HTWK Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig

Prof. Dr. habil. H.-J. Dobner

§27. Das bestimmte Integral

27.1 Der Integralbegriff von Newton-Leibniz

Definition 1

f sei eine auf dem Intervall [*a,b*] definierte stetige Funktion und *F* eine auf [*a*,*b*] stetige Funktion mit

$$F'(x) = f(x)$$

Dann heißt die Differenz *F*(*b*)-*F*(*a*) das bestimmte Integral von *f* auf [*a,b*].

Das bestimmte Integral von *f* über [*a*,*b*] ist eine Zahl, die nur von der Funktion *f* und den Zahlen *a* und *b* abhängt.

Wir bezeichnen diese Zahl mit $\int_a^b f(x)\,dx$

Diese Art des bestimmten Integrals, die auf der Gegenableitung basiert, heißt das Newton-Leibniz-Integral.

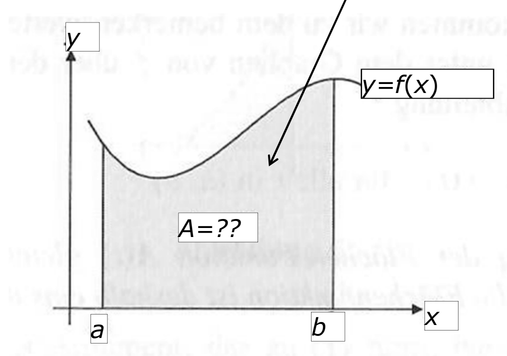
$$\boxed{\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C}$$

Beispiel 1

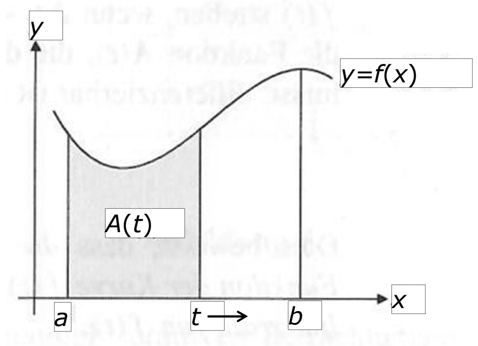
$$\int_2^5 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2\cdot 5x} - \frac{1}{2}e^{2\cdot 2} = \frac{1}{2}e^{10} - \frac{1}{2}e^{4} = \frac{1}{2}e^{4}\left(e^{6} - 1\right)$$

27.2 Flächen und bestimmte Integrale

Wie berechnet man die Fläche A unter dem Graphen einer stetigen,nichtnegativen Funktion f über dem Intervall $[a,b]$?



Es sei t sei ein beliebiger Punkt in $[a, b]$ und $A(t)$ bezeichnet die Fläche unter der Kurve $y = f(x)$ über dem Intervall $[a, t]$. Offensichtlich ist $A(a) = 0$, da es keine Fläche von a bis a gibt. Andererseits ist die Fläche gleich $A = A(b)$.

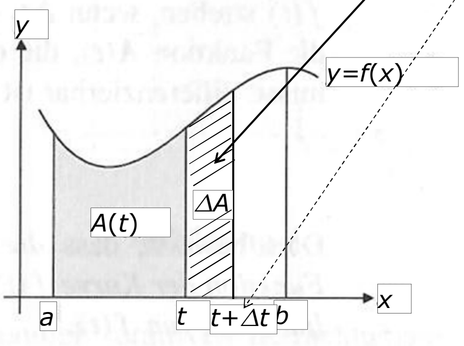


Da $f(x)>0 \Rightarrow A(t)$ wächst, wenn $t \rightarrow$ wächst.

Vergrößern von t um eine positive Größe Δt.

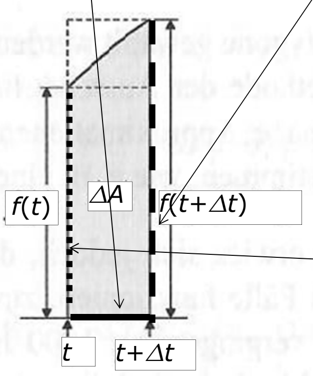
$\Rightarrow$ $A(t+\Delta t)$ ist die Fläche unter der Kurve $y=f(x)$ über dem Intervall $[t,t+\Delta t]$

$\Rightarrow$ $A(t+\Delta t)-A(t)$ ist die Fläche ΔA unter der Kurve im Intervall $[t,t+\Delta t]$.



Die Fläche ΔA

kann nicht größer sein als die Fläche des Rechtecks mit den Seiten $\underline{\Delta t}$ und dem Maximum von f im Intervall $[t,t+\Delta t]$ (im vorliegenden Fall ist das $f(t+\Delta t)$)

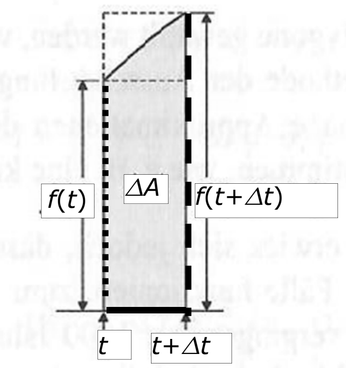


Die Fläche ΔA

kann nicht kleiner sein als die Fläche des Rechtecks mit den Seiten $\underline{\Delta t}$ und dem Minimum von f im Intervall $[t,t+\Delta t]$ (im vorliegenden Fall ist das $f(t)$)

$$\Rightarrow \forall t > 0:$$

$$f(t)\cdot\Delta t \le A(t+\Delta t) - A(t) \le f(t+\Delta t)\cdot\Delta t$$



$$\Rightarrow \forall t > 0:$$

$$f(t)\cdot \Delta t \le A(t+\Delta t) - A(t) \le f(t+\Delta t)\cdot \Delta t$$

$$\underset{\Delta t>0}{\Rightarrow} (*)\ f(t) \le \frac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t} \le f(t+\Delta t)$$

Was passiert mit (*), wenn $\Delta t \to 0$?

f stetig

$$f(t) \le \underbrace{\frac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t}}_{\underset{\Delta t\to 0}{\rightarrow} A'(t)} \le \underbrace{f(t+\Delta t)}_{\underset{\Delta t\to 0}{\rightarrow} f(t)}$$

<u>Ergebnis:</u>

Die Fläche $A(t)$ unter dem Graphen von f über dem Intervall $[a, t]$ ist eine differenzierbare Funktion und es ist $A'(t) = f(t)$