Die Berechnung von Determinanten einer $n\times n$ Matrix **A**

1. Matrix **A** genau anschauen

2. **A** in Dreiecksform überführen
   oder
   in einer Zeile/Spalte von **A** möglichst viele Nullen erzeugen. Nach dieser Zeile/Spalte entwickeln. Mit den entstehenden Unterdeterminanten analog verfahren bis nur noch 2×2 Matrizen oder Dreiecksmatrizen übrig sind.

Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig

Beispiel 6

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \Longleftarrow \text{Entwicklung nach der 1. Zeile}$$

Vorzeichen-Tableau

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

$$+ \quad \begin{vmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \qquad - \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} & \\ & \\ & \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} & \\ & \\ & \end{vmatrix} - \boxed{(-1)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \qquad +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \cdot 1 \cdot (-1)$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der 3. Spalte

$$= 2 \cdot (-1)(-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$= 4 \cdot \left(1 \cdot (-2) - (1) \cdot (3)\right) = -20$$

$$+1 \cdot \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{-5} \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der 3. Zeile

$$+1 \cdot \left(\boxed{-5}\right) \cdot \boxed{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}} = -5 \cdot (0 - 1 \cdot 5) = 25$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 5$$