3. Aufgabe

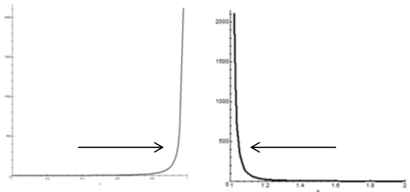
Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. seinen Wert.

Lösung uneigentliches Integral 2.Art

1 Unstetigkeitsstelle von $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$



unbeschränkt für $x \to 1$

f stetig in $[0,1) \cup (1,2]$

Integrationsbereich aufsplitten!

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

2 Stammfunktion von f bestimmen

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = -\frac{1}{x-1} + C$$

3 Bestimmte Integrale

$$0 < \beta < 1: \int_0^\beta \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^\beta = -\frac{1}{\beta-1} - \left(-\frac{1}{0-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\beta-1} - 1$$

$$1 < \alpha < 2: \int_\alpha^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x-1}\right]_\alpha^2 = \left(-\frac{1}{2-1}\right) - \left(-\frac{1}{\alpha-1}\right)$$

$$= -1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

④ Grenzwerte

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{\substack{\beta\to 1,\\ 0<\beta<1}} \int_0^\beta \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{\substack{\beta\to 1,\\ 0<\beta<1}} \Bigg(-\overbrace{\boxed{\frac{1}{\beta-1}}}^{<0}\Bigg)-1 \rightarrow -\infty$$

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{\substack{\alpha\to 1,\\ 1<\alpha<2}} \int_\alpha^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = -1 + \lim_{\substack{\alpha\to 1,\\ 1<\alpha<2}} \Bigg(\overbrace{\boxed{\frac{1}{\alpha-1}}}^{>0}\Bigg) \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ existiert nicht.