Prof. Dr. habil. H.-J. Dobner

Mathematik für Informatiker (MfI) II

Seminar KW 28

Thema:

Gebietsintegrale

f reellwertige Funktion

$$G \subseteq \mathbb{R}^2 : \iint\limits_G f(x,y)\,d(x,y),$$

$$G \subseteq \mathbb{R}^3 : \iiint\limits_G f(x,y,z)\,d(x,y,z)$$

$$G \subseteq \mathbb{R}^n : \int\int\limits_G \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,d(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

G Rechteck $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$

$$\iint\limits_G f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \underbrace{\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]}_{\substack{\text{Integration bzgl. } y \\ x \text{ als konstant auffassen}}} dx \underset{f \text{ stetig}}{=} \int_c^d \underbrace{\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]}_{\substack{\text{Integration bzgl. } x \\ y \text{ als konstant auffassen}}} dy$$

<u>*G* ist KEIN Rechteck</u> (iteriertes Integral)

<u>*y*-projizierbar</u> $G = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \,, p(x) \le y \le q(x) \right\}$

$$\iint_G f(x,y)\, d(x,y) = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

<u>*x*-projizierbar</u> $G = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d \,, r(y) \le x \le s(y) \right\}$

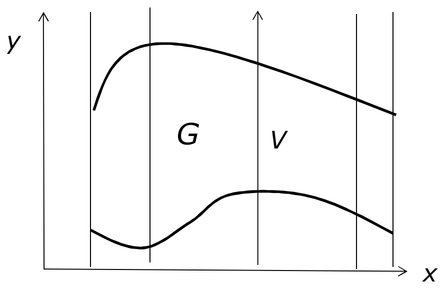
$$\iint_G f(x,y)\, d(x,y) = \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

$\iint_G f(x,y)\, d(x,y)$ <u>Integration zuerst über *y* dann über *x*</u>

Integrationsgebiet *G* zeichnen

<u>Integrationsgrenzen für *y*:</u>

Betrachte eine vertikale Gerade *V*, die in Richtung steigender *y*-Werte durch *G* geht. Die Werte ablesen, bei denen diese Gerade in das Gebiet *G* eintritt und austritt. Diese beiden Werte sind die Integrationsgrenzen für die Integration über *y.*



<u>Integrationsgrenzen für *x*:</u>

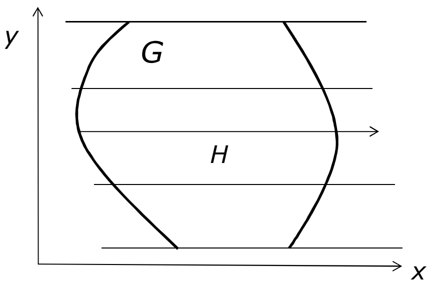
Bestimmen die Werte von *x*, zwischen denen alle vertikalen Geraden durch *G* liegen.

$S = \iint_G f(x,y)\, d(x,y)$ Integration zuerst über x dann über y

Integrationsgebiet G zeichnen

Integrationsgrenzen für x:

Betrachten eine horizontale Gerade H, die in Richtung steigender x-Werte durch G geht. Die Werte ablesen, bei denen diese Gerade in das Gebiet G eintritt und austritt. Diese beiden Werte sind die Integrationsgrenzen für die Integration über x.



Integrationsgrenzen für y:
Bestimmen die Werte von y, zwischen denen alle horizontalen Geraden durch G liegen.

1. Aufgabe

Berechnen Sie das Gebietsintegral

$$\iint_G \left(100 - 6x^2 y\right) d(x,y)$$

wobei

$$G = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1 \right\}$$

Lösung

$$\iint_G \left(100 - 6x^2 y\right) d(x,y) = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2} \left(100 - 6x^2 y\right) dx\,dy$$

Stammfunktion bzgl. x (y als Konstante auffassen)

$$= \int_{-1}^{1} \left[100x - 6\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=2} dy = \int_{-1}^{1} \left(100 \cdot 2 - 2 \cdot 2^3 y - 0\right) dy$$

$$= \int_{-1}^{1} (200 - 16y)\, dy = \left[200y - 8y^2\right]_{-1}^{1} = 400$$