4. Aufgabe

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktion

$$f(x,y,z) = \frac{x^2y}{z}\ ,\ z \neq 0$$

Lösung

$$f(x,y,z) = x^2yz^{-1}$$

$$f_x(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2xy}{z}$$ y und z als Konstante auffassen

$$f_y(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{x^2}{z}$$ x und z als Konstante auffassen

$$f_z(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{x^2y}{z^2}$$ x und y als Konstante auffassen

Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner, HTWK Leipzig, MNZ

$f_x = \frac{2xy}{z}$ | $f_y = \frac{x^2}{z}$ | $f_z = -\frac{x^2y}{z^2}$

partielle Ableitungen zweiter Ordnung

$$f_{xx}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2xy}{z}\right) = \frac{2y}{z}$$

y und z als Konstante auffassen

$$f_{yy}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{z}\right) = 0$$

x und z als Konstante auffassen

$$f_{zz}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{x^2y}{z^2}\right) = \frac{2\cdot x^2y}{z^3}$$

x und y als Konstante auffassen

$f_x = \frac{2xy}{z}$ | $f_y = \frac{x^2}{z}$ | $f_z = -\frac{x^2 y}{z^2}$

„gemischte" partielle Ableitungen zweiter Ordnung

$$f_{xy}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy}{z}\right) = \frac{2x}{z}$$ stetig, daher

x und z als Konstante auffassen

$$= f_{yx}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{z}\right) = \frac{2x}{z}$$

y und z als Konstante auffassen

$$f_{xz}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2xy}{z}\right) = -\frac{2xy}{z^2}$$ stetig, daher

x und y als Konstante auffassen

$$= f_{zx}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^2 y}{z^2}\right) = -\frac{2xy}{z^2}$$

y und z als Konstante auffassen

$f_x = \frac{2xy}{z}$ | $f_y = \frac{x^2}{z}$ | $f_z = -\frac{x^2 y}{z^2}$

$$f_{yz}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2}{z}\right) = -\frac{x^2}{z^2}$$ stetig, daher

x und y als Konstante auffassen

$$= f_{zy}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x^2 y}{z^2}\right) = -\frac{x^2}{z^2}$$

x und z als Konstante auffassen