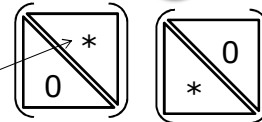


Satz 2 (Determinanten von Dreiecksmatrizen)

Ist \mathbf{A} eine Dreiecksmatrix, so ist

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$



Beweis: (für obere Dreiecksmatrizen; Vollständige Induktion)

Für eine obere Dreiecksmatrix \mathbf{A} gilt $a_{ij} = 0$ für $i > j$

(I) Induktionsanfang $n=2$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\Rightarrow \det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot 0$$



Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig

(II) Induktionsannahme. Für eine **beliebig gewählte, aber festgehaltene** natürliche Zahl $n, n \geq 2$ gelte

Ist \mathbf{A} eine obere $n \times n$ Dreiecksmatrix \mathbf{A} dann ist

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

$$a_{ij} = 0 \text{ für } i > j$$

(III) Induktionsschluß. Sei \mathbf{A} eine obere $(n+1) \times (n+1)$ Dreiecksmatrix

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot \det(\mathbf{A}_{k,j})$$

Entwicklung nach der $(n+1)$ -ten Zeile (Satz 1b) $k=n+1$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n+1+j} \cdot \underbrace{a_{n+1,j}}_{=0 \text{ für } n+1 > j} \cdot \det(\mathbf{A}_{n+1,j}) \\ &= (-1)^{n+1+n+1} a_{n+1,n+1} \cdot \det(\mathbf{A}_{n+1,n+1}) \end{aligned}$$



Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig

$$= (-1)^{n+1+n+1} a_{n+1,n+1} \cdot \det(\mathbf{A}_{n+1,n+1})$$

n -reihige obere Dreiecksmatrix, für deren Determinante gilt nach Induktionsannahme (II)

$$\det(\mathbf{A}_{n+1,n+1}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

$$\Rightarrow \det(\mathbf{A}) = (-1)^{2(n+1)} a_{n+1,n+1} \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

