## 28.3 Integration von unbeschränkten Integranden mit vertikalen Asymptoten

**Definition 1**

Integrale über Funktionen, die innerhalb der Integrationsgrenzen an einer Stelle gegen $\infty$ oder $-\infty$ streben (vertikale Asymptote) (oder an einer Stelle unstetig sind), heißen uneigentliche Integrale 2. Art.

Ist die Funktion *f*(*x*) stetig im Intervall (*a*,*b*] dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to a, \alpha > a} \boxed{\int_\alpha^b f(x)\,dx}$$

Bestimmtes Integral



Ist die Funktion *f*(*x*) stetig im Intervall [*a*,*b*) dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta \to b, \beta < b} \boxed{\int_a^\beta f(x)\,dx}$$

Bestimmtes Integral

Ist die Funktion *f*(*x*) stetig im Intervall (*a*,*b*) dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,\ c \text{ beliebige reelle Zahl.}$$

Für alle Fälle gilt:

Wenn der jeweilige Grenzwert existiert, so konvergiert das uneigentliche Integral, und der Grenzwert ist der Wert dieses uneigentlichen Integrals. Wenn der Grenzwert nicht existiert, divergiert das uneigentliche Integral.

Untersuchung uneigentlicher Integrale mit unbeschränktem bzw. unstetigem Integranden auf Konvergenz bzw. Divergenz

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{f \text{ stetig in}[a,b)} dx, \quad \int_a^b \underbrace{f(x)}_{f \text{ stetig in}(a,b]} dx, \quad \int_a^b \underbrace{f(x)}_{f \text{ stetig in}(a,b)} dx,$$

1. Unstetigkeitsstelle(n) von *f* identifizieren
2. ggf. Integrationsbereich aufsplitten, so dass Unstetigkeitsstelle(n) an den Intervallenden
3. Stammfunktion *F* von *f* bestimmen
4. Untersuche, ob die Grenzwerte $\lim\limits_{\beta \to b} F(\beta), \lim\limits_{\alpha \to a} F(\alpha)$ existieren

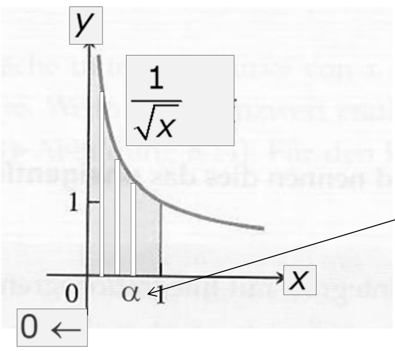
$\boxed{\text{Ja} \Rightarrow \text{Uneigentliches Integral existiert}}$

$\boxed{\text{Nein} \Rightarrow \text{Uneigentliches Integral existiert nicht}}$



**Beispiel 1**

Existiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$?




$$\int_\alpha^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Der Integrand ist stetig auf dem Intervall (0,1], allerdings an der Stelle $x$=0 nicht definiert und wird unendlich für $x \to 0, x > 0$.

Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig

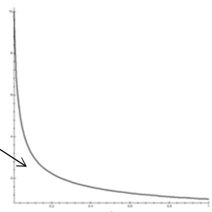
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_{\alpha}^{1} = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\alpha}$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\alpha\to 0,\alpha>0} \int_{\alpha}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\alpha\to 0,\alpha>0} \left(2 - 2\sqrt{\alpha}\right)$$

$$= 2 - \lim_{\alpha\to 0,\alpha>0} 2\sqrt{\alpha} = 2$$

Das uneigentliche Integral konvergiert und die Fläche hat den Wert 2.



Schreibweise

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$$