5. Aufgabe

Begründen Sie warum für die Fourier-Koeffizienten der 2π-periodischen Funktion $f(x) = x^2, -\pi < x \leq \pi$ gilt:

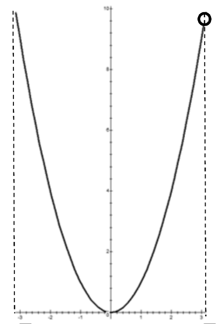
$$b_k = 0, k = 1, 2, \ldots$$

Sind auch alle Fourier-Koeffizienten a_k=0?

Lösung

f gerade Funktion

$\Rightarrow b_k = 0, k = 1, 2, \ldots$



$f(x) = x^2, -\pi < x \leq \pi$

Wären auch die Fourier-Koeffizienten a_k=0

$$\Rightarrow \forall x \in (-\pi, \pi] : f(x) = 0$$

Alternativ:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} - \left(-\frac{\pi^3}{3}\right)\right) = \frac{\pi^2}{3}$$

Zur Information: Die Fourier-Reihe von *f* lautet

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-1^k\right)\left(\frac{4}{k^2}\right)\cos(kx)$$