Umformungsregeln

Potenzregeln:

$a^{-1} = \frac{1}{a}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Basis identisch

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exponent identisch

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Logarithmus:

e^x und $\ln x$ sind Umkehrung zueinander → heben sich zusammen auf $\Longrightarrow$ $e^{\ln x} = x$, $\ln(e^x) = x$

$\ln(1) = 0$
$\ln(\infty) = \infty$
$\ln(0) = -\infty$
$\ln(e) = 1$

$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

$\ln(a^b) = b \cdot \ln a$

$a^b = e^{\ln(a^b)} = e^{b \cdot \ln a}$

generell:

1. auf einen Nenner bringen zum Zusammenfassen

a) (Spezialfall von b)) $a - \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c - b}{c}$

b) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{\boxed{b}} \cdot \frac{d}{d} - \frac{c}{d} \cdot \frac{\boxed{b}}{\boxed{b}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$

2. l'Hospital-Regeln

„$\frac{0}{0}$" / „$\frac{\infty}{\infty}$" $\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x)$ und $g(x)$ getrennt voneinander ableiten

Sonderfälle: (anwenden bis „Standard"fall „$\frac{0}{0}$" / „$\frac{\infty}{\infty}$" möglich)

- „$\infty - \infty$" / „$0 - \infty$" $\Rightarrow$ Bruch erweitern, sodass auf gleichen Nenner
- „$0 \cdot \infty$" $\Rightarrow$ $f(x)$ oder $g(x)$ als Quotienten schreiben

[Bsp. $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \ln x = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$ („$0 \cdot \infty$") $= \lim \cancel{\frac{x}{\frac{1}{\ln x}}}$ („$0 \cdot \infty$") wird durch $(\ln(x))^{-1}$ zu komplizierte Ableitung, sodass nicht zielführend
↳ $= \ldots$ Standardfall „$\frac{\infty}{\infty}$"]

- „0^0", „1^∞", „0^∞", „∞^0" $\Rightarrow \lim e^{\ln(\ldots)}$ → da e-Fkt. stetig → $e^{\lim \ln(\ldots)} \ldots$

3. Kehrbruch: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ | $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$

spezielle Umformungen

① $$\boxed{\frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}} = \frac{\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^2} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}-2} = (x^2+1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

② $$\boxed{\underbrace{\frac{3}{2}\,\overbrace{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}^{\to\ \sqrt{1+x^2}} \cdot 2x}_{\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}x = 3x}} = 3x \cdot \sqrt{1+x^2}$$