2. Aufgabe

G ist das Dreieck mit den Eckpunkten (0,1), (2,0), (0,-1).

Berechnen Sie das Gebietsintegral

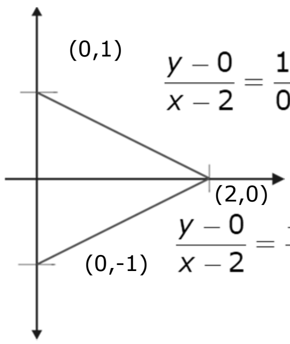
$$\iint_G (2+x)\, d(x,y)$$

Lösung

Gerade durch $P = (x_1, y_1), (x_2, y_2), x_1 \neq x_2$:

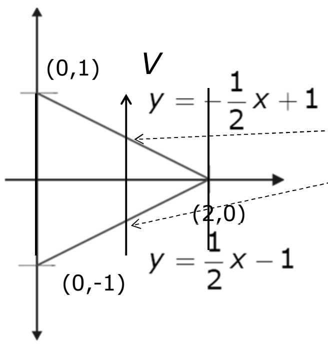
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Skizze



$$\frac{y-0}{x-2} = \frac{1-0}{0-2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$\frac{y-0}{x-2} = \frac{-1-0}{0-2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 1$$



Integrationsgrenzen für *y*:
Betrachte eine vertikale Gerade *V*, die in Richtung steigender *y*-Werte durch *G* geht. Die Werte ablesen, bei denen diese Gerade in das Gebiet *G* eintritt und austritt. Diese beiden Werte sind die Integrationsgrenzen für die Integration über *y*.

$$\frac{1}{2}x - 1 \leq y \leq -\frac{1}{2}x + 1$$

Integrationsgrenzen für *x*:
Bestimme die Werte von *x*, zwischen denen alle vertikalen Geraden durch *G* liegen.

$$0 \leq x \leq 2$$

$0 \leq x \leq 2, \frac{1}{2}x - 1 \leq y \leq -\frac{1}{2}x +$

$$\iint_G (2+x)\, d(x,y) = \int_0^2 \int_{\frac{1}{2}x-1}^{-\frac{1}{2}x+1} (2+x)\, dy\, dx$$

iteriertes Integral

Stammfunktion bzgl. y (x als Konstante auffassen)

$$= \int_0^2 \left[2y + xy\right]_{y=\frac{1}{2}x-1}^{y=-\frac{1}{2}x+1} dx$$

$$= \int_0^2 \left(2\left(-\frac{1}{2}x+1\right) + x\left(-\frac{1}{2}x+1\right) - \left\{2\left(\frac{1}{2}x-1\right) + x\left(\frac{1}{2}x-1\right)\right\}\right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(-\cancel{x} + 2 - \frac{1}{2}x^2 + \cancel{x} - \cancel{x} + 2 - \frac{1}{2}x^2 + \cancel{x}\right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(4 - x^2\right) dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$