1 Tutorial 1 - Taylor

1.1 Zusammenfassung

Zweck:
- beliebige Funktion als Polynom mit Fehler darstellen = Approximieren
- Wenn f im Intervall I[a,b] (n+1)-mal stetig differenzierbar
dann gilt für alle x Element I die Taylorsche Formel:

$$f(x) = \boxed{T(x) = P_n(x) + R_n(x)} \quad \text{mit } \underbrace{n \in \mathbb{N}_0}_{\text{Ordnung}}, \ \underbrace{x_0 \in I}_{\text{Entwicklungspunkt}} \text{ beliebig aber fest gewählt}$$

mit

Polynom $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Restglied von Lagrange $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ mit ξ zwischen x_0 und $x \in I$

Taylorpolynome.

1.1.1 Fehlerabschätzung des Restglieds

$|R_n(x)| \; (= |f(x) - P_n(x)|) = \dots \leq \dots \longrightarrow$ Ergebnis in Abhängigkeit von x

$\rightarrow$ ξ raus durch worst-case - Abschätzung, d.h. ξ zwischen x_0 und x so wählen, dass $|R_n(x)|$ größtmöglich wird.

$\Rightarrow$ dadurch maximaler Fehler (bestimmt), der bei Approximation von $f(x)$ durch $P_n(x)$

falls bestimmtes x gegeben: abgeschätztes $R_n(x_t) \gtrless 0 \longrightarrow$ tatsächlicher Wert von $f(x)$ an der bestimmten Stelle x_t ist kleiner / größer als der mit $P_n(x_t)$ berechnete

$\hookrightarrow$ „x_t"

$\Rightarrow f(x_t) \in$ Intervall $[P_n(x_t) - |R_n(x_t)|, P_n(x_t)]$ / $[P_n(x_t), P_n(x_t) + R_n(x_t)]$