HTWK
Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig
Prof. Dr. habil.
H.-J. Dobner

Mathematik für Informatiker (MfI) II

Seminar KW 16

Thema:

Reihen

a_k Zahlenfolge, (unendliche) Reihe ist die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Die Reihe heißt konvergent, wenn s_n konvergiert.

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\left.\boxed{\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent } \Rightarrow a_k \text{ Nullfolge} \\ \lim_{k\to\infty} a_k \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \end{array}}\right\} \text{Nullfolgenkriterium}$$

1. Aufgabe

Ist die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k-1)}$ konvergent?

Lösung

Anwendung des Monotoniekriteriums auf die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\cdot(k-1)}$$

Monotonie

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k\cdot(k-1)} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\cdot(k-1)} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{k\cdot(k-1)} - \frac{1}{k\cdot(k-1)}\right] + \frac{1}{(n+1)\cdot n} = \frac{1}{(n+1)\cdot n} > 0$$

$\Rightarrow s_n$ streng monoton steigend

$$(\mathrm{I})\quad \frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}=\frac{k-(k-1)}{(k-1)\cdot k}=\frac{1}{(k-1)\cdot k}$$

<u>Beschränktheit</u>

$$s_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\cdot(k-1)}\underset{(\mathrm{I})}{=}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=1-\underbrace{\frac{1}{n}}_{>0}\quad<1$$

$$\underset{\text{Monotoniekriterium}}{\Rightarrow}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\cdot(k-1)}\text{ konvergent}$$