8. Aufgabe

Man bestimme für die im Intervall [0,1] definierte Funktion $f(x)=x^3$ eine Zwischenstelle ξ mit welcher der Mittelwertsatz der Integralrechnung gültig ist.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

Lösung

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt

$$\boxed{\int_0^1 x^3 dx} = \xi^3(1-0) = \xi^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}} = \xi^3 \Rightarrow \xi = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

9. Aufgabe

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung um eine Abschätzung für das folgende bestimmte Integral anzugeben:

$$\int_0^{10} \frac{e^{-\frac{x}{10}}}{100+x}\,dx$$

Lösung

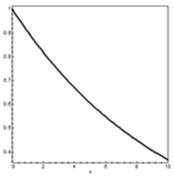
Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert eine Stelle $\xi \in [0,10]$ so dass gilt

$$\int_0^{10} \frac{e^{-\frac{x}{10}}}{100+x}\,dx = \boxed{\frac{e^{-\frac{\xi}{10}}}{100+\xi}} \cdot 10$$

$= \boxed{\frac{e^{-\frac{\xi}{10}}}{100+\xi}}\, 10$ Abschätzung: größtmöglicher und kleinstmöglicher Wert, wenn $\boxed{\xi\in[0,10]}$

Bruch wird größer, wenn Nenner verkleinert wird

Bruch wird größer, wenn Zähler vergrößert wird



$$\frac{e^{-\frac{\xi}{10}}}{100+\underbrace{\xi}_{\geq 0}} \leq \frac{e^{-\frac{\xi}{10}}}{100} \underset{e^x \Uparrow}{\leq} \frac{1}{100}$$

$$\frac{e^{-\frac{\xi}{10}}}{100+\underbrace{\xi}_{\in[0,10]}} \geq \frac{e^{-\frac{\xi}{10}}}{100+10} \geq \frac{e^{-\frac{10}{10}}}{110}$$

Bruch wird kleiner, wenn Nenner vergrößert wird

Bruch wird kleiner, wenn Zähler verkleinert

Abschätzung für das Integral:

$$\underbrace{\frac{10}{e\cdot 110}}_{=0.03344358556} \leq \int_0^{10} \frac{e^{-\frac{x}{10}}}{100+x}\,dx \leq 10\cdot\frac{1}{100} = \frac{1}{10}$$

$$\int_0^{10} \frac{e^{-\frac{x}{10}}}{100+x}\,dx = 0.0607196..$$

Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner, HTWK Leipzig, MNZ