Prof. Dr. habil.
H.-J. Dobner

§28. Uneigentliche Integrale

28.1 Einführung in die Problematik

=>> INFORMATIK

Theorie der Warteschlangen

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastik

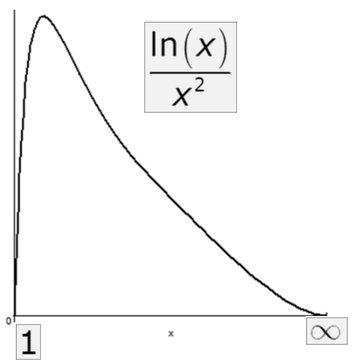
Bisher haben wir bestimmte Integrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

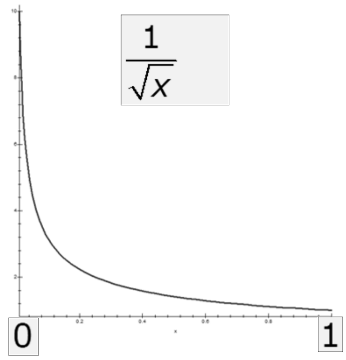
mit zwei Eigenschaften betrachtet:

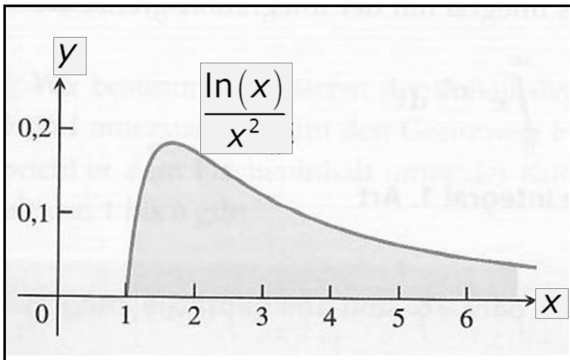
(I) Der Definitionsbereich, also das Intervall [*a*,*b*], über das integriert wurde, war beschränkt.

(II) Der Integrand *f* war im abgeschlossenen Integrationsintervall [*a*,*b*] stetig, d.h. *f* war beschränkt.

In vielen Anwendungen kommen aber Funktionen vor, in denen eine oder auch beide dieser Eigenschaften nicht erfüllt sind, z. B.







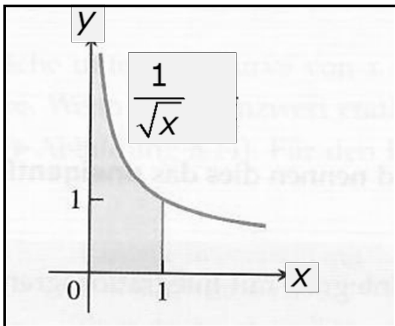
So können wir uns für die Fläche interessieren, die unterhalb des Graphen der Funktion $f(x)=(\ln(x))/x^2$ von $x=1$ bis $x=\infty$ liegt.

Den Inhalt dieser (nach rechts unbeschränkten) Fläche schreiben wir als bestimmtes Integral:

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx \quad \textbf{??}$$

Was bedeutet das? Ist das sinnvoll?

Das Integrationsintervall ist jetzt $[1, \infty)$, also unbeschränkt.



Wir interessieren uns für die Fläche, die unterhalb des Graphen der Funktion $\frac{1}{\sqrt{x}}$ von $x=0$ bis $x=1$ liegt.

Den Inhalt dieser (nach oben unbeschränkten) Fläche schreiben wir einfach wie folgt als bestimmtes Integral:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \quad \textbf{??}$$

f ist auf dem Integrationsintervall $(0,1]$ unbeschränkt, da

$$\lim_{x\to 0, x>0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$$

In beiden Fällen werden

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

die Integrale als uneigentliche Integrale bezeichnet; für ihre Berechnung muss man einen Grenzübergang durchführen.