

1 21. Die Taylorsche Formel

Funktion = Summe eines Polynoms + Fehlerterm (Restglied)

Problem: Funktionen auf Rechner darstellen (sin,cos,Expo,..)

Grundidee:

f(x) durch Polynom $P_n(x)$ approximieren (annähern)

Polynom : $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, $a_k \in \mathbb{R}$, $x \in I \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

1. Forderung 0 ist im Intervall enthalten

Ansatz:

Wert von f an der Stelle x (exakt)

= Näherung + Rest

$$\underbrace{f(x)}_{\text{exakt}} = \underbrace{P_n(x)}_{\text{Näherung}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Rest (Fehler)}}, \quad x \in I, 0 \in I$$

Weitere Forderung:

an der Stelle 0 soll der Funktionswert und der Wert der k'ten Ableitung von k=0 (0. Ableitung)

$$\underbrace{f^{(k)}(0)}_{\text{gegeben}} = P_n^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

k'te Ableitung eines Polynoms:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n \\ k=1 \Rightarrow (P_n(x))' &= 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2x + 3 \cdot a_3x^2 + \dots + n \cdot a_nx^{n-1} \\ k=2 \Rightarrow (P_n(x))'' &= 2 \cdot a_1 + 2 \cdot 3 \cdot a_2x + \dots + n \cdot (n-1) \cdot a_nx^{n-2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(0)$$

1.0.1 Näherungspolynom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) (x-0)^k$$

Stelle 0 geht als Funktionswert ein

Wenn $x^k = (x-0)^k$

Problem: 0 nicht im Intervall ?

Forderung ist gleich, bzw bezieht sich auf x_0

$= (x-x_0)^k$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x-x_0)^k$$

1.1 Satz von Taylor

Funktion f soll in einem Intervall, $n+1$ mal stetig differenzierbar sein.
d.h. Ableitungen existieren und sind stetig

Formel:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{Taylorpolynom n-ter Ordnung (Hauptteil)}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n \text{ Restglied von Lagrange}}$$

Entwicklungspunkt x_0 = beliebig, aber fest aus Intervall
Zwischenstelle ξ liegt zwischen x und x_0 , kann also kleiner als x oder auch größer sein.

1.1.1 Fehlerabschätzung

$n+1$. Ableitung beschränkt im Intervall I .

= Für alle x aus I der Betrag der $n+1$ Ableitung von f an der Stelle x kleiner 0 einer Konstanten ist

$f^{(n+1)}$ beschränkt in I , d.h.:

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M, \quad x \in I$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)| &= \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x-x_0)^{n+1} \right| \\ &= \frac{1}{(n+1)!} |(x-x_0)^{n+1}| |f^{(n+1)}(\xi)| \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} |(x-x_0)^{n+1}| M \end{aligned}$$

Man sieht:

1. Je größer das n, desto kleiner wird der Faktor $\frac{1}{(1-n)!}$
auf Deutsch: mit Größerem n wird die approximation besser
2. Je weiter das x von x_0 weg liegt, desto größer wird der Betrag $x - x_0$,
desto mehr Einfluss hat der Term auf die Genauigkeit

1.1.2 Beispiel 1

Die Berechnung von Wurzeln - $\sqrt{42}$

mit TaylorPolynom 1. Ordnung; Entwicklungspunkt x_0 größer 0

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \text{Taylorpolynom } \sqrt{x_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_0}} (x - x_0)$$

setzen x ein ($\sqrt{42}$) und bestimmen $x_0 = 36$

$$\sqrt{x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_0}} (x - x_0) \Rightarrow \sqrt{42} \approx \sqrt{36} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{36}} (42 - 36)}_{\frac{6}{12}} = 6.5$$

Umstellen für Fehlerabschätzung des Restglieds

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)^2$$

$$\left| f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) \right| = \left| \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)^2 \right|$$

