Beispiel 3

$$a_k = \frac{1}{\underbrace{k}_{>0}} \Rightarrow s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \overbrace{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}^{\text{harmonische Reihe}}$$

Die harmonische Reihe ist divergent !!!

denn die Folge der Partialsummen s_n ist monoton steigend und unbeschränkt:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{>8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}} + \cdots$$

Vom dritten Summanden an werden jeweils 2, 4, 8, 16, 32,… Summanden zusammengefasst. Dadurch entstehen beliebig viele Terme die größer als ½ sind, die Teilsummen s_n werden beliebig groß, wenn nur n groß genug gewählt wird.

Beispiel 4

$$a_k = \frac{1}{k^2} \Rightarrow s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

Diese Reihe ist konvergent; man kann beweisen, dass die Folge der Partialsummen monoton steigend und nach oben beschränkt ist (→ Seminar).

Satz 1 Divergenzkriterium:

Falls die Folge a_k nicht gegen Null konvergiert, ist die unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

divergent.

Notwendig für die Konvergenz einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

ist die Bedingung, dass die Folge a_k eine Nullfolge ist, also

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0$$

Konvergente Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \; |q| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\beta} \; , \; \beta > 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Divergente Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \; , \; |q| \geq 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\beta} \; , \; 0 \leq \beta \leq 1$$

Beispiel 5

Unendliche periodische Dezimalzahlen können als Summen unendlicher geometrischer Reihen - und somit als Bruch - dargestellt werden

$$0.12\overline{24} = \frac{12}{100} + 0.0024 \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^k}_{=\frac{1}{1-\frac{1}{100}}} = \frac{12}{100} + \frac{24}{10000} \cdot \frac{1}{\underbrace{1-\frac{1}{100}}_{=\frac{99}{100}}}$$

$$= \frac{12}{100} + \frac{24}{1000\cancel{0}} \cdot \frac{10\cancel{0}}{99} = \frac{12}{100} + \frac{24}{100 \cdot 99} = \frac{12 \cdot 99 + 24}{9900} = \frac{1212}{9900} = \frac{101}{825}$$