

1 Seminar 1 - L'Hospital + Taylorsche Formel

1.1 L'Hospital

Erste l'Hospitalsche Regel

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Zweite l'Hospitalsche Regel

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Die Erste untersucht 0/0

Die Zweite setzt voraus, dass g gegen +/- Unendlich geht

1.1.1 1. Aufgabe

Bestimmen Sie mittels der Regel(n) von de L'Hospital den Funktionenlimes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^{2x} - 2 + 10^{-2x}}{10^{2x} - 10^{-2x}}$$

Werkzeug:

$$(I) f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln(f(x))}$$

Damit erstmal umformulieren:

$$\begin{aligned} \frac{10^{2x} - 2 + 10^{-2x}}{10^{2x} - 10^{-2x}} & \xrightarrow{(I)} 10^{2x} = e^{2x \ln(10)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^{2x} - 2 + 10^{-2x}}{10^{2x} - 10^{-2x}} & \stackrel{(II)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x \ln(10)} - 2 + e^{-2x \ln(10)}}{e^{2x \ln(10)} - e^{-2x \ln(10)}} \end{aligned}$$

Typ 0/0

Nächstes Werkzeug:

$$(II) \left(e^{2x \ln(10)} \right)' = 2 \ln(10) 10^{2x}$$

Daraus ergibt sich:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \ln(10) \cdot 10^{2x} - 2 \cdot \ln(10) \cdot 10^{-2x}}{2 \cdot \ln(10) \cdot 10^{2x} + 2 \cdot \ln(10) \cdot 10^{-2x}} = 0$$

1.1.2 2. Aufgabe

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^x$$

1. Typ bestimmen: Unendlich(hoch)0

Nicht für die Regeln 1/2 geeignet

Werkzeug:

$$(I) f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln(f(x))}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^x \stackrel{(I)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \cdot \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

Daraus folgt:

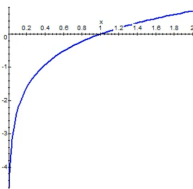
Weiter Umstellen mit Multiplikationstheorem: $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \cdot \left[\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(x^2) \right]} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \cdot [-\ln(x^2)]}$$

Weiter Umstellen, da e-fkt stetig:

$$\stackrel{\text{e Fktn stetig}}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot [-\ln(x^2)]} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(x^2)}$$

Typbestimmung... wie verhält sich der logarithmus ?



Typ - Unendlich * 0

Werkzeug:

$$(II) \frac{u(x)}{v(x)} \xrightarrow{\text{Umformung}} \frac{u(x)}{\frac{1}{\frac{1}{v(x)}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2) \cdot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2)}{\frac{1}{x}}$$

Daraus ergibt sich:

Was ist, wenn x gegen 0 geht ? = -Unendlich/Unendlich

$$\stackrel{\text{"} \sim \text{"}}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2} \cdot 2x}{-\frac{1}{x^2}}$$

Anwendung 2. L'Hospital regel:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x \cdot \ln(x^2)} = e^0 = 1$$

Jetzt wieder zusammensetzen:

1.1.3 3. Aufgabe

$$f(x) = \sin(x) \cosh(x), x \in \mathbb{R}$$

Lösung

$$\underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2}_{\text{Taylorpolynom 2-ter Ordnung (Hauptteil)}} + \underbrace{\frac{f^{(2+1)}(\xi)}{3!}(x - x_0)^{2+1}}_{R_2 \text{ Restglied von Lagrange}}$$

Produktregel $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$f(x) = \sin(x) \cosh(x) \quad x_0=0 \rightarrow f(0) = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos(x) \cosh(x) + \sin(x) \sinh(x) \rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = (\cos(x) \cosh(x) + \sin(x) \sinh(x))'$$

$$= -\sin(x) \cosh(x) + \cos(x) \sinh(x) + \cos(x) \sinh(x) + \sin(x) \cosh(x)$$

$$= 2 \cos(x) \sinh(x) \rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -2 \sin(x) \sinh(x) + 2 \cos(x) \cosh(x)$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -2 \sin(x) \sinh(x) + 2 \cos(x) \cosh(x)$$

