1 21. Die Taylorsche Formel

Funktion = Summe eines Polynoms + Fehlerterm (Restglied)
Problem: Funktionen auf Rechner darstellen (sin,cos,Expo,..)
Grundidee:
f(x) durch Polynom Pn(x) approximieren (annähern)
Polynom :

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n \text{ , } a_k \in \mathbb{R}, x \in I \subseteq \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

1. Forderung 0 ist im Intervall enthalten
Ansatz:
Wert von f an der Stelle x (exakt)
Näherung + Rest

$$\underbrace{f(x)}_{\text{exakt}} = \underbrace{P_n(x)}_{\text{Näherung}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Rest (Fehler)}} \quad , x \in I \;\; 0 \in I$$

Weitere Forderung:
an der Stelle 0 soll der Funktionswert und der Wert der k'ten Ableitung von k=0 (0.ableitung)

$$\underbrace{f^{(k)}(0)}_{\text{gegeben}} = P_n^{(k)}(0) \text{ , } k = 0,1,2,\ldots n$$

k'te Ableitung eines Polynoms:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots\ldots + a_n x^n$$

$$k = 1 \Rightarrow (P_n(x))' = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 \ldots\ldots + n \cdot a_n x^{n-1}$$

$$k = 2 \Rightarrow (P_n(x))'' = 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 x \ldots\ldots + n \cdot (n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\boxed{\Rightarrow a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)}$$

1.0.1 Näherungspolynom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)(x-0)^k$$

Stelle 0 geht als Funktionswert ein
Wenn x(hoch)k (x-0)(hoch)k
Problem: 0 nicht im Intervall ?
Forderung ist gleich, bzw bezieht sich auf x0
= (x-x0)(hoch)k

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

1.1 Satz von Taylor

Funktion f soll in einem Intervall, n+1 mal stetig differenzierbar sein.
d.h. Ableitungen existieren und sind stetig
Formel:

$$\boxed{f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{Taylorpolynom } n\text{-ter Ordnung (Hauptteil)}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n \text{ Restglied von Lagrange}}}$$

Entwicklungspunkt x0 = beliebig, aber fest aus Intervall
Zwischenstelle *Symbol* liegt zwischen x und x0, kann also kleiner als x oder auch größer sein.

1.1.1 Fehlerabschätzung

n+1. Ableitung beschänkt im Intervall I.
= Für alle x aus I der Betrag der n+1 Ableitung von f an der Stelle x kleiner 0 einer Konstanten ist

$f^{(n+1)}$ beschränkt in I, d. h. $\boxed{\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M\,,\ x \in I}$

$$\Rightarrow \left|f(x) - P_n(x)\right| = \left|R_n(x)\right| = \left|\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}\right|$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left|(x-x_0)^{n+1}\right|\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\left|(x-x_0)^{n+1}\right| M$$

Man sieht:
1. Je größer das n, dest kleiner wird der Faktor 1 (1/(1-n)!)
auf Deutsch: mit Großerem n wird die approximation besser
2. Je weiter das x von x0 weg liegt, desto größer wird der Bertrag x-x0, desto mehr Einfluss hat der Term auf die Genauigkeit

1.1.2 Beispiel 1

Die Berechnung von Wurzeln - Wurzel(42)
mit TaylorPolynom 1. Ordnung; Entwicklungspunkt x0 größer 0

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \text{Taylorpolynom} \quad \sqrt{x_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_0}} (x - x_0)$$

setzten x ein (Wurzel(42)) und bestimmen x0 = 36

$$\sqrt{x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_0}} (x - x_0) \Rightarrow \sqrt{42} \approx \sqrt{36} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{36}} (42 - 36)}_{\frac{6}{12}} = 6.5$$

Umstellen für Fehlerabschätzung des Restglieds

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$\left| f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) \right| = \left| \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)^2 \right|$$

$$R_1 = \frac{1}{2!} f''(\xi)(x - x_0)^2$$

Fehlerabschätzung des Restglieds
Brauchen 2. Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

Dann einsetzten, ergibt:

$$\Rightarrow R_1 = \frac{1}{2!} \cdot \left(-\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\xi^3}} \right) (x - x_0)^2$$

Umstellen und einsetzten:

$$= -\frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{\xi^3}} (42 - 36)^2 \text{, } \xi \text{ zwischen } x = 42 \text{ und } x_0 = 36$$

Jetzt alles zusammen packen:

$$\left| \sqrt{42} - \underbrace{\left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) \right)}_{=6.5} \right| = \underbrace{\left| \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2 \right|}_{R_1} = \left| -\frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{\xi^3}} (6)^2 \right|$$

Den Abschnitt mit XI[ksi] verkürzen

$$\left| -\frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{\xi^3}} (6)^2 \right| = \left| -\frac{36}{8} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\xi^3}}_{>0}} \right| = \frac{18}{4} \frac{1}{\sqrt{\xi^3}}$$

Ein Bruch vergrößert sich, wenn der Nenner verkleinert wird.

