

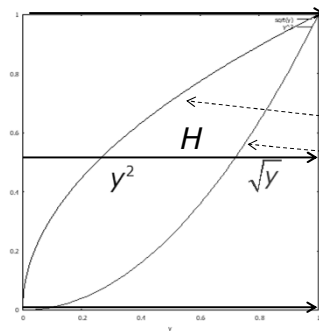
3. Aufgabe

Berechnen Sie das Gebietsintegral

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (2-y) dx dy$$

und skizzieren Sie das Integrationsgebiet G .

Lösung



Integrationsgrenzen für x :
Betrachte eine horizontale Gerade H , die in Richtung steigender x -Werte durch G geht. Werte ablesen, bei denen diese Gerade in das Gebiet G eintritt und austritt. Diese beiden Werte sind die Integrationsgrenzen für die Integration über x .

Integrationsgrenzen für y :
Bestimmen die Werte von y , zwischen denen alle horizontalen Geraden durch G liegen.

Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner, HTWK Leipzig, MNZ

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (2-y) dx dy = \int_0^1 [(2-y)x]_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} dy$$

Stammfunktion bzgl. x (y als Konstante auffassen)

$$= \int_0^1 ((2-y)\sqrt{y} - (2-y)y^2) dy = \int_0^1 (2\sqrt{y} - y\sqrt{y} - 2y^2 + y^3) dy$$

$$= \int_0^1 \left(2y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}} - 2y^2 + y^3 \right) dy = \left[\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 \right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3} + \frac{-8+5}{20} = \frac{40-9}{60} = \frac{31}{60}$$



Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner, HTWK Leipzig, MNZ