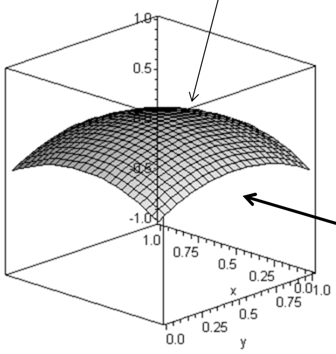
Prof. Dr. habil.
H.-J. Dobner

33.5 Integration skalarer Funktionen mehrerer Veränderlicher

IMPORTANT

Zunächst Funktionen von zwei Veränderlichen

$$f : G \subseteq \mathbb{R}^2 \to W(f) \subseteq \mathbb{R}\,,\ (x,y) \mapsto f(x,y),\ f \text{ stetig}$$



Gesucht
Volumen

G ist ein Rechteck

$$f : G \subseteq \mathbb{R}^2 \to W(f) \subseteq \mathbb{R}\,,\ (x,y) \mapsto f(x,y)$$

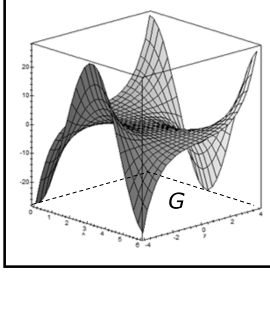
$$G = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, c \le y \le d \right\}$$

$$\boxed{\quad G \quad}$$

$$S = \iint\limits_{\substack{G \\ \text{Rechteck}}} f(x,y)\, d(x,y) =$$

$$\int_a^b \underbrace{\left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right]}_{\substack{\text{Integration bzgl. } y \\ x \text{ als konstant auffassen}}} dx$$

$$\int_c^d \underbrace{\left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right]}_{\substack{\text{Integration bzgl. } x \\ y \text{ als konstant auffassen}}} dy$$



$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, c \le y \le d\}$

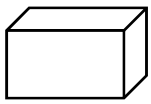
Satz 1 Satz von Fubini

f **stetig** in $G \Rightarrow$ Integrationsreihenfolge vertauschbar

$$S = \iint_G f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

In analoger Weise werden höherdimensionale Integrale (insbesondere dreidimensionale) Integrale berechnet.

$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b, c \le y \le d, e \le z \le f\}$



$$S = \iiint_G f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Beispiel 1 $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 4, -1 \le y \le 2\}$

$$\iint_G (2x + 6x^2y)\,d(x,y) = \int_1^4 \int_{-1}^2 (2x + 6x^2y)\,dy\,dx$$

Zuerst Stammfunktion bzgl. y (x als Konstante auffassen)

$$\int (2x + 6x^2y)\,dy = 2xy + 6x^2 \frac{1}{2} y^2$$

$$= \int_1^4 \left[2xy + 6x^2 \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=-1}^{y=2} dx$$

$$= \int_1^4 \left((2x \cdot 2 + 3x^2 \cdot 4) - \left(2x \cdot (-1) + 3x^2 \cdot (-1)^2\right) \right) dx$$

$$= \int_1^4 \left\{ (4x + 12x^2) - (-2x + 3x^2) \right\} dx$$

$$\int_1^4 \left\{ \left(4x + 12x^2\right) - \left(-2x + 3x^2\right) \right\} dx$$

$$= \int_1^4 \left(6x + 9x^2\right) dx = \left[3x^2 + 3x^3\right]_{x=1}^{x=4} = 234$$

Da f stetig ist

$$\int_1^4 \int_{-1}^2 \left(2x + 6x^2 y\right) dy dx = \int_{-1}^2 \int_1^4 \left(2x + 6x^2 y\right) dx dy = 234$$