Satz 4 Der Kreissatz von Gerschgorin

Ist **A** eine $n \times n$ Matrix, so gilt für die Eigenwerte λ von **A**:

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$$

wobei K_i der abgeschlossene Kreis in der komplexen Zahlenebene um das Diagonalelement a_{ii} mit Radius

$$r_i = \sum_{k=1, k \neq i}^{n} |a_{ik}|$$

ist:

$$K_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - a_{ii}| \leq r_i = \sum_{k=1, k \neq i}^{n} |a_{ik}| \right\}, i = 1, 2, \ldots, n$$

Gerschgorin-Kreise

Ist ein Kreis disjunkt zur Vereinigung der übrigen n-1 Kreise, so liegt in diesem Kreis genau ein Eigenwert von **A**

Folgerung

Sind m der Gerschgorin-Kreise disjunkt zu den restlichen n-m Kreisen, dann liegen – die Ordnung als Nullstelle des charakteristischen Polynoms mitgezählt – genau m Eigenwerte in der Vereinigung dieser m Kreise. Das bedeutet aber nicht, dass in jedem Gerschgorin-Kreis ein Eigenwert von **A** liegt.

Beispiel 3

$$K_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - a_{ii}| \le r_i = \sum_{k=1, k \ne i}^{n} |a_{ik}| \right\}$$

Gerschgorin-Kreise der Matrix

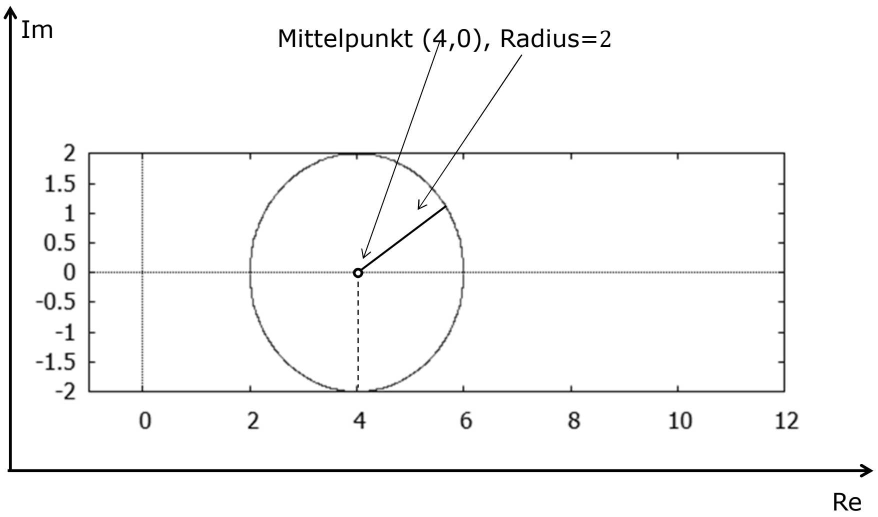
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 1 \\ -2 & 0 & \boxed{9} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} r_1 = |1| + |1| \\ r_2 = |0| + |1| \\ r_3 = |-2| + |0| \end{array}$$

$$K_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - 4| \le 2 \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \sqrt{[\mathrm{Re}(z-4)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2} \le 2 \right\}$$

$$K_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - \boxed{2}| \le 1 \right\}$$

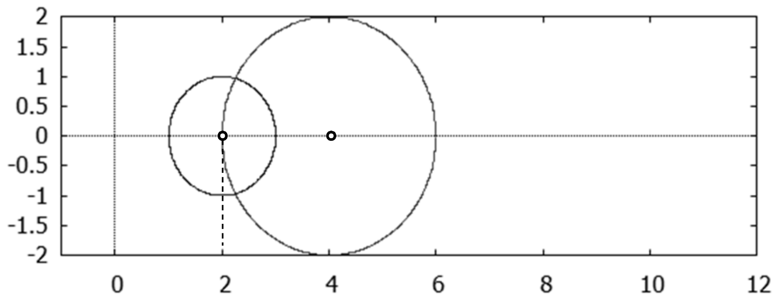
$$K_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - \boxed{9}| \le 2 \right\}$$

$$\boxed{K_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - 4| \le 2 \right\}} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \sqrt{[\mathrm{Re}(z-4)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2} \le 2 \right\}$$



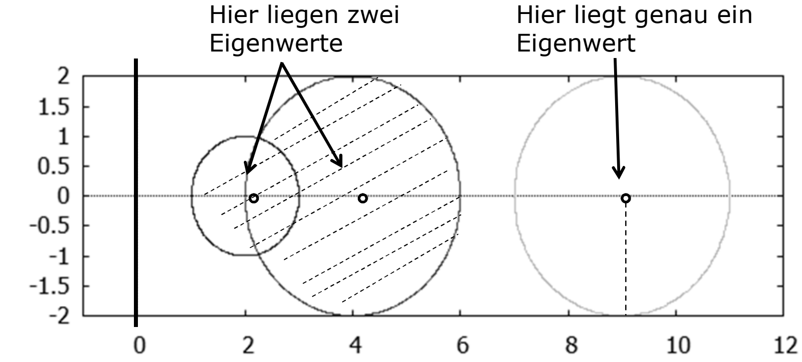
Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig

$K_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-4| \le 2\}$ $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-2| \le 1\} = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \sqrt{[\mathrm{Re}(z-2)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2} \le 1\right\}$



$K_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-4| \le 2\}$ $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-2| \le 1\}$ $K_3 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-9| \le 2\}$

$= \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \sqrt{[\mathrm{Re}(z-9)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2} \le 2\right\}$



0 ist kein Eigenwerte von **A** $\Rightarrow$ det(**A**)$\neq$0 $\Rightarrow$ **A** regulär

Eigenwerte von **A**:
1.8828, 4.6318, 8.4853