7. Aufgabe

Der Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ hat die Länge 6 in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \xi \end{pmatrix}$

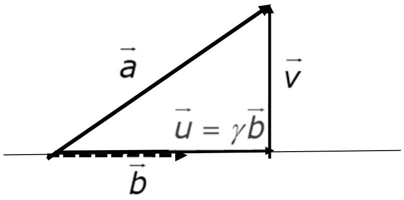
und die Projektion in Richtung $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat die Länge 4.

Bestimmen Sie den Vektor $\vec{a}$.

Lösung

orthogonale Projektion und Lot

$$\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$$



$$\vec{u} = \underbrace{\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{b}\|^2}}_{\gamma} \vec{b}$$

$$\vec{v} = \vec{a} - \gamma \vec{b}$$

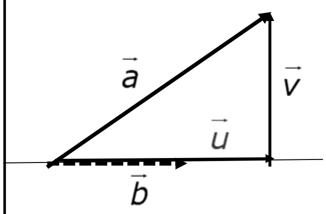
Für den Einheitsvektor $\vec{e}$ in Richtung $\vec{a}$ gilt

Richtung von $\vec{a}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \xi \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{e} = \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \xi \end{pmatrix} \right\|} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \xi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + \xi^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \xi \end{pmatrix}$$

Dann ist $\vec{a} = \|\vec{a}\| \vec{e} \quad \Rightarrow \vec{a} = 6 \dfrac{1}{\sqrt{2 + \xi^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \xi \end{pmatrix}$



$$\vec{u} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b}$$

$$\|\vec{u}\| = \left\| \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b} \right\| \underset{(N2)}{=} \frac{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|}{\|\vec{b}\|^2} \|\vec{b}\| = \frac{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|}{\|\vec{b}\|} = 4$$

$$\vec{a} = \frac{6}{\sqrt{2+\xi^2}}\begin{pmatrix}1\\1\\\xi\end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\left\|\vec{u}\right\| = \frac{\left|\left\langle \vec{a},\vec{b}\right\rangle\right|}{\left\|\vec{b}\right\|} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{6}{\sqrt{2+\xi^2}}\,\frac{\left|1\cdot 1 + 1\cdot 2 + \xi\cdot 2\right|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{2+\xi^2}}\,\frac{3+2\xi}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2+\xi^2}}\left(3+2\xi\right) = 4$$

$$\Rightarrow \left(3+2\xi\right) = 2\sqrt{2+\xi^2} \underset{\text{Quadrieren}}{\Rightarrow} 9 + 12\xi + 4\cancel{\xi^2} = 4\left(2+\cancel{\xi^2}\right)$$

$$\Rightarrow 12\xi = -1 \Rightarrow \xi = -\frac{1}{12}$$

$$\vec{a} = \frac{6}{\sqrt{\underbrace{2+\left(-\frac{1}{12}\right)^2}_{\frac{289}{144}}}}\begin{pmatrix}1\\1\\-\frac{1}{12}\end{pmatrix} = \frac{6\cdot 12}{17}\begin{pmatrix}1\\1\\-\frac{1}{12}\end{pmatrix} = \frac{6}{17}\begin{pmatrix}12\\12\\-1\end{pmatrix}$$