(III) Induktionsschluss

$$|\mathbf{A}_n| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{A}_{n+1}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & & & & \\ & 0 & -1 & 3 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & & & & & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der 1. Spalte

$$|\mathbf{A}_{n+1}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & & & & \\ & 0 & -1 & 3 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & & & & & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der 1. Spalte

$$|\mathbf{A}_n| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{A}_{n+1}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & & & & \\ & 0 & -1 & 3 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & & & & & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$n \times n$ Determinanten

$$= 1 \cdot 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{vmatrix}}_{|A_n|} + (-1) \cdot (\boxed{-1}) \begin{vmatrix} -1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{A}_n| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{A}_{n+1}| = 3|A_n| + \begin{vmatrix} -1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$\Downarrow$

Entwicklung nach der 1. Zeile

$(n-1) \times (n-1)$ Determinante

$$\begin{vmatrix} \boxed{-1} & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (\boxed{-1}) \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & & & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & \ddots & & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}}_{|A_{n-1}|}$$

$$\left|\mathbf{A}_{n+1}\right| = 3\left|A_n\right| + \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{vmatrix}}_{-\left|A_{n-1}\right|}$$

$$\Rightarrow \left|\mathbf{A}_{n+1}\right| = 3\left|A_n\right| - \left|A_{n-1}\right|$$

Die Behauptung gilt auch für den Nachfolger von n – nämlich $n+1$ – und damit für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$

n	$\det(A_n)$
4	55
5	144
10	17711
15	2178309
20	267914296
30	4052739537881