

Tutorium 7

THEMA: Fourier-Reihen

Zusammenfassung

- **Taylor-Reihe**: differenzierbare Funktionen durch Potenzreihen darstellen
- **Fourier-Reihe**: unstetige, periodische Funktionen durch trigonometrische Reihen darstellen
 \rightarrow nicht differenzierbar
- f hat Periode p / p -periodisch $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}: f(x) = f(x+p)$
 Fourier-Reihe mit Periode $p = 2\pi \rightarrow$ jede p -periodische Funktion mit $p \neq 2\pi$ in 2π -periodische umformen durch
 Subst. $f^*(x) = f\left(\frac{p}{2\pi}t\right) \rightarrow$ Fourier-Reihe von f^*
 Subst. $t = \frac{2\pi}{p}x \rightarrow$ Fourier-Reihe von f

- f 2π -periodisch und in $[0, 2\pi]$ integrierbar

$$\Rightarrow f \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx)) = T_n(f(x)) \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

f formal Fourier-Reihe zugeordnet Fourier-Reihe von f n -tes Fourier-Polynom zu f , $x \in \mathbb{R}$

mit Fourier-Koeffizienten

	allgemein	gerade (symmetrisch zum Ursprung) $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = f(-x)$	ungerade (schiefsymm. zum Ursprung) $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = -f(-x)$
a_0	$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$	$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$	0
$k=1,2,\dots$ a_k	$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx$	$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$	0
$k=1,2,\dots$ b_k	$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$	0	$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$

[Grenzen je nach integrierbarem Intervall $0, 2\pi / -\pi, \pi$ / etc.]

- f 2π -periodisch

- stückweise stetig differenzierbar in $[0, 2\pi]$ -Periodenintervall
 wenn f in Intervallen stetig in $[a, b]$
 + an Nahtstellen existiert Grenzwert
 f und f' in $[a, b]$ stückweise stetig
 also zusammengesetzte Funktion differenzierbar

\Rightarrow dann konvergiert die Fourier-Reihe von f $\forall x \in \mathbb{R}$ gegen einen Wert:

- $\forall x$, wo f stetig: konvergiert gegen Funktionswert $f(x)$
- $\forall x$, wo f unstetig: konvergiert gegen arithmetisches Mittel aus

links- und rechtsseitigen Grenzwert:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_s - h) + f(x_s + h)}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} \left(\lim_{\substack{x \rightarrow x_s \\ x < x_s}} f(x) + \lim_{\substack{x \rightarrow x_s \\ x > x_s}} f(x) \right)$$

(x_s einsetzen)

Mittelwerteneigenschaft (MWE)

$$\text{MWE an } x_0 \text{ gültig} \Leftrightarrow f(x_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 - h) + f(x_0 + h)}{2}$$

Funktionswert

arithm. Mittel aus l. und r. seitigen Grenzwert

→ dann konvergiert die Fourier-Reihe an x₀ gegen den Funktionswert

also gilt die MWE $\forall x$, an denen f stetig ist, also, nur unstetige Stellen auf MWE prüfen

⇒ f besitzt MWE, wenn $\forall x \in \mathbb{R}$ die MWE gilt

Fourier-Analyse

1. Skizze
2. Symmetrie? [Nichtstellen egal]
→ gerade/ungerade/nichts
3. MWE untersuchen
4. Integrationsbereich festlegen
5. Fourier-Koeffizienten berechnen

→ Fourier-Reihe

Regeln:

$$\int_a^b x \sin(kx) dx = \left[\frac{\sin(kx)}{k^2} - \frac{x \cos(kx)}{k} \right]_a^b, k \neq 0$$

$$\int_a^b x \cos(kx) dx = \left[\frac{\cos(kx)}{k^2} + \frac{x \sin(kx)}{k} \right]_a^b, k \neq 0$$

$$\sin(\pi k) = 0$$

$$\cos(\pi k) = (-1)^k$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} k\right) = \begin{cases} 0 & , k \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{k+1}{2}} & , k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} k\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} & , k \text{ gerade} \\ 0 & , k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \text{da ungerade Funktion}$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \text{da gerade Funktion}$$

$$\int_a^b x^2 \sin(kx) dx = \left[\frac{2x \sin(kx)}{k^2} + \frac{(2 - k^2 x^2) \cos(kx)}{k^3} \right]_a^b, k \neq 0$$

$$\int_a^b x^2 \cos(kx) dx = \left[\frac{2x \cos(kx)}{k^2} + \frac{(2 - k^2 x^2) \sin(kx)}{k^3} \right]_a^b, k \neq 0$$

Aufgaben

- ① Die Werte der 2π -periodischen Funktion f sind im Periodenintervall

$$0 < x < 2\pi \text{ gegeben durch } f(x) = x, \quad 0 < x < 2\pi$$

- Wie muss f an den Nahtstellen definiert werden, sodass f die MUE erfüllt?
- Berechne die Fourier-Reihe mithilfe der Fourier-Koeffizienten.

- ② Die Werte der 2π -periodischen Funktion f sind im Periodenintervall $(-\pi, \pi]$

gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

- Berechne die Fourier-Koeffizienten der Funktion
- Erfüllt f die MUE an den Punkten $x_0 = 0$ und $x_1 = \pi$?

- ③ Die Werte der 2π -periodischen Funktion f sind im Periodenintervall

$-\pi < x \leq \pi$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 3, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

- Skizziere f im Intervall $-3\pi \leq x \leq 3\pi$.
- Berechne die Fourierkoeffizienten a_2 und b_5 .
- Gegen welchen Wert konvergiert die Fourier-Reihe an der Stelle $x_0 = 0$?

- ④ Die Werte der 2π -periodischen Funktion f sind im Periodenintervall

$0 < x < 2\pi$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

- Wie muss f an den Nahtstellen definiert sein, damit sie die MUE erfüllt?
- Berechne die Fourierreihe von f .

- ⑤ Die Werte der 2π -periodischen Funktion f sind im Periodenintervall $[0, 2\pi]$ gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < \pi/2 \\ -\cos(x) & , \pi/2 \leq x \leq 3\pi/2 \\ 0 & , 3\pi/2 < x < 2\pi \end{cases}$$

- Skizziere f im Intervall $-3\pi \leq x \leq 3\pi$
- Berechne a_0 , a_1 und a_5
- Berechne alle b_k

- ⑥ Die Werte der 2π -periodischen Funktion f sind im Periodenintervall $[0, 2\pi]$ gegeben durch $f(x) = x^2$, $0 \leq x < 2\pi$

- Berechne die Fourier-Reihe mithilfe der Fourier-Koeffizienten.
(Nutze eine Regel aus der Zusammenfassung)
- Ist die MfE an den Stellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ erfüllt? Begründe.