Prof. Dr. habil.
H.-J. Dobner

§ 31. Determinanten

31.1 Die Determinante einer Matrix

Wir beschäftigen uns in diesem Paragraphen nochmals mit Matrizen mit dem Ziel, diese mittels einer Kenngröße zu charakterisieren. Dies gelingt mit der Einführung der Determinante.

=>> INFORMATIK

Bewertung (numerischer) Algorithmen.

Definition 1

Ist **A** eine $n \times n$ Matrix, so definieren wir $\mathbf{A}_{ij}$ als die $(n\text{-}1)\times(n\text{-}1)$ Matrix, die aus **A** durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Beispiel 1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 8 \\ 0 & 7 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & 8 \\ 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Definition 2

Für eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ definieren wir die Determinante induktiv:

Schreibweise: $|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A})$

$$n = 1 : \det((a)) = a$$

$$n > 1 : |\mathbf{A}| := \det(\mathbf{A}) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot \det(\mathbf{A}_{1,j})$$

Beispiel 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\mathbf{A}) = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det(\mathbf{A}_{1,1}) + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \det(\mathbf{A}_{1,2})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_{1,1} = \begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{-4} \\ \cancel{5} & 8 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_{1,2} = \begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{-4} \\ 5 & \cancel{8} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\mathbf{A}) = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det(\mathbf{A}_{1,1}) + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \det(\mathbf{A}_{1,2})$$

$$= 3 \cdot \det((8)) \quad + (-1) \cdot (-4) \det((5))$$

$$= 24 + 20 = 44$$

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$