5. Aufgabe

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung sowie die gemischten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung $f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y)$

der Funktion $f(x,y) = \cosh(x^2 y), x, y \in \mathbb{R}$

Lösung

$f(x,y) = \cosh(x^2 \cdot y), x, y \in \mathbb{R}$

$f_x(x,y) \quad = \sinh(x^2 \cdot y) \cdot 2x \cdot y$

y als Konstante auffassen

$f_y(x,y) \quad = \sinh(x^2 \cdot y) \cdot x^2$

x als Konstante auffassen

$f_x(x,y) = \sinh(x^2 \cdot y) \cdot 2x \cdot y, f_y(x,y) = \sinh(x^2 \cdot y) \cdot x^2$

$$f_{xy} = (f_x)_y$$

$$=$$

$$f_{yx} = (f_y)_x$$

Satz von Schwarz: Vertauschbarkeit der Differenziationstreihenfolge

$$= \left(\sinh(x^2 \cdot y) \cdot x^2\right)_x$$

y als Konstante auffassen

$$= \left[\cosh(x^2 \cdot y) \cdot 2xy\right] \cdot x^2 + \sinh(x^2 \cdot y) \cdot 2x = f_{xy}$$

6. Aufgabe

Erfüllt die Funktion $u(x,y) = \sin(y+4x) + (y-4x)^3$

die Gleichung $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 16\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$

Lösung

$$u(x,y) = \sin(y+4x) + (y-4x)^3$$

$$u_x(x,y) = \cos(y+4x)\cdot 4 + 3\cdot(y-4x)^2\cdot(-4)$$

$\boxed{y \text{ als Konstante auffassen}}$

$$u_{xx} = (u_x)_x = \left(4\cos(y+4x) - 12(y-4x)^2\right)_x$$

$\boxed{y \text{ als Konstante auffassen}}$

$$= -16\cdot\sin(y+4x) + 96\cdot(y-4x)$$

$\boxed{u_{xx}(x,y) = -16\cdot\sin(y+4x) + 96\cdot(y-4x)}$

$$u(x,y) = \sin(y+4x) + (y-4x)^3$$

$$u_y(x,y) = \cos(y+4x) + 3\cdot(y-4x)^2$$

$\boxed{x \text{ als Konstante auffassen}}$

$$u_{yy} = (u_y)_y = \left(\cos(y+4x) + 3\cdot(y-4x)^2\right)_y$$

$\boxed{x \text{ als Konstante auffassen}}$

$$= -\sin(y+4x) + 6\cdot(y-4x)$$

$$u_{xx} - 16u_{yy} = -\cancel{16\cdot\sin(y+4x)} + \underline{96\cdot(y-4x)}$$

$$-\underline{16}\cdot\left[\cancel{-\sin(y+4x)} + \underline{6\cdot(y-4x)}\right] = 0$$

Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner, HTWK Leipzig, MNZ