1 21. Die Taylorsche Formel

Funktion = Summe eines Polynoms + Fehlerterm (Restglied)
Problem: Funktionen auf Rechner darstellen (sin,cos,Expo,..)
Grundidee:
f(x) durch Polynom $P_n(x)$ approximieren (annähern)
Polynom : $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n,\ a_k \in \mathbb{R},\ x \in I \subseteq \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$
1. Forderung 0 ist im Intervall enthalten
Ansatz:
Wert von f an der Stelle x (exakt)
= Näherung + Rest
$\underbrace{f(x)}_{\text{exakt}} = \underbrace{P_n(x)}_{\text{Näherung}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Rest (Fehler)}}\ ,\ x \in I\ 0 \in I$

Weitere Forderung:
an der Stelle 0 soll der Funktionswert und der Wert der k'ten Ableitung von k=0 (0. Ableitung)
$\underbrace{f^{(k)}(0)}_{\text{gegeben}} = P_n^{(k)}(0),\ k = 0, 1, 2, ...n$
k'te Ableitung eines Polynoms:

$$\begin{array}{rcc} P_n(x) & = & a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n \\ k = 1 \Rightarrow\ (P_n(x))' & = & 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2x + 3 \cdot a_3x^2 + ... + n \cdot a_nx^{n-1} \\ k = 2 \Rightarrow\ (P_n(x))'' & = & 2 \cdot a_1 + 2 \cdot 3 \cdot a_2x + ... + n \cdot (n-1) \cdot a_nx^{n-2} \end{array}$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(0)$$

1.0.1 Näherungspolynom

$P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\,(x-0)^k$
Stelle 0 geht als Funktionswert ein
Wenn $x^k = (x-0)^k$
Problem: 0 nicht im Intervall ?
Forderung ist gleich, bzw bezieht sich auf x_0
$= (x - x_0)^k$
$P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}\,(x_0)\,(x - x_0)^k$

1.1 Satz von Taylor

Funktion f soll in einem Intervall, n+1 mal stetig differenzierbar sein.
d.h. Ableitungen existieren und sind stetig
Formel:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{Taylorpolynom n-ter Ordnung (Hauptteil)}}$$

$$+ \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n \text{Restglied von Lagrange}}$$

Entwicklungspunkt x_0 = beliebig, aber fest aus Intervall
Zwischenstelle ξ liegt zwischen x und x_0, kann also kleiner als x oder auch größer sein.

1.1.1 Fehlerabschätzung

n+1. Ableitung beschänkt im Intervall I.
= Für alle x aus I der Betrag der n+1 Ableitung von f an der Stelle x kleiner 0 einer Konstanten ist
$f^{(n+1)}$ beschränkt in I, d.h.:

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq M, \; x \in I$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)| &= \left| \tfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,(x-x_0)^{n+1} \right| \\ &= \tfrac{1}{(n+1)!} \left| (x-x_0 9)^{n+1} \right| \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \\ &\leq \tfrac{1}{(n+1)!} \left| (x-x_0 9)^{n+1} \right| M \end{aligned}$$

Man sieht:
1. Je größer das n, dest kleiner wird der Faktor $1\frac{1}{(1-n)!}$
auf Deutsch: mit Großerem n wird die approximation besser
2. Je weiter das x von x_0 weg liegt, desto größer wird der Bertrag $x - x_0$, desto mehr Einfluss hat der Term auf die Genauigkeit

1.1.2 Beispiel 1

Die Berechnung von Wurzeln - $\sqrt{42}$
mit TaylorPolynom 1. Ordnung; Entwicklungspunkt x_0 größer 0
$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\Rightarrow$ Taylorpolynom $\sqrt{x_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x - x_0)$
setzten x ein ($\sqrt{42}$) und bestimmen $x_0 = 36$
$\sqrt{x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x - x_0) \Rightarrow \sqrt{42} \approx \sqrt{36} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{36}}(42 - 36)}_{\frac{6}{12}} = 6.5$

Umstellen für Fehlerabschätzung des Restglieds

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$$
$$\left|f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)\right| = \left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2\right|$$

