Satz 1

$\mathbf{A}$ $n \times n$ Matrix

$$adj(\mathbf{A})^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot adj(\mathbf{A})^T = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{E}$$

$n \times n$ $\mathbf{E}$ Einheitsmatrix

Satz 2 (Die Inversenformel)

Falls $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, so ist die $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ invertierbar und die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ hat die Darstellung

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot adj(\mathbf{A})^{T}$$

Beispiel 2

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 8$$

$\uparrow - \cdot (-7)$

$$adj(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -14 \\ -2 & 3 & 14 \\ 2 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{A}$ invertierbar

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot adj(\mathbf{A})^T \underset{\text{Bsp. 1}}{=} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -14 & 14 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Beispiel 3

Die Inverse einer regulären 2×2 Matrix $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad det\left(\mathbf{A}\right) = a \cdot d - b \cdot c \neq 0$$

$$adj\left(\mathbf{A}\right) = \left[\left((-1)^{i+j} \det\left(\mathbf{A}_{i,j}\right)\right)_{i,j=1,2,\dots,n}\right]$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot adj\left(\mathbf{A}\right)^{T} \quad = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^{T}$$

$$= \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$