(III) Die Substitutionsregel

$$\int \left(x^2+10\right)^{50} \cdot 2x dx$$

??

Partielle Integration: schlägt fehl

Ausmultiplizieren

$\rightarrow$ Polynom vom Grad 100

$\rightarrow$ Integration der 51 resultierenden Terme ist mühsam

$$\int \underline{\left(x^2+10\right)}^{50} \cdot \underline{2x dx}$$

x^2+10 als neue Variable u einführen.

Wir tun einfach so, als ob dx das Differenzial von x bezeichnet und argumentieren wie folgt:

$\underline{u = x^2+10} \Rightarrow \underline{du = 2x\,dx}$

Einsetzen in das Integral

$$\int u^{50} du$$

Dieses Integral ist leicht zu lösen $\int u^{50} du = \frac{1}{51} u^{51} + C$

$$\int \left(x^2+10\right)^{50} \cdot 2x dx = \frac{1}{51}\left(x^2+10\right)^{51} + C$$

Mit der Kettenregel bestätigt man das Resultat

$$\left[\frac{1}{51}\left(x^2+10\right)^{51} + C\right]' = \left(x^2+10\right)^{50} \cdot 2x$$

$$\int f\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)dx = \int f\left(u\right)du \qquad u = g\left(x\right)$$

$$x \underset{x = h\left(u\right)}{\overset{u = g\left(x\right)}{\rightleftarrows}} u$$

<u>Voraussetzungen</u>

g stetig differenzierbar

f(*u*) stetig in allen Punkten *u*, die zum Wertebereich von *g* gehören

<u>Durchführung der Substitution</u>

1 neue Variable $u = g\left(x\right)$

$$\frac{du}{dx} = g'\left(x\right) \Leftrightarrow du = g'\left(x\right)dx$$

$$\text{Ersetze } g\left(x\right) = u \quad \text{und } dx = \frac{du}{g'\left(x\right)}$$

Wenn noch *x* „übrig“ sind:

Auflösen von *u*=*g*(*x*) nach *x: x*=*h*(*u*)

Restliche *x* ersetzen

2 Berechne das Integral in *u*

3 Ersetze im Ergebnis *u* durch *g*(*x*)