Beispiel 4

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad \boxed{a_k = \frac{1}{k}} \; x_0 = 0 \quad a_{k+1} = \frac{1}{k+1}$$

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\boxed{a_k}}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{k} \frac{k+1}{1} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| 1 + \frac{1}{k} \right| = 1$$

Die Potenzreihe ist für alle reellen Zahlen x mit

$|x| < \rho = 1$ absolut konvergent

Die Fälle x=1 und x=−1 müssen gesondert untersucht werden.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

x=1 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ Harmonische Reihe **DIVERGENT**

x=-1 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ alternierende harmonische Reihe

KONVERGENT
nach demLeibniz-Kriterium

Beispiel 5

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad a_k = \frac{1}{k!} \quad x_0 = 0 \quad a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k!}\,\frac{(k+1)!}{1}\right| = \lim_{k\to\infty}|k+1| = \infty$$

Die Potenzreihe ist für alle reellen Zahlen x mit

$|x| < \rho = \infty$ absolut konvergent

Potenzreihen-Darstellung der *e*-Funktion

Beispiel 6

Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\binom{\alpha}{k} := \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}, & k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} \frac{1}{2^k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^k$$

Ist die Potenzreihe für x=1 divergent, bedingt konvergent oder absolut konvergent?

$$a_k = \binom{k+4}{k}\frac{1}{2^k},\ a_{k+1} = \binom{k+5}{k+1}\frac{1}{2^{k+1}},\ x_0 = \frac{1}{2}$$

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\binom{k+4}{k}\frac{1}{2^k}}{\binom{k+5}{k+1}\frac{1}{2^{k+1}}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}}{2^k}\,\frac{\binom{k+4}{k}}{\binom{k+5}{k+1}}\right|$$

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}}{2^k}\frac{\binom{k+4}{k}}{\binom{k+5}{k+1}}\right| = 2\lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{(k+4)(k+3)\ldots\overbrace{(k+4-k+1)}^{=5}}{k!}}{\dfrac{(k+5)(k+4)\ldots\overbrace{(k+5-(k+1)+1)}^{=5}}{(k+1)!}}$$

$$= 2\lim_{k\to\infty}\frac{k!(k+1)}{k!}\frac{1}{(k+5)} = 2\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k+5} = 2\lim_{k\to\infty}\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{5}{k}} = 2$$

Die Potenzreihe ist absolut konvergent für

$$\left|x-\frac{1}{2}\right| < 2 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$$

$\Rightarrow$ Potenzreihe ist für x=1 absolut konvergent, da $-\frac{3}{2} < 1 < \frac{5}{2}$