Taylorpolynom zweiter Ordnung mit Fehlerterm

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3$$

$$\frac{\sin(x) \cosh(x)}{f(x)}$$

$$= 0 + \frac{1}{1!}(x - 0) + \frac{0}{2!}(x - 0)^2 + \frac{-2 \sin(\xi) \sinh(\xi) + 2 \cos(\xi) \cosh(\xi)}{3!}(x - 0)^3$$

$$= 0 + x + \frac{-\sin(\xi) \sinh(\xi) + \cos(\xi) \cosh(\xi)}{3} x^3$$

ξ liegt zwischen $x_0=0$ und $x \in \mathbb{R}$



1.1.4 4. Aufgabe

$$f(x) = \sin(x), x \in [-1, 1] \quad x_0 = 0, n = 1$$

Taylorpolynom erster Ordnung und Restgliedabschätzung

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

$$f''(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = \sin(x) \quad f'(x) = \cos(x) \quad f''(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(\xi) x^2 \quad \xi \text{ liegt zwischen } x_0=0 \text{ und } x$$

$$\Rightarrow \sin(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{1}{2!} (-\sin(\xi)) x^2$$

$$|R_1(x)| = \left| \frac{1}{2!} (-\sin(\xi)) x^2 \right| \leq \frac{1}{2!} x^2 |\sin(\xi)| \leq \frac{1}{2!} x^2 \cdot 1, x \in I = [-1, 1]$$

$$\text{Etwa } |R_1(x)| < \frac{1}{100} \rightarrow \frac{1}{2!} x^2 \cdot 1 < \frac{1}{100} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{50}} \approx 0.14$$

Faustregel: Für „kleine“ x-Werte gilt $\sin(x) \approx x$

Für $n = 7$ erhält man das folgende Taylorpolynom $x_0 = 0$,

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^7 \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k}_{\text{Taylorpolynom 7-ter Ordnung}} + \underbrace{\frac{f^{(VIII)}(\xi)}{8!} x^8}_{R_7, \text{ Restglied von Lagrange}}$$

$$\begin{aligned} f(x) = \sin(x) &\Rightarrow f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f''(x) = -\sin(x) \\ &\Rightarrow f'''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f^{(IV)}(x) = \sin(x) \\ &\Rightarrow f^{(V)}(x) = \cos(x) \Rightarrow f^{(VI)}(x) = -\sin(x) \\ &\Rightarrow f^{(VII)}(x) = -\cos(x) \Rightarrow f^{(VIII)}(x) = \sin(x) \end{aligned}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{1}{8!} \sin(\xi) x^8$$

ξ liegt zwischen $x_0=0$ und $-1 \leq x \leq 1$

1.1.5 5. Aufgabe

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

das Taylor-Polynom zweiter Ordnung um den Entwicklungspunkt $x_0=1$ und geben Sie das zugehörige Restglied an. Welche Aussage kann über die im Restglied auftretende Zwischenstelle ξ gemacht werden?

Kettenregel $\left[u(x)^m \right]' = m \cdot [u(x)]^{m-1} \cdot u'(x)$

$x_0=1$

$f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \quad 0 \leq x \leq 1 \rightarrow f(1) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = -(1+x)^{-2} = -\frac{1}{(1+x)^2} \rightarrow f'(1) = -\frac{1}{4}$


$f''(x) = 2(1+x)^{-3} = \frac{2}{(1+x)^3} \rightarrow f''(1) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$f'''(x) = -6(1+x)^{-4} = -\frac{6}{(1+x)^4}$

Taylorpolynom zweiter Ordnung mit Fehlerterm

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3$$

ξ liegt zwischen $x_0=1$ und $x \in [0,1]$



Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner, HTWK Leipzig, MNZ

$$f(1) = \frac{1}{2}, f'(1) = -\frac{1}{4}, f''(1) = \frac{1}{4} \quad f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

Taylorpolynom zweiter Ordnung mit Fehlerterm

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{1!} \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{2!} \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{3!} \frac{(-6)}{(1+\xi)^4}(x-1)^3$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{(1+\xi)^4}(x-1)^3$$

ξ liegt zwischen $x_0=1$ und $x \in [0,1]$