Aufgaben 1

1. Aufgabe

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x + \ln(x)}{x^3 - 3x + 2}$ → Typ $\dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{1}{x} - 1}{3x^2 - 3}$ → Typ $\dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{6x} = \frac{-1}{6} = -\frac{1}{6}$$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{\left(\sin(x)\right)^2}$ → Typ $\dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x \cdot \cos(x^2)}{2\left(\sin(x) \cdot \cos(x)\right)}$ → Typ $\dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\left(\cos(x^2) \cdot \sin(x^2)\right)}{2\left(\cos^2(x) \cdot \sin^2(x)\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x^2) \cdot \sin(x^2)}{\cos^2(x) \cdot \sin^2(x)} = \frac{1}{1} = 1$$

2. Aufgabe

a) $\lim\limits_{x \to 0} (x + 1)^{cot(x)}$

$$= \lim_{x \to 0} e^{\ln(x+1) \cdot cot(x)} = e^{\lim_{x \to 0} \ln(x+1) \cdot cot(x)}$$

$$\lim_{x \to 0} \ln(x+1) \cdot cot(x) = \lim_{x \to 0} \ln(x+1) \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1) \cdot \cos(x)}{\sin(x)}$$

—> Typ $\dfrac{\infty}{0}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1) \cdot \left(-\sin(x)\right) + \frac{1}{x+1} \cdot \cos(x)}{cos(x)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$= e^1 = e$$

b) $\lim_{x\to\infty} \left(x^2+4\right)^{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(x^2+4\right)\cdot\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty}\ln\left(x^2+4\right)\cdot\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(x^2+4\right)\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(x^2+4\right)}{x} \qquad \to \text{Typ } \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+4}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2+4} \qquad \to \text{Typ } \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2x} \qquad \to \text{Typ } \frac{2}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{0}{2} = 0$$

$$= e^0 = 1$$

3. Aufgabe

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad , x > 0 \quad , x_0 = 1$$

$$f(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \qquad f(1) = -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{4\sqrt{x^5}} \qquad f'(1) = \frac{3}{4}$$

$$f''(x) = -\frac{15}{8\sqrt{x^7}} \qquad f''(1) = -\frac{15}{8}$$

$$f'''(x) = \frac{105}{16\sqrt{x^9}}$$

$$T_2(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}(x-1) - \frac{15}{8}(x-1)^2$$

$$R_2(x) = \frac{105}{16\sqrt{\xi^9}}(x-1)^3$$

ξ zwischen $x_0 = 1$ und $x > 0$

4. Aufgabe

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \quad , x \in [0,\ 1] \quad , x_0 = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \qquad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} \qquad f''\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{64}{17\sqrt{17}}$$

$$f'''(x) = -\frac{3x \cdot (1+x2)^2}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^9}}$$

$$T_2(x) = \frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{17\sqrt{17}} \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right)^2$$

$$R_2(x) = -\frac{3\xi \cdot \left(1+2\xi\right)^2}{\sqrt{\left(1+\xi^2\right)^9}} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right)^3$$

ξ zwischen $x_0 = \frac{1}{4}$ und $x \in [0,\ 1]$

Das Restglied R_2 kann den Wert Null annehmen, wenn z.B. x den Wert 0.25 annimmt. Somit ist ein Faktor Null, was das ganze Produkt Null werden lässt.

5. Aufgabe

$$f(x) = (1+x)^3 + e^{-2x} \quad , x \in \left[-1,\ 1\right] \quad , x_0 = 0$$

$$f(x) = (1+x)^3 + e^{-2x} \qquad f(0) = 2$$

$$f'(x) = 3\,(1+x)^2 - 2e^{-2x} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = 6 + 6x + 4e^{-2x} \qquad f''(0) = 10$$

$$f'''(x) = 6 - 8e^{-2x}$$

$$T_2(x) = 2 + 1\,(x-0) + \frac{10}{2}\,(x-0)^2 = 2 + x + 5x^2$$

$$R_2(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(6 - 8e^{-2\xi}\right) \cdot (x-0)^3 = \frac{1}{6} \cdot \left(6 - 8e^{-2\xi}\right) \cdot x^3$$

ξ zwischen $x_0 = 0$ und $x \in [-1,\ 1]$

Restglied Abschätzen:

$$\left|R_2(x)\right| = \left|\frac{1}{6} \cdot \left(6 - 8e^{-2\xi}\right) \cdot x^3\right|$$

$$\leq \frac{1}{6} \cdot \left(\left|6\right| + \left|-8e^{-2\xi}\right|\right) \cdot \left|x^3\right|$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(6 + 8e^{-2\xi}\right) \cdot \left|x^3\right|$$

worst-case-Abschätzung:

$$\leq \frac{1}{6} \cdot \left(6 + 8e^{2}\right) \cdot \left|x^3\right|$$

$$\leq 10.8521 \cdot \left|x^3\right|$$