**Satz 2** (Determinanten von Dreiecksmatrizen)

Ist **A** eine Dreiecksmatrix, so ist

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

$$\begin{pmatrix} \diagdown & * \\ 0 & \diagdown \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \diagdown & 0 \\ * & \diagdown \end{pmatrix}$$

**Beweis:** (für obere Dreiecksmatrizen; Vollständige Induktion)

Für eine obere Dreiecksmatrix **A** gilt $a_{ij} = 0$ für $i > j$

(I) Induktionsanfang $n$=2

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot 0$$



(II) Induktionsannahme. Für eine **beliebig gewählte, aber festgehaltene** natürliche Zahl $n$, $n \geq 2$ gelte

$a_{ij} = 0$ für $i > j$

Ist **A** eine obere $n \times n$ Dreiecksmatrix **A** dann ist

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

(III) Induktionsschluß. Sei **A** eine obere $(n+1) \times (n+1)$ Dreiecksmatrix

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot \det(\mathbf{A}_{k,j})$$

$k$=$n$+1

Entwicklung nach der ($n$+1)-ten Zeile (Satz 1b)

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n+1+j} \cdot \underbrace{a_{n+1,j}}_{=0 \text{ für } n+1>j} \cdot \det(\mathbf{A}_{n+1,j})$$

$$= (-1)^{n+1+n+1} a_{n+1,n+1} \cdot \det(\mathbf{A}_{n+1,n+1})$$

$$= (-1)^{n+1+n+1} a_{n+1,n+1} \cdot \det\left(\boxed{\mathbf{A}_{n+1,n+1}}\right)$$

$\boxed{n\text{-reihige obere Dreiecksmatrix}}$, für deren Determinante gilt nach Induktionsannahme (II)

$$\det\left(\boxed{\mathbf{A}_{n+1,n+1}}\right) = a_{11} \cdot a_{22} \ldots\ldots \cdot a_{nn}$$

$$\Rightarrow \det(\mathbf{A}) = (-1)^{2(n+1)} a_{n+1,n+1} \cdot a_{11} \cdot a_{22} \ldots\ldots \cdot a_{nn}$$