Lösungen

1 a.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3(2\cdot 2 - 3\cdot 1) - (1\cdot 1 - 2\cdot 4)$$

$$= -3(4-3) - (1-8) = -3\cdot 1 - (-7) = -3+7 = \underline{4 \neq 0}$$

Entwicklung nach 2. Spalte

$\rightarrow$ A ist <u>regulär</u>

b.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1/4 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1/4 & 8 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 1/4 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= -8(1\cdot 8 - 1/4 \cdot 4) + 1\cdot(7\cdot 8 - 0\cdot 1/4) = -8\cdot 7 + 56 \underline{= 0}$$

Entwicklung nach 2. Spalte

$\rightarrow$ A ist <u>singulär</u>

2 a.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 7 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach 2. Zeile

$$= -7\cdot\big(2\cdot(5\cdot 2 - 6\cdot 3) - (0\cdot 2 - 6\cdot 4)\big)$$
$$+3\cdot\big(1\cdot(5\cdot 2 - 6\cdot 3) + 4\cdot(0\cdot 3 - 5\cdot 4)\big)$$
$$-2\cdot\big(1\cdot(1\cdot 2 - 0\cdot 3) + 4\cdot(2\cdot 3 - 1\cdot 4)\big)$$
$$= -7\cdot(2\cdot(-8) - (-24)) + 3\cdot(-8 + 4\cdot(-20))$$
$$- 2\cdot(2 + 4\cdot 2)$$
$$= -7\cdot(-16+24) + 3(-8-80) - 2\cdot(2+8)$$
$$= -7\cdot 8 + 3\cdot(-88) - 2\cdot 10 = -56 - 264 - 20$$
$$\underline{= -340 \neq 0}$$

$\rightarrow$ A ist regulär, <u>also existiert A^{-1}</u>

b.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1)(-2)(-3) \\ + \\ + \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ (1) \end{matrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 2\cdot\left(5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}\right) = 10\cdot(5\cdot(-4) - 1\cdot 2)$$

$$= 10\cdot(-20-2) = \underline{-220 \neq 0}$$

$\rightarrow$ A regulär, <u>also existiert A^{-1}</u>

③

a. $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2i & 1 \\ 2 & 5 & -i \\ -1 & i & 3i \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow + \\ (2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2i & 1 \\ 0 & 2i+5 & 5i \\ -1 & i & 3i \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2i & 1 \\ 2i+5 & 5i \end{vmatrix}$

$= -1\,(2i \cdot 5i - (2i+5) \cdot 1) = -(-10 - (2i+5))$

$= -(-10 - 2i - 5) = -(-15 - 2i) = \underline{2i + 15}$

b. $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{vmatrix}$

$= (k \cdot 1 - 1 \cdot 1) - (1 \cdot 1 - k \cdot 1) + k \cdot (1 \cdot 1 - k \cdot k)$

$= k - 1 - 1 + k + k - k^3$

$\underline{= 3k - k^3 - 2}$

c. $\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underline{= 0}$, da 2 Zeilen gleich

d. $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |E| \underline{= 1}$

e. $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underline{= 0}$, da Zeile nur Nullen enthält bzw. Spalte

f. $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \leftarrow + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & -4 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = -(-12 + 4) \underline{= 8}$

[normale Berechnung]

g. $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ Vgl. zu A aus f.: $\begin{vmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 8 \underline{= 32}$

h. $\det(A') = \det(3 \cdot \underset{\text{aus f.}}{A}) = 3^3 \cdot \det(\underset{\text{aus f.}}{A}) = 27 \cdot 8 = \underline{216}$

$\det(A'') = \det(-\underset{\text{aus f.}}{A}) = (-1)^3 \cdot \det(\underset{\text{aus f.}}{A}) \underline{= -8}$

i. $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ Vgl. zu A aus f.: 1. und 2. Zeile getauscht

$= -8$

j. $\det(A) = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $(\cdot 2)$ linear abhängig

$= 0$

k. $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ obere Dreiecksmatrix

$= 1 \cdot (-3) \cdot 2 = -6$

l. $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ Vgl. zu A aus f.: $A = \underset{\text{aus f.}}{\underline{A}^T}$

$= \det(\underset{\text{aus f.}}{\underline{A}}) = 8$

④ a. $\det\begin{pmatrix} t & 3 \\ 3 & t \end{pmatrix} = t \cdot t - 3 \cdot 3 = t^2 - 9$

singulär: $\det(A) = 0$: $t^2 - 9 = 0$ $\quad t_{1,2} = \pm 3$

$t^2 = 9$

regulär: $\det(A) \neq 0$: $t \neq \pm 3$

$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$

b. $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & t \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & t \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - t) = t - 6$

singulär $\Leftrightarrow t - 6 = 0 = \det(A)$

$t = 6$

regulär $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$, also $\det(A) \neq 0$

c. $\det(A) = \begin{vmatrix} 5-t & 2 & 1 \\ 2 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1-t \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (1-t)\begin{vmatrix} 5-t & 2 \\ 2 & 1-t \end{vmatrix}$

$= (0 - (1-t)) + (1-t)((5-t)(1-t) - 4)$

$= -1 + t + (1-t)(5 - 5t - t + t^2 - 4)$

$= -1 + t + (1-t)(1 - 6t + t^2)$

$= \cancel{-1} + \cancel{t} + \cancel{1} - 6t + t^2 - \cancel{t} + 6t^2 - t^3 = -t^3 + 7t^2 - 6t$

$= -t(t^2 - 7t + 6)$

singulär $\Leftrightarrow \det(A) = 0$

$$-t(t^2 - 7t + 6) = 0$$

$$-t_1 = 0 \quad \vee \quad t^2 - 7t + 6 = 0$$

$$\underline{t_1 = 0} \qquad t_{2,3} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 6}$$

$$= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{24}{4}}$$

$$= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$= \frac{7}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$\underline{t_2} = \frac{12}{2} = \underline{6}$$

$$\underline{t_3} = \frac{2}{2} = \underline{1}$$

regulär $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\underline{\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 6\}}$$