4. Aufgabe

Für welche reellen Zahlen x konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^{k+1}} x^k \text{ ?}$$

Lösung

$$a_k = \frac{2^k}{k^{k+1}}, k = 1, 2, 3, \dots, x_0 = 0$$

Bestimmung des Konvergenzradius mit dem Wurzelkriterium

$$\rho = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{2^k}{k^{k+1}}\right|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{|k^{k+1}|}}{\sqrt[k]{|2^k|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k \cdot k^k}}{\sqrt[k]{2^k}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k \cdot k^k}}{\sqrt[k]{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k^k}\,\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k]{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k \cdot \sqrt[k]{k}}{2} = \lim_{k\to\infty} \frac{k \cdot 1}{2} = \infty$$

Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^{k+1}} x^k$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent

5. Aufgabe

Für welche reellen Zahlen x konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}(x-3)^k \,?$$

Lösung

$$a_k = \frac{1}{k^2+1}, x_0 = 3$$

Bestimmung des Konvergenzradius mit dem Quotientenkriterium

$$a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2+1}$$

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k^2+1}\,\frac{(k+1)^2+1}{1}\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^2+2k+1+1}{k^2+1}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1+\frac{2}{k}+\frac{2}{k^2}}{1+\frac{1}{k^2}}\right| = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0, \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$$

Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}(x-3)^k \text{ ist für } |x-3|<1 \text{ absolut konvergent}$$

Untersuchung der Randpunkte $|x-3| = 1 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$

$$x = 2 \quad \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}(2-3)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \boxed{\frac{1}{k^2+1}(-1)^k} \qquad \boxed{a_k = \frac{(-1)^k}{k^2+1}}$$

$$x = 4 \quad \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}(4-3)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \boxed{\frac{1}{k^2+1}} \qquad \boxed{b_k = \frac{1}{k^2+1}}$$

$$\Rightarrow |a_k| = |b_k| = \frac{1}{k^2+1} < \frac{1}{k^2} = c_k \text{ konvergente Majorante}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}(x-3)^k \text{ absolut konvergent für } |x-3| \le 1$$