Aufgaben

L'Hospital

Bestimme den Funktionenlimes

① $$\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{x} - \frac{\sin x}{x^3} \underset{\text{Typ „}\infty-\infty\text{"}}{=} \lim_{x\to0} \frac{x}{x^3} - \frac{\sin x}{x^3} = \lim_{x\to0} \frac{x-\sin x}{x^3} \overset{„\frac{0}{0}"}{=} \lim \frac{1-\cos x}{3x^2} \overset{„\frac{0}{0}"}{=} \lim \frac{\sin x}{6x} \overset{„\frac{0}{0}"}{=} \lim_{x\to0} \frac{\cos x}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

② $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} \overset{„\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = \boxed{0}$$

③ $$\lim_{x\to0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \underset{\text{Typ „}1^\infty\text{"}}{=} \lim_{x\to0} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to0} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)} \underset{\text{da e-Fkt. stetig}}{=} e^{\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+x)} \underset{\text{nach NR}}{=} e^{1} = \boxed{e}$$

$$\left[\ \textbf{NR}: \lim_{x\to0} \frac{1}{x}\ln(1+x) \underset{\text{Typ „}\infty\cdot0\text{"}}{=} \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{„\frac{0}{0}"}{=} \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to0} \frac{1}{1+x} = \underline{1}\ \right]$$

④ $$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x \underset{\text{Typ „}0\cdot(-\infty)\text{"}}{=} \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{„\frac{-\infty}{\infty}"}{=} \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} -\frac{x^2}{x} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} -x = \boxed{0}$$

⑤ $$\lim_{x\to0} (1+2x)^{\tan x} = \lim_{x\to0} e^{\ln(1+2x)^{\tan x}} = \lim_{x\to0} e^{\tan x\cdot\ln(1+2x)} \underset{\text{da e-Fkt stetig}}{=} e^{\lim_{x\to0}\tan x\cdot\ln(1+2x)} \underset{\text{nach NR}}{=} e^{0} = \boxed{1}$$

$$\left[\ \textbf{NR}: \lim_{x\to0} \tan x\cdot\ln(1+2x) = \lim_{x\to0} \frac{\overset{\to 0}{\sin x}\cdot\overset{\to 0}{\ln(1+2x)}}{\underset{\to 1}{\cos x}} = \frac{0\cdot0}{1} = \underline{0}\ \right]$$

Taylorsche Formel

⑥ • $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$, $x_0 = 1$, $n = 2$ → Taylorpolynom 2-ter Ordnung, $x \in [1, \infty)$

da 2-ter Ordnung → bis 3. Ableitung, bis 2. Ableitung Wert bestimmen

$f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ $\qquad f(x_0) = f(1) = \sqrt[4]{1} = \underline{1}$

$f'(x) = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{x^3}}$ $\qquad f'(1) = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{1^3}} = \underline{\frac{1}{4}}$

$f''(x) = -\frac{3}{16} \cdot x^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{16 \cdot \sqrt[4]{x^7}}$ $\qquad f''(1) = -\frac{3}{16 \sqrt[4]{1^7}} = \underline{-\frac{3}{16}}$

$f'''(x) = \frac{21}{64} \cdot x^{-\frac{11}{4}} = \frac{21}{64 \cdot \sqrt[4]{x^{11}}}$

$T_2(x)$:

$$P_2(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$
$$= 1 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{32}(x-1)^2$$
$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot (x - x_0)^3$$
$$= \frac{\cancel{21}^{\,7}}{64} \cdot \frac{1}{\cancel{6}_2} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\xi^{11}}}(x-1)^3 = \frac{7}{128 \cdot \sqrt[4]{\xi^{11}}} \cdot (x-1)^3$$

ξ zwischen $x_0 = 1$ und $x \in [1, \infty)$

maximieren durch kleinstmögliche Zahl $\xi = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{\xi^{11}}} = 1$

• Abschätzung: $|R_2(x)| = \left| \frac{7}{128} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\xi^{11}}} \cdot (x-1)^3 \right| \leq \frac{7}{128} \cdot \left| \frac{1}{\sqrt[4]{\xi^{11}}} \right| \cdot |(x-1)^3|$

$$\leq \frac{7}{128} \cdot (x-1)^3$$

• $T(x_t)$ an $x_t = 9$: $P_2(x_t) = P_2(9) = 1 + \frac{1}{4} \cdot (9-1) - \frac{3}{32}(9-1)^2$

$$= 1 + \frac{\cancel{8}^{\,2}}{\cancel{4}} - \frac{3}{32} \cdot 64_2 = 1 + 2 - 6 = \boxed{-3}$$