Fehlerabschätzung des Restglieds $R_1 = \frac{1}{2!}f''(\xi)(x - x_0)^2$
Brauchen 2. Ableitung
$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$
Dann einsetzten, ergibt:
$\Rightarrow R_1 = \frac{1}{2!} \cdot \left(-\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{\xi^3}}\right)(x - x_0)^2$
Umstellen und einsetzten:
$= -\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{\xi^3}}(42 - 36)^2$, ξ zwischen x = 42 und $x_0 = 36$
Jetzt alles zusammen packen:

$$\left|\sqrt{42} - \underbrace{\left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)\right)}_{=6.5}\right| = \underbrace{\left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2\right|}_{R_1} = \left|-\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{\xi^3}}(6)^2\right|$$

Den Abschnitt mit ξ verkürzen

$$\left|-\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{\xi}}(6)^2\right| = \left|-\frac{36}{8}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{\xi^3}}_{>0}}\right| = \frac{18}{4}\frac{1}{\sqrt{\xi^3}}$$

$\boxed{\text{Ein Bruch vergrößert sich, wenn der Nenner verkleinert wird.}}$

Der Schlimmste Fall ist, wenn ξ gleich x_0, also 36 ist:
$\leq \frac{18}{4}\frac{1}{\sqrt{36^3}} = \frac{18}{4} \cdot \frac{1}{216} = \frac{1}{48} = 0.02083.. \leq 0.021$

Zusammenfassung:
Fehlerabschätzung $\left|\sqrt{42} - 6.5\right| = \left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2\right| = \left|-\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{\xi^3}}(6)^2\right| \leq 0.021$

$\left|\sqrt{42} - 6.5\right| \leq 0.021 \Rightarrow$
$6.5 - 0.021 \leq \sqrt{42} \leq 6.5 + 0.021$

Fehlerterm $-\frac{36}{8}\frac{1}{\sqrt{\xi^3}}$
ist negativ, d.h. der tatsächliche Wert ist kleiner als der berechnete Wert 6.5.
Intervall, in dem die Wurzel liegt: $\sqrt{42} \in [6.5 - 0.021, 6.5] = [6.479, 6.5]$

1.1.3 Beispiel 2

$f(x) = \frac{1}{x^2},\ x_0 = 1,\ x \geq 1,\ n = 2$
1. Schritt: Ableitungen + x_0 einsetzten

$f'(x) = \frac{-2}{x^3} \to f'(1) = -2$
$f''(x) = \frac{6}{x^4} \to f''(1) = 6$
$f'''(x) = -\frac{24}{x^5}$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = 1 + (-2)\frac{(x-1)}{1!} + 6\frac{(x-1)^2}{2!} + R_2$$

Nun kommt die Fehlerabschätzung des Restglieds:
Erstmal wieder Kürzen:

$$\underbrace{1 + (-2)\frac{(x-1)}{1!} + 6\frac{(x-1)^2}{2!}}_{1-2(x-1)+3(x-1)^2}$$

Mit dem Restglied:
$R_2 = \frac{1}{3!} \cdot \frac{-24}{\xi^5} (x-1)^3 = -\frac{4}{\xi^5} (x-1)^3 ,\ 1 \leq \xi \leq x$

Und die Abschätzung: eig 1 Einsetzten und schauen, was passiert
$|R_2| = \left| -\frac{4}{\xi^5} (x-1)^3 \right| \underset{1 \leq \xi \leq x}{=} \left| -\frac{4}{\xi^5} \right| \cdot \left| (x-1)^3 \right| \underset{1 \leq \xi \leq x}{\leq} 4 \cdot \left| (x-1)^3 \right|$

