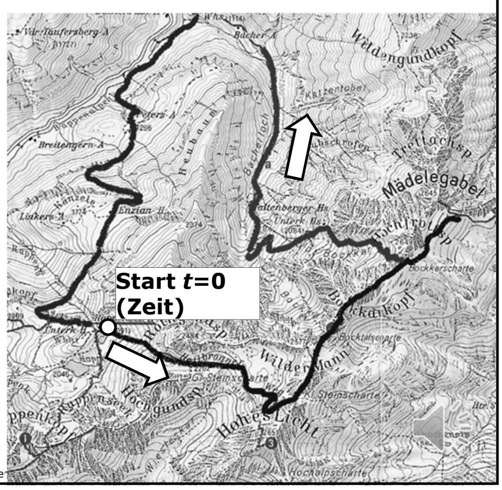
Allgemeine Definition:

$$X : [\alpha,\beta] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Durch die Parameterdarstellung ist eine Orientierung der Kurve gegeben. Die Kurve wird mit steigendem Kurvenparameter t durchlaufen: $\Rightarrow$

$$t_1 < t_2 \Rightarrow \quad X(t_1) \Rightarrow X(t_2)$$





$X:[\alpha,\beta]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n,$

$t\mapsto X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\\vdots\\x_n(t)\end{pmatrix}$

Anfangspunkt

$$X(\alpha)=\begin{pmatrix}x_1(\alpha)\\x_2(\alpha)\\\vdots\\\vdots\\x_n(\alpha)\end{pmatrix}$$

Endpunkt

$$X(\beta)=\begin{pmatrix}x_1(\beta)\\x_2(\beta)\\\vdots\\\vdots\\x_n(\beta)\end{pmatrix}$$

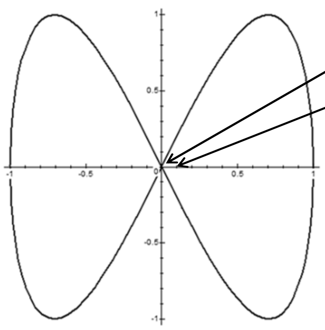
Bemerkung

Eine Kurve hat i.a. unendlich viele Parameterdarstellungen. Durch eine Parameterdarstellung ist die Kurve jedoch schon eindeutig bestimmt.

geschlossene Kurve

Anfangspunkt $X(0)=\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{pmatrix}$

= Endpunkt $X(2\pi)=\begin{pmatrix}x_1(2\pi)\\x_2(2\pi)\end{pmatrix}$



$$X(t)=\begin{pmatrix}\sin(t)\\\sin(2t)\end{pmatrix},0\le t\le 2\pi$$

Lissajous-Kurve

dopelpunktfreie Kurve

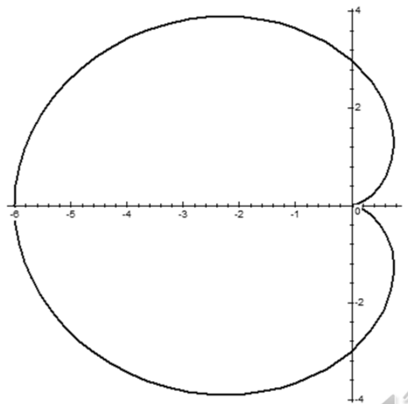
Abgesehen von $X(\alpha) = X(\beta)$

entspricht jedem Kurvenpunkt genau ein Parameterwert *t*.

Kardioide

$$t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} 3(1-\cos(t))\cos(t) \\ 3(1-\cos(t))\sin(t) \end{pmatrix},$$

$0 \le t \le 2\pi$



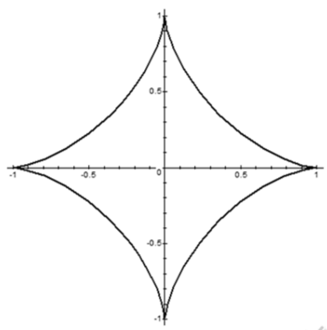
Die Kurve *C* heißt stetig bzw. stetig differenzierbar

$$\Leftrightarrow t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

stetig bzw. stetig differenzierbar

Astroide

$$t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}, 0 \le t \le 2\pi$$

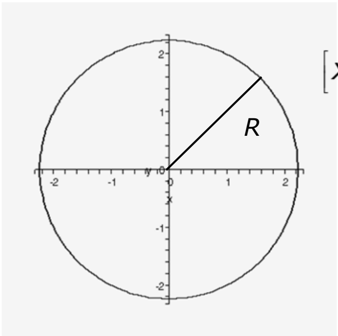


Beispiel 7 **Kreis um den Ursprung mit Radius *R*>0**

Parameterdarstellung

$$X:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2, t\mapsto X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R\cos(t)\\R\sin(t)\end{pmatrix}$$

implizite Darstellung $x_1^2+x_2^2=R^2$



$$[x_1(t)]^2+[x_2(t)]^2=R^2\cos^2(t)+R^2\sin^2(t)$$

$$=R^2\Big(\underbrace{\cos^2(t)+\sin^2(t)}_{=1}\Big)=R^2$$