Der Schlimmste Fall ist, wenn XI gleich X0, also 36 ist:

$$\le \frac{18}{4} \frac{1}{\sqrt{36^3}}$$

$$= \frac{18}{4} \cdot \frac{1}{216} = \frac{1}{48} = 0.02083.. \le 0.021$$

Zusammenfassung:

Fehlerabschätzung

$$\left|\sqrt{42}-6.5\right| = \left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2\right| = \left|-\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{\xi^3}}(6)^2\right| \leq 0.021$$

$$\left|\sqrt{42}-6.5\right| \leq 0.021 \Rightarrow$$
$$6.5-0.021 \leq \sqrt{42} \leq 6.5+0.021$$

Fehlerterm $-\frac{36}{8}\frac{1}{\sqrt{\xi^3}}$

ist negativ, d. h, der tatsächliche Wert ist kleiner als der berechnete Wert 6.5.
Intervall, in dem die Wurzel liegt:

$$\sqrt{42} \in [6.5-0.021, 6.5] = [6.479, 6.5]$$

1.1.3 Beispiel 2

$f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 1, x \geq 1, n = 2$

1. Schritt: Ableitungen + x0 einsetzten

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3} \quad \rightarrow f'(1) = -2$$

$$f''(x) = \frac{6}{x^4} \rightarrow f''(1) = 6$$

$$f'''(x) = -\frac{24}{x^5} \quad f(x) = \frac{1}{x^2} = 1 + (-2)\frac{(x-1)}{1!} + 6\frac{(x-1)^2}{2!} + R_2$$

Nun kommt die Fehlerabschätzung des Restglieds:
Erstmal wieder Kürzen:

$$\underbrace{1+(-2)\frac{(x-1)}{1!}+6\frac{(x-1)^2}{2!}}_{1-2(x-1)+3(x-1)^2}$$

Mit dem Restglied:

$$R_2=\frac{1}{3!}\cdot\frac{-24}{\xi^5}(x-1)^3=-\frac{4}{\xi^5}(x-1)^3\,,\ 1\leq\xi\leq x$$

Und die Abschätzung: eig 1 Einsetzten und schauen, was passiert

$$|R_2|=\left|-\frac{4}{\xi^5}(x-1)^3\right|\underset{1\leq\xi\leq x}{=}\left|-\frac{4}{\xi^5}\right|\cdot\left|(x-1)^3\right|\underset{1\leq\xi\leq x}{\leq}4\cdot\left|(x-1)^3\right|$$

1.1.4 Beispiel 3

$$f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + e^{-x},\ x \in [-1,1]$$

Wie immer erstmal Ableitungen + Einsetzten:

$$f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + e^{-x} \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - e^{-x} \Rightarrow f'(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f''(x) = 1 + x + e^{-x} \Rightarrow f''(0) = 1 + 1 = 2$$

Für Restglied wird dritte Ableitung benötigt

$$f'''(x) = 1 - e^{-x}$$

Für e gilt:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{e} - 1$$

Jetzt alles in die Formel einsetzten:

Taylorpolynom zweiter Ordnung um Entwicklungspunkt x_0=0 aufstellen:

$$1 + x^2$$

Restglied und Lage von ξ angeben !!

$$R_2(x) = \frac{1}{3!}\left(1 - e^{-\xi}\right)x^3,\ \boxed{\xi \text{ zwischen } x_0=0 \text{ und } x \in [-1,1]}$$

Restglied abschätzen

Dreiecksungleichung $|a+b| \le |a| + |b|$

$$|R_2(x)| = \left|\frac{1}{3!}\left(1 - e^{-\xi}\right)x^3\right| \le \frac{1}{6}\left(|1| + |-e^{-\xi}|\right)|x^3|$$

worst-case-Abschätzung

$$= \frac{1}{6}\left(1 + e^{-\xi}\right)|x^3| \le \frac{1}{6}(1 + e)|x^3| \le 0.6197|x^3|$$

ξ zwischen x_0=0 und $x \in [-1,1]$

Worst Case, wäre XI gleich -1