Aufgaben 4

16. Aufgabe

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -19 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$\vec{u}$ … orthogonale Projektion von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$
$\vec{v}$ … Lot von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$

$$\vec{u} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\| \vec{b} \|^2} \cdot \vec{b}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -19 \cdot (-4) + 3 \cdot 3 + 7 \cdot 12 = 169$$

$$\|b\| = \sqrt{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 12^2} = \sqrt{169}$$

$$\vec{u} = \frac{169}{\sqrt{169}^2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \vec{b}$$

$$\vec{v} = \vec{a} - \vec{u} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -19 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 - (-4) \\ 3 - 3 \\ 7 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

17. Aufgabe

$$U = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \vec{u} \perp \vec{x} \wedge \vec{u} \perp \vec{y} \right\}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \perp \vec{x} \quad \rightarrow \quad \left\langle \vec{u}, \vec{x} \right\rangle = 0$$

$$\vec{u} \perp \vec{y} \quad \rightarrow \quad \left\langle \vec{u}, \vec{y} \right\rangle = 0$$

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0$$
$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 0$$

$x_1 + x_3 = 0$
$x_1 + 2x_2 + x_4 = 0$

$x_1 = s,\ s \in \mathbb{R}$
$x_3 = -s$

$s + 2x_2 + x_4 = 0$
$x_2 = t,\ t \in \mathbb{R}$
$s + 2t + x_4 = 0$
$x_4 = -s - 2t$

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} s \\ -s \\ t \\ -s-2t \end{pmatrix} \qquad s, t \in \mathbb{R},\ s = -t$$

$s = 1,\ t = -1$:

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1-2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

18. Aufgabe

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\mathbf{A}\right) = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{2+j} \cdot a_{2\ j} \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ j}\right)$$

$$= (-1)^3 \cdot a_{2\ 1} \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ 1}\right) + (-1)^4 \cdot a_{2\ 2} \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ 2}\right)$$

$$+(-1)^5 \cdot a_{2\ 3} \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ 3}\right) + (-1)^6 \cdot a_{2\ 4} \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ 4}\right)$$

$$= -1 \cdot 2 \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ 1}\right) + 0 \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ 2}\right)$$

$$-1 \cdot 3 \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ 3}\right) + 0 \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ 4}\right)$$

$$= -2 \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ 1}\right) - 3 \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ 3}\right)$$

$$= -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 9 & -3 & -6 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & -3 & -10 \\ -7 & 1 & 10 \\ -8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

19. Aufgabe

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & s \\ s & 0 & s & 3s \\ 1 & 3s & 0 & 4s \\ s & 3 & 0 & 5s \end{pmatrix}$$

a) regulär $\rightarrow \det\left(\mathbf{A}\right) \neq 0$

$$\det\left(\mathbf{A}\right) = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{1+j} \cdot a_{1\ j} \cdot \det\left(\mathbf{A}_{1,\ j}\right)$$

$$= (-1)^2 \cdot 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & s & 3s \\ 3s & 0 & 4s \\ 3 & 0 & 5s \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 0 \cdot \begin{pmatrix} s & s & 3s \\ 1 & 0 & 4s \\ s & 0 & 5s \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 0 \cdot \begin{pmatrix} s & 0 & 3s \\ 1 & 3s & 4s \\ s & 3 & 5s \end{pmatrix}$$

$$+(-1)^5 \cdot s \cdot \begin{pmatrix} s & 0 & s \\ 1 & 3s & 0 \\ s & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\, s \cdot \begin{pmatrix} s & 0 & s \\ 1 & 3s & 0 \\ s & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} s & 0 & s \\ 1 & 3s & 0 \\ s & 3 & 0 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 3s & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3s \\ s & 3 \end{pmatrix}$$

$$= s \cdot \begin{pmatrix} 3s & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3s \\ s & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 3s & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 3s \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3s \\ s & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 3s \cdot s = 3 + 3s^2$$

$$= s \cdot 0 + s \cdot \left(3 + 3s^2\right)$$

$$= s \cdot \left(3 + 3s^2\right)$$

$$= 3s + 3s^3$$

$$= - s \cdot \left(3s + 3s^3\right)$$

$$= - 3s^2 - 3s^4$$

$$-3s^2 - 3s^4 = 0$$

$$s = 0$$

Die Matrix $\mathbf{A}$ ist regulär für alle Zahle $s \neq 0,\ s \in \mathbb{R}$.

b) $s = 2$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 9 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\left(\mathbf{A}\right)} \cdot \text{adj}\left(\mathbf{A}\right)^T$$

$$\det\left(\mathbf{A}\right) = - 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2^4 = - 3 \cdot 4 - 3 \cdot 16 = - 12 - 48 = - 60$$

$$\text{adj}\left(\mathbf{A}\right) = \begin{pmatrix} \left|\mathbf{A}_{1\,1}\right| & -\left|\mathbf{A}_{1\,2}\right| & \left|\mathbf{A}_{1\,3}\right| & -\left|\mathbf{A}_{1\,4}\right| \\ -\left|\mathbf{A}_{2\,1}\right| & \left|\mathbf{A}_{2\,2}\right| & -\left|\mathbf{A}_{2\,3}\right| & \left|\mathbf{A}_{2\,4}\right| \\ \left|\mathbf{A}_{3\,1}\right| & -\left|\mathbf{A}_{3\,2}\right| & \left|\mathbf{A}_{3\,3}\right| & -\left|\mathbf{A}_{3\,4}\right| \\ -\left|\mathbf{A}_{4\,1}\right| & \left|\mathbf{A}_{4\,2}\right| & -\left|\mathbf{A}_{4\,3}\right| & \left|\mathbf{A}_{4\,4}\right| \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}\left(\mathbf{A}\right) = \begin{pmatrix} -132 & -12 & 42 & 30 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ -12 & 8 & 12 & 0 \\ 36 & -4 & -36 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= - \frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} -132 & -12 & 42 & 30 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ -12 & 8 & 12 & 0 \\ 36 & -4 & -36 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$= - \frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} -132 & 0 & -12 & 36 \\ -12 & 0 & 8 & -4 \\ 42 & 30 & 12 & -36 \\ 30 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2.2 & 0 & 0.2 & -0.6 \\ 0.2 & 0 & -\frac{2}{15} & \frac{1}{15} \\ -0.7 & -0.5 & -0.2 & 0.6 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

20. Aufgabe

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ tx_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ t & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\mathbf{A}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ t & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ t+1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$+$

Entwickeln nach der 3. Zeile

$$= (-1)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ t+1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \left(3 \cdot 1 - 2 \cdot (t+1)\right) = -3 + 2\,(t+1)$$

$$= -3 + 2t + 2 = 2t - 1$$

$t \neq 0.5$ rang $\left(\mathbf{A}\right) = 3$
$\mathbf{A}^{-1}$ existiert
$\forall \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$ LGS $\mathbf{A}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ eindeutig lösbar

$t = 0.5$ rang $\left(\mathbf{A}\right) < 3$
$\mathbf{A}^{-1}$ existiert nicht
LGS $\mathbf{A}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ unlösbar oder mehrdeutig lösbar