2. Aufgabe

Bestimmen Sie die allgemeine Form einer Funktion $q(x)$, mit der Eigenschaft $q''(x) = x^2$.

Bestimmen Sie $q(x)$, wenn zusätzlich noch

$$q(0) = 1 \text{ und } q'(0) = -1$$

gefordert wird.

Lösung

$$\int g''(x)\,dx = g'(x) + C_1$$

$$\Rightarrow \int \left(g'(x) + C_1\right)dx = \underbrace{g(x) + C_1 x + C_2}_{\boxed{\text{Alle Funktionen mit der Ableitung } g''(x)}}$$

$$\int \underbrace{x^2}_{g''(x)}\,dx = \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_{g'(x)} + C_1 = q'(x)$$

$$\int \left(\frac{1}{3}x^3 + C_1\right)dx = \frac{1}{12}x^4 + C_1 x + C_2 = q(x)$$

Zusatzforderungen

$q'(0) = -1$

$$q'(0) = -1 \Rightarrow \frac{1}{3}\underbrace{x^3}_{=0} + C_1 = -1 \Rightarrow C_1 = -1$$

$q(0) = 1$

$$q(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{12}\underbrace{x^4}_{=0} - \underbrace{x}_{=0} + C_2 = 1 \quad \Rightarrow C_2 = 1$$

$$\frac{1}{12}x^4 - x + 1$$

$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \quad u = g(x)$

3. Aufgabe

Berechnen Sie mittels der Substitution $u=\sin(x)$ das unbestimmte Integral

$$\int \cos(x)e^{\sin(x)}\,dx$$

Lösung

$$u = \sin(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos(x) \Rightarrow du = \boxed{\cos(x)\,dx}$$

$$\int \boxed{\cos(x)} e^{\sin(x)} \boxed{dx}$$

$$= \int e^u\,du = e^u = e^{\sin(x)} + C$$

① $u = g(x)$

$\frac{du}{dx} = g'(x) \Leftrightarrow du = g'(x)\,dx$

Restliche x durch u ersetzen

② Berechne das Integral in u

③ Ersetze u durch $g(x)$