**Satz 1**

In einem Vektorraum $V$ mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$, wird durch die Festsetzung

$$\left\|\vec{x}\right\| := \sqrt{\left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle}$$

eine zum Innenprodukt <,> passende Norm auf $V$ erklärt, die sogenannte **kanonische Norm**.



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad \left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$$

$$\Rightarrow \left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{\left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot x_k} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

**Beispiel 3**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

$$\left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{50}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \overline{y_k}$$

$$\Rightarrow \|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \overline{x_k}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$$

**Beispiel 4**

$$\overline{a+ib} = a - ib$$
$$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$(a+ib)(a-ib) = |a+ib|^2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1+2i \\ -i \\ 1-5i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{|1+2i|^2 + |-i|^2 + |1-5i|^2} = \sqrt{5+1+26} = \sqrt{32}$$



**Satz 2**

In einem Vektorraum $V$ mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ gilt immer die Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung (CSU)

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \le \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle}$$

Bemerkung:

In einem reellen Vektorraum gilt

$$\vec{x} \ne \vec{0}, \vec{y} \ne \vec{0} \Rightarrow \|\vec{x}\| \ne 0 \|\vec{y}\| \ne 0$$

$$\underset{\text{CSU}}{\Rightarrow} \frac{|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \le 1 \quad \Rightarrow -1 \le \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \le 1$$

**Definition 2**

In einem **reellen** Vektorraum $V$ mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ wird für Vektoren $\vec{x} \neq \vec{0}, \vec{y} \neq \vec{0}$ durch

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

ein Winkel $\varphi$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ erklärt.

**Definition 3**

$V$ Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$

$\vec{x}, \vec{y} \in V$ heißen orthogonal, Schreibweise $\vec{x} \perp \vec{y}$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$$