5. Aufgabe

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad 0 \le x \le 1$$

das Taylor-Polynom zweiter Ordnung um den Entwicklungspunkt x_0=1 und geben Sie das zugehörige Restglied an. Welche Aussage kann über die im Restglied auftretende Zwischenstelle ξ gemacht werden?

Lösung

$$\underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}_{\text{Taylorpolynom 2-ter Ordnung (Hauptteil)}} + \underbrace{\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3}_{R_2 \text{ Restglied von Lagrange}}$$

Kettenregel $\left[u(x)^m\right]' = m \cdot [u(x)]^{m-1} \cdot u'(x)$

x_0=1

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \quad 0 \le x \le 1 \quad \to f(1) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -(1+x)^{-2} = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad \to f'(1) = -\frac{1}{4}$$

$$f''(x) = 2(1+x)^{-3} = \frac{2}{(1+x)^3} \quad \to f''(1) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = -6(1+x)^{-4} = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

Taylorpolynom zweiter Ordnung mit Fehlerterm

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3$$

ξ liegt zwischen x_0=1 und $x \in [0,1]$

$f(1)=\frac{1}{2}, f'(1)=-\frac{1}{4}, f''(1)=\frac{1}{4}$ $f'''(x)=-\frac{6}{(1+x)^4}$

Taylorpolynom zweiter Ordnung mit Fehlerterm

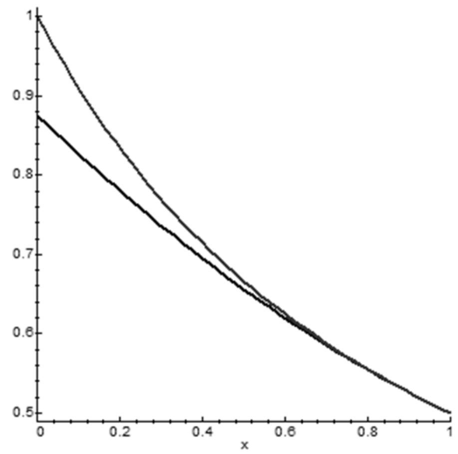
$$f(x)=\frac{1}{1+x}=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{1!}\frac{1}{4}(x-1)+\frac{1}{2!}\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{3!}\frac{(-6)}{(1+\xi)^4}(x-1)^3$$

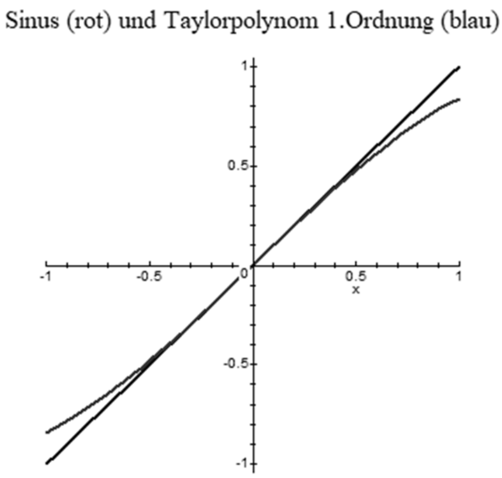
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-1)+\frac{1}{8}(x-1)^2-\frac{1}{(1+\xi)^4}(x-1)^3$$

ξ liegt zwischen x_0=1 und $x\in$[0,1]

1/(1+x) (rot) und Taylorpolynom 2.Ordnung (blau)



Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner, HTWK Leipzig, MNZ


Sinus (rot) und Taylorpolynom 1.Ordnung (blau)
1
0.5
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
x