

Aufgaben 3

11. Aufgabe

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x \cdot \sqrt{1 + (\ln(x))^2}} dx$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x \cdot \sqrt{1 + (\ln(x))^2}} dx$$

$$u = \ln(x), du = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} du$$

$$= \sqrt{1 + u^2} + C$$

$$\sqrt{1 + (\ln(x))^2}$$

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x \cdot \sqrt{1 + (\ln(x))^2}} dx = \left[\sqrt{1 + (\ln(x))^2} \right]_1^e$$

$$= \sqrt{1 + (\ln(e))^2} - \sqrt{1 + (\ln(1))^2}$$

$$= \sqrt{1 + 1^2} - \sqrt{1 + 0^2}$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{1}$$

$$= \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$$

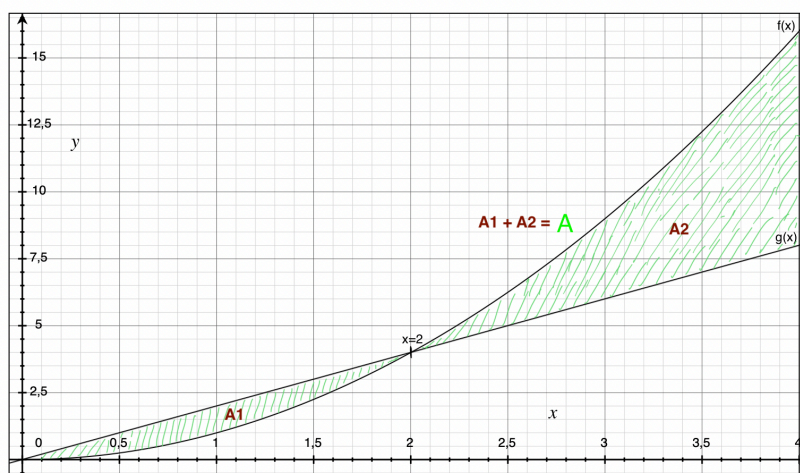
12. Aufgabe

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x \quad [0, 4]$$

$$A = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx$$

$$A_2 = \int_2^4 (f(x) - g(x)) dx$$



$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^2 (g(x) - f(x)) \, dx \\ &= \int_0^2 (2x - x^2) \, dx \\ &= \int_0^2 -x^2 + 2x \, dx \\ &\quad \int -x^2 + 2x \, dx \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + C \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ &= \left(-\frac{1}{3}2^3 + 2^2 \right) - \left(-\frac{1}{3}0^3 + 0^2 \right) \\ &= \left(-\frac{8}{3} + 4 \right) - (0 + 0) \\ &= -\frac{8}{3} + \frac{12}{3} = \frac{12}{3} - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_2^4 (f(x) - g(x)) \, dx \\ &= \int_2^4 x^2 - 2x \, dx \\ &\quad \int x^2 - 2x \, dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_2^4 \\ &= \left(\frac{1}{3}4^3 - 4^2 \right) - \left(\frac{1}{3}2^3 - 2^2 \right) \\ &= \left(\frac{64}{3} - 16 \right) - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{64}{3} - \frac{48}{3} \right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{12}{3} \right)$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

13. Aufgabe

$$\int_0^1 x \cdot \ln(x) \, dx$$

Unstetigkeitsstelle = 0, stetig im Intervall (0, 1]

Unbeschränkt für $x \rightarrow 0$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C = x^2 \left(\frac{1}{2} \ln(x) - \frac{1}{4} + C \right)$$

$$\int_{\alpha}^1 x \cdot \ln(x) \, dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0, \alpha > 0} \left[x^2 \left(\frac{1}{2} \ln(x) - \frac{1}{4} \right) \right]_{\alpha}^1$$

$$= 1^2 \left(\frac{1}{2} \ln(1) - \frac{1}{4} \right) - \lim_{\alpha \rightarrow 0, \alpha > 0} \frac{1}{2} \alpha^2 \ln(\alpha) - \frac{1}{4} \alpha^2$$

$$= -\frac{1}{4} - \lim_{\alpha \rightarrow 0, \alpha > 0} \alpha^2 \left(\frac{1}{2} \ln(\alpha) - \frac{1}{4} \right)$$

L'Hospital:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0, \alpha > 0} \alpha^2 \ln(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0, \alpha > 0} \frac{\ln(\alpha)}{\frac{1}{\alpha^2}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0, \alpha > 0} \frac{\frac{1}{\alpha}}{-\frac{2}{\alpha^3}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0, \alpha > 0} -\frac{\alpha^3}{2\alpha} \rightarrow 0$$

$$= -\frac{1}{4} - 0 = -\frac{1}{4} \rightarrow \text{konvergent}$$

14. Aufgabe

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x(1+x^2)}} dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} dx$$

Für \int_1^{∞} :

$$|f(x)| = \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} = \frac{1}{(x+x^3)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{(x^3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{3 \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{3}{2} > 1 \rightarrow \text{Konvergenz (Majorantenkriterium)}$$

Da sowohl die Grenze $\left(\frac{1}{2} \text{ und } 1\right)$ als auch der Bereich im Intervall $\left(\text{zwischen } \frac{1}{2} \text{ und } 1\right)$ einsetzbar sind und keine Unstetigkeitsstellen existieren, ist dieser Abschnitt konvergent und somit das ganze uneigentliche Integral.

15. Aufgabe

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{-\pi}^0 1 dx + \int_0^{\pi} x dx \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left([x]_{-\pi}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} \right) = \frac{1}{2\pi} \left((0 - (-\pi)) + \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\pi + \frac{\pi^2}{2} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2\pi} + \frac{\pi^2}{4\pi} = \frac{2\pi}{4\pi} + \frac{\pi^2}{4\pi} = \frac{2\pi + \pi^2}{4\pi} = \frac{\pi(2 + \pi)}{4\pi} = \frac{2 + \pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$