Die Berechnung partieller Ableitungen

Eine partielle Ableitung bestimmt man, indem man die gewöhnliche Ableitung nach der betreffenden Variablen bildet und alle anderen Variablen nach denen nicht differenziert wird als **Konstante** auffasst. Dabei sind die Regeln für das Differenzieren bei Funktionen mit einer unabhängigen Variablen entsprechend anzuwenden.

Die partiellen Ableitungen höherer Ordnung werden durch Wiederholung des für die Ableitung erster Ordnung bekannten Vorgehens gebildet.

Beispiel 1

partielle Ableitung: gewöhnliche Ableitung nach der betreffenden Variablen und alle anderen Variablen nach denen nicht differenziert wird als Konstante auffassen.

$$f(x,y) = x^3y - 2x^2y^4$$

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y - 4xy^4$$

y als Konstante auffassen

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 - 8x^2y^3$$

x als Konstante auffassen

Beispiel 2

partielle Ableitung: gewöhnliche Ableitung nach der betreffenden Variablen und alle anderen Variablen nach denen nicht differenziert wird als Konstante auffassen.

$$f(x,y) = x^3y + x^2y^2 + x + y^2$$

partielle Ableitungen erster Ordnung

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad = 3x^2y + 2xy^2 + 1$$

y als Konstante auffassen

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad = x^3 + 2x^2y + 2y$$

x als Konstante auffassen

$f_x(x,y) = 3x^2y + 2xy^2 + 1,\ f_y(x,y) = x^3 + 2x^2y + 2y$

partielle Ableitung: gewöhnliche Ableitung nach **einer** Variablen und alle anderen Variablen nach denen nicht differenziert wird als Konstante auffassen.

partielle Ableitungen zweiter Ordnung

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad = 6xy + 2y^2$$

y als Konstante auffassen

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad = 2x^2 + 2$$

x als Konstante auffassen

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad = \boxed{3x^2 + 4xy}$$

x als Konstante auffassen

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad = \boxed{3x^2 + 4xy}$$

y als Konstante auffassen

Satz 1 (Satz von Schwarz)

Hat die Funktion

$f: D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to W(f) \subseteq \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$

bzw.

$f: D(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to W(f) \subseteq \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

partielle Ableitungen p–ter Ordnung und sind diese alle stetig, so ist bei den partiellen Ableitungen p–ter Ordnung die Reihenfolge der Differentiationen vertauschbar (beliebig), z. B:

$$f_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = f_{yx}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z)$$

$$f_{xz}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) = f_{zx}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z)$$

$$f_{yz}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) = f_{zy}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z)$$