30.2 Das Skalarprodukt

Skalarprodukte (Innenprodukte) werden in der Mathematik für reelle und komplexe Vektorräume untersucht. Wir betrachten hauptsächlich reelle Skalarprodukt-Vektorräume, da aus diesen Räumen die wichtigsten Anwendungen kommen.

Ein Skalarprodukt ist eine Abbildung, die zwei Vektoren eine Zahl (Skalar) zuordnet.

Ein Beispiel aus den Wirtschaftswissenschaften

Betrachten wir vier verschiedene Güter: Äpfel, Bananen, Kirschen, Datteln. Betrachte den Warenvektor

$$\vec{x} = (5,3,6,7)$$

dies bedeutet, dass Sie 5 Einheiten – (etwa) Kilo - der ersten Ware (Äpfel), 3 Kilo der zweiten Ware usw. kaufen. Die Preise dieser vier Waren pro Kilo sind durch den Preisvektor

$$\vec{p} = (4,5,3,8)$$

gegeben sind, was bedeutet, dass der Preis pro Kilo Äpfel 4€ ist, der Preis pro Kilo Bananen ist 5€ usw. Dann ist der Gesamtwert des Warenvektors,gleich

$$4 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + 8 \cdot 7 = 109$$

Andere Bezeichnungen für $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$:

$(\vec{x}, \vec{y})$ oder $\vec{x} \bullet \vec{y}$ (dot product) oder $\vec{x}\vec{y}$

Definition 1

V **reeller** Vektorraum. Ein Skalarprodukt (oder Innenprodukt) auf V ist eine Abbildung $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$

mit folgenden Eigenschaften:

(S1) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$: $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$

(S2) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$: $\langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

(S3) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$

(S4) $\forall \vec{x} \in V$: $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$ und $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

$(V, \langle .,. \rangle)$ Ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt heißt auch euklidischer (Vektor)Raum.

Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$$

Beispiel 1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \quad 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 0 + (-6) \cdot 4 = -16$$