Satz 1

Ist **A** eine $n \times n$ Matrix dann sind die Eigenwerte der Matrix **A** genau die Nullstellen der charakteristischen Gleichung

$$\det\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}\right) = 0$$

Das Polynom n-ten Grades

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \ldots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + (-1)^n \lambda^n$$

heißt charakteristisches Polynom von **A** und besitzt, unter $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ Berücksichtigung der Vielfachheiten, n komplexe Nullstellen. Die zugehörigen Eigenvektoren sind die **nichttrivialen** Lösungen des homogenen LGS

$$\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}\right)\vec{x} = \vec{0}$$

Eigenvektoren

$$\left[\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -1:$

$$\left[\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ \cancel{-3} & \cancel{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \cancel{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, t \neq 0$$

$\lambda_2 = 2:$

$$\left[\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ \cancel{-3} & \cancel{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \cancel{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, t \neq 0$$

Satz 2

Ist **A** eine $n \times n$ Matrix mit den – n nicht notwendig verschiedenen (!) - Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

dann gilt

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

$$spur(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

Merke Man kann an den Eigenwerten ablesen, ob eine Matrix **A** invertierbar ist:

A invertierbar(regulär) $\Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0 \Leftrightarrow \forall i = 1, 2, \ldots, n : \lambda_i \neq 0$

A nicht invertierbar(singulär) $\Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda_i = 0$

Satz 3

Für eine invertierbare Matrix **A** gilt:

Ist λ Eigenwert von **A**, dann ist λ^{-1} Eigenwert von $\mathbf{A}^{-1}$

$\left(\lambda, \vec{x}\right)$ Eigenpaar von $\mathbf{A} \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda}, \vec{x}\right)$ Eigenpaar von $\mathbf{A}^{-1}$