28.4 Konvergenzkriterien

Oft muss man nur entscheiden, ob ein uneigentliches Integral existiert oder nicht.

Satz 1

$$\int_0^1 \frac{1}{x^q}\,dx = \begin{cases} q \geq 1 & \text{divergent,} \\ q < 1 & \text{konvergent, } \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^q}\,dx = \frac{1}{1-q} \end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} p > 1 & \text{konvergent, } \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1} \\ p \leq 1 & \text{divergent,} \end{cases}$$

Satz 2 (Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale)

$f,g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, stetige Funktionen mit der Eigenschaft

$$\forall x \in [a,\infty): 0 \leq f(x) \leq g(x),$$

Dann gilt

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergiert, wenn $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergiert. Majoranten-Kriterium

$\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergiert, wenn $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergiert. Minoranten-Kriterium

Das Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale gilt analog für Funktionen

$$f,g : (-\infty,b] \to \mathbb{R}, f,g : [a,b) \to \mathbb{R}, f,g : (a,b] \to \mathbb{R}$$

Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig

Ergänzung zu Satz 2

$f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, stetige Funktionen mit der Eigenschaft

$$\forall x \in [a, \infty) : 0 \leq |f(x)| \leq g(x),$$

Konvergiert $\int_a^\infty g(x)\,dx$ dann ist auch das uneigentliche Integral

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent und es gilt

$$\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right| \leq \int_a^\infty g(x)\,dx$$

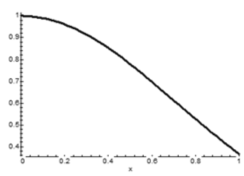
Die Aussage gilt analog für Funktionen

$$f, g : (-\infty, b] \to \mathbb{R}, f, g : [a, b) \to \mathbb{R}, f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$$

Beispiel 1

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$$

$e^{-x^2}, 0 \leq x \leq 1$



1 $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

existiert, denn e^{-x^2} ist eine stetige

Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall

2 $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$

$\int_1^\infty e^{-x}\,dx$

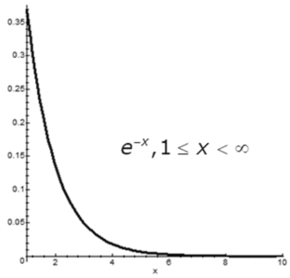
$$x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq x \Rightarrow \boxed{e^{x^2} \geq e^x > 0}$$

Multiplikation mit $e^{-x} \cdot e^{-x^2} > 0 \Rightarrow \underbrace{e^{-x}}_{g(x)} \geq \underbrace{e^{-x^2}}_{f(x)} \geq 0$

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta e^{-x}dx = \lim_{\beta\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^\beta$$

$$= \lim_{\beta\to\infty}\left(-e^{-\beta}\right) - \left(-e^{-1}\right) = 0 - \left(-e^{-1}\right) = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty e^{-x}dx \text{ konvergent}$$



Nach dem Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale existiert, daher auch das uneigentliche Integral $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$

1 + 2

$\Rightarrow$ es existiert (konvergiert) auch das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$