<u>Satz 1</u>

Jede Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(x - x_0\right)^k$

besitzt einen eindeutig bestimmten **Konvergenzradius**

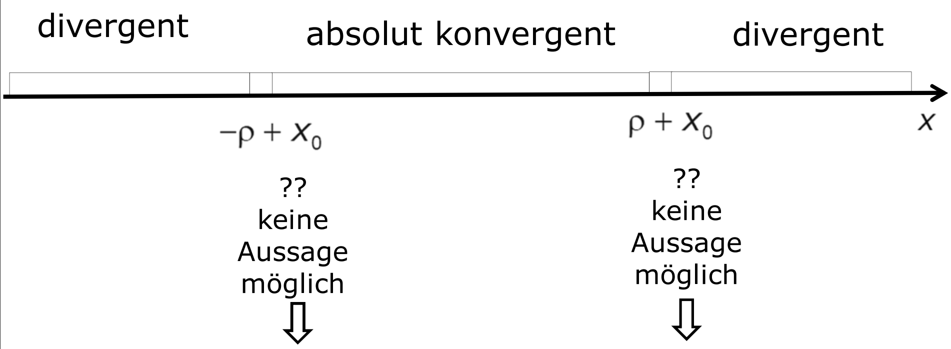
$$0 \le \rho \le \infty$$

mit der Eigenschaft:

Die Potenzreihe ist für alle reellen Zahlen *x* mit

$\lvert x - x_0 \rvert < \rho$	absolut konvergent
$\lvert x - x_0 \rvert > \rho$	divergent
$\lvert x - x_0 \rvert = \rho$	keine Aussage möglich, es kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen

$$\lvert x - x_0 \rvert < \rho \quad \Leftrightarrow -\rho < x - x_0 < \rho \quad \Leftrightarrow -\rho + x_0 < x < \rho + x_0$$



Konvergenzuntersuchung für die Randpunkte $-\rho+x_0$ und $\rho+x_0$ muss separat durchgeführt werden; dazu verwendet man z. B. das Majoranten-/Minorantenkriterium

Zur Bestimmung des Konvergenzradius behandelt man Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k \left(x - x_0\right)^k}_{=:A_k}$ am besten wie gewöhnliche Reihen

Anwendung des Quotientenkriteriums $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{A_{k+1}}{A_k}\right|$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\,\frac{\left(x-x_0\right)^{k+1}}{\left(x-x_0\right)^k}\right| = \left|\left(x-x_0\right)\right| \cdot \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \begin{cases} < 1 & \text{KONVERGENZ} \\ > 1 & \text{DIVERGENZ} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left|x - x_0\right| \begin{cases} < \dfrac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right|} & \text{KONVERGENZ} \\ > \dfrac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right|} & \text{DIVERGENZ} \end{cases}$$

Konvergenzradius ρ

$$\boxed{\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k \left(x - x_0\right)^k}_{=:A_k}$

Anwendung des Wurzelkriteriums $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|A_k\right|}$

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|a_k\cdot\left(x-x_0\right)^k\right|} = \left|\left(x-x_0\right)\right| \cdot \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|a_k\right|} \begin{cases} < 1 & \text{KONVERGENZ} \\ > 1 & \text{DIVERGENZ} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left|x - x_0\right| \begin{cases} < \dfrac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|a_k\right|}} & \text{KONVERGENZ} \\ > \dfrac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|a_k\right|}} & \text{DIVERGENZ} \end{cases}$$

Konvergenzradius ρ

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|a_k\right|}}}$$

Egal, ob der Konvergenzradius mit dem Quotienten- oder mit dem Wurzelkriterium bestimmt wird, beide Kriterien liefern den gleichen Wert.