HTWK
Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig
Prof. Dr. habil.
H.-J. Dobner

Mathematik für Informatiker (MfI) II

Seminar KW 17

<u>Thema:</u>

Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(x - x_0\right)^k = a_0 + a_1 \left(x - x_0\right) + a_2 \left(x - x_0\right)^2 + \ldots + a_n \left(x - x_0\right)^n + \ldots$$

a_k Zahlenfolge

x_0 Mittelpunkt

x Variable.

Jede Potenzreihe besitzt einen eindeutig bestimmten Konvergenzradius $0 \le \rho \le \propto$

$$\boxed{\rho = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \frac{1}{\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}}$$

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(x - x_0\right)^k$ ist für alle reellen Zahlen x mit

$|x - x_0| < \rho$ absolut konvergent

$|x - x_0| > \rho$ divergent

$|x - x_0| = \rho$ keine Aussage möglich, es kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen!!

Konsequenz: Die Fälle $x - x_0 = \rho$, $x - x_0 = -\rho$

müssen gesondert auf Konvergenz/Divergenz untersucht werden.

Aufgabenstellung beachten!

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

Was ist zu tun? Konvergenzradius ρ bestimmen

Bestimmen Sie alle *x* für welche die Potenzreihe konvergiert

Für welche reellen Zahlen *x* konvergiert die Potenzreihe?

Was ist zu tun? Konvergenzradius ρ bestimmen und die Punkte $x=x_0+\rho$ sowie $x=x_0-\rho$ auf Konvergenz/Divergenz untersuchen.

1. Aufgabe

Bestimmen Sie alle reellen Zahlen *x*, für welche die folgende Potenzreihe konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} 4^k (x+3)^{2k}$

Lösung

$a_k = 4^k, x_0 = -3$ $\qquad a_{k+1} = 4^{k+1}$

Problem

Substitution $t = (x+3)^2$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 4^k t^k$ Bestimmung des Konvergenzradius mit dem Quotientenkriterium

$$\Rightarrow \rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{4^k}{4^{k+1}} \right| = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 4^k t^k \quad \Rightarrow \rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{4^k}{4^{k+1}}\right| = \frac{1}{4}$$

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} 4^k t^k$ ist für alle reellen Zahlen t mit

$|t| < \frac{1}{4}$ absolut konvergent

Substitution $t = (x+3)^2$

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} 4^k (x+3)^{2k}$ ist für alle reellen Zahlen x mit

$\left|(x+3)^2\right| < \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \left|(x+3)\right| < \frac{1}{2}$ absolut konvergent

$$\Downarrow$$

$\rho = \frac{1}{2}$ Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} 4^k (x+3)^{2k}$

Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner, HTWK Leipzig, MNZ

$\sum_{k=0}^{\infty} 4^k (x+3)^{2k}$ absolut konvergent für $\left|(x+3)\right| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < x < -\frac{5}{2}$

Untersuchung der Randpunkte

$x = -\frac{7}{2} \quad \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{4^k}_{2^{2k}} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \boxed{(-1)^{2k}}$ divergent, da Reihenglieder keine Nullfolge bilden

$x = -\frac{5}{2} \quad \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{4^k}_{2^{2k}} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \boxed{1^{2k}}$ divergent, da Reihenglieder keine Nullfolge bilden

Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner, HTWK Leipzig, MNZ