7. Aufgabe

Berechnen Sie die Determinante der Matrix **A**, wobei

Hauptdiagonale

obere Nebendiagonale

untere Nebendiagonale

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tridiagonal-Matrix

Lösung

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufstellen einer Rekursionsformel

$$|\mathbf{A}_1| = |3| = 3$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - (-1) \cdot (-1)$$

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A}_1| = |3| = 3$$

$$|\mathbf{A}_2| = \boxed{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = 3\cdot 3 - (-1)\cdot(-1)$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3\boxed{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} - (-1)\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}_{(-1)\cdot 3}$$

Entwicklung nach der 1. Zeile

Entwicklung nach der 1. Spalte

Behauptung:

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$

$$|A_n| = 3|A_{n-1}| - |A_{n-2}|, n \geq 3$$

$$|A_1| = 3$$

$$\boxed{|A_2| = 9 - 1}$$

(I) Induktionsanfang für n=3 richtig

$$|A_n| = 3|A_{n-1}| - |A_{n-2}|$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Entw. nach der 1. Spalte

Entw. nach der 1. Zeile

$$= 3|\mathbf{A}_2| - |\mathbf{A}_1|$$

$$|\mathbf{A}_n| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{A}_1| = |3| = 3$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

(II) Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, beliebig aber fest gewählt, gelte:

$$|A_n| = 3|A_{n-1}| - |A_{n-2}|$$