Die Fläche $A(t)$ unter dem Graphen von f über dem Intervall $[a, t]$ ist eine differenzierbare Funktion und es ist $A'(t) = f(t)$

Die Ableitung der Flächen-Funktion $A(t)$ ist gleich der „Höhen"-Funktion der Kurve $f(t)$, und die Flächenfunktion $A(t)$ ist deshalb eine Stammfunktion von $f(t)$.

Wir führen jetzt x als freie Variable ein. $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$. Dann ist

$$A(x) = F(x) + \underbrace{C}_{\text{Konstante}}$$

$$A(a) = 0 \Rightarrow 0 = A(a) = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$$

$$A(x) = F(x) - F(a),\ F'(x) = f(x) \qquad A(b) = F(b) - F(a)$$

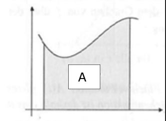
Ist $G(x)$ eine andere Stammfunktion von $f(x) \Rightarrow G(x) = F(x) + K$

$$G(x) - G(a) = F(x) + K - (F(a) + K) = F(x) - F(a)$$

Bemerkung 1

Das bestimmte Integral hängt nicht von einer speziellen Stammfunktion von f ab.

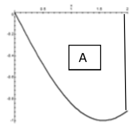
Falls $f(x) \geq 0$ über $[a,b]$, dann gilt:



$\int_a^b f(x)\,dx$ ist die Fläche unterhalb des Graphen von f über $[a,b]$.

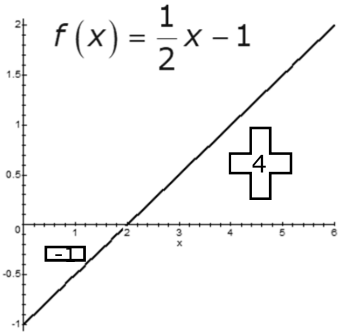
Ist f auf $[a,b]$, definiert und ist $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [a,b]$, dann schließen der Graph von f, die x-Achse und die Geraden $x=a$ und $x=b$ nach wie vor eine Fläche ein. Diese Fläche ist

$$-\int_a^b f(x)\,dx$$



Mit einem **Minus-Zeichen** vor dem Integral, da die Fläche einer Region positiv (oder Null) sein muss, während das bestimmte Integral negativ ist.

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 1$$



$\int_0^6 f(x)\,dx$ Flächenbilanz

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^2 - x$$

$$\int_0^6 f(x)\,dx = F(6) - F(0) = 9 - 6 = 3$$

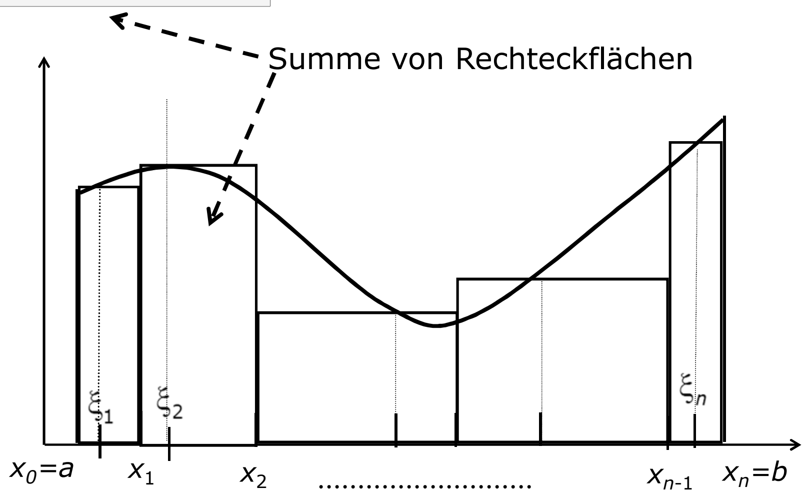
27.3 Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

In der Mathematik werden mehrere andere Arten eines Integrals. Für stetige Funktionen ergeben sie alle dasselbe Resultat wie das Newton-Leibniz-Integral. Das Riemann-Integral basiert auf der Ausschöpfungsmethode.

Näherung für Fläche A:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Riemannsche Zwischensumme



$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\,dx$$

<u>Satz 1</u> (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)

f im Intervall [a,b] stetige Funktion

F Stammfunktion zu *f*

Dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

und die Funktion *f* heißt im Intervall [a,b] integrierbar.

Stetige Funktionen sind integrierbar.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Jede im Intervall [a,b] stetige Funktion *f* besitzt eine Gegenableitung ist also im Intervall [a,b] integrierbar. Es gibt aber Integrale, die „unlösbar“ sind, in dem Sinn dass man die Stammfunktion (Gegenableitung) nicht explizit angeben kann:

$$\int_0^2 \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}\,dx,$$

Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig

Beachte

bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx \longrightarrow \text{Zahl}$$

$$\int_3^{12} x^2 dx = 567$$

unbestimmtes Integral

$$\int f(x)\,dx \longrightarrow \text{Funktionen-schar}$$

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Obere Integrationsgrenze

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \int_a^b f(y)\,dy$$

Integrand

Untere Integrationsgrenze

Integrationsvariable