

Aufgabe 11

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x \cdot \sqrt{1+(\ln(x))^2}} dx \quad u = \ln(x) = g(x) \quad g'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow dx = \frac{du}{\frac{1}{x}} \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$\int_1^e \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} du = \sqrt{1+u^2} = \sqrt{1+(\ln(x))^2} + C$$

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\ln(x)}{x \cdot \sqrt{1+(\ln(x))^2}} dx &= \left[\sqrt{1+(\ln(x))^2} \right]_1^e = \sqrt{1+(\ln(e))^2} - \sqrt{1+(\ln(1))^2} \\ &= \sqrt{1+(1)^2} - \sqrt{1+(0)^2} = \sqrt{2} - \sqrt{1} \approx 0,4132 \end{aligned}$$

Aufgabe 12

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x, \quad [0, 4]$$

Der Schnittpunkt bei $x = 2$ teilt die Fläche A in $A_1 + A_2$

$$A_1 = \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx \quad A_2 = \int_2^4 (f(x) - g(x)) dx$$

$$A_1 = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \int_0^2 -x^2 + 2x \, dx$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + C = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2$$

$$= \left(-\frac{1}{3}2^3 + 2^2 \right) - \left(-\frac{1}{3}0^3 + 0^2 \right) = \left(-\frac{8}{3} + 4 \right) - (0 + 0)$$

$$= -\frac{8}{3} + \frac{12}{3} = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_2^4 (x^2 - 2) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x \right]_2^4$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x \right]_2^4 = \left(\frac{1}{3}4^3 - 2 \cdot 4 \right) - \left(\frac{1}{3}2^3 - 2 \cdot 2 \right)$$

$$= \left(\frac{64}{3} - 16 \right) - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) = \left(\frac{64}{3} - \frac{48}{3} \right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{12}{3} \right)$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\rightarrow A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

Aufgabe 13

$\int_0^1 x \ln(x) dx$ Unstetigkeitsstelle = 0; stetig in $(0, 1]$

Unbeschränkt für $x \rightarrow 0$

Stammfunktion: $\frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C = x^2(\frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4} + C)$

Bestimmtes Integral: $\int_\alpha^1 x \ln(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0; \alpha > 0} \left[x^2(\frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}) \right]_\alpha^1$

$$\begin{aligned}
 &= 1^2(\frac{1}{2}\ln(1) - \frac{1}{4}) - \lim_{\alpha \rightarrow 0; \alpha > 0} \alpha^2(\frac{1}{2}\ln(\alpha) - \frac{1}{4}) \\
 &= \underbrace{(\frac{1}{2}\ln(1) - \frac{1}{4})}_{=\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}} - \underbrace{\lim_{\alpha \rightarrow 0; \alpha > 0} \frac{1}{2} \underbrace{\alpha^2}_{\rightarrow 0} \underbrace{\ln(\alpha)}_{\rightarrow -\infty} - \alpha^2 \frac{1}{4}}_{\text{"0} \cdot -\infty \text{"}}
 \end{aligned}$$

Zum L'Hospital:

$$\begin{aligned}
 &\lim_{\alpha \rightarrow 0; \alpha > 0} \alpha^2 \ln(\alpha) \underbrace{=}_{\text{"0} \cdot -\infty \text{"}} \lim_{\alpha \rightarrow 0; \alpha > 0} \frac{\ln(\alpha)}{\frac{1}{\alpha^2}} \\
 &\underbrace{=}_{\text{"}\frac{-\infty}{\infty}\text{"}} \lim_{\alpha \rightarrow 0; \alpha > 0} \frac{\frac{1}{\alpha}}{-\frac{2}{\alpha^3}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0; \alpha > 0} -\frac{\alpha^3}{2\alpha} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

Der zweite Term geht gegen 0 und somit ist das Ergebnis $-\frac{1}{4}$

Dadurch ist das uneigentliche Integral **konvergent**.

Aufgabe 14

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x(1+x^2)}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} dx$$

Für \int_1^{∞} :

$$|f(x)| = \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} = \frac{1}{(x+x^3)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{(x^3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{3 \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

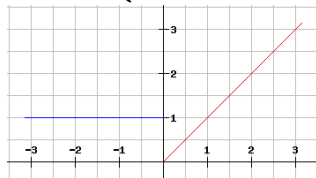
Da $\frac{3}{2} > 1$ **konvergiert** dieser Abschnitt (Majorantenkriterium).

Für $\int_{\frac{1}{2}}^1$:

Da man die Grenzen ($\frac{1}{2}$ und 1) und den Bereich im Intervall (zwischen $\frac{1}{2}$ und 1) problemlos einsetzen kann und es keine Unstetigkeitsstellen gibt, ist dieser Abschnitt **konvergent**.
Damit folgt, dass das ganze uneigentliche Integral **konvergent** ist.

Aufgabe 15

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$



$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} (\int_{-\pi}^0 1 dx + \int_0^{\pi} x dx)$$

$$= \frac{1}{2\pi} ([x]_{-\pi}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi}) = \frac{1}{2\pi} ((0 - (-\pi)) + (\frac{\pi^2}{2} - \frac{0^2}{2})) = \frac{1}{2\pi} (\pi + \frac{\pi^2}{2})$$