1 L'Hospital

1. Regel Bei $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

2. Regel Bei $\frac{a}{\infty}$: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Umformen bei: $0 \cdot \infty, 0^0, \infty, 1^\infty, \infty - \infty$

Typ des Ausdrucks	Form des Ausdrucks	Umformung
$0 - \infty, \infty - \infty$	$f(x) - g(x)$	$(f(x) - g(x)) \cdot \frac{f(x)+g(x)}{f(x)+g(x)}$
$0 \cdot (\pm\infty)$	$f(x) \cdot g(x)$	$\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$
$0^0, 1^\infty, 0^\infty, \infty^0$	$f(x)^{g(x)}$	$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$ ↳ e-Fkt. stetig: $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = F(\lim\limits_{x\to x_0} x)$

2 Taylor

Formel:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{Taylorpolynom n-ter Ordnung (Hauptteil)}}$$

$$+ \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n \text{Restglied von Lagrange}}$$

Entwicklungspunkt x_0 = beliebig, aber fest aus Intervall
Zwischenstelle ξ liegt zwischen x und x_0, kann also kleiner als x oder auch größer sein.

2.0.1 Fehlerabschätzung

worst case: ξ zwischen x_0 und x so wählen, dass $|R_n(x)|$ größtmöglich wird.

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)| &= \left| \tfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1} \right| \\ &= \tfrac{1}{(n+1)!} \left| (x - x_09)^{n+1} \right| \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \\ &\leq \tfrac{1}{(n+1)!} \left| (x - x_09)^{n+1} \right| M \end{aligned}$$

Man sieht:
1. Je größer das n, dest kleiner wird der Faktor $1\frac{1}{(1-n)!}$
auf Deutsch: mit Großerem n wird die approximation besser
2. Je weiter das x von x_0 weg liegt, desto größer wird der Bertrag $x - x_0$, desto mehr Einfluss hat der Term auf die Genauigkeit

3 Reihen

Die Summe der Glieder einer Folge (oder eines Teils der Folgenglieder) wird als Reihe bezeichnet.

Die Folge s_n nennt man die zur Folge a_k gehörige unendliche Reihe. Das n-te Glied heißt n-te Partialsumme. $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ Falls die Folge s_n der Partialsummen keinen Grenzwert besitzt, nennt man die Reihe **divergent**. Die Reihe heißt **konvergent**, wenn s_n konvergiert.
Dann setzt man $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
Im Falle der Konvergenz sagt man die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist **konvergent** und nennt s den Grenzwert die Simme der unendlichen Reihe.

3.1 Geometrische Reihe

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, |q| < 1$
Für $|q| > 1$ wächst der Term $q_n + 1$ für $n \to \infty$ betragsmäßig unbeschränkt, so dass **Divergenz** der Folge s_n und somit der Reihe vorliegt.

Im Fall $q = 1$ gilt für die Partialsumme $s_n = n + 1$.
Damit liegt **Divergenz** der Reihe vor.

Im Fall $|q| < 1$ strebt $q_n + 1$ gegen den Grenzwert 0 und die Reihe ist **konvergent**.

Im Fall $q = -1$ wechselt s_n fortlaufend zwischen den Werten 1 und 0, d.h. es liegt **Divergenz** vor

3.2 harmonische Reihe

$$a_k = \underbrace{\frac{1}{k}}_{>0} \Rightarrow s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \overbrace{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}}^{harmonischeReihe}$$

Die harmonische Reihe ist **divergent**.
<u>**Divergenzkriterium:**</u> Falls die Folge a_k **nicht** gegen Null konvergiert, ist die unendliche Reihe
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **divergent.** Notwendig für die Konvergenz einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist die Bedingung, dass die Folge a_k eine <u>Nullfolge</u> ist, also $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

4 Absolute und bedingte Konvergenz von Reihen, Konvergenzkriterien

Summen und Vielfache konvergenter Reihen ergeben wieder eine konvergente Reihe.

4.1 bedingte/ absolute Konvergenz

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe der Beträge konvergent ist $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$
Eine konvergente Reihe, welche nicht absolut konvergent ist, heißt **bedingt konvergent**.
Eine **absolut konvergente** Reihe ist auch **(bedingt) konvergent**, die Umkehrung ist i.a. falsch.
<u>**Majorantenkriterium:**</u>
$\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern und es gelte $|a_k| \leq c_k$ für alle $k \geq m(fest)$
Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **absolut konvergent**. Bsp:
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+k} \Rightarrow k$ ausklammern $= \frac{k}{k(k^2+1)} = \frac{1}{k^2+1}$
Die Reihe verhält sich wie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, sollte daher konvergieren. Begründung:
Aus $k^2 + 1 \geq k^2$ folgt: $\underbrace{\frac{k}{k^3+k}}_{=|a_k} = \frac{1}{k^2+1} \leq \underbrace{\frac{1}{k^2}}_{=c_k}$

Da nun die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+k}$

Minorantenkriterium:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ divergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern und es gelte $a_k \geq d_k$ für alle $k \geq m(fest)$

Dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **divergent**.

