Tutorium 10

THEMA: Fortsetzung Determinanten

Zusammenfassung

- **adjunkte Matrix** $\tilde{A} = adj(A) = \left[\left((-1)^{i+j} \det(A_{i,j})\right)_{i,j=1,\dots n}\right]$

$$= \begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{12}| & \dots & |A_{1n}| \\ -|A_{21}| & |A_{22}| & - & \vdots \\ \vdots & - & & \\ |A_{n1}| & \dots & & |A_{nn}| \end{pmatrix}$$

Vorzeichen: Schachbrettmuster

$$adj(A)^T \cdot A = A \cdot adj(A)^T = \det(A) \cdot E$$

- **Inversenformel** (A^{-1} existiert $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)^T$$

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

2x2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, regulär

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- **Determinanten-Multiplikationssatz** (A, B $n \times n$-Matrizen)

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(B) \cdot \det(A) = \det(B \cdot A)$$

- $spur(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

- A regulär
  - $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
  - $\Leftrightarrow$ A invertierbar / A^{-1} existiert
  - $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar
  - $\Leftrightarrow$ rang$(A) = n$ Anzahl Unbekannte

A singulär
  - $\Leftrightarrow \det(A) = 0$
  - $\Leftrightarrow A^{-1}$ existiert nicht
  - $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$
    - rang(A) = rang$(A|\vec{b})$ $\Leftrightarrow$ mehrdeutig lösbar
    - rang$(A) <$ rang$(A|\vec{b})$ $\Leftrightarrow$ unlösbar
  - $\Leftrightarrow$ rang$(A) < n$

rang(A) = Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektor = Anzahl lin. unabh. Spaltenvektoren

- **Cramersche Regel**

A regulär $\rightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar

$$\Rightarrow \text{Lösung } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ mit } x_j = \frac{\det(A^{(j)})}{\det(A)}, \; j = 1, 2, \dots n$$

mit $A^{(j)} \hat{=} A$ mit j-ter Spalte durch $\vec{b}$ ersetzt

Aufgaben

① Berechne die adjunkte Matrix von A. Existiert A^{-1}? Falls ja, berechne sie.

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4\\2&0&1\\3&1&2\end{pmatrix}$$

② Falls möglich, berechne A^{-1} bzw. B^{-1}

a. $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&2&-1/2\\4&3&2\end{pmatrix}$

b. $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&3&4\\3&0&2\end{pmatrix}$

③ Berechne $\det(A^{-1})$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&1&0&1\\0&-1&1&0\\0&0&3&0\end{pmatrix}$$

④ Die Determinante von A ist -220. Berechne A^{-1}.

$$A=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\-2&4&3&1\\4&1&4&2\\6&3&1&3\end{pmatrix}$$

⑤ Berechne $\det(A\cdot B)$, einmal mit A aus ① und B aus ②b.,
dann mit A aus ②a. und B aus ②b.,
dann mit A aus ④ und B aus ②b..

⑥ Berechne $\det(A^4)$ mit A aus ①.

⑦ Bestimme, falls möglich, die Lösung des LGS mit der Cramerschen Regel.

a. $\begin{pmatrix}2&8&4\\2&5&1\\4&10&-1\end{pmatrix}\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

b.
$$\begin{aligned}x_1+3x_2+4x_3&=0\\2x_1+x_3&=0\\3x_1+x_2+2x_3&=1\end{aligned}$$

⑧ Untersuche in Abhängigkeit des reellen Parameters t nur mit Hilfe von Determinanten die Lösbarkeit des LGS.

a. Bestimme für $t=2$ die Lösung mit der Cramerschen Regel

$$\begin{aligned}2x_1-x_2+x_3&=1\\-x_1+3x_2-4x_3&=2\\3x_1+tx_2-x_3&=3\end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned}2x_1+3x_2+x_3&=1\\-x_1+x_2+tx_3&=2\\4x_1-x_2+2x_3&=3\end{aligned}$$

⑨ Entscheide mit Determinanten als Hilfe, ob durch die Punkte $P_1(2,0)$, $P_2=(3,-1)$ und $P_3=(1,4)$ ein Kreis definiert ist.