1 Seminar 1 - L'Hospital + Taylorsche Formel

1.1 L'Hospital

Erste l'Hospitalsche Regel

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Zweite l'Hospitalsche Regel

$$\lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Die Erste Untersucht 0/0
Die Zweite setzt vorraus, dass g gegen +/- Unendlich geht

1.1.1 1. Aufgabe

Bestimmen Sie mittels der Regel(n) von de L'Hospital den Funktionenlimes

$$\lim_{x\to 0} \frac{10^{2x} - 2 + 10^{-2x}}{10^{2x} - 10^{-2x}}$$

Werkzeug:

$$\boxed{(\mathrm{I})\, f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}}$$

Damit erstmal umformulieren:

$$\frac{10^{2x} - 2 + 10^{-2x}}{10^{2x} - 10^{-2x}} \xrightarrow{(\mathrm{I})} \quad 10^{2x} = e^{2x\ln(10)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{10^{2x} - 2 + 10^{-2x}}{10^{2x} - 10^{-2x}} \underset{(\mathrm{II})}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x\ln(10)} - 2 + e^{-2x\ln(10)}}{e^{2x\ln(10)} - e^{-2x\ln(10)}}$$

Typ 0/0

Nächstes Werkzeug:

$$\text{(II)}\left(e^{2x\ln(10)}\right)' = 2\ln(10)10^{2x}$$

Daraus ergibt sich:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\ln(10)\cdot 10^{2x} - 2\cdot\ln(10)\cdot 10^{-2x}}{2\cdot\ln(10)\cdot 10^{2x} + 2\cdot\ln(10)\cdot 10^{-2x}} = 0$$

1.1.2 2. Aufgabe

$$\lim_{x\to 0, x>0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^x$$

1. Typ bestimmten: Unendlich(hoch)0
Nicht für die Regeln 1/2 geeignet
Werkzeug:

$$\text{(I)}\, f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$$

Daraus folgt: $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^x \underset{\text{(I)}}{=} \lim_{x\to 0} e^{x\cdot\left[\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]}$

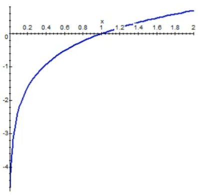
Weiter Umstellen mit Multiplikationstheorem: $\log(x\,y) = \log(x) + \log(y)$

$$= \lim_{x\to 0} e^{x\cdot\left[\underbrace{\ln(1)}_{=0}-\ln(x^2)\right]} = \lim_{x\to 0} e^{x\cdot\left[-\ln(x^2)\right]}$$

Weiter Umstellen, da e-fkt stetig:

$$\underbrace{=}_{\text{e Fktn stetig}} e^{\lim_{x\to 0} x\cdot\left[-\ln(x^2)\right]} = e^{-\lim_{x\to 0} x\cdot\ln(x^2)}$$

Typbestimmung... wie verhält sich der logarithmus ?



Typ - Unendlich * 0

Werkzeug:

$$(\mathrm{II})\ u(x)v(x) \underset{\text{Umformung}}{\rightarrow} \frac{u(x)}{1/v(x)}$$

Daraus ergibt sich: $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln(x^2) = \lim\limits_{x\to 0}\ln(x^2)\cdot x \underset{(\mathrm{II})}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x^2)}{\frac{1}{x}}$

Was ist, wenn x gegen 0 geht ? = -Unendlich/Unendlich

Anwendung 2. L'Hospital regel: $\underset{\text{"}\frac{-\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{-\frac{1}{x^2}}$

$$= \lim_{x\to 0} 2x = 0$$

Jetzt wieder zusammensetzten: $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{-x\cdot\ln(x^2)} = e^0 = 1$

1.1.3 3. Aufgabe

$f(x) = \sin(x)\cosh(x), x \in \mathbb{R}$

<u>Lösung</u>

$$\underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}_{\text{Taylorpolynom 2-ter Ordnung (Hauptteil)}} + \underbrace{\frac{f^{(2+1)}(\xi)}{3!}(x-x_0)^{2+1}}_{R_2\ \text{Restglied von Lagrange}}$$

Produktregel $(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$

$$f(x) = \sin(x)\cosh(x) \qquad x_0{=}0 \qquad \to f(0) = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos(x)\cosh(x) + \sin(x)\sinh(x) \qquad \to f'(0) = 1$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (\cos(x)\cosh(x) + \sin(x)\sinh(x))' \\ &= -\sin(x)\cosh(x) + \cos(x)\sinh(x) \\ &\quad + \cos(x)\sinh(x) + \sin(x)\cosh(x) \\ &= 2\cos(x)\sinh(x) \qquad \to f''(0) = 0 \end{aligned}$$

$$f'''(x) = -2\sin(x)\sinh(x) + 2\cos(x)\cosh(x)$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -2\sin(x)\sinh(x) + 2\cos(x)\cosh(x$$