1.1.4 Beispiel 3

$f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + e^{-x},\ x \in [-1, 1]$
Wie immer erstmal Ableitungen + Einsetzten:
$f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + e^{-x} \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$
$f'(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - e^{-x} \Rightarrow f'(0) = 1 - 1 = 0$
$f''(x) = 1 + x + e^{-x} \Rightarrow f''(0) = 1 + 1 = 2$
Für Restglied wird dritte Ableitung benötigt
$f'''(x) = 1 - e^{-x}$
Für e gilt:
$\frac{1}{e} = \frac{1}{e} - 1$
Jetzt alles in die Formel einsetzten:
Taylorpolynom zweiter Ordnung um Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ aufstellen:
$1 + x^2$
Restglied und Lage von ξ angeben !!
$R_2(x) = \frac{1}{3!} \left(1 - e^{-\xi}\right) x^3,$

ξ zwischen $x_0 = 0$ und $x \in [-1, 1]$

Restglied abschätzen Dreiecksungleichung $|a + b| \leq |a| + |b|$
$|R_2(x)| = \left| \frac{1}{3!} \left(1 - e^{-\xi}\right) x^3 \right| \leq \frac{1}{6} \left(|1| + \left| -e^{-\xi} \right| \right) |x^3|$

worst-case-Abschätzung $= \frac{1}{6} \left(1 + e^{-\xi}\right) |x^3|$

$\leq \frac{1}{6} (1 + e) |x^3| \leq 0.6197 \, |x^3|$

ξ zwischen $x_0 = 0$ und $x \in [-1, 1]$

Worst Case, wäre ξ gleich -1

2 22. Reihen

Definition 1
Es sei a_k eine Zahlenfolge. Durch schrittweise Addition der ersten n Glieder erhält man eine Folge s_n mit den Gliedern:
$s_1 = a_1, s_2 = a_2, ..., s_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$
Die Folge s_n nennt man die zur Folge a_k gehörige unendliche Reihe.
Das n-te Glied heißt n-te Partialsumme.
Beispiel 1
$a_k = \frac{1}{k}, k = 1, 2, 3, ..$
$s_1 = 1, s_2 = 2 + \frac{1}{2}, s_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, ..., s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
Definition 2
Falls die Folge s_n der Partialsummen keinen Grenzwert besitzt, nennt man die Reihe divergent. Die Reihe heißt konvergent, wenn s_n konvergiert. Dann setzt man
$s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$
Im Falle der Konvergenz sagt man die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent und nennt s den Grenzwert die Summe der unendlichen Reihe.
Beispiel 2
$a_k = q^k, k = 0, 1, ..$
$s_0 = a_0 = 1$
$s_1 = a_0 + a_1 = 1 + q$
$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$
$s_n = a_0 + a_1 + ... + a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$Hinweis:$\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q}$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q}$$

Geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}, |q| < 1$

Für $|q| > 1$ wächst der Term $q_n + 1$ für $n \to \infty$ betragsmäßig unbeschränkt, so dass **Divergenz** der Folge s_n und somit der Reihe vorliegt.

Im Fall $q = 1$ gilt für die Partialsumme $s_n = n + 1$.
Damit liegt **Divergenz** der Reihe vor.

Im Fall $|q| < 1$ strebt $q_n + 1$ gegen den Grenzwert 0 und die Reihe ist **konvergent**.

Im Fall $q = -1$ wechselt s_n fortlaufend zwischen den Werten 1 und 0, d.h. es liegt **Divergenz** vor

Beispiel 3

$$a_k = \frac{1}{\underbrace{k}_{k>0}} \Rightarrow s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \overbrace{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}}^{harmonische Reihe}$$

Die harmonische Reihe ist divergent denn die Folge der Partialsummen s_n ist monoton steigend und unbeschränkt:

$$s_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + ... + \frac{1}{16}\right)}_{>8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}} + ...$$

Vom dritten Summanden an werden jeweils 2, 4, 8, 16, 32,. . .
Summanden zusammengefasst. Dadurch entstehen beliebig viele Terme die größer als $\frac{1}{2}$ sind, die Teilsummen s_n werden beliebig groß, wenn nur n groß genug gewählt wird.

Beispiel 4

$a_k = \frac{1}{k^2} \Rightarrow s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$
Diese Reihe ist **konvergent**; man kann beweisen, dass die Folge der Partialsummen monoton steigend und nach oben beschränkt ist ($\to$ Seminar).

<u>**Satz 1**</u> Divergenzkriterium: