THEMA: Potenzreihen

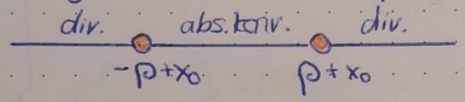
Zusammenfassung

- **Potenzreihe** = Reihe mit reeller Variable x

  allgemeine Form: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, $x \in \mathbb{R}$
  x_0 reelle Konstante (Mittelpunkt)
  a_k reelle Zahlenfolge

- **Für welche x ist Potenzreihe konvergent?**

  $\Rightarrow$ Konvergenzradius ρ $(0 \le \rho \le \infty)$



Randpunkte gesondert betrachten

also $\left.\begin{array}{l} |x-x_0| < \rho \\ -\rho+x_0 < x < \rho+x_0 \end{array}\right\}$ absolut konvergent

$\left.\begin{array}{l} |x-x_0| > \rho \\ x < -\rho+x_0 \vee x > \rho+x_0 \end{array}\right\}$ divergent

$\left.\begin{array}{l} |x-x_0| = \rho \\ x = -\rho+x_0 \vee x = \rho+x_0 \end{array}\right\}$ keine Aussage
$\rightarrow$ Randpunkte gesondert betrachten

wenn $\rho = \infty$: $|x-x_0| < \infty$, also $\forall x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent

- **Konvergenzradius bestimmen**

  Quotientenkriterium (QK): $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \rho$

  Wurzelkriterium (WK): $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \rho$

- **Stetigkeit**: Potenzreihe hat Konvergenzradius ρ
  $\longrightarrow$ stetig für $|x-x_0| < \rho$

  Ableitung: Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ konvergent für $|x-x_0| < \rho$
  $\longrightarrow$ $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k (x-x_0)^{k-1}$ ebenfalls konvergent für $|x-x_0| < \rho$

- Potenzreihen miteinander $+$ / $-$ / $\overset{\text{ableiten}}{f'(x)}$ / $\overset{\text{integrieren}}{\int f(x)dx}$
  $\rightarrow$ neue Potenzreihen

Regeln für Konvergenzradius: $\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k}_{\text{K.radius } \rho_A} \pm \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k}_{\text{K.radius } \rho_B} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) x^k}_{\text{K.radius } \rho = \min\{\rho_A, \rho_B\}}$

$$\underbrace{\lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k}_{\text{K.radius } \rho_A} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k x^k}_{\text{K.radius } \rho_A}$$

- Potenzreihen wichtiger Funktionen

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad \sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad \cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

jeweils $\rho = \infty$
$\Rightarrow$ alle Funktionen abs. konvergent und stetig $\forall x \in \mathbb{R}$

- Regeln

- $\binom{\alpha}{k} = 0$, wenn $k > \alpha$

  $\binom{\alpha}{k} = 1$, wenn $k = 0$

  $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$, wenn $k = 1, 2, \ldots$

- $\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{k} = 1$

Aufgaben

① Bestimme den Konvergenzradius.

a. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k \cdot x^k}{k-1}$

c. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2+x)^{2k}}{(2+\frac{1}{k})^k}$

b. $\sum_{k=0}^{\infty} 5^{\frac{k}{2}} x^k$

② Ist die Potenzreihe für $x = -\frac{1}{2}$ abs. konv. / div. / bed. konv. ?

a. $\sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k x^{5k}$

b. $\sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+8}{k} \cdot \frac{1}{(3k+2)^3} \cdot x^k$

③ Für welche Zahlen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe?

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$

b. $\sum_{k=0}^{\infty} 8^k (x+1)^{3k}$

c. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{3^k (2k+1)^2}$

d. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 \cdot 2^k} (x+1)^k$