Lösungen

① a. $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ Intervall unbeschränkt → uneig. Integral 1. Art mit $[0,\infty)$

① Stammfkt. $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$

best. Integral $\int_0^\beta e^{-x}\,dx = [e^{-x}]_0^\beta = -e^{-\beta} + e^0 = -\frac{1}{e^\beta} + 1$

② Grenzwert untersuchen $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta e^{-x}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}[-e^{-x}]_0^\beta = \lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{1}{e^\beta}\right)+1$

$$= -\lim_{\beta\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{e^\beta}\right)}_{\to 0} + 1 = 0 + 1 = 1$$

⇒ das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ existiert / konvergiert und hat den Wert 1.

b. $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ Unstetigkeitsstelle → uneig. Integral 2. Art, stetig in $(0,1]$

① unbeschränkt für $x \to 0$, aufsplitten nicht nötig

② Stammfkt. $\int x^{-2}\,dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

best. Integral $\int_\alpha^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_\alpha^1 = -\frac{1}{1} + \frac{1}{\alpha} = -1 + \frac{1}{\alpha}$

④ Grenzwert untersuchen $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\alpha\to 0}\left[-\frac{1}{x}\right]_\alpha^1$

$$= -1 + \lim_{\alpha\to 0}\underbrace{\frac{1}{\alpha}}_{\to\infty} = \infty$$

⇒ das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ ist divergent / existiert nicht

(ab jetzt etwas weniger ausführlich)

c. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{2x^5}\,dx \overset{\text{1. Art}}{=} \lim_{\alpha\to-\infty} \int_{\alpha}^{-2} \frac{1}{2} x^{-5}\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty} \left[-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^4}\right]_{\alpha}^{-2}$

$= -\frac{1}{8\cdot 16} + \lim_{\alpha\to-\infty} \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\alpha^4} = -\frac{1}{128} + \frac{1}{8}\lim_{\alpha\to-\infty} \underbrace{\frac{1}{\alpha^4}}_{\to 0} = -\frac{1}{128}$

→ existiert / konvergiert, Wert: $-\frac{1}{128}$

d. $\int_{1}^{5} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx \overset{\text{2. Art}}{=} \lim_{\alpha\to 1} \int_{\alpha}^{5} (x-1)^{-1/2}\,dx = \lim_{\alpha\to 1} \left[2\cdot\sqrt{x-1}\right]_{\alpha}^{5}$

$= 2\cdot\sqrt{5-1} - \lim_{\alpha\to 1} 2\cdot\sqrt{\alpha-1} = 2\cdot 2 - 2\lim_{\alpha\to 1}\underbrace{\sqrt{\alpha-1}}_{\to 0} = 4-0 = 4$

→ existiert / konvergiert, Wert: 4

e. $\int_{1}^{\infty} \frac{2+x^3}{x^4}\,dx \overset{\text{1. Art}}{=} \lim_{\beta\to\infty} \int_{1}^{\beta} \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}\left(\int_{1}^{\beta} 2\cdot x^{-4}\,dx + \int_{1}^{\beta} x^{-1}\,dx\right)$

$= \lim_{\beta\to\infty}\left(\left[-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^3}\right]_{1}^{\beta} + \left[\ln|x|\right]_{1}^{\beta}\right) = \lim_{\beta\to\infty}\underbrace{\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\beta^3}\right)}_{\to 0} + \frac{2}{3}\cdot 1 +$

$\lim_{\beta\to\infty}\underbrace{(\ln|\beta|)}_{\to\infty} - \overset{\nearrow 0}{\ln|1|} = 0 + \frac{2}{3} + \infty - 0 = \infty$

→ existiert nicht / divergiert

f. $\int_{0}^{4} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} 1\,dx + \int_{2}^{4} 3\,dx \overset{\text{2. Art}}{=} \lim_{\beta\to 2}\left[x\right]_{0}^{\beta} + \lim_{\alpha\to 2}\left[3x\right]_{\alpha}^{4}$

$= \lim_{\beta\to 2}\underbrace{(\beta)}_{\to 2} - 0 + 3\cdot 4 - \lim_{\alpha\to 2}\underbrace{(3\cdot\alpha)}_{\to 6} = 2+12-6 = 8$

oder

$\int_{0}^{4} f(x)\,dx = \lim_{\beta\to 2}\int_{0}^{2} f(x)\,dx + \lim_{\alpha\to 2}\int_{2}^{4} f(x)\,dx$

$\lim_{\beta\to 2} 1,\ x=2 \Rightarrow g(x) = 1\quad x\in(-\infty, 2]$
stetige Fortsetzung von f

$\lim_{\alpha\to 2} 3,\ x=2 \Rightarrow g(x) = 3,\ x\in[2,\infty)$
stetige Fortsetzung von f

