Tutorium 11

THEMA: Eigenwerte

Zusammenfassung

- Charakterisierung von Matrizen (Kenngröße) (A $n \times n$-Matrix)

  Eigenschaft $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ [$\vec{x} = \vec{0}$ triviale Lösung]

  mit λ Eigenwert von A
  und $\vec{x}$ Eigenvektor zu λ $\Big\}$ $(\lambda, \vec{x})$ Eigenpaar von A

- $spek(A) = \{\dots\}$ Menge aller Eigenwerte

  $\rho(A)$ Spektralradius (betragsgrößter Eigenwert)

- $spur(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots \lambda_n$

  $det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \lambda_n$

- A regulär $\Leftrightarrow \forall i \; \lambda_i \neq 0$

  A singulär $\Leftrightarrow \exists \lambda_i = 0$

- E hat nur den Eigenwert $\lambda = 1$ mit allen Vektoren $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\rho(A) = 1$, $spek(A) = \{1\}$

- A invertierbar und $(\lambda, \vec{x})$ Eigenpaar von A $\rightarrow (\frac{1}{\lambda}, \vec{x})$ Eigenpaar von A^{-1}

  A Dreiecksmatrix $\rightarrow$ Diagonalelemente $\hat{=}$ Eigenwerte

  Eigenwerte von A $\longleftrightarrow$ Eigenwerte von A^T, d.h. $spek(A) = spek(A^T)$

  $(\lambda, \vec{x})$ Eigenpaar von A $\rightarrow$ $\vec{x}$ und $A\vec{x}$ linear abhängig
  $\rightarrow$ Eigenvektoren zu verschiedenen λ linear unabhängig
  $\rightarrow$ ~~$(\lambda^k$~~ $(\lambda^k, \vec{x})$ Eigenpaar von A^k, $k \in \mathbb{N}$

- Lösen der Eigenwertaufgabe $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$
  $\Leftrightarrow (A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$

  (1) Bilde $A - \lambda E$

  (2) charakteristisches Polynom berechnen $P_A(\lambda) = det(A - \lambda E) = c_0 + c_1\lambda + \dots c_{n-1}\lambda^{n-1} + (-1)^n\lambda^n$ (Polynom vom Grad n in Variablen λ)
  $\rightarrow$ n komplexe Nullstellen (Nullstellen mehrfach möglich = Vielfachheit)

  (3) Nullstellen berechnen: $P_A(\lambda) = 0$ $\longrightarrow$ Nullstellen $\hat{=}$ Eigenwerten $\in \mathbb{C}$
  $\rightarrow$ besitzt Nullstelle, da siehe Fundamentalsatz der Algebra
  da $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$ $\rightarrow$ eindeutig lösbar für $det(A - \lambda E) \neq 0$
  $\rightarrow$ mehrdeutig lösbar für $det(A - \lambda E) = 0$

  (4) jeden λ_i in LGS $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$ einsetzen
  $\longrightarrow$ nichttriviale Lösungen $\vec{x} \hat{=}$ Eigenvektoren $\vec{x}^{(i)}$
  $\hookrightarrow$ wenn mehrdeutig lösbar
  $\rightarrow$ alle Parameter $\in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Aussagen über Eigenwerte / Eigenvektoren

- **Koeffizienten** von $P_A(\lambda) = \det(A-\lambda E) = c_0 + c_1\lambda + \dots c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_n\lambda^n$

  $c_n = (-1)^n$

  $c_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \mathrm{Spur}(A)$

  $c_0 = \det(A)$

  wenn $n=3$: $c_{n-2} = c_1 = -\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right)$

- alle Zeilensummen = Wert s
  $\rightarrow \lambda_1 = s$ und $\vec{x}_1^{(n)} = \left.\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right\} n$

- **Eigenwertabschätzung**

  $\forall \lambda$ von $A : |\lambda| \leq \|A\|$ mit $\| \ \|$ beliebiger Matrixnorm (Bsp.: Zeilensummen-/ Spaltensummennorm) → siehe KW 22

- **Kreissatz von Geschgorin**

  $\forall \lambda$ von $A : \lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ mit $K_i = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq r_i \}, i = 1, 2, \dots n$

  Geschgorin-Kreis (= abgeschlossener Kreis in komplexer Zahlenebene (Im, Re))

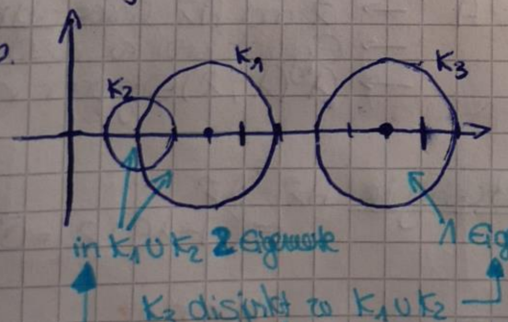
  mit $r_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} |a_{ik}|$

  um das Diagonalelement a_{ii}

  - ein Kreis disjunkt zur Vereinigung der übrigen $n-1$ Kreise
    $\rightarrow$ genau $1\ \lambda$ im Kreis

  - m Kreise disjunkt zu anderen $n-m$ Kreisen
    $\rightarrow m\ \lambda$ in Vereinigung der m Kreise
    $\not\rightarrow$ in jedem Kreis $1\ \lambda$

Bsp.



Einzeichnen: $M = (\mathrm{Re}(a_{ii}), \mathrm{Im}(a_{ii}))$ Mittelpunkt
r_i Radius

K_3 disjunkt zu $K_1 \cup K_2$
2 Kreise (K_1 und K_2) disjunkt zu $3-2=1$ Kreis (K_3)

Aufgaben

1 Berechne alle Eigenpaare der Matrix A und A^T und auch die von A^{-1}, falls möglich. Überprüfe die berechneten Eigenpaare von A mit der Spur.

a. $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2 Berechne alle Eigenpaare von A

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 0 & 2 & 12 & 54 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ c. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

3
- Berechne $\det(A)$. Was folgt daraus für die Eigenwerte von A?
- Zeige, dass $\lambda = 3$ ein Eigenwert von A ist.
  [Hinweis: $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ ist ein doppelter Eigenwert von A von b.]
- Bestimme alle weiteren Eigenwerte und -vektoren und gib $P_A(\lambda)$ an.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

4 Welcher Eigenwert und zugehöriger Eigenvektor kann direkt aus A abgelesen werden?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

5 Führe eine Eigenwertabschätzung mit der Zeilensummennorm durch. Lässt sich direkt ein Eigenwert ablesen?

$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 7 & 9 & -12 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

6 Bestimme das charakteristische Polynom mithilfe der Koeffizienten-Berechnung.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7 Bestimme und skizziere alle Gerschgorin Kreise. Welche Aussage lässt sich bzgl. der Lage der Eigenwerte treffen? (Gebe dazu Mengen an)

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 3+2i & i \\ -2i & 1-2i \end{pmatrix}$ c. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Bestimme zusätzlich den betragsgrößten Eigenwert λ_{max} und einen zugehörigen Eigenvektor.