2. Aufgabe

Die 2π-periodische Funktion $f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ ist im Periodenintervall $(-\pi,\pi]$ durch die Werte

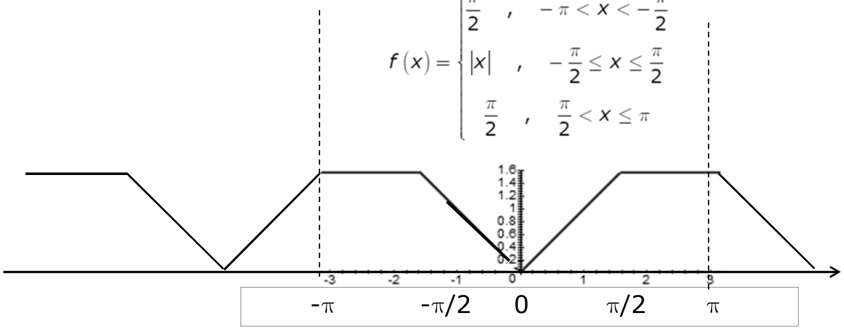
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & , \quad -\pi < x < -\dfrac{\pi}{2}\\ |x| & , \quad -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\pi}{2} & , \quad \dfrac{\pi}{2}< x\le\pi\end{cases}$$

erklärt (Skizze). Bestimmen Sie die Fourier-Entwicklung der Funktion.

Lösung

1 Skizze

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & , \quad -\pi < x < -\dfrac{\pi}{2}\\ |x| & , \quad -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\pi}{2} & , \quad \dfrac{\pi}{2}< x\le\pi\end{cases}$$



2 Die Funktion $f(x)$ ist gerade $\Rightarrow \forall k=1,2,\ldots: b_k=0$

3 Mittelwerteigenschaft erfüllt, da *f* stetig ist

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \quad -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ |x| & , \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & , \quad \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

4 Integrationsbereich (*f* gerade!!)

$0..\pi$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \;, k = 1,2,3,\ldots$$

5 Berechnung der Fourier-Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} + \frac{\pi}{2}\pi - \frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{3}{8}\pi$$