Prof. Dr. habil.
H.-J. Dobner

Mathematatik für Informatiker (MfI) II

Seminar KW 26

Thema:

Eigenwerte

Lösung der EWA $\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}, \vec{x} \neq \vec{0}$

(I) Bilde **A**-λ**E**

(II) charakteristisches Polynom $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$

(III) Eigenwerte der Matrix **A:** Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$

(IV) Eigenvektoren von **A** zum Eigenwert λ

nichttriviale Lösungen des homogenen LGS $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\vec{x} = \vec{0}$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ Eigenwerte von **A**

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

$$spur(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \boxed{c_0} + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \ldots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \boxed{(-1)^n}\lambda^n$$

$$c_{n-1} = (-1)^{n-1}\, spur(\mathbf{A})$$

$$\boxed{c_0} = \det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)$$

1. Aufgabe

Gegeben ist die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Beweisen Sie, dass $\lambda=-1$ ein Eigenwert von **A** ist.

b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix **A** sowie alle weiteren Eigenwerte der Matrix **A.**

Lösung

a)

λ Eigenwert von **A**: es existiert Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ mit $\mathbf{A}\vec{x} = \lambda \vec{x}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda=-1$ Eigenwert von **A**

$$\exists \boxed{\vec{x} \neq \vec{0}}: \quad \mathbf{A}\vec{x} = (-1)\cdot \vec{x} \Leftrightarrow \boxed{(\mathbf{A}+\mathbf{E})\vec{x} = \vec{0}}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow 3x_1 - x_2 = 0 \underset{x_1 = t,\, t\in\mathbb{R}}{\Rightarrow} x_2 = 3t$$

$$\Rightarrow 2x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

$\Rightarrow \lambda=-1$ ist Eigenwert von **A**

Alle Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda=-1$ $\quad \vec{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0$

b) Alle Zeilensummen sind Eins

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{2 \quad -1 \quad 0} \\ \boxed{3 \quad -2 \quad 0} \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 1} \end{pmatrix}$$ daher ist 1 ein weiterer Eigenwert von A.

Bestimmung des dritten EW´s

$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4+3 \Rightarrow -1 = \underbrace{\lambda_1}_{=-1} \cdot \underbrace{\lambda_2}_{=1} \cdot \lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = 1$$

Entw. nach 3. Zeile

Alternativ:

$spur(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$

$$1 = spur(\mathbf{A}) = \underbrace{\lambda_1}_{=-1} + \underbrace{\lambda_2}_{=1} + \lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = 1$$

$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_n)$

$$\Rightarrow p_{\mathbf{A}}(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1) = -\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1$$