Mathematik für Informatiker II - Arthur Kunze

Aufgabe 6

a)

$\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{4k-1}{7k+3})^k$

Mit dem Wurzelkriterium:
$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \to a_k = (\frac{4k-1}{7k+3})^k$

$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|(\frac{4k-1}{7k+3})^k|}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{|\frac{4k-1}{7k+3}|} = \lim_{k\to\infty}\frac{7k+3}{4k+1} = \frac{\infty}{\infty}$

1.Regel L'Hostpital:

$= \frac{7}{4} > 1 \to$ **divergent**

b)

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k}{1+2^{2k}}$ mit $a_k = \frac{(-2)^k}{1+2^{2k}}$
$= -(\frac{2k}{1+4^k})$ für $|a_k| = \frac{2k}{1+4^k} \leq \frac{2^k}{4^k}$
$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{4^k} = 2 \to$divergent

Aufgabe 7

$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{3}{\sqrt[5]{k^3}}(x-2)^k$ mit $x_0 = 2; a_k = (-1)^{k+1}\frac{3}{\sqrt[5]{k^3}}$

Mit dem Wurzelkriterium:
$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \to \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{(-1)^{k+1}\frac{3}{\sqrt[5]{k^3}}}} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{\frac{3}{\sqrt[5]{k^3}}}} = \frac{1}{1} = 1 = \rho$
wegen $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{x/k} \to 1$
$= |x-2| \cdot 1 = |x-2| < 1 \to$ **Konvergenz**
Die Potenzreihe konvergiert für alle reellen Zahlen x mit $1 < x < 3$

Aufgabe 8

$\sum_{k=1}^{\infty}(2-\frac{1}{k})^k(x+3)^k$ mit $x_0 = 3; a_k = (2-\frac{1}{k})^k$

Mit dem Wurzelkriterium:
$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \to \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{(2-\frac{1}{k}^k)}} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|2-\frac{1}{k}^k|}} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{(2-\frac{1}{k})} = \frac{1}{2} = \rho$
wegen $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k} \to 0$

$x = -\frac{7}{2}$
$|-\frac{7}{2}+3| = |3-3.5| = |-0.5| = 0.5 = \frac{1}{2} \to$**Keine Aussage möglich**

$\to$ Randpunkte gesondert untersuchen:

$\sum_{k=1}^{\infty}(2-\frac{1}{k})^k(-\frac{7}{2}+3)^k = \sum_{k=1}^{\infty}(2-\frac{1}{k})^k(-\frac{1}{2})^k$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} -(\frac{1}{2})^k \to 1$

$\to \lim\limits_{k\to\infty}(2-\frac{1}{k})^k = 1$ wegen $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0; \lim\limits_{k\to\infty} 2^k = 1$

$\to 1 > \frac{1}{2} \to$**divergent**

$x = -3$
$|-3+3| = |3-3| = |0| = 0 < \frac{1}{2} \to$**absolut konvergent**

Aufgabe 9

$\int x^2 e^x dx = G(x)$
$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$
$g(x) = x^2 \rightarrow g'(x) = 2x$

Einsetzten für partielle Integration($\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$):
$\int e^x x^2 dx = e^x x^2 - \int e^x 2x dx$

zu $\int e^x 2x dx$:
$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$
$g(x) = 2x \rightarrow g'(x) = 2$

$\rightarrow \int e^x 2x dx = e^x 2x - \int e^x 2 dx = e^x 2x - 2\int e^x dx$
$= e^x 2x - 2e^x + C$
Einsetzten in $e^x x^2 - \int e^x 2x dx$:
$= e^x x^2 - (e^x 2x - 2e^x + C)$
$= e^x x^2 - e^x 2x + 2e^x C$
$= e^x (x^2 - 2x + 2) + C$
$\underline{= e^x (x^2 - 2x + 2) = G(x)}$

Aufgabe 10

$f(x) = \int \frac{cos(ln(x))}{x} dx$ mit $x > 0$

Substituieren:
$t = ln(x), dt = \frac{1}{x}$

Einsetzen:
$\int \frac{cos(t)}{x} \frac{1}{x} dt = \int cos(t) dt = sin(x) + C$

Re-Substituieren:
$F(x) = sin(ln(x)) + C$