29.4 Ablauf einer Fourier-Analyse

1. Skizze
2. Untersuchung auf Symmetrie („ohne Nahtstellen"): gerade/ungerade Funktion?

   gerade $\Rightarrow$ **alle** $b_k=0$, $k=1,2,..$

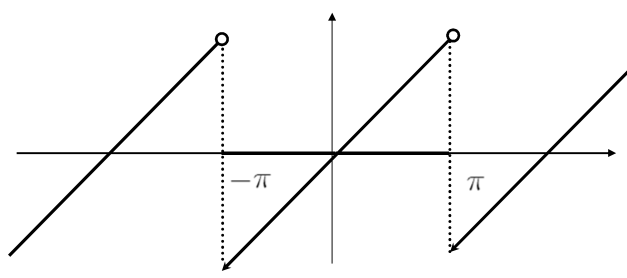
   ungerade $\Rightarrow$ **alle** $a_k=0$, $k=0,1,2,..$
3. Untersuchung auf Mittelwerteigenschaft
4. Integrationsbereich festlegen ($0..2\pi$, $-\pi..\,\pi$,…)
5. Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Beispiel 1

Die Werte der 2π-periodischen Funktion f sind im Periodenintervall $(-\pi, \pi]$ gegeben durch

$$f(x) = x \quad , \quad -\pi < x \leq \pi$$

1. Skizze



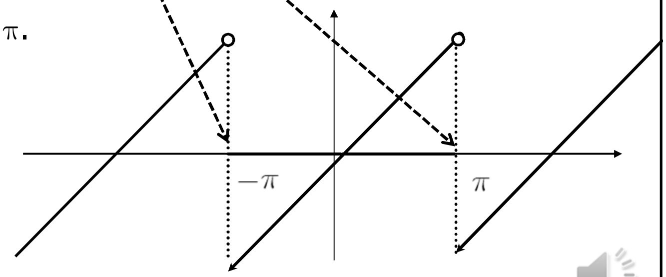
zeitlicher Verlauf einer Kippspannung

② Untersuchung auf Symmetrie

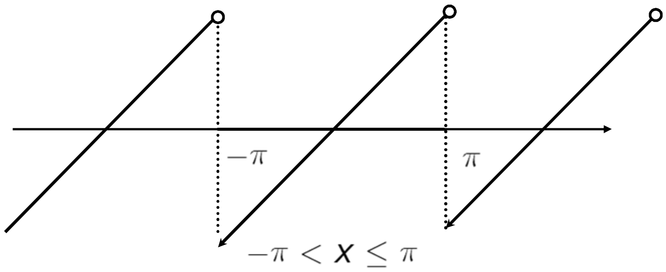
f ungerade (schiefsymmetrisch) $\Rightarrow$ a_k =0 (alle!)

③ Untersuchung auf Mittelwerteigenschaft

Die Funktion *f* erfüllt *nicht* die Mittelwerteigenschaft, d.h. in den Punkten $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$, $\pm 7\pi$,… (dort ist die MWE verletzt) konvergiert die Fourier–Reihe von *f* gegen 0 und nicht gegen $f(x) = \pi$.



④ Integrationsbereich festlegen (0..2π, -π.. π,…)



$f(x) = x, -\pi < x \le \pi$

Alternativ, da f ungerade

$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$

5 Berechnung der Fourier-Koeffizienten

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx =$$

f unstetig, uneigentliche Integrale!!

$$\int_a^b \boxed{f(x)}\cdot\boxed{g'(x)}\,dx = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

$$\int \sin(\alpha x)dx = -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \boxed{x}\,\boxed{\sin(kx)}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\left(-\frac{1}{k}\cos(kx)\right)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\left(-\frac{1}{k}\cos(kx)\right)dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[x\left(\frac{1}{k}\cos(kx)\right)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{k}\cos(kx)\,dx$$

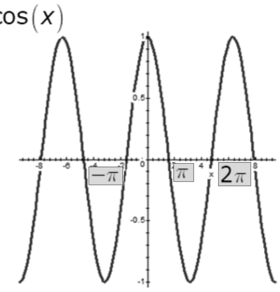
$$\int \cos(\alpha x)dx = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[x\left(\frac{1}{k}\cos(kx)\right)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{k}\cos(kx)\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[x\left(\frac{1}{k}\cos(kx)\right)\right]_{-\pi}^{\pi} + \underbrace{\left[\frac{1}{\pi}\frac{\sin(kx)}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0}$$

$$= -\frac{1}{\cancel{\pi}}\left\{\cancel{\pi}\frac{1}{k}\cos(k\pi) - \left((-\cancel{\pi})\frac{1}{k}\underbrace{\cos(k(-\pi))}_{=\cos(k\pi)}\right)\right\}$$

cos(x)



$$= -\frac{2}{k}\cos(k\pi) = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

Fourier–Reihe von f: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin(k\,x)$