Prof. Dr. habil.
H.-J. Dobner

Mathematik für Informatiker (MfI) II

Seminar KW 25

<u>Thema:</u>

Determinanten; $n \times n$ Matrizen

Inversenformel $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot adj(\mathbf{A})^T$

Cramersche Regel: Darstellungsformel für die Lösung LGSe

Determinanten-Multiplikationssatz

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B}) \cdot \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$$

$$\underset{\mathbf{A}\text{ regulär}}{\Rightarrow} \det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

$\mathbf{A}$ $n \times n$ Matrix:

$\mathbf{A}$ regulär
$\Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0$
$\Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1}$ existiert
$\Leftrightarrow rang(\mathbf{A}) = n$
$\Leftrightarrow \mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar

$\mathbf{A}$ singulär
$\Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) = 0$
$\Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1}$ existiert nicht
$\Leftrightarrow rang(\mathbf{A}) < n$
$\Leftrightarrow \mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ unlösbar
oder mehrdeutig lösbar

1. Aufgabe

Untersuchen Sie in Abhängigkeit des reellen Parameters t mit Hilfe von Determinanten die Lösbarkeit des LGS (sorgfältige Begründung!). Bestimmen Sie im Fall t=1 die Lösung mit der Cramerschen Regel.

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 8 \\ tx_1 + x_2 + x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Lösung

Koeffizientenmatrix des LGS $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot 1 \\ + \\ \hookleftarrow \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \\ t+3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \hookleftarrow + \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & \boxed{-1} & 2 \\ 10 & 0 & 11 \\ t+3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

A regulär
$\Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0$
$\Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1}$ existiert
$\Leftrightarrow rang(\mathbf{A}) = n$
$\Leftrightarrow \mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar

Entwicklung nach der 2. Spalte

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$= (-1) \cdot (\boxed{-1}) \begin{vmatrix} 10 & 11 \\ t+3 & 3 \end{vmatrix} = 10 \cdot 3 - (t+3) \cdot 11$$
$$= -11 \cdot t - 3$$

$\Rightarrow$ LGS eindeutig lösbar $\Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) = -11 \cdot t - 3 \neq 0 \Leftrightarrow t \neq -\frac{3}{11}$

$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 8$
$4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 8$
$tx_1 + x_2 + x_3 = 4.$

$t = -\frac{3}{11} \Rightarrow \det(\mathbf{A})=0 \Rightarrow \text{rang}(\mathbf{A}) \leq 2$

$\det(\mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1}$ existiert nicht
$\Leftrightarrow rang(\mathbf{A}) < n$
$\Leftrightarrow \mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ unlösbar
oder mehrdeutig lösbar

$\mathbf{A}^{(1)}$ Matrix , welche aus der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ hervorgeht, indem wir die erste Spalte durch die rechte Seite ersetzen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \\ -3/11 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 8 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left|\mathbf{A}^{(1)}\right| = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 8 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ \cdot(-2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left|\mathbf{A}^{(1)}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ \boxed{4} & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \\ -3/11 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \left(\mathbf{A}\middle|\vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & 7 & 8 \\ -3/11 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 8 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der 1. Spalte

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$= 1 \cdot \boxed{4} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ unlösbar $\Leftrightarrow rang(\mathbf{A}) < rang\left(\mathbf{A}\middle|\vec{b}\right)$

$$= 4 \cdot \left((-3) \cdot 5 - 0 \cdot 0\right) = -60$$

$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 8$
$4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 8$
$-\frac{3}{11}x_1 + x_2 + x_3 = 4.$

unlösbar!!

das bedeutet rang($\mathbf{A}^{(1)}$)=3

$$\underbrace{rang(\mathbf{A})}_{\leq 2} < \underbrace{rang\left(\mathbf{A}^{(1)}\right)}_{=3} = rang\left(\mathbf{A}\middle|\vec{b}\right)$$