$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_k \geq a_{k+1} \geq \cdots$

**Satz 5** Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen

(G. W. Leibniz 1646-1716)

Ist $a_k \geq 0$ eine monoton fallende Folge mit Folge der Eigenschaft

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

dann ist die alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + - \ldots$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - + \ldots$$

konvergent.



**Beispiel 7**

Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \qquad \to a_k = \frac{1}{k} > 0$$

erfüllt die Bedingungen des Leibniz-Kriteriums, denn

$$a_k = \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k+1} = a_{k+1} \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

**Wichtig** ⚠

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$$ konvergent

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$ divergent

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$$

bedingt konvergent

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2}$$ konvergent

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

konvergent

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2}$$

absolut konvergent