29.3 Konvergenz von Fourier-Reihen

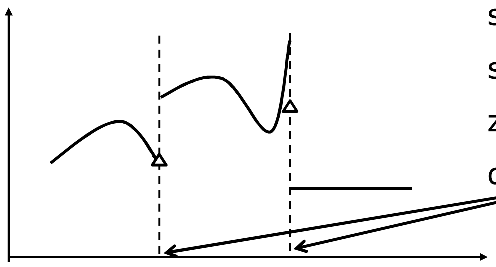
Definition 1

Eine Funktion f heißt in $[a,b]$ stückweise stetig, wenn eine Unterteilung des Intervalls

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$$

so existiert, dass f in den offenen Intervallen (x_{i-1},x_i), $i=1,2,..n$, stetig ist und die rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwerte an diesen Nahtstellen existieren

Eine Funktion f heißt in $[a,b]$ stückweise stetig differenzierbar (oder stückweise glatt), wenn f und f' in $[a,b]$ stückweise stetig sind.



stückweise stetig $\Leftrightarrow$ f aus stetigen Funktionen zusammengesetzt , aber an den Nahtstellen nicht stetig.

Satz 1 (Konvergenzsatz für Fourier-Reihen)

$$f:\mathbb{R}\to W(f)\,,\ x\mapsto f(x)$$

▷ periodisch mit der Periode 2π,

▷ stückweise stetig differenzierbar im Periodenintervall $[0,2\pi]$,

Dann gilt

Die Fourier–Reihe von f konvergiert für alle $x\in\mathbb{R}$.

Ist f stetig in x, so gilt

$$a_0+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(k\,x)+b_k\ \sin(k\,x)\right)$$

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(k\,x)+b_k\ \sin(k\,x)\right)=\boxed{f(x)}$$

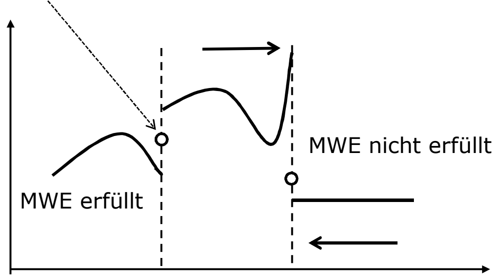
Ist f unstetig in x, so gilt

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(k\,x)+b_k\ \sin(kx)\right)=\lim_{h\to 0,h>0}\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}$$

$$\lim_{h\to 0,h>0}\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}$$

f besitzt die Mittelwerteigenschaft (MWE) ⇔ Funktionswert $\boxed{f(x)}$ in allen Punkten x ist gleich dem arithmetischen Mittel aus links– und rechtsseitigem Grenzwert im Punkt x.

An allen Stellen, an denen f stetig ist, ist die MWE erfüllt.



Zusammenfassung

An allen Stellen, an denen f die Mittelwerteigenschaft erfüllt konvergiert die Fourier-Reihe von f gegen den betreffenden Funktionswert.