3. Aufgabe

Die Werte der 2π-periodischen Funktion f sind im Periodenintervall $(-\pi,\pi)$ gegeben durch

$$f(x)=\begin{cases}-3, & -\pi<x<0 \\ 3, & 0<x<\pi\end{cases}.$$

a) Wie muss die Funktion f an den „Nahtstellen“ $x_0=0$, $x_1=\pi$ definiert werden, so dass f an diesen Stellen die Mittelwerteigenschaft erfüllt?

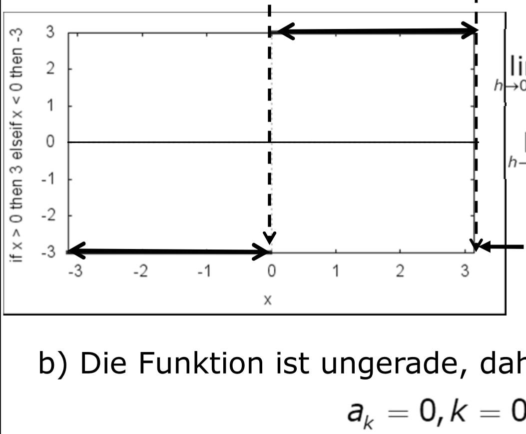
b) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_k, $k=0,1,2,..$ der Funktion $f.$

c) Berechnen Sie den Fourierkoeffizienten b_1 der Funktion $f.$

Lösung

$$f(x)=\begin{cases}-3, & -\pi<x<0 \\ 3, & 0<x<\pi\end{cases}.$$

a) An den Nahtstellen muss der Funktionswert jeweils Null sein (arithmetisches Mittel aus links- und rechtsseitigem Grenzwert)



$$\lim_{h\to 0, h>0}\frac{f(h)+f(-h)}{2}=\frac{3+(-3)}{2}=0$$

$$\lim_{h\to 0, h>0}\frac{f(\pi+h)+f(\pi-h)}{2}=\frac{-3+3}{2}=0$$

b) Die Funktion ist ungerade, daher gilt

$$a_k=0, k=0,1,2,\ldots$$

$$f(x) = \begin{cases} -3, & -\pi < x < 0 \\ 3, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

c)

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -3\sin(x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 3\sin(x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[3\cos(x)\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-3\cos(x)\right]_{0}^{\pi}$$

$$\boxed{\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C}$$

$$= \frac{1}{\pi}3\Big(\cos(0) - \cos(-\pi) + \big(-\cos(\pi) - (-\cos(0))\big)\Big)$$

$$= \frac{3}{\pi}\Big(1 - (-1) + \big(-(-1)\big) + 1\Big) = \frac{3\cdot 4}{\pi}$$