2. Aufgabe

a) Für die 5x5 Matrix **A** gilt det(**A**)=-3 . Bestimmen Sie

$$\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right), \det\left(\mathbf{A}^{3}\right), \det\left(\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{T}\right)$$

b) Wahr oder falsch?

A *n*x*n* Matrix und **E** *n*x*n* Einheitsmatrix

$\det\left(\mathbf{E}+\mathbf{A}\right) = 1+\det\left(\mathbf{A}\right)$

$spur\left(\mathbf{A}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \det\left(\mathbf{A}\right) \neq 0$

c) **E** ist die *nxn* Einheitsmatrix*.* Bestimmen Sie det($-$**E**).

d) Für die 5x5 Matrix **A** gilt det(**A**)=4 und für die die 4x4 Matrix **B** gilt det(**B**)=8 . Bestimmen Sie det(**A**·**B)**

Lösung

a) Für die 5x5 Matrix **A** gilt det(**A**)=-3 . Bestimmen Sie

$$\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right), \det\left(\mathbf{A}^{3}\right), \det\left(\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{T}\right)$$

Lösung

$\det\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right) = \det\left(\mathbf{A}\right)\cdot\det\left(\mathbf{B}\right.$

$$\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \frac{1}{\det\left(\mathbf{A}\right)} = \frac{1}{-3}$$

$$\det\left(\mathbf{A}^{3}\right) = \det\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\right) = \det\left(\mathbf{A}\right)\det\left(\mathbf{A}\right)\det\left(\mathbf{A}\right) = \left(-3\right)^{3} = -27$$

$$\det\left(\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{T}\right) = \det\left(\mathbf{A}\right)\underbrace{\det\left(\mathbf{A}^{T}\right)}_{=\det\left(\mathbf{A}\right)} = \det\left(\mathbf{A}\right)^{2} = \left(-3\right)^{2} = 9$$

b) Wahr oder falsch? Beweis oder Gegenbeispiel

A *n*x*n* Matrix und **E** *n*x*n* Einheitsmatrix

$\det(\mathbf{E}+\mathbf{A}) = 1 + \det(\mathbf{A})$

<u>Lösung</u>

$\cancel{\det(\mathbf{E}+\mathbf{A}) = 1 + \det(\mathbf{A})}$ ist falsch

Gegenbeispiel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 2\cdot 6\cdot(-1) = -12$$

$$\mathbf{E}+\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \det(\mathbf{E}+\mathbf{A}) = 3\cdot 7\cdot 0 = 0$$

$$\neq 1 + \det(\mathbf{A}) = 1 + (-12) = -11$$

b) Wahr oder falsch? Beweis oder Gegenbeispiel

A *n*x*n* Matrix

$spur(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ Summe der Diagonalelemente

$spur(\mathbf{A}) \neq 0 \Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0$

<u>Lösung</u>

$\cancel{spur(\mathbf{A}) \neq 0 \Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0}$ ist falsch

Gegenbeispiel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\det(\mathbf{A}) = 2\cdot(-1)\cdot(-1) = 2 \neq 0 \\ &\text{aber } spur(\mathbf{A}) = 2 + (-1) + (-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &spur(\mathbf{B}) = 2 + 0 + 0 = 2 \neq 0 \\ &\text{aber } \det(\mathbf{B}) = 2\cdot 0\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

c) **E** ist die *n*x*n* Einheitsmatrix. Bestimmen Sie det($-$**E**).

Lösung

Entsteht **B** aus **A** durch Multiplikation einer Zeile/Spalte mit Zahl λ, so ist $\det(\mathbf{B}) = \lambda \det(\mathbf{A})$

$-\mathbf{E}$

Jede der n Zeilen von **E** wird mit -1 multipliziert

$$\Rightarrow \det(-\mathbf{E}) = (-1)^n \det(\mathbf{E}) = \begin{cases} 1, & n \text{ geradzahlig} \\ -1, & n \text{ ungeradzahlig} \end{cases}$$

d) Für die 5x5 Matrix **A** gilt det(**A**)=4 und für die die $\boxed{4\text{x}4}$ Matrix **B** gilt det(**B**)=8 . Bestimmen Sie det(**A**·**B**).

Lösung

Für zwei $n \times n$ Matrizen **A** und **B** gilt: $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$

Das Matrizenprodukt **A**·**B** ist nicht definiert, daher ist auch det(**A**·**B**) nicht definiert