$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = \underbrace{f(x)\cdot g(x)}_{\text{„ausintegrierter Anteil"}} - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

6. Aufgabe

Berechnen Sie mittels partieller Integration das unbestimmte Integral

$$\int 2\,sin^2(x)\,dx$$

Lösung

$$\int 2\,sin^2(x)\,dx = \int 2\,sin(x)\,sin(x)\,dx$$

$f(x)$ $g'(x)$

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

$$g'(x) = \sin(x) \Rightarrow g(x) = -\cos(x)$$

$$= -2\,sin(x)\,cos(x) - \int 2\,cos(x)\big(-cos(x)\big)\,dx$$

$$\int 2\,sin^2(x)\,dx = \ldots$$

$$= -2\,sin(x)\,cos(x) - \int 2\,cos(x)\big(-cos(x)\big)\,dx$$

$$= -2\,sin(x)\,cos(x) + \int 2\boxed{cos^2(x)}\,dx$$

Was ist damit gewonnen?? Einfacher ??

$$cos^2(x) + sin^2(x) = 1 \quad \Rightarrow \boxed{cos^2(x) = 1 - sin^2(x)}$$

$$= -2\,sin(x)\,cos(x) + \int 2\boxed{\big(1 - sin^2(x)\big)}\,dx$$

$\int 2\sin^2(x)\,dx = -2\sin(x)\cos(x) + \int 2\left(1-\sin^2(x)\right)dx$

$$\Rightarrow \int 2\sin^2(x)\,dx = -2\sin(x)\cos(x) + \int 2dx - \int 2\sin^2(x)\,dx$$

Reproduzierendes Integral

$$\Rightarrow 2\int 2\sin^2(x)\,dx = -2\sin(x)\cos(x) + \int 2dx$$

$$= -2\sin(x)\cos(x) + 2x$$

$$\boxed{\Rightarrow \int 2\sin^2(x)\,dx = -\sin(x)\cos(x) + x + C}$$

$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$

7. Aufgabe

Bestimmen Sie mittels partieller Integration alle Stammfunktionen der Funktion

$$f(x) = \ln(x)\cdot\left(3x^2-2\right), x > 0$$

Lösung

$$\int \underbrace{\ln(x)}_{f}\underbrace{\left(3x^2-2\right)}_{g'}dx \qquad f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 3x^2 - 2 \Rightarrow g(x) = x^3 - 2x$$

$$= \ln(x)\left(x^3-2x\right) - \int \frac{1}{x}\left(x^3-2x\right)dx$$

$$= \ln(x)\left(x^3-2x\right) - \int\left(x^2-2\right)dx = \ln(x)\left(x^3-2x\right) - \frac{1}{3}x^3 + 2x$$

Alle Stammfunktionen

$$\ln(x)\left(x^3-2x\right) - \frac{1}{3}x^3 + 2x + C, C \in \mathbb{R}$$