Tutorium 6

THEMA: uneigentliches Integral

Zusammenfassung

- **bisher** $\int_a^b f(x)\,dx$ mit
  - $[a,b]$ beschränktes Integrationsintervall
    und
  - f in $[a,b]$ stetig $\rightarrow$ beschränkt

  eigentliches Integral [bestimmtes Integral]

- **jetzt** $\int_a^b f(x)\,dx$: uneigentliches Integral

1. Art
- Intervall unbeschränkt:
  - $[a,\infty)$: $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{\beta \to \infty} \int_a^\beta f(x)\,dx$
  - $(-\infty, b]$: $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\alpha \to -\infty} \int_\alpha^b f(x)\,dx$
  - $(-\infty,\infty)$ $\rightarrow$ aufteilen in $(-\infty, c] \cup [c,\infty)$

    $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$, c beliebig
- innerhalb des (halb)offenen Intervalls stetig

2. Art
- Unstetigkeitsstelle / vertikale Asymptote in $[a,b]$
  - $[a,b)$: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\beta \to b,\, \beta < b} \int_a^\beta f(x)\,dx$
  - $(a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\alpha \to a,\, \alpha > a} \int_\alpha^b f(x)\,dx$
  - (a,b) $\rightarrow$ aufteilen in $(a,c] \cup [c,b)$

    $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, c beliebig
- innerhalb des (halb)offenen Intervalls stetig
- Sonderfall: $g(x)$ stetige Fortsetzung von $f(x)$,

  also $g(x) := f(x)$ $[a,b)$, $g(b) := \lim\limits_{\substack{\beta \to b \\ \beta < b}} f(\beta)$

  $(a,b]$, $g(a) := \lim\limits_{\substack{\alpha \to a \\ \alpha > a}} f(\alpha)$

  $\Rightarrow$ uneigentliches Integral existiert, wenn $G'(x) = g(x)$ existiert

  $\int_a^b f(x)\,dx$ mit $[a,b)/(a,b]$: $\int_a^b g(x)\,dx = G(b) - G(a)$

Vorgehen

- zusätzlich für 2. Art:
  ① Unstetigkeitsstelle bestimmen
  ② ggf. Integrationsbereich aufsplitten, sodass U.stelle(n) am Intervallende
- alle
  ①/③ Stammfunktion $F(x)$ bestimmen
  ②/④ Untersuchen, ob Grenzwert(e) $\lim\limits_{\beta \to b} F(\beta)$, $\lim\limits_{\alpha \to a} F(\alpha)$ existieren

$\Rightarrow$ wenn Grenzwert existiert, dann **konvergiert** das uneigentliche Integral bzw. es existiert und der Wert ist der Grenzwert, falls nicht, **divergiert** das Integral und es existiert nicht.

$\Longrightarrow$ Wert des uneigentlichen Integrals, falls existent, bestimmen möglich

- Aussage nur ob Konvergenz (existiert) oder Divergenz (existiert nicht) mithilfe der Vergleichskriterien

$f, g: [a,b) / (a,b] / (-\infty, b] / [a, \infty) \to \mathbb{R}$, stetig

Bsp. $b = \infty$

Majorantenkriterium: $\int_a^b / \int_{-\infty}^b / \int_a^\infty f(x)dx$ konvergiert, wenn $\int_a^b / \int_{-\infty}^b / \int_a^\infty g(x)dx$ konvergiert mit $0 \leq f(x) \leq g(x)$

wenn auch für $|f(x)|$, dann auch $\Leftarrow$

$$\left|\int_a^b / \int_{-\infty}^b / \int_a^\infty f(x)dx\right| \leq \int_a^b / \int_{-\infty}^b / \int_a^\infty g(x)dx$$

Minorantenkriterium: $\int_a^b / \int_{-\infty}^b / \int_a^\infty f(x)dx$ divergiert, wenn $\int_a^b / \int_{-\infty}^b / \int_a^\infty g(x)dx$ divergiert mit $f(x) \geq g(x) \geq 0$

- konvergente / divergente Integrale

konvergent	divergent
$\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx$ für $q<1$ $= \frac{1}{1-q}$	$\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx$ für $q \geq 1$
$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ für $p>1$ $= \frac{1}{p-1}$	$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ für $p \leq 1$
$\int_1^\infty e^{-x}dx = \frac{1}{e}$	

Aufgaben

(1) Untersuche die uneigentlichen Integrale auf Konvergenz / Divergenz und bestimme ggf. ihre Werte.

a. $\int_0^\infty e^{-x}dx$

b. $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$

c. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{2x^5}dx$

d. $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$

e. $\int_1^\infty \frac{2+x^3}{x^4}dx$

f. $f(x) = \begin{cases} 1, & x<2 \\ 3, & 2 \leq x \end{cases} \longrightarrow \int_0^4 f(x)dx$

g. $f(x) = \begin{cases} 4x, & x<\frac{1}{2} \\ 1{,}2, & x=\frac{1}{2} \\ 3, & \frac{1}{2}<x\leq 4 \end{cases} \longrightarrow \int_0^2 f(x)dx$

(2) Untersuche die uneigentlichen Integrale auf Konvergenz/Divergenz und bestimme ggf. ihre Werte.

a. $\int_0^1 \frac{2+4x}{x^2+x}\,dx$ und bestimme die Stammfunktion mithilfe der Substitution $u = x^2+x$

b. $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ und bestimme die Stammfunktion mithilfe der logarithmischen Integration

(3) Untersuche die uneigentlichen Integrale auf Konvergenz/Divergenz. Wende dabei das Vergleichskriterium an.

a. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+e^x}\,dx$

b. $\int_1^\infty -\frac{e^{-x}}{x}\,dx$

c. $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$

d. $\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+5)^2}\,dx$

e. $\int_0^1 \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

f. $\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{x+1}{2x^2+2}}\,dx$