

5. Aufgabe

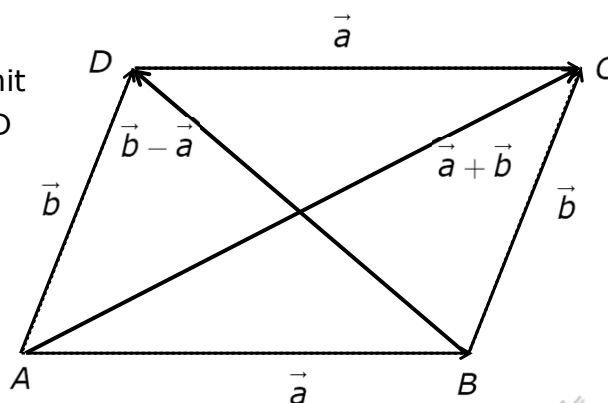
Beweisen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts den „Rhomben-Satz“: Ein Parallelogramm hat genau dann gleich lange Seiten, wenn die beiden Diagonalen orthogonal sind.

Lösung

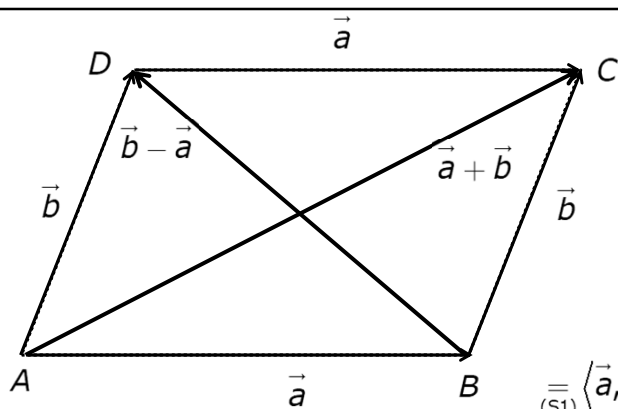
Parallelogramm mit den Ecken A, B, C, D

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$



Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner, HTWK Leipzig, MNZ



Lösung

$$\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle$$

$$\stackrel{(S1)}{=} \langle \vec{a}, \vec{a} - \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle$$

$$\stackrel{(S3)}{=} \langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{b} \rangle$$

$$\stackrel{(S1),(S2)}{=} \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \stackrel{(S3)}{=} \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle$$

$$= \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}_{\|\vec{a}\|^2} - \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle}_{\|\vec{b}\|^2} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{a}\|^2 = \|\vec{b}\|^2$$

Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner, HTWK Leipzig, MNZ