$$\underbrace{f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)}_{T_1}$$

Beispiel 1

Die Berechnung von Wurzeln $\sqrt{42}$

mit Taylorpolynom 1. Ordnung; Entwicklungspunkt x_0>0

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$\Rightarrow$ Taylorpolynom $\sqrt{x_0}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)$

Wahl von x_0=36 (dann wird die Rechnungen einfach)

$$\sqrt{x}\approx\sqrt{x_0}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0) \Rightarrow \sqrt{42}\approx\sqrt{36}+\underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{36}}(42-36)}_{\frac{6}{12}}=6.5$$

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$\left|f(x)-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)\right|=\left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2\right|$$

Wie gut ist die Näherung 6.5 für $\sqrt{42}$??

Fehlerabschätzung des Restglieds $R_1=\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\Rightarrow R_1=\frac{1}{2!}\cdot\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{\xi^3}}\right)(x-x_0)^2$$

$$=-\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{\xi^3}}(42-36)^2,\ \xi \text{ zwischen } x=42 \text{ und } x_0=36$$

$$\left|\sqrt{42}-\underbrace{\left(f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)\right)}_{=6.5}\right|=\left|\underbrace{\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2}_{R_1}\right|=\left|-\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{\xi^3}}(6)^2\right|$$

$$\left|\sqrt{42}-6.5\right| = \boxed{\left|-\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{\xi^3}}(6)^2\right|}\quad \xi \text{ zwischen } x = 42 \text{ und } x_0 = 36$$

Wie weit weicht der Wert 6.5 schlimmstenfalls vom tatsächlichen Wert ab – egal ob nach unten oder nach oben?

Was ist der größtmögliche Wert? *Worst case Abschätzung*.

$$\left|-\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{\xi^3}}(6)^2\right| = \left|-\frac{36}{8}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\xi^3}}}_{>0}\right| = \frac{18}{4}\frac{1}{\sqrt{\xi^3}}$$

Ein Bruch vergrößert sich, wenn der Nenner verkleinert wird.

$$\leq \frac{18}{4}\frac{1}{\sqrt{36^3}}$$

$$= \frac{18}{4}\cdot\frac{1}{216} = \frac{1}{48} = 0.02083.. \leq 0.021$$

Fehlerabschätzung

$$\left|\sqrt{42}-6.5\right| = \left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2\right| = \left|-\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{\xi^3}}(6)^2\right| \leq 0.021$$

$$\left|\sqrt{42}-6.5\right| \leq 0.021 \Rightarrow$$

$$6.5 - 0.021 \leq \sqrt{42} \leq 6.5 + 0.021$$

Fehlerterm $-\frac{36}{8}\frac{1}{\sqrt{\xi^3}}$

ist negativ, d. h, der tatsächliche Wert ist kleiner als der berechnete Wert 6.5.
Intervall, in dem die Wurzel liegt:

$$\sqrt{42} \in [6.5 - 0.021, 6.5] = [6.479, 6.5]$$