Lösungen

(1) a. $a_k = \frac{2k}{k-1}$, $\underline{QK}$: $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim \left| \frac{\frac{2k}{k-1}}{\frac{2(k+1)}{(k+1)-1}} \right| = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cancel{2}k \cdot k}{(k-1)\cdot \cancel{2}(k+1)} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^2-1}$

$= \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cancel{k^2}}{\cancel{k^2}(1-\frac{1}{k^2})} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{k^2}\to 0} = \underline{1 = \rho}$

b. $a_k = 5^{\frac{k}{2}} = (\sqrt{5})^k = \sqrt{5^k}$, $\underline{WK}$: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|(\sqrt{5})^k|}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{5}} = \rho}$

c. $a_k = \frac{1}{(2+\frac{1}{k})^k}$, $\underline{WK}$: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\left|\frac{1}{(2+\frac{1}{k})^k}\right|}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{2+\frac{1}{k}}} = \lim\limits_{k\to\infty} 2 + \frac{1}{k}\to 0 = \underline{2 = \rho}$

② a. $\sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k x^{5k}$, $x = -\frac{1}{2}$?

Substitution: $t = x^5$

$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(-2)^k}_{a_k} t^k$, QK: $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{(-2)^k}{(-2)^{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\cancel{(-2)^k}}{\cancel{(-2)^k}\cdot(-2)}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \rho_t$

$\Rightarrow$ abs. konv. $\forall t \in \mathbb{R}: |t| < \frac{1}{2} = \rho_t$

Resubstitution: $|x^5| < \frac{1}{2}$, dann Reihe mit x abs. konv.

$\Rightarrow |x| < \sqrt[5]{\frac{1}{2}} = \rho$

$-\frac{1}{\sqrt[5]{2}} < x < \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ abs. konv., $x = -\frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{\sqrt[5]{2}}, \frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right]$

$\Rightarrow$ die Potenzreihe ist für $x = -\frac{1}{2}$ absolut konvergent

b. $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\binom{k+8}{k} \frac{1}{(3k+2)^3}}_{a_k} \cdot x^k$, $x = -\frac{1}{2}$?

QK: $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\binom{k+8}{k}\frac{1}{(3k+2)^3}}{\binom{k+9}{k+1}\frac{1}{(3(k+1)+2)^3}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\binom{k+8}{k}}{\binom{k+9}{k+1}} \cdot \frac{(3k+5)^3}{(3k+2)^3}$

$= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+8)(k+7)\cdot\ldots\cdot(k+8-k+1)}{k!}}{\frac{(k+9)(k+8)\cdot\ldots\cdot(k+9-(k+1)+1)}{(k+1)!}} \cdot \left(\frac{3k+5}{3k+2}\right)^3$

$= \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{(k+8)(k+7)\cdot\ldots\cdot(9)}\cdot \cancel{k!}(k+1)}{\cancel{k!}\cdot(k+9)\cancel{(k+8)\cdot\ldots\cdot(9)}} \cdot \left(\frac{\cancel{k}(3+\frac{5}{k})}{\cancel{k}(3+\frac{2}{k})}\right)^3 = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k+9} \cdot \left(\lim_{k\to\infty} \frac{3+\frac{5}{k}}{3+\frac{2}{k}}\right)^3$

$= \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k}(1+\frac{1}{k})}{\cancel{k}(1+\frac{9}{k})} \cdot (1)^3 = 1 \cdot 1 = 1 = \rho$ $\quad \frac{1}{k} \to 0,\ \frac{9}{k} \to 0$

abs. konv. $\forall x \in \mathbb{R}: |x| < 1 = \rho$, also für $-1 < x < 1$ abs. konv., $x = -\frac{1}{2} \in [-1, 1]$

$\Rightarrow$ die Potenzreihe ist für $x = -\frac{1}{2}$ absolut konvergent

③ a. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot x^k$

QK: $\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{(k+1)^2}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = \left(\lim_{k\to\infty} 1 + \frac{1}{k}\right)^2 = 1^2 = 1 = \rho$ $\quad \frac{1}{k} \to 0$

$|x| < 1$, also $-1 < x < 1$ absolut konvergent

für $x < -1$ oder $x > 1$ divergent

Randpunkte: $x = -1$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \to \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k^2}\right|$

$x = 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

$\Big\}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ absolut konvergent

(alternierender Faktor „nicht nötig" $\rightarrow$ in beiden Fällen konvergent)

$\rightarrow$ abs. konvergent für $-1 \leq x \leq 1$

b. $\sum_{k=0}^{\infty} 8^k (x+1)^{3k}$

Substitution: $t = (x+1)^3 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 8^k t^k$

QK: $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{8^k}{8^{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{8^k}{8^k \cdot 8} = \frac{1}{8} = \rho_t \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}: |t| < \frac{1}{8}$ abs. konv.

