HTWK Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig

Prof. Dr. habil.
H.-J. Dobner

Mathematik für Informatiker (MfI) II

Seminar KW 27

Thema:

Funktionen mehrerer Veränderlicher

Partielle Ableitungen

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to W \subseteq \mathbb{R}^m, x \mapsto f(x) = y$$

Fälle

$n>1$, $m=1$: skalare Funktionen

$n>1$, $m>1$: vektorwertige-Funktion (Vektorfunktion)

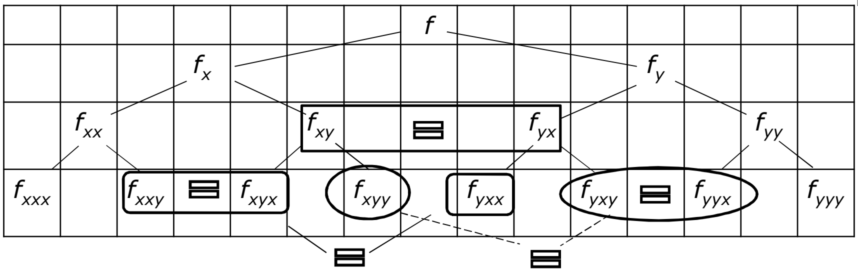
$n=1$, $m>1$: Kurve

$f(x, y, z)$

Die Berechnung partieller Ableitungen

Eine partielle Ableitung nach einer Variablen x bestimmt man, indem man die gewöhnliche Ableitung nach der betreffenden Variablen x bildet und alle anderen Variablen nach denen nicht differenziert wird, als Konstante auffasst.

$f(x,y)$



Satz von Schwarz

$$f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to W(f) \subseteq \mathbb{R}\,,\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

stetige partielle Ableitungen p–ter Ordnung, so ist bei den partiellen Ableitungen p–ter Ordnung die Reihenfolge der Differentiationen vertauschbar.

Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{x^*} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$D_{\vec{f}}\left(\overrightarrow{x^*}\right) = \vec{f}'\left(\overrightarrow{x^*}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(\overrightarrow{x^*}\right) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\left(\overrightarrow{x^*}\right) & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\left(\overrightarrow{x^*}\right) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(\overrightarrow{x^*}\right) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\left(\overrightarrow{x^*}\right) & \vdots & \vdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\left(\overrightarrow{x^*}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\left(\overrightarrow{x^*}\right) & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\left(\overrightarrow{x^*}\right) \end{pmatrix}$$

Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner, HTWK Leipzig, MNZ

Skalare Funktionen von zwei Veränderlichen

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to W \subseteq \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$$

Die Menge der Punkte in der Ebene, an denen eine Funktion $f(x,y)$ einen konstanten Wert $f(x,y)=c$ hat, heißt Niveaulinie von f.

$$Graph(f) = \left\{ (x, y, f(x, y)) \middle| (x, y) \in D \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

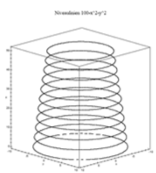
Den Graph von f bezeichnet man auch als Fläche $z=f(x,y)$.

<u>1. Aufgabe</u>

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$$

die Niveaulinien $f(x, y) = 0, f(x, y) = 51, f(x, y) = 75$



sowie Bild(f).

<u>Lösung</u>

Niveaulinie $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow 100 - x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 100$

Kreis um den Ursprung mit Radius 10

Niveaulinie $f(x, y) = 51 \Leftrightarrow 100 - x^2 - y^2 = 51 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 49$

Kreis um den Ursprung mit Radius 7

Niveaulinie $f(x,y) = 75 \Leftrightarrow 100 - x^2 - y^2 = 75 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$

Kreis um den Ursprung mit Radius 5

$$Bild(f) := \{ f(x,y) | (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

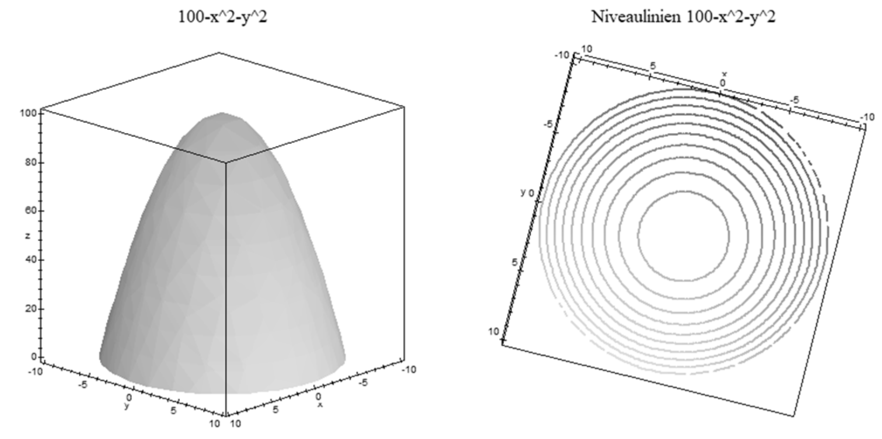
$$f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$$

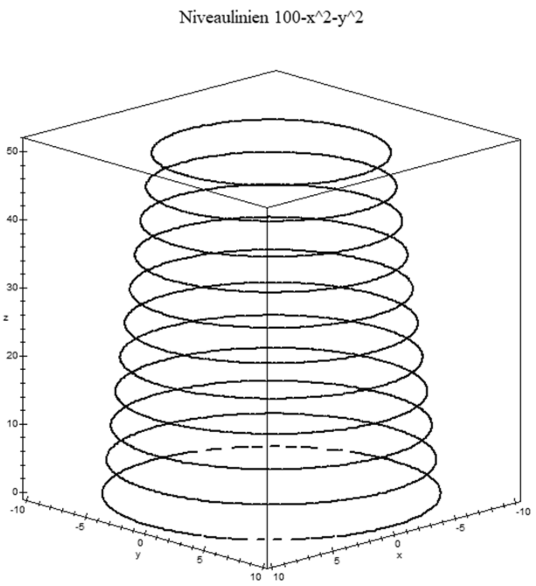
$0 \le x^2 + y^2 \le 100 \quad \Rightarrow f(x,y) \in [0,100]$,da

$z \in [0,100] : f(x,y) = 100 - x^2 - y^2 = z \quad \Rightarrow x^2 + y^2 = 100 - z$

$$x^2 + y^2 > 100 \Rightarrow f(x,y) = 100 - x^2 - y^2 = c < 0$$

$c \in (-\infty, 0) : x^2 + y^2 = 100 - c$ > 0 $\quad Bild(f) = (-\infty, 100]$




Niveaulinien 100-x^2-y^2
50
40
30
z
20
10
0
-10
-5
0
y
5
10
10
5
0
x
-5
-10