<u>Satz 3</u> (Die Cramersche Regel)

Es sei

$$\mathbf{A} = \left(a_{i,j}\right)_{i,j=1,\ldots,n} \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \text{ und } \vec{b} = \left(b_i\right)_{i=1,\ldots,n} \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$$

Für j=1,2,…,n bezeichnet $\mathbf{A}^{(j)}$ diejenige $n\times n$ Matrix, welche aus **A** dadurch entsteht, dass die dass die j-te Spalte durch $\vec{b}$ ersetzt wird.

Ist **A** regulär, so ist das LGS $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$

eindeutig lösbar und die Lösung kann wie folgt dargestellt werden

$$x_j = \frac{\det\left(\mathbf{A}^{(j)}\right)}{\det\left(\mathbf{A}\right)}, \; j = 1,2,\ldots,n, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Beispiel 4

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \\ 6 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -4$$

$\Rightarrow \mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar

$$x_1 = \frac{\left|\mathbf{A}^{(1)}\right|}{-4} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 8 & 9 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{256}{-4} = -64$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{\left|\mathbf{A}^{(2)}\right|}{-4} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & -1 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-142}{-4} = \frac{71}{2}$$

$$x_3 = \frac{\left|\mathbf{A}^{(3)}\right|}{-4} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 8 \\ 6 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-222}{-4} = \frac{111}{2}$$