Lösungen

1

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -10 & 8 \\ 3 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

A^{-1} existiert $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2)(-3) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -7 \\ 0 & -8 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -7 \\ -8 & -10 \end{vmatrix} = 4$

$\neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existiert

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)^T = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & -10 & 7 \\ 2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

2 a. A^{-1} ex. $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1/2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

1.Spalte $\cdot \frac{1}{2}$ = 3.Spalte $\rightarrow$ linear abhängig (oder ausführlich berechnen)

$\Rightarrow A^{-1}$ existiert nicht

b. B^{-1} ex. $\Leftrightarrow \det(B) \neq 0$: $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3(2-6) = -12$

$\neq 0 \Rightarrow B^{-1}$ existiert

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot \operatorname{adj}(B)^T$$

$$\operatorname{adj}(B) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -9 \\ 0 & -4 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-12} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 8 & -9 \\ 0 & -4 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 8 & -4 & 0 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3 $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

④ A^{-1} existiert, da $\det(A) = -220 \neq 0$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -13 & -7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -11 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 4 \\ 0 & 10 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & 15 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & 15 & 10 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -11 \\ 0 & -5 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -11 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Anmerkungen:

___ $\hat{=}$ Δ-Matrizen

→ ~~det~~ = spur!

〰 $\hat{=}$ fast Δ-Matrix

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \leftarrow \text{Δ-Matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\begin{vmatrix} -13 & -7 \\ -11 & -3 \end{vmatrix} & +2\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} & -2\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 15 & 6 \end{vmatrix} & +2\begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 15 & 10 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} & -(2\cdot(-5)(-4)) & -(2\cdot(-1)(-6)) & 2\cdot(-1)(-5) \\ \begin{vmatrix} -5 & -11 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} & -2\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} & 2\cdot 5\cdot(-6) & -(2\cdot 5\cdot(-5)) \\ -\begin{vmatrix} -5 & -11 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & 2\cdot 5\cdot(-4) & -2\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 40 & 12 & -120 \\ 17 & -40 & -12 & 10 \\ -25 & 20 & -60 & 50 \\ -27 & -40 & 32 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)^T = \frac{1}{-220} \cdot \begin{pmatrix} 38 & 17 & -25 & -27 \\ 40 & -40 & 20 & -40 \\ 12 & -12 & -60 & 32 \\ -120 & 10 & 50 & 10 \end{pmatrix}$$

⑤

$\det(A \cdot B)$

- $\det\left(\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}}\right) = \det(A) \cdot \det(B) = 4 \cdot (-12) = \underline{-48}$

  mit Determinanten-Multiplikationssatz

- $\det\left(\underset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}}\right) = \det(A) \cdot \det(B) = 0 \cdot (-12) = \underline{0}$

- ↯ nicht definiert, da A: 4×4-Matrix • B: 3×3-Matrix → Matrizenprodukt nicht definiert!

⑥ $\det\left(\begin{pmatrix}1&3&4\\2&0&1\\3&1&2\end{pmatrix}^4\right)$ Matrizenprodukt ist definiert.

$= \det(A^4) = \det(A\cdot A\cdot A\cdot A) = \det(A)\cdot\det(A)\cdot\det(A)\cdot\det(A) =$

$= 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = 4^4 = \underline{256}$

⑦ a. wenn A regulär → $A\vec{x}=\vec{b}$ eindeutig lösbar, dann Cramersche Regel anwendbar.

$\det(A) = \begin{vmatrix}2&8&4\\2&5&1\\4&10&-1\end{vmatrix} \begin{matrix}(-1)(-2)\end{matrix} = \begin{vmatrix}2&8&4\\0&-3&-3\\0&-6&-9\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}-3&-3\\-6&-9\end{vmatrix} = 2\cdot 9 = 18 \neq 0$

→ A regulär ✓

$\left(\begin{array}{ccc|c}2&8&4&1\\2&5&1&0\\4&10&-1&0\end{array}\right)$ eindeutig lösbar

⇒ <u>Cramersche Regel:</u> $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ Lösung

$x_1 = \frac{\det(A^{(1)})}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix}1&8&4\\0&5&1\\0&10&-1\end{vmatrix}}{18} = \frac{\begin{vmatrix}5&1\\10&-1\end{vmatrix}}{18} = -\frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{18}_{6}} = -5/6$

$x_2 = \frac{\det(A^{(2)})}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix}2&1&4\\2&0&1\\4&0&-1\end{vmatrix}}{18} = \frac{-\begin{vmatrix}2&1\\4&-1\end{vmatrix}}{18} = \frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{18}_{3}} = 1/3$

