THEMA: Taylorsche Formel

Zusammenfassung

- **Zweck**: beliebige Funktion als Polynom $\left(P_n(x) = a_0 + a_1 x^1 + \dots a_n x^n\right)$ mit Fehler darstellen
  → approximieren

  ⇒ mit Polynomen einfach rechnen möglich

- wenn f in Intervall $I\,[a,b]$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar
  $(= f', f'', \dots f^{(n+1)}$ existieren und alle stetig$)$

dann gilt $\forall x \in I$ die Taylorsche Formel:

$$f(x) = \boxed{T(x) = P_n(x) + R_n(x)}$$ mit Ordnung $n \in \mathbb{N}_0$, Entwicklungspunkt $x_0 \in I$ beliebig aber fest gewählt

mit Polynom $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Restglied von Lagrange $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ mit ξ zwischen x_0 und $x \in I$

- **Fehlerabschätzung des Restglieds:**

$|R_n(x)| \left(= |f(x) - P_n(x)|\right) = \dots \leq \dots$ → Ergebnis in Abhängigkeit von x

→ ξ raus durch worst-case-Abschätzung, d.h. ξ zwischen x_0 und x so wählen, dass $|R_n(x)|$ größtmöglich wird.

⇒ dadurch maximaler (bestimmt) Fehler, der bei Approximation von $f(x)$ durch $P_n(x)$

falls bestimmtes x gegeben: abgeschätztes $R_n(x_t) \gtrless 0$ → tatsächlicher Wert von $f(x)$ an der bestimmten Stelle x_t ist kleiner / größer als der mit $P_n(x_t)$ berechnete
↳ „x_t"

⇒ $f(x_t) \in$ Intervall $[P_n(x_t) - |R_n(x_t)|, P_n(x_t)]$ /
$[P_n(x_t), P_n(x_t) + R_n(x_t)]$

Aufgaben

L'Hospital

Bestimme den Funktionenlimes

① $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} =$

② $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^2} =$

③ $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} =$

④ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x =$

⑤ $\lim\limits_{x \to 0} (1+2x)^{\tan x} =$

Taylorsche Formel

Bestimme für die Fkt. f und den Entwicklungspunkt x_0 das Taylorpolynom n-ter Ordnung und gebe das zugehörige Restglied an.

⑥ $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x_0 = 1$, $n = 2$, $x \in [1, \infty)$

+ Restgliedabschätzung durchführen

+ Berechne den Wert des Taylorpolynoms $T(x_t)$ an der Stelle $x_t = 9$. Wie gut ist die Näherung $T(x_t)$ für $\sqrt[4]{9}$? In welchem Intervall liegt der tatsächliche Wert von $\sqrt[4]{9}$?

⑦ $f(x) = \cos^3(x)$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $n = 1$, $x \in [0, \pi]$

+ Restgliedabschätzung durchführen

⑧ $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = \frac{1}{4}$, $n = 2$, $x \in [0, 1]$