Taylorpolynom zweiter Ordnung mit Fehlerterm

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3$$

$$\underbrace{\sin(x)\cosh(x)}_{f(x)}$$

$$= 0 + \frac{1}{1!}(x - 0) + \frac{0}{2!}(x - 0)^2 + \frac{-2\sin(\xi)\sinh(\xi) + 2\cos(\xi)\cosh(\xi)}{3!}(x - 0)^3$$

$$= 0 + x + \frac{-\sin(\xi)\sinh(\xi) + \cos(\xi)\cosh(\xi)}{3}x^3$$

ξ liegt zwischen $x_0{=}0$ und $x \in \mathbb{R}$

1.1.4 4. Aufgabe

$f(x) = \sin(x), x \in [-1,1]$ $x_0 = 0,$ $n = 1$

Taylorpolynom erster Ordnung und Restgliedabschätzung

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

$$f''(x) = -\sin(x)$$

$f(x) = \sin(x)$ $f'(x) = \cos(x)$ $f''(x) = -\sin(x)$

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(\xi)x^2$ ξ liegt zwischen x_0=0 und x

$$\Rightarrow \sin(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{1}{2!}(-\sin(\xi))x^2$$

$$|R_1(x)| = \left|\frac{1}{2!}(-\sin(\xi))x^2\right| \leq \frac{1}{2!}x^2|-\sin(\xi)| \leq \frac{1}{2!}x^2 \cdot 1$$

$$, x \in I = [-1,1]$$

Etwa $|R_1(x)| < \frac{1}{100} \rightarrow \frac{1}{2!}x^2 \cdot 1 < \frac{1}{100} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{50}} \approx 0.14$

Faustregel: Für „kleine“ x-Werte gilt $\boxed{\sin(x) \approx x}$

Für $n = 7$ erhält man das folgende Taylorpolynom $x_0 = 0$,

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\, x^k}_{\text{Taylorpolynom 7-ter Ordnung}} + \underbrace{\frac{f^{(VIII)}(\xi)}{8!} x^8}_{R_7 \text{ Restglied von Lagrange}}$$

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f''(x) = -\sin(x)$$

$$\Rightarrow f'''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f^{(IV)}(x) = \sin(x)$$

$$\Rightarrow f^{(V)}(x) = \cos(x) \Rightarrow f^{(VI)}(x) = -\sin(x)$$

$$\Rightarrow f^{(VII)}(x) = -\cos(x) \Rightarrow f^{(VIII)}(x) = \sin(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{1}{8!} \sin(\xi)\, x^8$$

ξ liegt zwischen x_0=0 und -1$\leq x \leq$1

1.1.5 5. Aufgabe

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad 0 \le x \le 1$$

das Taylor-Polynom zweiter Ordnung um den Entwicklungspunkt $x_0=1$ und geben Sie das zugehörige Restglied an. Welche Aussage kann über die im Restglied auftretende Zwischenstelle ξ gemacht werden?

Kettenregel $\left[u(x)^m\right]' = m \cdot [u(x)]^{m-1} \cdot u'(x)$

$x_0=1$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \; 0 \le x \le 1 \quad \rightarrow f(1) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -(1+x)^{-2} = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad \rightarrow f'(1) = -\frac{1}{4}$$

$$f''(x) = 2(1+x)^{-3} = \frac{2}{(1+x)^3} \quad \rightarrow f''(1) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = -6(1+x)^{-4} = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

Taylorpolynom zweiter Ordnung mit Fehlerterm

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3$$

ξ liegt zwischen $x_0=1$ und $x \in [0,1]$

Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner, HTWK Leipzig, MNZ

$f(1) = \frac{1}{2}, f'(1) = -\frac{1}{4}, f''(1) = \frac{1}{4}$ $f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$

Taylorpolynom zweiter Ordnung mit Fehlerterm

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{1!}\frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{2!}\frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}\frac{(-6)}{(1+\xi)^4}(x-1)^3$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{(1+\xi)^4}(x-1)^3$$

ξ liegt zwischen x_0=1 und $x \in [0,1]$

$$WK = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} a_k = (\frac{4k-1}{7k+3})^k$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|(\frac{4k-1}{7k+3})^k|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|\frac{4k-1}{7k+3}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{7k+3}{4k+1} = \frac{\infty}{\infty}$$

1.Regel: $\lim_{k\to\infty} \frac{7}{4} > 1 \to$ **divergent**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{1+2^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)+2^k}{1+4^k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{(-1)^{k+1} \frac{3}{\sqrt[5]{k^3}} (x-2)^k}}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\frac{3}{\sqrt[5]{k^3}}}}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k\to 0}{-1\cdot k\to 0}$$