31.5 Lineare Gleichungssysteme und Determinanten

Mit Hilfe des Ranges einer Matrix können wir das Lösbarkeitskriterium für beliebige Lineare Gleichungssysteme $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ kurz und knapp formulieren

rang(A)
=Anzahl lin. unabh. Zeilenvektoren
=Anzahl lin. unabh. Spaltenvektoren

A $m \times n$ Matrix (m Gleichungen, n Unbekannte)

$\boxed{\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b} \text{ lösbar } \Leftrightarrow rang(\mathbf{A}) = rang\left(\mathbf{A}\middle|\vec{b}\right)}$

$\Rightarrow$ Lösung hängt von $n - rang(\mathbf{A})$ freien Parametern ab

$\boxed{\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b} \text{ unlösbar } \Leftrightarrow rang(\mathbf{A}) < rang\left(\mathbf{A}\middle|\vec{b}\right)}$

NEU

Im Falle **quadratischer** Systeme können auch Determinanten verwendet werden.

Satz 1

Ist **A** eine $n \times n$ Matrix , so gelten die folgenden Aussagen:

A regulär	**A** singulär
$\Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0$	$\Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) = 0$
$\Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1}$ existiert	$\Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1}$ existiert nicht
$\Leftrightarrow rang(\mathbf{A}) = n$	$\Leftrightarrow rang(\mathbf{A}) < n$
$\Leftrightarrow \mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar	$\Leftrightarrow \mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ unlösbar oder mehrdeutig lösbar

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Beispiel 1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & \cancel{2} & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ 1 & \cancel{1} & t+1 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der 2. Zeile

$$= (-1)\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & t+1 \end{vmatrix} = (-1)\left[-3 \cdot (t+1) - 3\right] = 3(t+2)$$

Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix} \quad \det(\mathbf{A}) = 3(t+2)$$

$t \neq -2$

$rang(\mathbf{A}) = 3$

$\mathbf{A}^{-1}$ existiert

$\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ LGS $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar

---

$t = -2$

$rang(\mathbf{A}) < 3$

$\mathbf{A}^{-1}$ existiert nicht

LGS $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ unlösbar oder mehrdeutig lösbar

Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig