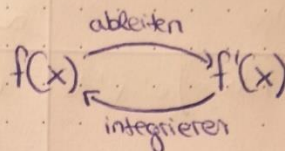


Tutorium 4

THEMA: Integration

Zusammenfassung

- = Umkehrung der Ableitung



- $F(x)$ in (a, b) Stammfkt. von $f(x)$, wenn $\forall x \in (a, b) : F'(x) = f(x)$

- $\int \underbrace{f(x)}_{\text{Integrand}} dx = F(x) + C = \text{unbestimmtes Integral von } f(x)$
nach der Variable integrieren

- wichtige Integrale

$f(x)$	$\int f(x) dx$ [$C \in \mathbb{R}$]	
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$, n \neq -1 \wedge \text{wenn } n \in \mathbb{R} : x > 0$
a^x	$\frac{1}{\ln(a)} a^x + C$	$, a > 0 \wedge a \neq 1$
e^{ax}	$\frac{1}{a} e^{ax} + C$	$, a \neq 0$
$\frac{1}{ax}$	$\frac{1}{a} \ln ax + C$	$, a \neq 0, x \neq 0$
$\frac{1}{\sin^2(ax)}$	$-\frac{1}{a} \cot(x) + C$	$, a \neq 0, \neq n \cdot \pi$
$\frac{1}{\cos^2(ax)}$	$\frac{1}{a} \tan(ax) + C$	$, a \neq 0, x \neq (n + \frac{1}{2})\pi$
$\tan^2(x)$	$\tan(x) - x + C$	$, x \neq (n + \frac{1}{2})\pi$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x + C$	$, x \neq 0$

Bsp. $\int \sin(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + C, a \neq 0$

- Regeln

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

• Integrationsregeln

Summenregel	$\int f(x) \pm g(x) dx$	$\int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
Faktorregel	$\int \alpha f(x) dx$	$\alpha \cdot \int f(x) dx$
Partielle Integration	$\int f(x) dx = \int u' \cdot v dx$	$u \cdot v - \int u \cdot v' dx$ <small>$\int u \cdot v'$ muss einfacher zu integrieren sein als $\int u' \cdot v$</small>
Substitution	<p>① <u>Subst.</u>: $u = g(x)$ wählen $\frac{du}{dx} = g'(x) \rightarrow dx = \frac{du}{g'(x)}$</p> <p>[falls Form $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du$ <small>sonst:</small> Term $g(x)$ im Integral durch u ersetzen dx im Integral durch $\frac{du}{g'(x)}$ ersetzen falls x im Integral noch vorhanden: $u = g(x) = \dots x \dots$ \rightarrow umformen nach $x = \dots u \dots$ und x auch ersetzen</p> <p>② Integral $\int \dots u \dots du$ nach u integrieren [+C nicht vergessen]</p> <p>③ <u>Resubst.</u>: mit $u = g(x) = \dots x \dots$ von oben alle us ersetzen</p>	
Logarithmische Integration	$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx$ <small>entw. Zähler mit Faktor anpassen</small>	$\ln(g(x)) + C$

Aufgaben

① Berechne das unbestimmte Integral

a. $\int x^2 + 2x + \frac{1}{x} dx$

d. $\int e^{-x} dx$

b. $\int \frac{1}{1+x^2} dx$

e. $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx$

c. $\int \frac{10x^8 + 3}{x^4} dx$

f. $\int 2 \cdot 3^x dx$

② Berechne das unbestimmte Integral mittels partieller Integration

a. $\int x^2 \cdot \sin x dx$

c. $\int \ln(2x) \cdot (4x^3 - 1) dx$

b. $\int 2^x \cdot 3x dx$

③ Berechne das unbestimmte Integral unter Verwendung der Substitution u

a. $\int \sin^2(x) \cos(x) dx$, $u = \sin x$

c. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$, $u = x^2+2x+3$

b. $\int \sqrt{4x-1} dx$, $u = 4x-1$

④ Berechne das unbestimmte Integral $\int 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \, dx$

a. mittels partieller Integration.

b. unter Verwendung der Substitution $u = \cos x$

⑤ Gebe alle Stammfunktionen von $f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$ an mithilfe der logarithmischen Integration.

⑥ Bestimme die allgemeine Form einer Funktion $f(x)$ mit den Eigenschaften $f''(x) = \frac{1}{1+x-1}$ und sowohl $f(x)$ als auch $f'(x)$ gehen beide durch den Punkt $P(2|2)$.