1 21. Die Taylorsche Formel

Funktion = Summe eines Polynoms + Fehlerterm (Restglied)
Problem: Funktionen auf Rechner darstellen (sin,cos,Expo,..)
Grundidee:
f(x) durch Polynom Pn(x) approximieren (annähern)
Polynom :

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots + a_n x^n \text{ , } a_k \in \mathbb{R}, x \in I \subseteq \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

1. Forderung 0 ist im Intervall enthalten
Ansatz:
Wert von f an der Stelle x (exakt)
N̄äherung + Rest

$$\underbrace{f(x)}_{\text{exakt}} = \underbrace{P_n(x)}_{\text{Näherung}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Rest (Fehler)}} \quad , x \in I \;\; 0 \in I$$

Weitere Forderung:
an der Stelle 0 soll der Funktionswert und der Wert der k'ten Ableitung von k=0 (0.ableitung)

$$\underbrace{f^{(k)}(0)}_{\text{gegeben}} = P_n^{(k)}(0) \text{ , } k = 0,1,2,\dots n$$

k'te Ableitung eines Polynoms:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \dots\dots + a_n x^n$$

$$k = 1 \Rightarrow (P_n(x))' = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 \dots\dots + n \cdot a_n x^{n-1}$$

$$k = 2 \Rightarrow (P_n(x))'' = 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 x \dots\dots + n \cdot (n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\boxed{\Rightarrow a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)}$$

1.0.1 Näherungspolynom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)(x-0)^k$$

Stelle 0 geht als Funktionswert ein
Wenn x(hoch)k ¯(x-0)(hoch)k
Problem: 0 nicht im Intervall ?
Forderung ist gleich, bzw bezieht sich auf x0
= (x-x0)(hoch)k

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

1.1 Satz von Taylor

Funktion f soll in einem Intervall, n+1 mal stetig differenzierbar sein.
d.h. Ableitungen existieren und sind stetig
Formel:

$$\boxed{f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{Taylorpolynom } n\text{-ter Ordnung (Hauptteil)}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n \text{ Restglied von Lagrange}}}$$

Entwicklungspunkt x0 = beliebig, aber fest aus Intervall
Zwischenstelle *Symbol* liegt zwischen x und x0, kann also kleiner als x oder auch größer sein.

1.1.1 Fehlerabschätzung

n+1. Ableitung beschänkt im Intervall I.
= Für alle x aus I der Betrag der n+1 Ableitung von f an der Stelle x kleiner 0 einer Konstanten ist

$f^{(n+1)}$ beschränkt in I, d. h. $\boxed{\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M \text{ , } x \in I}$

$$\Rightarrow \left|f(x) - P_n(x)\right| = \left|R_n(x)\right| = \left|\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}\right|$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left|(x-x_0)^{n+1}\right|\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\left|(x-x_0)^{n+1}\right| M$$

Man sieht:
1. Je größer das n, dest kleiner wird der Faktor 1 (1/(1-n)!)
auf Deutsch: mit Großerem n wird die approximation besser
2. Je weiter das x von x0 weg liegt, desto größer wird der Bertrag x-x0, desto mehr Einfluss hat der Term auf die Genauigkeit