6. Aufgabe

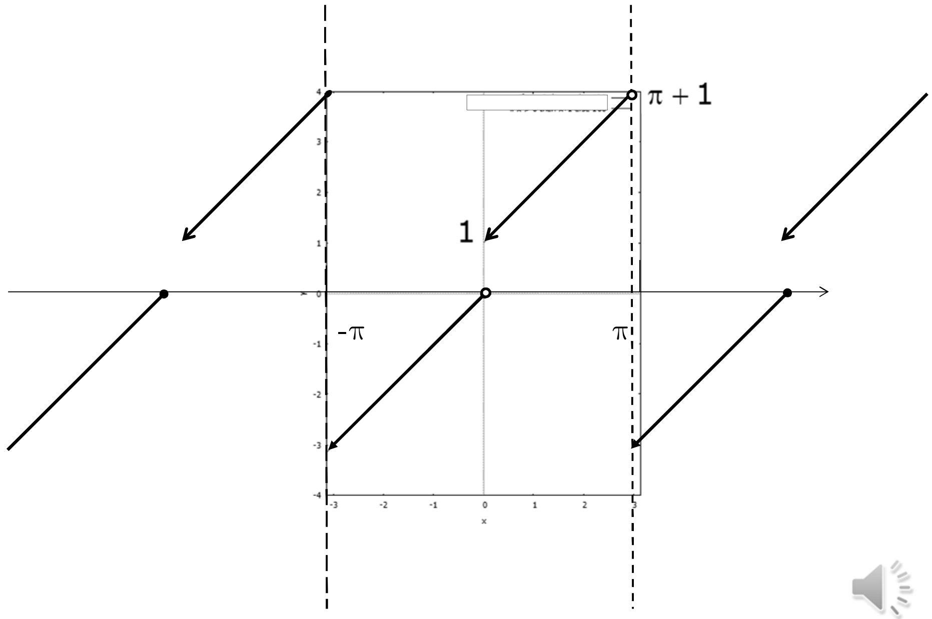
Die Werte der 2π-periodischen Funktion *f* sind im Periodenintervall $(-\pi,\pi]$ gegeben durch

$$f(x)=\begin{cases} x & ,-\pi < x \le 0 \\ x+1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

Berechnen Sie den Fourier-Koeffizienten a_0. Gegen welchen Wert konvergiert die Fourier-Reihe von *f* in den Punkten $x=1, x=\pi$? (Antwort mit Begründung!)

Lösung

$$f(x)=\begin{cases} x & ,-\pi < x \le 0 \\ x+1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} x & , -\pi < x \le 0 \\ x+1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

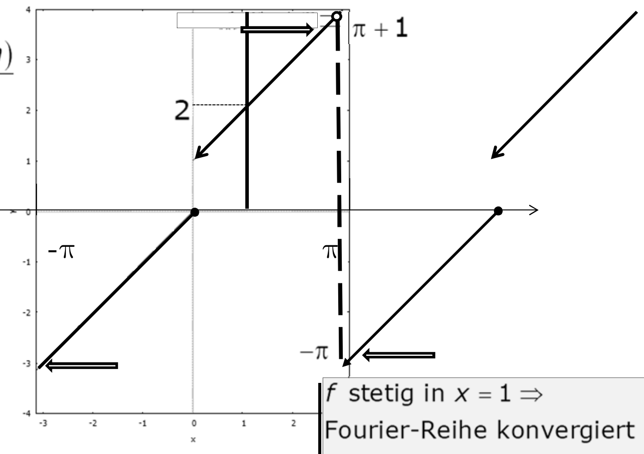
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(x+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{0}^{\pi}\right\} = \frac{1}{2\pi}\left\{-\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2} + \pi\right\} = \frac{1}{2}$$

Die Fourier-Reihe einer Funktion f strebt immer gegen den Mittelwert.

$$f(x) = \begin{cases} x & , -\pi < x \le 0 \\ x+1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}$$



f stetig in $x = 1 \Rightarrow$ Fourier-Reihe konvergiert gegen den Funktionswert 2

f unstetig in $x = \pi \Rightarrow$ Fourier-Reihe konvergiert gegen den Mittelwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\pi+h) + f(\pi-h)}{2} = \frac{1}{2}\left((-\pi) + \pi + 1\right) = \frac{1}{2}$$