28.2 Integration über unbeschränkte Intervalle

Definition 1

Integrale mit Integrationsgrenzen ∞ oder $-\infty$ sind uneigentliche Integrale 1. Art.

Ist die Funktion $f(x)$ stetig im Intervall $[a,\infty)$ dann ist

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\beta\to\infty} \boxed{\int_a^\beta f(x)\,dx}$$

Bestimmte Integrale

Ist die Funktion $f(x)$ ist stetig im Intervall $(-\infty,b]$ dann ist

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty} \boxed{\int_\alpha^b f(x)\,dx}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx,\ c \text{ beliebige reelle Zahl.}$$

Für alle Fälle gilt:

Wenn der jeweilige Grenzwert existiert, so konvergiert das uneigentliche Integral, und der Grenzwert ist der Wert dieses uneigentlichen Integrals. Wenn der Grenzwert nicht existiert, divergiert das uneigentliche Integral.

Untersuchung der uneigentlichen Integrale

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

auf Konvergenz bzw. Divergenz

1 Stammfunktion F von f bestimmen

2 Untersuche, ob die Grenzwerte

$\lim\limits_{\beta\to\infty} F(\beta),\ \lim\limits_{\alpha\to-\infty} F(\alpha)$ existieren

$\boxed{\text{Ja} \Rightarrow \text{Uneigentliches Integral existiert}}$

$\boxed{\text{Nein} \Rightarrow \text{Uneigentliches Integral existiert nicht}}$