$x_3 = \frac{\det(A^{(3)})}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix}2&8&1\\2&5&0\\4&10&0\end{vmatrix}}{18} = \frac{\begin{vmatrix}2&5\\4&10\end{vmatrix}}{18} = \frac{0}{18} = 0$

⇒ $\vec{x} = \begin{pmatrix}-5/6\\1/3\\0\end{pmatrix}$ ist die Lösung des LGS

b. $A = \begin{pmatrix}1&3&4\\2&0&1\\3&1&2\end{pmatrix}$ regulär? → ~~Regel~~ $\det(A) \underset{\text{siehe ⑥}}{=} 4 \neq 0$

→ eindeutig lösbar, <u>Cramersche Regel anwendbar.</u>

$\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ ist Lösung

$x_1 = \frac{\det(A^{(1)})}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix}0&3&4\\0&0&1\\1&1&2\end{vmatrix}}{4} = \frac{\begin{vmatrix}3&4\\0&1\end{vmatrix}}{4} = 3/4$

$x_2 = \frac{\det(A^{(2)})}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix}1&0&4\\2&0&1\\3&1&2\end{vmatrix}}{4} = \frac{-\begin{vmatrix}1&4\\2&1\end{vmatrix}}{4} = 7/4$

$x_3 = \frac{\det(A^{(3)})}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix}1&3&0\\2&0&0\\3&1&1\end{vmatrix}}{4} = \frac{\begin{vmatrix}1&3\\2&0\end{vmatrix}}{4} = -\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{4}_{2}} = -3/2$

Lösung des LGS $\vec{x} = \begin{pmatrix}3/4\\7/4\\-3/2\end{pmatrix}$

8 a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & t & -1 & 3 \end{array}\right)$ Lösbarkeit untersuchen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 3 & t & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \\ 2t+3 & t & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2t+3 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$= 5(t-1) - (2t+3)(-1) = 5t - 5 + 2t + 3$$

$$= 7t - 2$$

$\det(A) = 0 \iff 7t-2=0$ → LGS unlösbar/ mehrdeutig lösbar

$7t = 2$

$\underline{t = 2/7}$

$\det(A) \neq 0 \iff \underline{\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{2/7\}}$ → LGS eindeutig lösbar

bzw. $t \neq 2/7$

→ genauer untersuchen, ob unlösbar: $\operatorname{rang}(A) < \operatorname{rang}(A|\vec{b})$
oder mehrdeutig lösbar: $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|\vec{b})$

da $\det(A) = 0$ für $t = 2/7$: $\operatorname{rang}(A) < n$ gilt, also:

$\operatorname{rang}(A) < 3$, d.h. $\operatorname{rang}(A) \leq 2$

$\operatorname{rang}(A|\vec{b})$ bestimmen:

$$|A^{(1)}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2/7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -6 \\ 3 & 23/7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 23/7 & -4 \end{vmatrix} = -20 + \frac{23 \cdot 6}{7}$$

$$= -\frac{140}{7} + \frac{138}{7} = 2/7 \neq 0$$

d.h. $\operatorname{rang}(A^{(1)}) = n = 3$, entspricht $\operatorname{rang}(A|\vec{b}) = 3$

$\Rightarrow \operatorname{rang}(A) < \operatorname{rang}(A|\vec{b})$, d.h. LGS unlösbar für $t = 2/7$

- $t = 2$ Lösung bestimmen $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 7t-2 = 7 \cdot 2 - 2 = 12$

→ $t = 2 \in \mathbb{R} \setminus \{2/7\}$, also LGS eindeutig lösbar

$$x_1 = \frac{\det(A^{(1)})}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -6 \\ 3 & 5 & -4 \end{vmatrix}}{12} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}}{12} = \frac{10}{12} = 5/6$$

$$x_2 = \frac{\det(A^{(2)})}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -6 \\ -3 & 3 & -4 \end{vmatrix}}{12} = \frac{-\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}}{12} = -2/12 = -1/6$$

$$x_3 = \frac{\det(A^{(3)})}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{12} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}}{12} = -10/12 = -5/6$$

Lösung des LGS für $t=2$

$\underline{\vec{x} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ -1/6 \\ -5/6 \end{pmatrix}}$

b. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & t & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$ Lösbarkeit untersuchen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & t \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (2)(4) \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2t+1 \\ -1 & 1 & t \\ 0 & 3 & 4t+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2t+1 \\ 3 & 4t+2 \end{vmatrix}$$

$$= 5(4t+2) - 3(2t+1) = 20t+10-6t-3 = 14t+7$$

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow 14t+7 \neq 0$$
$$14t \neq -7 \quad |:14$$
$$t \neq -1/2 \quad \rightarrow \underline{\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}}$$

