1 21. Die Taylorsche Formel

Funktion = Summe eines Polynoms + Fehlerterm (Restglied)
Problem: Funktionen auf Rechner darstellen (sin,cos,Expo,..)
Grundidee:
f(x) durch Polynom Pn(x) approximieren (annähern)
Polynom :

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots\dots + a_nx^n\ ,\ a_k \in \mathbb{R}, x \in I \subseteq \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

1. Forderung 0 ist im Intervall enthalten
Ansatz:
Wert von f an der Stelle x (exakt)
N̄äherung + Rest

$$\underbrace{f(x)}_{\text{exakt}} = \underbrace{P_n(x)}_{\text{Näherung}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Rest (Fehler)}}\quad , x \in I\ \ 0 \in I$$

Weitere Forderung:
an der Stelle 0 soll der Funktionswert und der Wert der k'ten Ableitung von k=0 (0.ableitung)

$$\underbrace{f^{(k)}(0)}_{\text{gegeben}} = P_n^{(k)}(0)\ ,\ k = 0,1,2,\dots n$$

k'te Ableitung eines Polynoms:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \dots\dots + a_nx^n$$

$$k = 1 \Rightarrow (P_n(x))' = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2x + 3 \cdot a_3x^2 \dots\dots + n \cdot a_nx^{n-1}$$

$$k = 2 \Rightarrow (P_n(x))'' = 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3x \dots\dots + n \cdot (n-1)a_nx^{n-2}$$

$$\boxed{\Rightarrow a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)}$$

1.1 Näherungspolynom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\, x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)(x-0)^k$$

Stelle 0 geht als Funktionswert ein
Wenn x(hoch)k (x-0)(hoch)k
Problem: 0 nicht im Intervall ?
Forderung ist gleich, bzw bezieht sich auf x0
= (x-x0)(hoch)k

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$