Wie gut ist die Näherung? : $|R_2(9)| = \left| \frac{7}{128} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\xi^{11}}} \cdot (9-1)^3 \right|$

$$\leq \left| \frac{1}{\sqrt[4]{\xi^{11}}} \right| \cdot \left| \frac{7}{_2 128} \cdot 8^3 \right|$$

wieder zu 1 abgeschätzt

$$\leq \left| \frac{7}{2} \cdot 8_4 \right| = |28| = \underline{28}$$

Die Näherung ist nicht so gut, der Wert $P_2(9) = -3$ weicht schlimmstenfalls um 28 nach oben oder nach unten ab : $-3 - 28 \leq \sqrt[4]{9} \leq -3 + 28$

$-31 \leq \sqrt[4]{9} \leq 25$

Intervall? : $R_2(9) > 0$ → tatsächlicher Wert $f(9) = \sqrt[4]{9}$ ist größer als $P_2(9) = -3$

$\Rightarrow \boxed{f(9) = \sqrt[4]{9} \in} [-3, -3 + 28] = \boxed{[-3, 25]}$

7 • $f(x) = \cos^3(x)$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $n=1 \rightarrow$ Taylorpolynom 1.Ordnung , $x \in [0, \pi]$

da 1-ter Ordnung → bis 2. Ableitung , bis 1. Ableitung wert bestimmen

$$f(x) = (\cos x)^3 \qquad f(x_0) = f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \left[\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right]^3 = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\cancel{2}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{8}\,4} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

$$f'(x) = -3(\cos(x))^2 \cdot \sin x \qquad f'\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = -3\cdot\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)^2 \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = -3\cdot\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \underline{-\frac{3\sqrt{2}}{4}}$$

$$f''(x) = +6\cos x \cdot \sin x \cdot \sin x + (-3(\cos x)^2)\cdot \cos x$$
$$= 6\cos x \cdot (\sin x)^2 - 3(\cos(x))^3$$

$$T_1(x) \begin{cases} \underline{P_1(x)} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) \\ \quad = \underline{\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \\ + \\ \underline{R_1(x)} = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2 \\ \quad = \underline{\frac{1}{2}\left(6\cos(\xi)\sin^2(\xi) - 3\cdot\cos^3(\xi)\right)\cdot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2} \end{cases}$$

mit ξ zwischen $x_0 = \frac{\pi}{4}$ und $x \in [0, \pi]$

• Abschätzung: $|R_1(x)| = \left|\frac{1}{2}\cdot\left(6\cdot\cos(\xi)\cdot\sin^2(\xi) - 3\cdot\cos^3(\xi)\right)\cdot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right|$

max 1   max 1 → $1^2 = 1$ max 1 → $1^3 = 1$

$$\leq \frac{1}{2}\left|6\cdot\underline{\cos(\xi)}\cdot\underline{\sin^2(\xi)}\right| + \left|-3\cdot\underline{\cos^3(\xi)}\right|\right)\cdot\left|\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right|$$

↳ durch $(\,)^2$ sowieso nicht negativ → |..| weglassen

$$\leq \frac{1}{2}\cdot\left(|6\cdot 1\cdot 1| + |-3\cdot 1|\right)\cdot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(6+3)\cdot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 = \boxed{\frac{9}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}$$

---

8 • $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = \frac{1}{4}$, $n=2 \rightarrow$ Taylorpolynom 2.Ordnung , $x \in [0,1]$

da 2-te Ordnung → bis 3. Ableitung , bis 2. Ableitung wert bestimmen

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \qquad f(x_0) = f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \underline{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1+x}} \qquad f'\left(\tfrac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \underline{\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\cdot\sqrt{(1+x)^3}} \qquad f''\left(\tfrac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}}\right)^3} = -\frac{1}{4\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3} =$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8\cdot\left(\sqrt{1+x}\right)^5} \qquad = -\frac{1}{\cancel{4}\cdot\frac{5\sqrt{5}}{\cancel{8}\,2}} = -\frac{2}{5\sqrt{5}} = \underline{-\frac{2\sqrt{5}}{25}}$$

$$T_2(x) \begin{cases} \underline{P_2(x) = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\left(x - \frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{5}}{25}\left(x - \frac{1}{4}\right)^2} \\ \underline{R_2(x)} = \frac{f'''(\xi)}{3!}\left(x - \frac{1}{4}\right)^3 = \underline{\frac{1}{16\left(\sqrt{1+\xi}\right)^5}\left(x - \frac{1}{4}\right)^3} \end{cases}$$

, ξ zwischen $x = \frac{1}{4}$ und $x \in [0,1]$