<u>LGS eindeutig lösbar</u>

$\det(A) = 0 \Leftrightarrow t = -1/2$ → LGS mehrdeutig lösbar oder unlösbar

→ genauer untersuchen: $\text{rang}(A) < \text{rang}(A|\vec{b})$ unlösbar

$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|\vec{b})$ mehrdeutig lösbar

$\text{rang}(A|\vec{b})$ bestimmen

$$|A^{(2)}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1/2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (2)(4) \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 11 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\text{rang}(A^{(2)}) < n = 3$, also $\text{rang}(A^{(2)}) \leq 2$

weiter probieren:

$$|A^{(1)}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1/2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2)(-3) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5/2 \\ 0 & -10 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -5/2 \\ -10 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 5 - \frac{\cancel{10}^{5} \cdot 5}{\cancel{2}} = -20 \neq 0$$

$\text{rang}(A^{(1)}) = n = 3$

$\Rightarrow \text{rang}(A|\vec{b}) > \text{rang}(A)$ → <u>LGS unlösbar für $t = -1/2$</u>

9) $P_1=(2,0)$, $P_2=(3,-1)$, $P_3=(1,4)$

→ definieren Kreis?

→ immer dann, wenn 3 Punkte nicht auf einer Geraden liegen

allgemeine Gleichung: Mittelpunkt $M=(x_0,y_0)$
Radius r

Kreisgleichung $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ ausmultiplizieren

$$x^2-2xx_0+x_0^2+y^2-2yy_0+y_0^2-r^2=0$$

$$(x^2+y^2)+\underbrace{(-2x_0)}_{a_2}\cdot x+\underbrace{(-2y_0)}_{a_3}\cdot y+\underbrace{(x_0^2+y_0^2-r^2)}_{a_4}=0$$

I $a_1(x^2+y^2)+a_2x+a_3y+a_4=0 \qquad \in\mathbb{R}$

wenn $a_1=0$ → Gerade statt Kreis

$\Rightarrow$ definieren Kreis $\Leftrightarrow a_1\neq 0$

aus 3 Punkten LGS aufstellen:

II P_1: $a_1(2^2+0^2)+a_2\cdot 2+a_3\cdot 0+a_4=0$

III P_2: $a_1(3^2+(-1)^2)+a_2\cdot 3-a_3+a_4=0$

IV P_3: $a_1(1^2+4^2)+a_2+4a_3+a_4=0$

$$\begin{array}{c}\text{I}\\\text{II}\\\text{III}\\\text{IV}\end{array}\begin{pmatrix}x^2+y^2 & x & y & 1\\ 4 & 2 & 0 & 1\\ 10 & 3 & -1 & 1\\ 17 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Determinante bestimmen: (Entw. nach 1. Zeile)

$$\begin{vmatrix}x^2+y^2 & x & y & 1\\ 4 & 2 & 0 & 1\\ 10 & 3 & -1 & 1\\ 17 & 1 & 4 & 1\end{vmatrix}=(x^2+y^2)\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}-x\cdot\begin{vmatrix}4 & 0 & 1\\ 10 & -1 & 1\\ 17 & 4 & 1\end{vmatrix}+y\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ 10 & 3 & 1\\ 17 & 1 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}4 & 2 & 0\\ 10 & 3 & -1\\ 17 & 1 & 4\end{vmatrix}$$

vorerst eigentlich nur a_1 bestimmen, ob $a_1=0$
falls nein, weitere bestimmen, um x_0, y_0, r zu bestimmen

$$=(x^2+y^2)(2\cdot(-5)+13)-x(4\cdot(-5)+57)+y\cdot(-41+30-8)-(4\cdot 13-2\cdot 57)$$

$$=(x^2+y^2)\cdot 3-37\cdot x-19y+62$$

$(x_i^2 + y^2) \cdot 3$ ....

$a_1 = 3 \neq 0 \rightarrow$ P_1, P_2, P_3 liegen auf Kreis!

$\rightarrow$ Rest der Determinanten zum Bestimmen von x_0, y_0, r

$a_2 = -37 = -2x_0 \longrightarrow x_0 = 37/2$

$a_3 = -19 = -2y_0 \longrightarrow y_0 = 19/2$

$a_4 = 62 = x_0^2 + y_0^2 - r^2 \longrightarrow (37/2)^2 + (19/2)^2 - r^2 = 62$

$r = \sqrt{(37/2)^2 + (19/2)^2 - 62}$

$\approx 19{,}25$

$\Longrightarrow$ Kreisgleichung $(x - 37/2)^2 + (y - 19/2)^2 = 370{,}5$

mit $M = (37/2, 19/2)$ und Radius $r \approx 19{,}25$