32.2 Die Lösung der Eigenwertaufgabe $\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Homogenes Lineares Gleichungssystem

Immer lösbar! Die triviale Lösung nämlich der Nullvektor ist immer eine Lösung.

$\det(\mathbf{A}) = 0$

$\Leftrightarrow \mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ unlösbar
oder mehrdeutig lösbar

Wir suchen aber nichttriviale Lösungen!!

Das ist nur für Zahlen λ möglich für welche gilt:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$$

$$\det\left[\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 6 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-4-\lambda)(5-\lambda) + 18 = \lambda^2 - \lambda - 2$$

ist ein Polynom vom Grad n in der Variablen λ. Die Zahlen λ für welche die Determinante Null wird, sind also die Nullstellen des Polynoms det(**A**-λ**E**). Damit ist die Bestimmung der Eigenwerte auf ein Nullstellenproblem für Polynome zurückgeführt. Der höchste Koeffizient dieses Polynoms ist immer $\mathbf{(-1)}^n$.

Einschub: Der Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom $p(x)$ n-ten Grades, $n \geq 1$, besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n, a_n \neq 0$$
$$= a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_r)^{k_r}, a_n \neq 0,$$
$$1 \leq k_r \leq n \text{ und } k_1 + k_2 + \ldots k_r = n$$

k_r heißt die Ordnung der Nullstelle x_k.

Beispiel

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 6 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-4-\lambda)(5-\lambda) + 18 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$$