10. Aufgabe

Untersuchen Sie mit dem Vergleichskriterium das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+e^x}\,dx$$

auf Konvergenz/Divergenz.

Lösung uneigentliches Integral 1.Art

$$f(x)=\frac{1}{x^2+e^x}$$

$f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$, stetig,

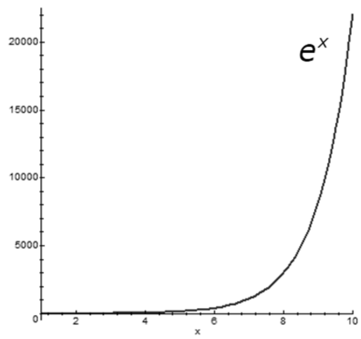
$0\le f(x)\le g(x)$

$\int_a^\infty g(x)dx$ konvergent $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ konvergent

$\int_a^\infty f(x)dx$ divergent $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx$ divergent

$$0\underset{x\ge 1}{\le} f(x)=\frac{1}{x^2+e^x}=\frac{1}{x^2+\underbrace{e^x}_{>0}}<\frac{1}{x^2}=g(x)$$

Bruch wird größer, wenn Nenner verkleinert wird



Majorantenkriterium

$|f(x)|\le g(x)$:

$\int_1^\infty g(x)dx$ konv. $\Rightarrow \int_1^\infty f(x)dx$ konv.

Vorlesung §28.4,Satz 1

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx \text{ konvergent}$$

$$\underset{\text{Majoranten-kriterium}}{\Rightarrow}\int_1^\infty \frac{1}{x^2+e^x}dx \text{ konvergent}$$

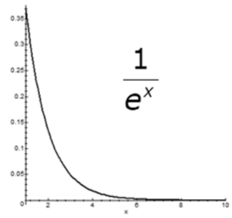
Alternative

$$0 \underset{x\geq 1}{\leq} f(x) = \frac{1}{x^2+e^x} = \frac{1}{\underbrace{x^2}_{>0}+e^x} < \frac{1}{e^x} = e^{-x} = g(x)$$

Bruch wird größer,
wenn Nenner verkleinert wird

$$\int_1^\infty \frac{1}{e^x}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{1}{e^x}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}\left[-\frac{1}{e^x}\right]_1^\beta = \lim_{\beta\to\infty}\underbrace{\left(-\frac{1}{e^\beta}\right)}_{\Rightarrow 0} - \left(-\frac{1}{e^1}\right) = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{e^x}\,dx \text{ ist konvergent}$$



$\frac{1}{e^x}$

$$\underset{\text{Majoranten-kriterium}}{\Rightarrow} \int_1^\infty \frac{1}{x^2+e^x}\,dx \text{ konvergent}$$