Fehlerabschätzung des Restglieds $R_1 = \frac{1}{2!} f''(\xi) (x - x_0)^2$

Brauchen 2. Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

Dann einsetzen, ergibt:

$$\Rightarrow R_1 = \frac{1}{2!} \cdot \left(-\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\xi^3}} \right) (x - x_0)^2$$

Umstellen und einsetzen:

$$= -\frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{\xi^3}} (42 - 36)^2, \quad \xi \text{ zwischen } x = 42 \text{ und } x_0 = 36$$

Jetzt alles zusammen packen:

$$\left| \sqrt{42} - \underbrace{\left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) \right)}_{=6.5} \right| = \underbrace{\left| \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)^2 \right|}_{R_1} = \left| -\frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{\xi^3}} (6)^2 \right|$$

Den Abschnitt mit ξ verkürzen

$$\left| -\frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{\xi}} (6)^2 \right| = \left| -\frac{36}{8} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\xi^3}}}_{>0} \right| = \frac{18}{4} \frac{1}{\sqrt{\xi^3}}$$

Ein Bruch vergrößert sich, wenn der Nenner verkleinert wird.

Der Schlimmste Fall ist, wenn ξ gleich x_0 , also 36 ist:

$$\leq \frac{18}{4} \frac{1}{\sqrt{36^3}} = \frac{18}{4} \cdot \frac{1}{216} = \frac{1}{48} = 0.02083.. \leq 0.021$$

Zusammenfassung:

$$\text{Fehlerabschätzung } |\sqrt{42} - 6.5| = \left| \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)^2 \right| = \left| -\frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{\xi^3}} (6)^2 \right| \leq 0.021$$

$$|\sqrt{42} - 6.5| \leq 0.021 \Rightarrow$$

$$6.5 - 0.021 \leq \sqrt{42} \leq 6.5 + 0.021$$

$$\text{Fehlerterm } -\frac{36}{8} \frac{1}{\sqrt{\xi^3}}$$

ist negativ, d.h. der tatsächliche Wert ist kleiner als der berechnete Wert 6.5.

Intervall, in dem die Wurzel liegt: $\sqrt{42} \in [6.5 - 0.021, 6.5] = [6.479, 6.5]$

1.1.3 Beispiel 2

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x_0 = 1, \quad x \geq 1, \quad n = 2$$

1. Schritt: Ableitungen + x_0 einsetzen

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3} \rightarrow f'(1) = -2$$

$$f''(x) = \frac{6}{x^4} \rightarrow f''(1) = 6$$

$$f'''(x) = -\frac{24}{x^5}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = 1 + (-2) \frac{(x-1)}{1!} + 6 \frac{(x-1)^2}{2!} + R_2$$

Nun kommt die Fehlerabschätzung des Restglieds:

Erstmal wieder Kürzen:

$$\underbrace{1 + (-2) \frac{(x-1)}{1!} + 6 \frac{(x-1)^2}{2!}}_{1-2(x-1)+3(x-1)^2}$$

Mit dem Restglied:

$$R_2 = \frac{1}{3!} \cdot \frac{-24}{\xi^5} (x-1)^3 = -\frac{4}{\xi^5} (x-1)^3, \quad 1 \leq \xi \leq x$$

Und die Abschätzung: eig 1 Einsetzten und schauen, was passiert

$$|R_2| = \left| -\frac{4}{\xi^5} (x-1)^3 \right|_{1 \leq \xi \leq x} = \left| -\frac{4}{\xi^5} \right| \cdot |(x-1)^3| \underset{1 \leq \xi \leq x}{\leq} 4 \cdot |(x-1)^3|$$

1.1.4 Beispiel 3

$$f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + e^{-x}, \quad x \in [-1, 1]$$

Wie immer erstmal Ableitungen + Einsetzten:

$$f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + e^{-x} \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - e^{-x} \Rightarrow f'(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f''(x) = 1 + x + e^{-x} \Rightarrow f''(0) = 1 + 1 = 2$$

Für Restglied wird dritte Ableitung benötigt

$$f'''(x) = 1 - e^{-x}$$

Für e gilt:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{e} - 1$$

Jetzt alles in die Formel einsetzen:

