Der Satz von Taylor

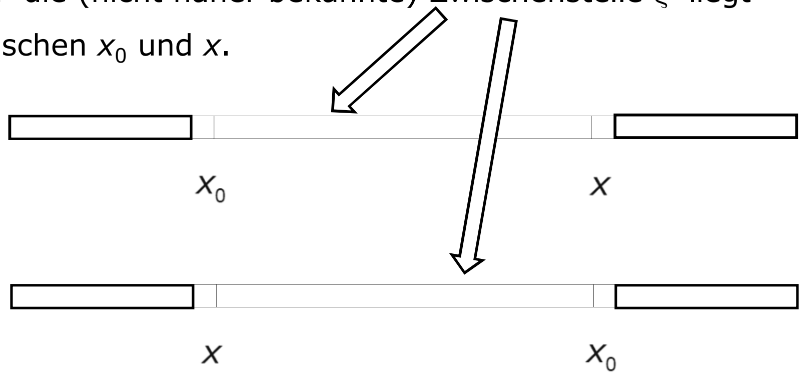
Ist die Funktion f in einem Intervall I $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, d. h. $f, \; f', f'', \dots . f^{(n+1)}$ existieren und sind jeweils stetige Funktionen, dann gilt für alle $x \in I$ die **Taylorsche Formel**; der Entwicklungspunkt x_0 ist eine beliebige, aber fest gewählte Stelle aus dem Intervall *I.*

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{\text{Taylorpolynom } n\text{-ter Ordnung (Hauptteil)}}$$

$$+ \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{R_n \text{ Restglied von Lagrange}}$$

Die (nicht näher bekannte) Zwischenstelle ξ liegt zwischen x_0 und x.

…… die (nicht näher bekannte) Zwischenstelle ξ liegt zwischen x_0 und x.



Anwendung des Satzes von Taylor: Fehlerabschätzung (!)

Voraussetzung:

$f^{(n+1)}$ beschränkt in I, d. h. $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$, $x \in I$

$$\Rightarrow \left|f(x) - P_n(x)\right| = \left|R_n(x)\right| = \left|\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}\right|$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left|(x - x_0)^{n+1}\right|\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\left|(x - x_0)^{n+1}\right| M$$