Beispiel 2

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3$$

Taylorpolynom zweiter Ordnung um x_0=1. Restglied $R_2(x)$ mit Abschätzung.

$$f(x) = \frac{1}{x^2},\ x_0 = 1, x \geq 1, n = 2 \qquad \rightarrow f(1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3} \qquad \rightarrow f'(1) = -2$$

$$f''(x) = \frac{6}{x^4} \qquad \rightarrow f''(1) = 6$$

$$f'''(x) = -\frac{24}{x^5}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = 1 + (-2)\frac{(x-1)}{1!} + 6\frac{(x-1)^2}{2!} + R_2$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = \underbrace{1 + (-2)\frac{(x-1)}{1!} + 6\frac{(x-1)^2}{2!}}_{1-2(x-1)+3(x-1)^2} + R_2$$

mit dem Restglied

$$R_2 = \frac{1}{3!}\cdot\frac{-24}{\xi^5}(x-1)^3 = -\frac{4}{\xi^5}(x-1)^3,\ 1 \leq \xi \leq x$$

Abschätzung des Restgliedes

$$|R_2| = \left|-\frac{4}{\xi^5}(x-1)^3\right| \underset{1\leq\xi\leq x}{=} \left|-\frac{4}{\xi^5}\right| \cdot \left|(x-1)^3\right| \underset{1\leq\xi\leq x}{\leq} 4\cdot\left|(x-1)^3\right|$$