Taylorsche Formel

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{\text{Taylorpolynom } n\text{-ter Ordnung (Hauptteil)}}$$

$$+ \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{R_n \text{ Restglied von Lagrange}}$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}_{\text{Taylorpolynom } n\text{-ter Ordnung}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{R_n \text{ Restglied von Lagrange}}$$

Entwicklungspunkt x_0 ist eine beliebige, aber fest gewählte Stelle aus dem Intervall I, Zwischenstelle ξ liegt zwischen x_0 und x.

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

3. Aufgabe

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x) = \sin(x)\cosh(x),\, x \in \mathbb{R}$$

und den Entwicklungspunkt x_0=0 das Taylorpolynom zweiter Ordnung und geben Sie das zugehörige Restglied an.

Lösung

$$\underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2}_{\text{Taylorpolynom } 2\text{-ter Ordnung (Hauptteil)}} + \underbrace{\frac{f^{(2+1)}(\xi)}{3!}(x - x_0)^{2+1}}_{R_2 \text{ Restglied von Lagrange}}$$

Produktregel $\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$

$$f(x) = \sin(x)\cosh(x) \qquad x_0=0 \qquad \to f(0) = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos(x)\cosh(x) + \sin(x)\sinh(x) \qquad \to f'(0) = 1$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\cos(x)\cosh(x) + \sin(x)\sinh(x)\right)' \\ &= -\sin(x)\cosh(x) + \cos(x)\sinh(x) \\ &\quad + \cos(x)\sinh(x) + \sin(x)\cosh(x) \\ &= 2\cos(x)\sinh(x) \qquad \to f''(0) = 0 \end{aligned}$$

$$f'''(x) = -2\sin(x)\sinh(x) + 2\cos(x)\cosh(x)$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -2\sin(x)\sinh(x) + 2\cos(x)\cosh(x$$

Taylorpolynom zweiter Ordnung mit Fehlerterm

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3$$

$$\underbrace{\sin(x)\cosh(x)}_{f(x)}$$

$$= 0 + \frac{1}{1!}(x - 0) + \frac{0}{2!}(x - 0)^2 + \frac{-2\sin(\xi)\sinh(\xi) + 2\cos(\xi)\cosh(\xi)}{3!}(x - 0)^3$$

$$= 0 + x + \frac{-\sin(\xi)\sinh(\xi) + \cos(\xi)\cosh(\xi)}{3}x^3$$

ξ liegt zwischen x_0=0 und $x \in \mathbb{R}$