Beispiel 3

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + e^{-x},\ x \in [-1,1]$$

das Taylorpolynom zweiter Ordnung um den Entwicklungspunkt x_0=0. Geben Sie das zugehörige Restglied $R_2(x)$ an und führen Sie für

$$R_2(x), x \in [-1,1]$$

eine Fehlerabschätzung durch.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3$$

Lösung

$$f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + e^{-x},\ x \in [-1,1]$$

Taylorpolynom zweiter Ordnung $\Rightarrow$

Erste und zweite Ableitung am Entwicklungspunkt erforderlich

$$f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + e^{-x} \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - e^{-x} \Rightarrow f'(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f''(x) = 1 + x + e^{-x} \Rightarrow f''(0) = 1 + 1 = 2$$

Für Restglied wird dritte Ableitung benötigt

$$f'''(x) = 1 - e^{-x}$$

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3$$ $$f(0)=1, f'(0)=0, f''(0)=2$$

Taylorpolynom zweiter Ordnung um Entwicklungspunkt x_0=0 aufstellen:

$1+x^2$

Restglied und Lage von ξ angeben !!

$$R_2(x)=\frac{1}{3!}\left(1-e^{-\xi}\right)x^3,\quad \boxed{\xi \text{ zwischen } x_0=0 \text{ und } x\in[-1,1]}$$

Restglied abschätzen

Dreiecksungleichung $|a+b|\leq|a|+|b|$

$$\left|R_2(x)\right|=\left|\frac{1}{3!}\left(1-e^{-\xi}\right)x^3\right|\leq\frac{1}{6}\left(|1|+\underbrace{\left|-e^{-\xi}\right|}\right)\left|x^3\right|$$

worst-case-Abschätzung

$$=\frac{1}{6}\left(1+e^{-\xi}\right)\left|x^3\right|\leq\frac{1}{6}(1+e)\left|x^3\right|\leq 0.6197\left|x^3\right|$$

ξ zwischen x_0=0 und $x\in[-1,1]$