Bsp:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ wächst ähnlich wie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$

Da nun die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, divergiert auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ und damit auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$

$2k-1 \leq 2k \leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2k-1}}_{a_k} \geq \underbrace{\frac{1}{2k}}_{=c_k}$

Quotientenkriterium:

Gilt für die **Folge** a_k: $\lim\limits_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1$, dann ist die **Reihe**: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \leftrightarrow s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ **absolut konvergent.**

Gilt $\lim\limits_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| > 1$ ist die Reihe **divergent.**

Gilt $\lim\limits_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = 1$ kann man keine Aussage treffen.

Bsp:

Um den Konvergenztest **Quotientenkriterium** anwenden zu können, müssen wir aber noch a_{n+1} bestimmen. Dies geschieht ganz einfach dadurch, dass wir alle n durch $n+1$ ersetzen:

$a_n = \frac{3^n}{n^{100}} \to a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^{100}}$

Diese beiden Werte jetzt in das Quotientenkriterium einsetzen:

$\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^{100}}}{\frac{3^n}{n^{100}}}|$

Mit den Mitteln der Bruchrechnung vereinfachen wir den Term (Zur Erinnerung:

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert multipliziert):

$\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{3^{n+1}}{(n+1)^{100}} \cdot \frac{n^{100}}{3^n}|$

Jetzt multiplizieren wir die beiden Brüche miteinander, wodurch nur noch ein Bruchstrich übrig bleibt:

$\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{3^{n+1} \cdot n^{100}}{(n+1)^{100} \cdot 3^n}|$

Jetzt zerlegen wir 3^{n+1} mit Hilfe des Potenzgesetzes: $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ Dadurch können wir den Bruch mit 3^n kürzen:

$\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{\cancel{3^n} \cdot 3 \cdot n^{100}}{(n+1)^{100} \cdot \cancel{3^n}}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{3 \cdot n^{100}}{(n+1)^{100}}|$

Jetzt dividieren wir Zähler und Nenner jeweils durch n^{100}. Im Zähler können wir dann kürzen, im Nenner wenden wir ein Potenzgesetz an: $a^n/b^n = (a/b)^n$:

$\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{\frac{3 \cdot \cancel{n}^{100}}{\cancel{n}^{100}}}{\frac{(n+1)^{100}}{n^{100}}}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{3}{(\frac{n+1}{n})^{100}}|$

Den Bruch im Nenner schreiben wir auseinander, und können dann kürzen:
$\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{3}{(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} + \frac{1}{n})^{100}}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{3}{(1+\frac{1}{n})^{100}}|$

Nun führen wir den Grenzwertübergang durch, d.h. wir ersetzen n überall durch Unendlich:

$\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{3}{(1\frac{1}{\infty})^{100}}| = |\frac{3}{(1+0)^{100}}| = |\frac{3}{1}| = 3$

Ergebnis:
Das Quotientenkriterium liefert den Wert 3 und daher **divergiert** die gegebene Reihe.

Wurzelkriterium:

Gilt für die Folge a_k : $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, dann ist die **Reihe** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **absolut konvergent.**

Für $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ gilt **divergenz**

Für $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$ kann man keine Aussage treffen.

Bsp:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$

1.Betrag:

$|a_n| = |2^{-n}| = 2^{-n}$

2.Wurzel nehmen:

$\sqrt[n]{2^{-n}} = (2^{-n})^{\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{n}{n}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

3.Grenzwert berechnen:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Dieser Wert ist kleiner als 1 also konvergiert die Reihe.

Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen:

Ist $a_k \geq 0$ eine monoton fallende Folge mit Folge der Eigenschaft $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, dann ist die **alternierende Reihe**

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$

bzw

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - ...$

konvergent.

Bsp:

Die alternierende harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ..$

erfüllt die Bedingungen des Leibniz-Kriteriums, denn

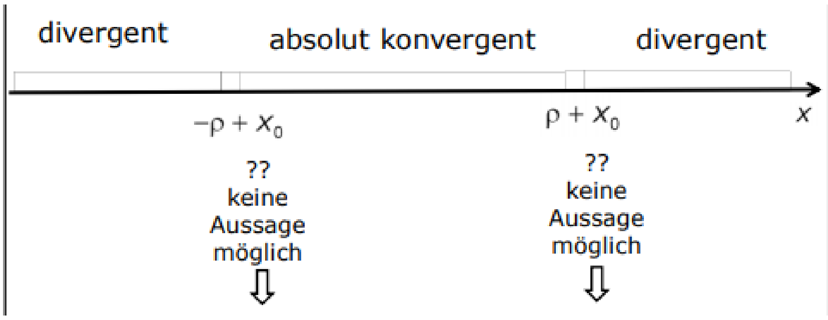
$a_k = \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k+1} = a_{k+1}$und $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$

5 Potenzreihen

Eine (reelle) Potenzreihe mit dem Mittelpunkt $x = 0$ ist eine **Reihe** der Form:
$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$
Eine (reelle) Potenzreihe mit dem Mittelpunkt oder Entwicklungspunkt $x = x_0$ ist eine Reihe der Form:
$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ...$
a_k ist eine gegebene (reelle) Zahlenfolge, der Mittelpunkt x_0 ist eine reelle Konstante und x ist eine reelle Variable.
Bsp:
$a_k = 1, x_0 = 2 \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (x - 2)^k, x \in \mathbb{R}$
$a_k = \frac{1}{k!}, x_0 = 0 \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, x \in \mathbb{R}$
$a_k = \frac{1}{k}, x_0 = 3 \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (x + 1)^k, x \in \mathbb{R}$
Bsp2:
$a_k = 1; k = 0, 1, 2, ..; x_0 = 0 \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + ... + x^k + ...$
= Geometrische Reihe
Sie konvergiert für $|x| < 1$ gegen $\frac{1}{1-x}$
Diese Konvergenz kann man wie folgt ausdrücken: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, -1 < x < 1$
Für $|x| \geq 1$ ist die geometrische Reihe **divergent.**

5.1 Konvergenzradius

Jede Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ besitzt einen eindeutig bestimmten
Konvergenzradius $0 \leq p \leq \infty$ mit der Eigenschaft:
Die Potenzreihe ist für alle reellen Zahlen x mit:
$|x - x_0| < p$ **absolut konvergent**
$|x - x_0| > p$ **divergent**
$|x - x_0| = p$ **keine Aussage**
$|x - x_0| < p \leftrightarrow -p < x - x_0 < p \leftrightarrow -p + x_0 < x < p + x_0$



Konvergenzuntersuchung für die **Randpunkte** $-p + x_0$ und $p + x_0$ muss separat durchgeführt werden
Dazu verwendet man z. B. das Majoranten-/Minorantenkriterium

Zur Bestimmung des Konvergenzradius behandelt man Potenzreihen am besten wie gewöhnliche Reihen.

Anwendung des Quotientenkriteriums $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{A_{k+1}}{A_k}\right|$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\cdot\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(x-x_0)^k}\right| = |(x-x_0)|\cdot\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \begin{cases} <1 & \text{KONVERGENZ} \\ >1 & \text{DIVERGENZ} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x-x_0| \begin{cases} < \dfrac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|} & \text{KONVERGENZ} \Longrightarrow \textbf{Konvergenzradius } \rho \\ > \dfrac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|} & \text{DIVERGENZ} \end{cases}$$

$$\boxed{\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|}$$

Anwendung des Wurzelkriteriums $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|A_k|}$

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|a_k\cdot(x-x_0)^k\right|} = |(x-x_0)|\cdot\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} \begin{cases} <1 & \text{KONVERGENZ} \\ >1 & \text{DIVERGENZ} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x-x_0| \begin{cases} < \dfrac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}} & \text{KONVERGENZ} \Longrightarrow \textbf{Konvergenzradius } \rho \\ > \dfrac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}} & \text{DIVERGENZ} \end{cases}$$

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}}}$$

Egal, ob der Konvergenzradius mit dem Quotienten- oder mit dem Wurzelkriterium bestimmt wird, beide Kriterien liefern den gleichen Wert.

Bsp:
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ mit $a_k = \frac{1}{k}$,$x_0 = 0$,$a_{k+1} = \frac{1}{k+1}$
$p = \lim\limits_{k\to\infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}| = \lim\limits_{k\to\infty} |\frac{1}{k}\frac{k+1}{1}| = \lim\limits_{k\to\infty} |1 + \frac{1}{k}| = 1$
Die Potenzreihe ist für alle reellen Zahlen x mit $|x| < p = 1$ **absolut konvergent**
Für $x = 1$ gilt: harmonische Reihe $\rightarrow$ **divergent**
Für $x = -1$ gilt: alternierende harmonische Reihe $\rightarrow$ **konvergent nach Leibniz**

5.2 Stetigkeitssatz

Hat die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ den **Konvergenzradius** p, so ist die Potenzreihe für $|x - x_0| < p$ stetig.

Satz3:
Besitzen die beiden Potenzreihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ die Konvergenzradien p_a bzw. p_b, dann dürfen die Potenzreihen im Inneren des kleineren Konvergenzintervalls
$p = min\{p_a, p_b\}$
gliedweise addiert bzw. subtrahiert und gliedweise mit einer Zahl α multipliziert werden.
Die daraus entstehenden Potenzreihen:
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)x^k, \alpha \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha a_k x^k$
haben ebenfalls den Konvergenzradius $p > 0$
Das gilt auch für die **Ableitung**