§23. Absolute und bedingte Konvergenz von Reihen, Konvergenzkriterien

Satz 1

Summen und Vielfache konvergenter Reihen ergeben wieder eine konvergente Reihe:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent

$$\Longrightarrow \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha a_k + \beta b_k \right)$$

konvergent

Beispiel 1

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergent

$$\Rightarrow 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} + 5\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{4}{k!} + 5\left(\frac{-1}{3} \right)^k \right]$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3} \right)^k$ konvergent

konvergent

Definition 1

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn

die Reihe der Beträge konvergent $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Eine konvergente Reihe, welche nicht absolut konvergent ist, heißt bedingt konvergent.

Eine absolut konvergente Reihe ist auch (bedingt) konvergent, die Umkehrung ist i.a. falsch.

Konvergenzuntersuchungen sind bei Reihen schwieriger als bei Folge. Im allgemeinen untersucht man eine Reihe zuerst auf absolute Konvergenz. Dazu benutzt man sogenannte Konvergenz- oder Divergenzkriterien.

Bei Reihen mit nichtnegativen Gliedern $a_k \geq 0$ ist die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

monoton wachsend. Die Reihe ist genau dann konvergent, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist (Monotoniekriterium für Folgen).

Satz 2 Majorantenkriterium

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern

und es gelte $|a_k| \le c_k$ für alle $k \ge m$ (m fest)

Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Satz 3 Minorantenkriterium

$\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ divergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern

und es gelte $a_k \ge d_k$ für alle $k \ge m$ (m fest)

Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Beispiel 2

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^3+2k}{k^5+3k^3+1} \qquad \Rightarrow a_k = (-1)^k \frac{k^3+2k}{k^5+3k^3+1}$$

$$\Rightarrow |a_k| = \frac{k^3+2k}{k^5+3k^3+\cancel{1}}$$

Bruch vergrößern durch Nenner verkleinern (1 weglassen, d.h. durch 0 ersetzen)

$$\le \frac{k^3+2k}{k^5+3k^3} \le \frac{k^3+2k}{k^2\left(k^3+3k\right)}$$

Bruch vergrößern durch Zähler vergrößern

$$\le \frac{k^3+3k}{k^2\left(k^3+3k\right)}$$

Kürzen

$$= \frac{1}{k^2} = c_k \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$ konvergente Majorante

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^3 + 2k}{k^5 + 3k^3 + 1}$$

ist nach dem Majorantenkriterium absolut konvergent.