Resubstitution: $|(x+1)^3| < \frac{1}{8}$ abs. konv. $\forall x \in \mathbb{R}$

$|x+1| < \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} - 1 < x < \frac{1}{2} - 1$

$-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$ abs. konv.

$x < -\frac{3}{2}$ oder $x > -\frac{1}{2}$ div.

Randpunkte: $x = -\frac{3}{2}$: $\sum_{k=0}^{\infty} 8^k (-\frac{3}{2}+1)^{3k} = \sum_{k=0}^{\infty} 8^k \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(8 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$

Divergenzkriterium: $\lim_{k\to\infty} |(-1)^k| = 1 \neq 0 \Rightarrow$ Reihe divergiert

$x = -\frac{1}{2}$: $\sum_{k=0}^{\infty} 8^k \cdot (-\frac{1}{2}+1)^{3k} = \sum_{k=0}^{\infty} 8^k \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1$

Divergenzkriterium: $\lim_{k\to\infty} |1| = 1 \neq 0 \Rightarrow$ Reihe divergiert

Potenzreihe für $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$ abs. konv.

für $x \leq -\frac{3}{2}$ oder $x \geq -\frac{1}{2}$ div.

c. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k (2k+1)^2} \cdot x^k$

QK: $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{3^k (2k+1)^2}}{\frac{1}{3^{k+1}(2(k+1)+1)^2}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{3^{k+1}(2(k+1)+1)^2}{3^k (2k+1)^2} = \lim_{k\to\infty} 3 \cdot \left(\frac{2k+3}{2k+1}\right)^2$

$= 3 \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\cancel{k}(2+\frac{3}{k})}{\cancel{k}(2+\frac{1}{k})}\right)^2 = 3 \cdot 1^2 = 3 = \rho$

Potenzreihe für $-3 < x < 3$ abs. konv.

für $x < -3$ oder $x > 3$ div.

Randpunkte: $x = -3$: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k (2k+1)^2} \cdot (-3)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \cancel{3^k}}{\cancel{3^k} (2k+1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$

$\rightarrow$ ähnlich zu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ $\quad = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$

$|a_k| = \left| \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| = \frac{1}{(2k+1)^2} \leq \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4 \cdot k^2}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{k^2}$ konv. Majorante

$\rightarrow$ Reihe absolut konv.

$\underline{x=3}$: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k(2k+1)^2} \cdot 3^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

ebenfalls abs. konv. mit konv. Majorante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} \frac{1}{k^2}$

$\Rightarrow$ Potenzreihe für $-3 \leq x \leq 3$ abs. konv.

für $x < -3$ oder $x > 3$ div.

d. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 \cdot 2^k} (x+1)^k$

$\underline{QK}$: $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(2k+1)^2 2^k}}{\frac{1}{(2(k+1)+1)^2 2^{k+1}}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+3)^2 \cdot 2^k \cdot 2}{(2k+1)^2 \cdot 2^k} = 2 \cdot \left(\lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k}(2+\frac{3}{k})}{\cancel{k}(2+\frac{1}{k})} \right)^2 = 2 \cdot 1^2 = \underline{2 = \rho}$

für $-2-1 < x < 2-1$

$-3 < x < 1$ abs. konv.

für $x < -3$ oder $x > 1$ div.

$\underline{\text{Randpunkte}}$: $\underline{x=-3}$: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 \cdot 2^k} (-3+1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \cancel{2^k}}{(2k+1)^2 \cdot \cancel{2^k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$

$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$

$|a_k| = \frac{1}{(2k+1)^2} \leq \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{k^2}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{k^2}$ konv. Majorante

$\Rightarrow$ Reihe abs. konv.

$\underline{x=1}$: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 \cdot 2^k} (\cancel{1+1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

ebenfalls abs. konv., da konv. Majorante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} \frac{1}{k^2}$

$\Rightarrow$ Potenzreihe für $-3 \leq x \leq 1$ abs. konv.

für $x < -3$ oder $x > 1$ div.