Aufgaben 4

16. Aufgabe

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -19 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$\vec{u}$ ... orthogonale Projektion von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$
$\vec{v}$ ... Lot von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$

$$\vec{u} = \left\langle \vec{a}, \frac{\vec{b}}{\| \vec{b} \|} \right\rangle \cdot \frac{\vec{b}}{\| \vec{b} \|}$$

$$\| \vec{b} \| = |-4| + |3| + |12| = 4 + 3 + 12 = 19$$

$$\frac{\vec{b}}{\| \vec{b} \|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}}{19} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{19} \\ \frac{3}{19} \\ \frac{12}{19} \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \left\langle \begin{pmatrix} -19 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4}{19} \\ \frac{3}{19} \\ \frac{12}{19} \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{19} \\ \frac{3}{19} \\ \frac{12}{19} \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \left(-19 \cdot \left(-\frac{4}{19} \right) + 3 \cdot \frac{3}{19} + 7 \cdot \frac{12}{19} \right) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{19} \\ \frac{3}{19} \\ \frac{12}{19} \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \left(\frac{169}{19} \right) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{19} \\ \frac{3}{19} \\ \frac{12}{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{19} \cdot \frac{169}{19} \\ \frac{3}{19} \cdot \frac{169}{19} \\ \frac{12}{19} \cdot \frac{169}{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{676}{361} \\ \frac{507}{361} \\ \frac{2028}{361} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \vec{a} - \vec{u}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -19 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{676}{361} \\ \frac{507}{361} \\ \frac{2028}{361} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 - \frac{676}{361} \\ 3 - \frac{507}{361} \\ 7 - \frac{2028}{361} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7535}{361} \\ \frac{576}{361} \\ \frac{499}{361} \end{pmatrix}$$

17. Aufgabe

$$U = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \vec{u} \perp \vec{x} \wedge \vec{u} \perp \vec{y} \right\}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

18. Aufgabe

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\mathbf{A}\right) = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{2+j} \cdot a_{2\,j} \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\,j}\right)$$

$$= (-1)^3 \cdot a_{2\,1} \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\,1}\right) + (-1)^4 \cdot a_{2\,2} \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\,2}\right)$$

$$+ (-1)^5 \cdot a_{2\,3} \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\,3}\right) + (-1)^6 \cdot a_{2\,4} \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\,4}\right)$$

$$= -1 \cdot 2 \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\,1}\right) + 0 \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\,2}\right)$$

$$-1 \cdot 3 \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\,3}\right) + 0 \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\,4}\right)$$

$$= -2 \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\,1}\right) - 3 \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\,3}\right)$$

$$= -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 9 & -3 & -6 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & -3 & -10 \\ -7 & 1 & 10 \\ -8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

19. Aufgabe

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & s \\ s & 0 & s & 3s \\ 1 & 3s & 0 & 4s \\ s & 3 & 0 & 5s \end{pmatrix}$$

a)

b) $s = 2$

$\mathbf{A}^{-1} =$

20. Aufgabe

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ tx_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$