Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$$

(S1) $\left\langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{z} \right\rangle = \left\langle \vec{x}, \vec{z} \right\rangle + \left\langle \vec{y}, \vec{z} \right\rangle$

(S2) $\left\langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = \lambda \left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle$

(S3) $\overline{\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle} = \left\langle \vec{y}, \vec{x} \right\rangle$

(S4) $\left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle \geq 0$ und $\left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

kanonische Norm: $\left\| \vec{x} \right\| := \sqrt{\left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle}$

CSU: $\left| \left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle \right| \leq \underbrace{\sqrt{\left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle}}_{\left\| \vec{x} \right\|} \cdot \underbrace{\sqrt{\left\langle \vec{y}, \vec{y} \right\rangle}}_{\left\| \vec{y} \right\|}$

Winkel $\cos(\varphi) = \dfrac{\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle}{\left\| \vec{x} \right\| \cdot \left\| \vec{y} \right\|}, \vec{x} \neq \vec{0}, \vec{y} \neq \vec{0}$

Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{C}^n$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

$$\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \overline{y_k}$$

2. Aufgabe

Bestimmen Sie alle Vektoren des reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$,

welche orthogonal zu den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind.

Lösung

$\vec{u}$ orthogonal $\vec{v}$ in Zeichen $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \left\langle \vec{u}, \vec{v} \right\rangle = 0$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \left\langle \vec{x}, \vec{a} \right\rangle = 0 \wedge \vec{x} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \left\langle \vec{x}, \vec{b} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \left\langle \vec{x}, \vec{a} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{I})\ x_1 \cdot 2 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot (-1) = 0$$

$$\vec{x} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \left\langle \vec{x}, \vec{b} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{II})\ x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + x_3 \cdot 1 = 0$$

(I) und (II) bilden ein homogenes LGS – 2 Gleichungen, 3 Unbekannte

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \cdot (-2) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow 3x_2 = -3x_3 \Rightarrow x_2 = -\underbrace{x_3}_{t \in \mathbb{R}} = -t$$

$$\Rightarrow x_1 = -2x_2 - x_3 = -2 \cdot (-t) - t = t$$

$$\vec{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Test

$$\left\langle \vec{x}, \vec{a} \right\rangle = t \cdot 2 + (-t) \cdot 1 + t \cdot (-1) = 0$$

$$\left\langle \vec{x}, \vec{b} \right\rangle = t \cdot 1 + (-t) \cdot 2 + t \cdot 1 = 0$$