$\int_{0}^{4} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} 1\,dx + \int_{2}^{4} 3\,dx = [x]_{0}^{2} + [3x]_{2}^{4} = 2-0+12-6 = 8$

→ existiert / konvergiert, Wert: 8

g. $\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \int_{0}^{1/2} 4x\,dx + \int_{1/2}^{2} 3\,dx \overset{\text{2. Art}}{=} \lim_{\beta\to 1/2}\left[2x^2\right]_{0}^{\beta} + \lim_{\alpha\to 1/2}\left[3x\right]_{\alpha}^{2}$

$= \lim_{\beta\to 1/2}(2\underbrace{\beta^2}_{\to 1/4}) - 2\cdot 0^2 + 3\cdot 2 - \lim_{\alpha\to 1/2} 3\cdot\underbrace{\alpha}_{\to 1/2} = \frac{1}{2} - 0 + 6 - \frac{3}{2} = 5$

→ existiert / konvergiert, Wert: 5

② a. $\int_0^1 \frac{2+4x}{x^2+x}\,dx$

Subst. $u = x^2+x = g(x) \rightarrow g'(x) = \frac{du}{dx} = 2x+1 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x+1}$

$x_1 = 0 \longrightarrow u_1 = 0^2+0 = 0$

$x_2 = 1 \longrightarrow u_2 = 1^2+1 = 2$

$\int_0^1 \frac{2+4x}{x^2+x}\,dx = \int_0^2 \frac{2+4x}{u}\cdot\frac{du}{2x+1} = \int_0^2 2\cdot\frac{1}{u}\,du = [$

2. Art

$= \lim_{\alpha\to 0}\left[2\cdot\ln|u|\right]_\alpha^2 = 2\cdot\ln|2| - \lim_{\alpha\to 0} 2\cdot\underbrace{\ln|\alpha|}_{\to -\infty} = -\infty$

$\rightarrow$ existiert nicht / divergiert

b. $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2}\,dx \qquad g(x) = 1+x^2 \qquad g'(x) = 2x$

$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^0 \frac{1/2\cdot 2x}{1+x^2}\,dx = 1/2\cdot\lim_{\alpha\to-\infty}\left[\ln|1+x^2|\right]_\alpha^0$

$= 1/2\left(\ln|1| - \ln|1+\alpha^2|\right) = 1/2\left(0 - \lim_{\alpha\to-\infty}\underbrace{\ln|1+\alpha^2|}_{\to\infty}\right) = \infty$

$\rightarrow$ existiert nicht / divergiert

③ a. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+e^x}\,dx \qquad f(x) = \frac{1}{x^2+e^x}$

$|f(x)| = \frac{1}{x^2+\underbrace{e^x}_{>0}} \leq \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^2+e^x}\,dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergent für $\frac{1}{x^p}$ mit $p>1$

$\rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^2+e^x}\,dx$ ebenfalls konvergent / existiert nach dem Majorantenkriterium

b. $\int_1^\infty -\frac{e^{-x}}{x}\,dx$

$|f(x)| = \frac{e^{-x}}{\underbrace{x}_{\geq 1 \text{ f. } x\in[1,\infty)}} \leq e^{-x} \Rightarrow \int_1^\infty e^{-x}\,dx$ konvergent

$\rightarrow$ nach dem Majorantenkriterium ist $\int_1^\infty -\frac{e^{-x}}{x}\,dx$ ebenfalls konvergent / existiert.

c. $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$

$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| = \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ mit $p=2>1$ konvergent

$\rightarrow$ nach dem Majorantenkriterium ist $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ konvergent / existiert

d. $\int_1^\infty \frac{1}{(x^2+5)^2}\,dx$

$\left|\frac{1}{(x^2+5)^2}\right| = \frac{1}{(x^2+5)^2} \leq \frac{1}{(x^2+0)^2} = \frac{1}{x^4} \Rightarrow \int_1 \frac{1}{x^4}$ mit $p=4>1$ konvergent

$\rightarrow$ nach dem Majorantenkriterium ist $\int_1^\infty \frac{1}{(x^2+5)^2}\,dx$ konvergent / existiert

e. $\int_0^1 \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+x}\,dx$

$\frac{1}{x^2+x} \underset{\forall x\in[0,1]}{\geq} \frac{1}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2}$ mit $q \geq 1$ divergent

→ nach dem Minorantenkriterium divergiert auch bzw. existiert nicht $\int^1 \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

f. $\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{x+1}{2x^2+2}}\,dx$

$\sqrt[3]{\frac{x+1}{2x^2+2}} \underset{\forall x\in[0,1]}{\leq} \sqrt[3]{\frac{x+x}{2x^2}} = \sqrt[3]{\frac{2x}{2x^2}} = \frac{1}{x^{1/3}} \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}}$ mit $q<1$ konvergent

→ nach Majorantenkriterium $\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{x+1}{2x^2+2}}\,dx$ konvergent / existiert