2. Aufgabe

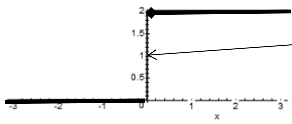
Die Werte der 2π-periodischen Funktion *f* sind im Periodenintervall $(0,2\pi]$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten der Funktion *f*.

Lösung

1 Skizze



2 Keine Symmetrie

3 MWE nicht erfüllt

An der Stelle 0 konvergiert die Fourier-Reihe gegen 1

4 Integrationsbereich $0..\pi$

5 Berechnung der Fourier-Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx\,,\ k \ge 1$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx\,,\ k \ge 1$$

$$f \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(k\,x) + b_k\,\sin(k\,x)\right)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

$$\int \sin(\alpha x)dx = -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x) + C$$

$$\int \cos(\alpha x)dx = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x) + C$$

$$\cos(k\pi) = (-1)^k$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2dx = \frac{1}{2\pi}\left[2x\right]_0^{\pi} = 1$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{k}\left(\sin(k\pi) - \sin(0)\right) = 0,\ k = 1,2,3,\dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\left(\cos(k\pi) - \cos(0)\right) = \begin{cases} 0, k = 2,4,6,\dots & k \text{ gerade} \\ \dfrac{4}{k\pi}, k = 1,3,5,\dots & k \text{ ungerade} \end{cases}$$