Taylorpolynom zweiter Ordnung um Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ aufstellen:

$$1 + x^2$$

Restglied und Lage von ξ angeben !!

$$R_2(x) = \frac{1}{3!} (1 - e^{-\xi}) x^3,$$

ξ zwischen $x_0 = 0$ und $x \in [-1, 1]$

$$\begin{array}{ll} \text{Restglied abschätzen} & \text{Dreiecksungleichung } |a+b| \leq |a| + |b| \\ |R_2(x)| = \left| \frac{1}{3!} (1 - e^{-\xi}) x^3 \right| & \leq \frac{1}{6} (|1| + |-e^{-\xi}|) |x^3| \end{array}$$

$$\text{worst-case-Abschätzung} \quad = \frac{1}{6} (1 + e^{-\xi}) |x^3|$$

$$\leq \frac{1}{6} (1 + e) |x^3| \leq 0.6197 |x^3|$$

ξ zwischen $x_0 = 0$ und $x \in [-1, 1]$

Worst Case, wäre ξ gleich -1

2 22. Reihen

Definition 1

Es sei a_k eine Zahlenfolge. Durch schrittweise Addition der ersten n Glieder erhält man eine Folge s_n mit den Gliedern:

$$s_1 = a_1, s_2 = a_2, \dots, s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Die Folge s_n nennt man die zur Folge a_k gehörige unendliche Reihe.

Das n -te Glied heißt n -te Partialsumme.

Beispiel 1

$$a_k = \frac{1}{k}, k = 1, 2, 3, \dots$$

$$s_1 = 1, s_2 = 2 + \frac{1}{2}, s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots, s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Definition 2

Falls die Folge s_n der Partialsummen keinen Grenzwert besitzt, nennt man die Reihe divergent. Die Reihe heißt konvergent, wenn s_n konvergiert. Dann setzt man

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Im Falle der Konvergenz sagt man die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent und nennt s den Grenzwert die Summe der unendlichen Reihe.

Beispiel 2

$$a_k = q^k, k = 0, 1, \dots$$

$$s_0 = a_0 = 1$$

$$s_1 = a_0 + a_1 = 1 + q$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n q^k \text{ Hinweis: } \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}}{1-q}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}}{1-q}$$

Geometrische Reihe $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1}{1-q}, |q| < 1$

Für $|q| > 1$ wächst der Term $q_n + 1$ für $n \rightarrow \infty$ betragsmäßig unbeschränkt, so dass **Divergenz** der Folge s_n und somit der Reihe vorliegt.

Im Fall $q = 1$ gilt für die Partialsumme $s_n = n + 1$.
Damit liegt **Divergenz** der Reihe vor.

Im Fall $|q| < 1$ strebt $q_n + 1$ gegen den Grenzwert 0 und die Reihe ist **konvergent**.

Im Fall $q = -1$ wechselt s_n fortlaufend zwischen den Werten 1 und 0, d.h. es liegt **Divergenz** vor

Beispiel 3

$$a_k = \underbrace{\frac{1}{k}}_{k>0} \Rightarrow s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \overbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}^{\text{harmonische Reihe}}$$

Die harmonische Reihe ist divergent denn die Folge der Partialsummen s_n ist monoton steigend und unbeschränkt:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{> 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \dots$$

Vom **dritten** Summanden an werden jeweils 2, 4, 8, 16, 32, ... Summanden zusammengefasst. Dadurch entstehen beliebig viele Terme die größer als $\frac{1}{2}$ sind, die Teilsummen s_n werden beliebig groß, wenn nur n groß genug gewählt wird.

Beispiel 4

$$a_k = \frac{1}{k^2} \Rightarrow s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

Diese Reihe ist **konvergent**; man kann beweisen, dass die Folge der Partialsummen monoton steigend und nach oben beschränkt ist (\rightarrow Seminar).

Satz 1 Divergenzkriterium: