7. Aufgabe

Ist die folgende Rechnung richtig? (Antwort mit Begründung!)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{1+2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

Lösung

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x+x^2}} \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{1+2x}} \underset{\text{„}\frac{0}{1}\text{"}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

FALSCH

Nicht erlaubt, Voraussetzungen nicht erfüllt: Typ 0/1

Hier wird die erste l`Hospitalsche Regel verwendet.

Erlaubt, Voraussetzungen erfüllt: Typ 0/0

Hier wird die erste l`Hospitalsche Regel verwendet. FALSCH

Anmerkung: Der richtige Grenzwert ist 0.

8. Aufgabe

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2},\ x > 0$$

und den Entwicklungspunkt x_0=1 das Taylor-Polynom zweiter Ordnung. Geben sie das zugehörige Restglied an.

Lösung

$$\underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}_{\text{Taylorpolynom 2-ter Ordnung (Hauptteil)}} + \underbrace{\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3}_{R_2\ \text{Restglied von Lagrange}}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3},\ f''(x) = \frac{6}{x^4},\ f'''(x) = \frac{-24}{x^5}$$

$$f(1) = 1, f'(1) = -2, f''(1) = 6,$$

$f'(x) = \frac{-2}{x^3}, f''(x) = \frac{6}{x^4}, f'''(x) = \frac{-24}{x^5}$

$f(1) = 1, f'(1) = -2, f''(1) = 6,$

Taylor-Polynom zweiter Ordnung:

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2} f''(1)(x-1)^2$$

$$= 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2$$

Zugehöriges Restglied

$$\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3 = -\frac{4}{\xi^5}(x-1)^3, \ \xi \text{ zwischen } x_0 = 1 \text{ und } x > 0$$

<u>9. Aufgabe</u>

Bestimmen Sie Lot und Projektion des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

in Richtung des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

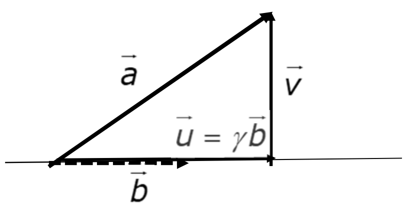
$\vec{u} = \underbrace{\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{b}\|^2}}_{\gamma} \vec{b}$

$\vec{v} = \vec{a} - \gamma \vec{b}$

<u>Lösung</u>

orthogonale Projektion und Lot

$$\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$$



$$\gamma = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{b}\|^2} = \frac{7 \cdot 4 + 6 \cdot 2}{\left(\sqrt{4^2 + 2^2}\right)^2} = \frac{40}{20} = 2$$

$$\Rightarrow \vec{u} = 2\vec{b} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \vec{a} - \gamma \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$