Quotientenkriterium

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent.}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent.}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1 \quad \text{keine Aussage möglich.}$$

Wurzelkriterium

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent.}$$

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent.}$$

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ keine Aussage möglich.}$$

$$\boxed{(n+1)! = n!(n+1)}$$

6. Aufgabe

Wie kann man mit Hilfe des Quotientenkriteriums zeigen, dass die Zahlenfolge

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \quad , \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

eine Nullfolge ist?

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{\frac{n+1}{n}}\right)^n = e}$$

Lösung Betrachte $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!} = (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$$

Damit ist die Reihe absolut konvergent. Daher müssen die Reihenglieder eine Nullfolge bilden (Nullfolgenkriterium!)

7. Aufgabe

Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten (bedingte oder absolute Konvergenz) der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k k!}{k^k}$$

Lösung

$$a_k = \frac{(-2)^k k!}{k^k}$$

Test auf absolute Konvergenz mit dem Quotientenkriterium

$$a_{k+1} = \frac{(-2)^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-2)^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} : \frac{(-2)^k k!}{k^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-2)^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{(-2)^k k!}\right|$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-2)^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{(-2)^k k!}\right|$$

$$\boxed{(k+1)! = k!(k+1)}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-2)^{k+1}}{(-2)^k} \cdot \underbrace{\frac{(k+1)!}{k!}}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}}_{>0}\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-2)^{k+1}}{(-2)^k}\right| \cdot \frac{(k+1)!}{k!} \cdot \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}\cdot 2^{k+1}}{(-1)^k \cdot 2^k}\right| \cdot \frac{k!(k+1)}{k!} \cdot \frac{k^k}{(k+1)^k (k+1)}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}\cdot 2}{(-1)^k}\right| \cdot (k+1) \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \frac{1}{(k+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}\cdot 2}{(-1)^k}\right|\cdot\cancel{(k+1)}\cdot\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\frac{1}{\cancel{(k+1)}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} 2\cdot\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = 2\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{2}{e} < 1$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe absolut konvergent, d. h.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-2)^k\,k!}{k^k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-2)^k\,k!}{k^k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k\,k!}{k^k} \quad \text{konvergent}$$