31.3 Die adjunkte Matrix und die Inversenformel

Definition 1

Für eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ nennen wir $adj(\mathbf{A})$ die adjunkte Matrix von $\mathbf{A}$, dabei ist:

$\mathbf{A}_{i,j}$ entsteht aus $\mathbf{A}$ durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte

$$\widetilde{\mathbf{A}} = adj(\mathbf{A}) = \left[\boxed{\left((-1)^{i+j}\det\left(\mathbf{A}_{i,j}\right)\right)_{i,j=1,2,\dots,n}}\right]$$

Matrix der algebraischen Komplemente

Matrix der algebraischen Komplemente

$$\left((-1)^{i+j}\det\left(\mathbf{A}_{i,j}\right)\right)_{i,j=1,2,\dots,n}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\left|\mathbf{A}_{1,1}\right| & \cdots & (-1)^{1+j}\left|\mathbf{A}_{1,j}\right| & \cdots & (-1)^{1+n}\left|\mathbf{A}_{1,n}\right| \\ \vdots & & & & \vdots \\ (-1)^{i+1}\left|\mathbf{A}_{i,1}\right| & \cdots & (-1)^{i+j}\left|\mathbf{A}_{i,j}\right| & \cdots & (-1)^{i+n}\left|\mathbf{A}_{i,n}\right| \\ \vdots & & & & \vdots \\ (-1)^{n+1}\left|\mathbf{A}_{n,1}\right| & \cdots & \cdots & \cdots & (-1)^{n+n}\left|\mathbf{A}_{n,n}\right| \end{pmatrix}$$

Beispiel 1

$$\begin{pmatrix}3&2&0\\6&2&1\\7&0&1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}3&2&0\\6&2&1\\7&0&1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}3&2&0\\6&2&1\\7&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3&2&0\\6&2&1\\7&0&1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}3&2&0\\6&2&1\\7&0&1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}3&2&0\\6&2&1\\7&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3&2&0\\6&2&1\\7&0&1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}3&2&0\\6&2&1\\7&0&1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}3&2&0\\6&2&1\\7&0&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}3&2&0\\6&2&1\\7&0&1\end{pmatrix}$$

Matrix der algebraischen Komplemente

$$= \begin{pmatrix} |\mathbf{A}_{11}| & -|\mathbf{A}_{12}| & |\mathbf{A}_{13}| \\ -|\mathbf{A}_{21}| & |\mathbf{A}_{22}| & -|\mathbf{A}_{23}| \\ |\mathbf{A}_{31}| & -|\mathbf{A}_{32}| & |\mathbf{A}_{33}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix}2&1\\0&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}6&1\\7&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}6&2\\7&0\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3&0\\7&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&2\\7&0\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}2&0\\2&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&0\\6&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3&2\\6&2\end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix}2&1\\0&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}6&1\\7&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}6&2\\7&0\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3&0\\7&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&2\\7&0\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}2&0\\2&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&0\\6&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3&2\\6&2\end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -(-1) & -14 \\ -2 & 3 & -(-14) \\ 2 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}_{i,j}$ entsteht aus $\mathbf{A}$ durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte

adjunkte Matrix von **A**

$$\widetilde{\mathbf{A}} = adj(\mathbf{A}) = \left[\left((-1)^{i+j}\, det(\mathbf{A}_{i,j})\right)_{i,j=1,2,\ldots,n}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -14 \\ -2 & 3 & 14 \\ 2 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig