# 1 L'Hospital

**1. Regel** Bei $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

**2. Regel** Bei $\frac{a}{\infty}$: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Umformen bei: $0 \cdot \infty, 0^0, \infty, 1^\infty, \infty - \infty$

| Typ des Ausdrucks | Form des Ausdrucks | Umformung |
|---|---|---|
| $0-\infty, \infty-\infty$ | $f(x)-g(x)$ | $(f(x)-g(x)) \cdot \frac{f(x)+g(x)}{f(x)+g(x)}$ |
| $0 \cdot (\pm\infty)$ | $f(x) \cdot g(x)$ | $\frac{f(x)}{1/g(x)}$ |
| $0^0, 1^\infty, 0^\infty, \infty^0$ | $f(x)^{g(x)}$ | $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$ <br> $\hookrightarrow$ e-Fkt. stetig: $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = F(\lim\limits_{x\to x_0} x)$ |

# 2 Taylor

Formel:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{Taylorpolynom n-ter Ordnung (Hauptteil)}}$$

$$+ \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n \text{Restglied von Lagrange}}$$

Entwicklungspunkt $x_0$ = beliebig, aber fest aus Intervall
Zwischenstelle $\xi$ liegt zwischen x und $x_0$, kann also kleiner als x oder auch größer sein.

### 2.0.1 Fehlerabschätzung

worst case: $\xi$ zwischen $x_0$ und $x$ so wählen, dass $|R_n(x)|$ größtmöglich wird.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)| &= \left| \tfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,(x-x_0)^{n+1} \right| \\
&= \tfrac{1}{(n+1)!} \left|(x-x_09)^{n+1}\right| \left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \\
&\leq \tfrac{1}{(n+1)!} \left|(x-x_09)^{n+1}\right| M
\end{aligned}$$

Man sieht:
1. Je größer das n, dest kleiner wird der Faktor $1\frac{1}{(1-n)!}$
auf Deutsch: mit Großerem n wird die approximation besser
2. Je weiter das x von $x_0$ weg liegt, desto größer wird der Bertrag $x - x_0$, desto mehr Einfluss hat der Term auf die Genauigkeit

# 3 Reihen

**Die Summe der Glieder einer Folge (oder eines Teils der Folgenglieder) wird als Reihe bezeichnet.**

Die Folge $s_n$ nennt man die zur Folge $a_k$ gehörige unendliche Reihe. Das n-te Glied heißt n-te Partialsumme. $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ Falls die Folge $s_n$ der Partialsummen keinen Grenzwert besitzt, nennt man die Reihe **divergent**. Die Reihe heißt **konvergent**, wenn $s_n$ konvergiert.
Dann setzt man $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$
Im Falle der Konvergenz sagt man die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist **konvergent** und nennt $s$ den Grenzwert die Simme der unendlichen Reihe.

## 3.1 Geometrische Reihe

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, |q| < 1$
Für $|q| > 1$ wächst der Term $q_n + 1$ für $n \to \infty$ betragsmäßig unbeschränkt, so dass **Divergenz** der Folge $s_n$ und somit der Reihe vorliegt.

Im Fall $q = 1$ gilt für die Partialsumme $s_n = n + 1$.
Damit liegt **Divergenz** der Reihe vor.

Im Fall $|q| < 1$ strebt $q_n + 1$ gegen den Grenzwert 0 und die Reihe ist **konvergent**.

Im Fall $q = -1$ wechselt $s_n$ fortlaufend zwischen den Werten 1 und 0, d.h. es liegt **Divergenz** vor

### 3.2 harmonische Reihe

$$a_k = \frac{1}{\underbrace{k}_{>0}} \Rightarrow s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \overbrace{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}}^{harmonische Reihe}$$

Die harmonische Reihe ist **divergent**.
**Divergenzkriterium:** Falls die Folge $a_k$ **nicht** gegen Null konvergiert, ist die unendliche Reihe
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **divergent.** Notwendig für die Konvergenz einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist die Bedingung, dass die Folge $a_k$ eine Nullfolge ist, also $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

# 4 Absolute und bedingte Konvergenz von Reihen, Konvergenzkriterien

Summen und Vielfache konvergenter Reihen ergeben wieder eine konvergente Reihe.

