Mathematik für Informatiker II - Arthur Kunze

# Aufgabe 16

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -19 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{v} = \frac{<\vec{a},\vec{b}>}{||\vec{b}||^2} \cdot \vec{b} \rightarrow < \vec{a}, \vec{b} >= (-19) \cdot (-4) + 3 \cdot 3 + 7 \cdot 12 = 169$

$||\vec{b}|| = \sqrt{< \vec{b}, \vec{b} >} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 12^2} = \sqrt{169}$

$\rightarrow \vec{u} = \frac{169}{\sqrt{169}^2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \vec{b}$

$\vec{v} = \vec{a} - \vec{u} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -19 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

# Aufgabe 17

$u = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^4 | \vec{u} \perp \vec{x} \wedge \vec{u} \perp \vec{y}\} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{u} \perp \vec{x} =< \vec{u}, \vec{x} >= 0$

$\vec{u} \perp \vec{y} =< \vec{u}, \vec{y} >= 0$

$u_1 + u_3 = 0$
$u_1 + 2 \cdot u_2 + u_4 = 0$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} Operation: Z2 - Z1$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 - 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 + u_3 = 0 \\ 2 \cdot u_2 - u_3 + u_4 = 0 \end{Bmatrix}$

$\rightarrow 2 \cdot u_2 = u_3 - u_4$
$\rightarrow u_2 = \frac{1}{2} \cdot u_3 - \frac{1}{2} \cdot u_4$

$u_1 = -u_3$
$u_3 = u_3$ und $u_4 = u_4$

$$\text{Basis}= \left\{ u_3 \cdot \begin{matrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{matrix} + u_4 \cdot \begin{matrix} 0 \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\}$$

# Aufgabe 18

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{2+j} \cdot a_{2,j} \cdot det(A_{2,j})$$

$$= (-1)^3 \cdot a_{2,1} \cdot det(A_{2,1}) + (-1)^4 \cdot a_{2,2} \cdot det(A_{2,2})$$
$$+(-1)^5 \cdot a_{2,3} \cdot det(A_{2,3}) + (-1)^6 \cdot a_{2,4} \cdot det(A_{2,4})$$

$$= -2 \cdot det(A_{2,1}) - 3 \cdot det(A_{2,3})$$

$$= -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 9 & -3 & -6 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -10 \\ -7 & 1 & 10 \\ -8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Aufgabe 19

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & s \\ s & 0 & s & 3s \\ 1 & 3s & 0 & 3s \\ s & 3 & 0 & 5s \end{pmatrix}$$

a) regulär $\rightarrow$ det(A) $\neq$0

$$det(A) = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{1+j} \cdot a_{1,j} \cdot det(A_{1,j})$$

$$= (-1)^2 \cdot 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & s & 3s \\ 3s & 0 & 4s \\ 3 & 0 & 5s \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 0 \cdot \begin{pmatrix} s & s & 3s \\ 1 & 0 & 4s \\ s & 0 & 5s \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 0 \cdot \begin{pmatrix} s & 0 & 3s \\ 1 & 3s & 4s \\ s & 3 & 5s \end{pmatrix}$$

$$+(-1)^5 \cdot s \cdot \begin{pmatrix} s & 0 & s \\ 1 & 3s & 0 \\ s & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -s \cdot \begin{pmatrix} s & 0 & s \\ 1 & 3s & 0 \\ s & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{NR: } det \begin{pmatrix} s & 0 & s \\ 1 & 3s & 0 \\ s & 3 & 0 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 3s & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3s \\ s & 3 \end{pmatrix}$$

$$= s \cdot \begin{pmatrix} 3s & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3s \\ s & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{NR: } det \begin{pmatrix} 3s & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 3s \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 0$$

$$\text{NR: } det \begin{pmatrix} 1 & 3s \\ s & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 3s \cdot s = 3 + 3s^2$$

$$= s \cdot 0 + s \cdot (3 + 3s^2) = s \cdot (3 + 3s^2) = 3s + 3s^3$$

$$= -s \cdot (3s + 3s^3) = -3s^2 - 3s^4$$

Die Matrix A ist regulär für alle Zahlen für die gilt: $s \neq 0, s \in \mathbb{R}$
b) $s = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 9 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A)^T$$

$$det(A) = -3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2^4 = -3 \cdot 4 - 3 \cdot 16 = -12 - 48 = -60$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -132 & -12 & 42 & 30 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ -12 & 8 & 12 & 0 \\ 36 & -4 & -36 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to -\tfrac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} -132 & -12 & 42 & 30 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ -12 & 8 & 12 & 0 \\ 36 & -4 & -36 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$= -\tfrac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} -132 & 0 & -12 & 36 \\ -12 & 0 & 8 & -4 \\ 42 & 30 & 12 & -36 \\ 30 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Aufgabe 20

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$
$tx_1 + x_2 - 3x_3 = 0$
$-x_1 + x_2 - x_3 = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ t & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ t & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{Z2+Z1} \begin{vmatrix} 3 & 2 & \cancel{1} \\ t+1 & 1 & \cancel{-}3 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-}1 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach 3. Zeile:

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ t+1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (3 \cdot 1 - 2 \cdot (t+1)) = -3 + 2(t+1)$$

$= -3 + 2t + 2$
$= 2t - 1$

$t \neq 0,5 \quad rang(A) = 3$
$A^{-1}$existiert
$\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3$
LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar

$t = 0,5 \quad rang(A) = 3$
$A^{-1}$existiert nicht
LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ unlösbar oder mehrdeutig lösbar