Beispiel 5

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2} = 5, \left\|\vec{y}\right\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (2)^2} = 3$$

$$\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = 4 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + (-3) \cdot 2 = -2$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle}{\left\|\vec{x}\right\| \cdot \left\|\vec{y}\right\|} = \frac{-2}{5 \cdot 3} \approx -0.133$$

$$1rad = \frac{180}{\pi}{}^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos(-0.133) = 1.7045rad = 97.7^\circ$$

Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig

Definition 4

In einem Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ heißt ein System von paarweise orthogonalen Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ Orthonormalsystem

Ein Orthonormalsystem ist gekennzeichnet durch

$$\left\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \right\rangle = \underbrace{\delta_{i,j}}_{\text{Kroneckerdelta}} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

d.h.

$$\left\|\vec{e}_i\right\| = 1, i = 1, 2, \ldots, n \wedge \vec{e}_i \perp \vec{e}_j, i \neq j$$

Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig

Beispiel 6

Orthonormalsystem im euklidischen Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$