### 4.1 bedingte/ absolute Konvergenz

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe der Beträge konvergent ist $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$
Eine konvergente Reihe, welche nicht absolut konvergent ist, heißt **bedingt konvergent**.
Eine **absolut konvergente** Reihe ist auch **(bedingt) konvergent**, die Umkehrung ist i.a. falsch.
**Majorantenkriterium:**
$\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern und es gelte $|a_k| \leq c_k$ für alle $k \geq m(fest)$
Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **absolut konvergent**. Bsp:
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+k} \Rightarrow k$ ausklammern $= \frac{k}{k(k^2+1)} = \frac{1}{k^2+1}$
Die Reihe verhält sich wie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, sollte daher konvergieren. Begründung:
Aus $k^2 + 1 \geq k^2$ folgt: $\frac{k}{\underbrace{k^3 + k}_{=|a_k}} = \frac{1}{k^2+1} \leq \frac{1}{\underbrace{k^2}_{=c_k}}$

Da nun die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+k}$

## Minorantenkriterium:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ divergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern und es gelte $a_k \geq d_k$ für alle $k \geq m(fest)$

Dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **divergent**.

Bsp:

$\sum -k = 1^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ wächst ähnlich wie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$

Da nun die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, divergiert auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ und damit auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$

$2k - 1 \leq 2k \leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2k-1}}_{a_k} \geq \underbrace{\frac{1}{2k}}_{=c_k}$

## Quotientenkriterium:

Gilt für die **Folge** $a_k$: $\lim\limits_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1$, dann ist die **Reihe**: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \leftrightarrow s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ **absolut konvergent.**

Gilt $\lim\limits_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| > 1$ ist die Reihe **divergent.**

Gilt $\lim\limits_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = 1$ kann man keine Aussage treffen.

Bsp:

Um den Konvergenztest **Quotientenkriterium** anwenden zu können, müssen wir aber noch $a_{n+1}$ bestimmen. Dies geschieht ganz einfach dadurch, dass wir alle $n$ durch $n+1$ ersetzen:

$a_n = \frac{3^n}{n^{100}} \to a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^{100}}$

Diese beiden Werte jetzt in das Quotientenkriterium einsetzen:

$\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^{100}}}{\frac{3^n}{n^{100}}}|$

Mit den Mitteln der Bruchrechnung vereinfachen wir den Term (Zur Erinnerung:
Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert multipli-

ziert):

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{3^{n+1}}{(n+1)^{100}} \cdot \frac{n^{100}}{3^n}|$$

Jetzt multiplizieren wir die beiden Brüche miteinander, wodurch nur noch ein Bruchstrich übrig bleibt:

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{3^{n+1} \cdot n^{100}}{(n+1)^{100} \cdot 3^n}|$$

Jetzt zerlegen wir $3^{n+1}$ mit Hilfe des Potenzgesetzes: $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ Dadurch können wir den Bruch mit $3^n$ kürzen:

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{\cancel{3^n} \cdot 3 \cdot n^{100}}{(n+1)^{100} \cdot \cancel{3^n}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{3 \cdot n^{100}}{(n+1)^{100}}|$$

Jetzt dividieren wir Zähler und Nenner jeweils durch $n^{100}$. Im Zähler können wir dann kürzen, im Nenner wenden wir ein Potenzgesetz an: $a^n/b^n = (a/b)^n$:

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{3 \cdot \cancel{n}^{100}}{\cancel{n}^{100}}}{\frac{(n+1)^{100}}{n^{100}}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{3}{(\frac{n+1}{n})^{100}}|$$

Den Bruch im Nenner schreiben wir auseinander, und können dann kürzen:

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{3}{(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} + \frac{1}{n})^{100}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{3}{(1 + \frac{1}{n})^{100}}|$$

Nun führen wir den Grenzwertübergang durch, d.h. wir ersetzen $n$ überall durch Unendlich:

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{3}{(1 \frac{1}{\infty})^{100}}| = |\frac{3}{(1+0)^{100}}| = |\frac{3}{1}| = 3$$

<u>Ergebnis:</u>
Das Quotientenkriterium liefert den Wert 3 und daher **divergiert** die gegebene Reihe.

**Wurzelkriterium:**

Gilt für die Folge $a_k$ : $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, dann ist die **Reihe** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **absolut konvergent.**

Für $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ gilt **divergenz**

Für $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$ kann man keine Aussage treffen.

Bsp:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$

1.Betrag:

$|a_n| = |2^{-n}| = 2^{-n}$

2.Wurzel nehmen:

$\sqrt[n]{2^{-n}} = (2^{-n})^{\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{n}{n}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

3.Grenzwert berechnen:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

**Dieser Wert ist kleiner als 1 also konvergiert die Reihe.**

**Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen:**

Ist $a_k \geq 0$ eine monoton fallende Folge mit Folge der Eigenschaft $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, dann ist die **alternierende Reihe**

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$

bzw

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - ...$

**konvergent.**

Bsp:

Die alternierende harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ..$ erfüllt die Bedingungen des Leibniz-Kriteriums, denn

$a_k = \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k+1} = a_{k+1}$und $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$