4. Aufgabe: Näherungsformeln

$f(x) = \sin(x), x \in [-1,1]$ $x_0 = 0$, $n = 1$

Taylorpolynom erster Ordnung und Restgliedabschätzung

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)}_{\text{Taylorpolynom 1-ter Ordnung (Hauptteil)}} + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{(2)!}(x - x_0)^2}_{R_1 \text{ Restglied von Lagrange}}$$

$f(x) = \sin(x)$

$f'(x) = \cos(x)$

$f''(x) = -\sin(x)$

$f(x) = \sin(x)$ $f'(x) = \cos(x)$ $f''(x) = -\sin(x)$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(\xi)x^2$$ ξ liegt zwischen x_0=0 und x

$$\Rightarrow \sin(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{1}{2!}(-\sin(\xi))x^2$$

$$|R_1(x)| = \left|\frac{1}{2!}(-\sin(\xi))x^2\right| \leq \frac{1}{2!}x^2 |-\sin(\xi)| \leq \frac{1}{2!}x^2 \cdot 1$$

$, x \in I = [-1,1]$

Etwa $|R_1(x)| < \frac{1}{100} \rightarrow \frac{1}{2!}x^2 \cdot 1 < \frac{1}{100} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{50}} \approx 0.14$

Faustregel: Für „kleine“ x-Werte gilt $\boxed{\sin(x) \approx x}$

Für n = 7 erhält man das folgende Taylorpolynom $x_0 = 0$,

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\, x^k}_{\text{Taylorpolynom 7-ter Ordnung}} + \underbrace{\frac{f^{(VIII)}(\xi)}{8!} x^8}_{R_7 \text{ Restglied von Lagrange}}$$

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f''(x) = -\sin(x)$$

$$\Rightarrow f'''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f^{(IV)}(x) = \sin(x)$$

$$\Rightarrow f^{(V)}(x) = \cos(x) \Rightarrow f^{(VI)}(x) = -\sin(x)$$

$$\Rightarrow f^{(VII)}(x) = -\cos(x) \Rightarrow f^{(VIII)}(x) = \sin(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{1}{8!}\sin(\xi)\, x^8$$

ξ liegt zwischen x_0=0 und -1$\leq x \leq$1