3. Aufgabe

Entscheiden Sie mit Hilfe von Determinanten, ob durch die Punkte P_1=(1,1), P_2 =(2,-3), P_3 =(5,7) ein Kreis definiert ist.

Lösung

Die Gleichung eines Kreises mit Radius r und dem Mittelpunkt M= (x_0, y_0) lautet

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 - r^2 = 0$$

bzw. ausmultipliziert, wobei $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ unbekannte, noch zu bestimmende Koeffizienten sind

$$a_1\left(x^2 + y^2\right) + a_2x + a_3y + a_4 = 0$$

P_1=(1,1), P_2 =(2,-3), P_3 =(5,7)

Da der Kreis durch die Punkte P_1, P_2, P_3 gehen soll, muss gelten

$$\left.\begin{array}{ll}
(1) & a_1\left(x^2 + y^2\right) + a_2x + a_3y + a_4 = 0 \\
(2) & a_1\left(1^2 + 1^2\right) + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 + a_4 = 0 \\
(3) & a_1\left(2^2 + (-3)^2\right) + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot (-3) + a_4 = 0 \\
(4) & a_1\left(5^2 + 7^2\right) + a_2 \cdot 5 + a_3 \cdot 7 + a_4 = 0
\end{array}\right\}$$

homogenes LGS für die unbekannten Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}
\begin{pmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 13 & 2 & -3 & 1 \\ 74 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 13 & 2 & -3 & 1 \\ 74 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ein homogenes LGS ist immer trivial lösbar: $a_1=0, a_2=0, a_3=0, a_4=0$

$\det(\mathbf{A}) = 0$

$\Leftrightarrow \mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ unlösbar oder mehrdeutig lösbar

Da wir an nicht-trivialen Lösungen interessiert sind, muss die Determinante der Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems Null werden.

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 13 & 2 & -3 & 1 \\ 74 & 5 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \quad + & \qquad - & \quad + & \quad - \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 13 & 2 & -3 & 1 \\ 74 & 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot \det\left(\mathbf{A}_{1,j}\right)$$

Entwickeln nach der ersten Zeile

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 13 & 2 & -3 & 1 \\ 74 & 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 13 & 2 & -3 & 1 \\ 74 & 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 13 & 2 & -3 & 1 \\ 74 & 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 13 & 2 & -3 & 1 \\ 74 & 5 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 13 & 2 & -3 & 1 \\ 74 & 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \left(x^2+y^2\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot x \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 13 & -3 & 1 \\ 74 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ y \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 13 & 2 & 1 \\ 74 & 5 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 13 & 2 & -3 \\ 74 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 13 & 2 & -3 & 1\\ 74 & 5 & 7 & 1\end{vmatrix} = \left(x^2+y^2\right)\cdot \underbrace{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 5 & 7 & 1\end{vmatrix}}_{a_1} + (-1)\cdot x\cdot \underbrace{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 13 & -3 & 1\\ 74 & 7 & 1\end{vmatrix}}_{a_2}$$

$$+y\cdot \underbrace{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 13 & 2 & 1\\ 74 & 5 & 1\end{vmatrix}}_{a_3} + (-1)\cdot 1\cdot \underbrace{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 13 & 2 & -3\\ 74 & 5 & 7\end{vmatrix}}_{a_4}$$

Die Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ sind die Unterdeterminanten

Die drei Punkte P_1, P_2, P_3 liegen auf einem Kreis $\Leftrightarrow a_1 \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 5 & 7 & 1\end{vmatrix} \neq 0$$

$$a_1 = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 5 & 7 & 1\end{vmatrix}\begin{array}{c}\cdot(-1)\\ +\\ +\end{array} = \begin{array}{c} \qquad\qquad (-1)^{1+3} \\ \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -4 & 0\\ 4 & 6 & 0\end{vmatrix}\end{array}$$

Entwickeln nach der ersten Spalte

$$= \begin{vmatrix}1 & -4\\ 4 & 6\end{vmatrix} = 1\cdot 6 - (-4)\cdot 4 = 22 \neq 0$$

Die drei Punkte P_1, P_2, P_3 liegen auf einem Kreis