<u>7. Aufgabe</u>

Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)}\,(x+1)^k$$

Ist die Potenzreihe für x=0 konvergent (bedingt konvergent, absolut konvergent) oder divergent?

<u>Lösung</u>

$$a_k = \frac{k!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)},\ x_0 = -1$$

Bestimmung von ρ mit dem Quotientenkriterium $\rho = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2(k+1)-1)}$$

$$a_k = \frac{k!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)} \qquad a_{k+1} = \frac{(k+1)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2(k+1)-1)}$$

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{a_{k+1}}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{k!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)(2k+1)}{(k+1)!}$$

$$\boxed{(k+1)! = k!(k+1)}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{\cancel{k!}}{\cancel{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)}}\,\frac{\cancel{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)}(2k+1)}{\cancel{k!}(k+1)}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{2k+1}{k+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{2+\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}} = 2$$

$$\boxed{\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)} (x+1)^k$$

absolut konvergent für $|x+1| < 2$

$$\Leftrightarrow -2 < x+1 < 2 \Leftrightarrow -3 < x < 1$$

und divergent, falls $x < -3$ oder $x > 1$

somit ist die Reihe für x=0 absolut konvergent.

Auf dem Rand des Konvergenzkreises ist jedes Verhalten möglich!

Aufgabe 2: $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)\cdot k} x^k$, Konvergenzbereich $[-1,1]$

absolut konvergent für $-1 \leq x \leq 1$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$, Konvergenzbereich $[-1,1)$

absolut konvergent für $-1 < x < 1$;

sowie konvergent für $x = -1$ und divergent für $x = 1$

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k}\right)^k x^k$, Konvergenzbereich $(-1,1]$

absolut konvergent für $-1 < x < 1$;

sowie divergent für $x = -1$ und konvergent für $x = 1$

Aufgabe 1: $\sum_{k=0}^{\infty} 4^k x^k$, Konvergenzbereich $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

absolut konvergent für $\frac{-1}{4} < x < \frac{1}{4}$