31.2 Die Berechnung von Determinanten

Satz 1

Die Determinante einer Matrix **A** ändert sich nicht, wenn man ein α-faches, $\alpha \in \mathbb{K}$, einer Zeile/Spalte zu einer anderen Zeile/Spalte addiert.

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} \cdot a_{il} \cdot \det(\mathbf{A}_{i,l})$$

Beispiel 1

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 25 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 \cdot 25 = 350 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 25 \end{vmatrix} \cdot (-3) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & 8 \\ -6 & -12 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Entw. n. 1. Spalte}}{=} 2 \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ -12 & 1 \end{vmatrix} - 0 + (-6) \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{2 \cdot (7 - (-12) \cdot 8)}_{206} + \underbrace{(-6) \cdot (32 - 56)}_{144}$$

Folgerung aus Satz 1 und §31.1 Satz 1(c)

Hat eine Matrix **A** zwei linear abhängige Zeilen (oder Spalten), so gilt det(**A**)=0.

Besteht eine Zeile (oder Spalte) einer Matrix **A** nur aus Nullen, so gilt det(**A**)=0.

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \cdot \det(\mathbf{A}_{k,j})$$

Beispiel 2

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 9 \\ 6 & -4 & -18 \\ 12 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot \det(\mathbf{A}_{k,j})$

Satz 2

Entsteht die Matrix **B** aus der Matrix **A** durch Vertauschen zweier Zeilen/Spalte, so ist

$$\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{B})$$

Beispiel 3

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \underset{\text{Entw. n. 3. Zeile}}{=} -3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$-3 \cdot 14 = -42$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \underset{\text{Entw. n. 3. Zeile}}{=} -3 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-3 \cdot (-14) = 42$$

Satz 3

Entsteht die Matrix **B** aus der Matrix **A** durch Multiplikation einer Zeile/Spalte mit einer Zahl λ, so ist

$$\det(\mathbf{B}) = \lambda \det(\mathbf{A})$$

Beispiel 4

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 7 & 3\cdot 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}}_{\underset{\text{Entw. n. 3. Zeile}}{=} -3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 21 \end{vmatrix} = -126} = 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}}_{\underset{\text{Beispiel 3}}{=} -42}$$

Beispiel 5

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 1 \cdot 4 = -8$$

$$3 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\det(3\mathbf{A})} = \begin{vmatrix} 3 \cdot (-2) & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 4 \end{vmatrix} = (3 \cdot (-2)) \cdot (3 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 4) = -216$$

$$= \boxed{3^3 \det(\mathbf{A})}$$