Wichtige Matrix-Normen

(b) Matrixnormen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ a_{n1} & & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Spaltensummen-Norm $\|\mathbf{A}\|_1 = \max\limits_{k=1,2,\ldots,m} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ik}|$

✚⇩

Zeilensummen-Norm $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \sum\limits_{k=1}^{m} |a_{ik}|$

✚⇦

Beispiel 2

$\|\mathbf{A}\|_1 = \max\limits_{k=1,2,\ldots,m} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ik}|$

$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \sum\limits_{k=1}^{m} |a_{ik}|$

✚⇩

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & -7 & 1 \\ 8 & -10 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

✚⇦

✚⇩ $\|\mathbf{A}\|_1 = \max\{17, 19, 9\} = 19$

✚⇦ $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\{7, 9, 21, 8\} = 21$

Bemerkung

Ein Vektor $\vec{x}$ mit der Eigenschaft $\|\vec{x}\| = 1$ heißt Einheitsvektor.

Beispiel 3

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \Rightarrow \|\vec{x}\|_\infty = \max\{|2|,|-1|,|3|,|-6|\} = 6$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_\infty} \right\|_\infty = \left\| \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 1$$

Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig

Bemerkung

Es gilt allgemein

$$\vec{x} \neq \vec{0} \quad \Rightarrow \boxed{\left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right\|} \underset{(N2)}{=} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \|\vec{x}\| = 1$$

Einheitsvektor

Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig