4. Aufgabe

Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^5$ sind die folgenden Vektoren gegeben.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie

a) $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle, \left\| \vec{a} \right\|, \left\| \vec{b} \right\|$

b) die orthogonale Projektion $\vec{u}$ sowie das Lot $\vec{v}$ von $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Lösung

a)

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 4 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 9$$

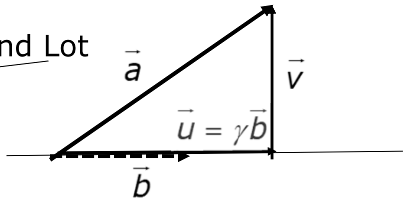
$$\left\| \vec{a} \right\| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{21}$$

$$\left\| \vec{b} \right\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{8}$$

Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner, HTWK Leipzig, MNZ

orthogonale Projektion und Lot

$$\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$$



$$\vec{u} = \underbrace{\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{b}\|^2}}_{\gamma} \vec{b}$$

$$\vec{v} = \vec{a} - \gamma \vec{b}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \gamma = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{b}\|^2} = \frac{9}{8}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 9$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{8}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \boxed{\frac{9}{8}\vec{b}} = \frac{9}{8}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \vec{a} - \gamma \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{9}{8}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 32-18 \\ 0-9 \\ 8+9 \\ 16-9 \\ 0-9 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 14 \\ -9 \\ 17 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}$$