Prof. Dr. habil.
H.-J. Dobner

Mathematik für Informatiker (MfI) II

Seminar KW 22

Thema:

Norm, Skalarprodukt

$$\| \ \| : V \to [0,\infty), \vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|$$

(N1) $\forall \vec{x} \quad \|\vec{x}\| \geq 0$ und $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

(N2) $\forall \vec{x}, \lambda \in \mathbb{K} \ \|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$

(N3) $\forall \vec{x}, \vec{y} \ \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

1. Aufgabe

Skizzieren Sie im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$, die Menge (Kreis um den Ursprung mit Radius Eins)

$$K_1(0) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \ \|\vec{x}\| = 1 \right\}$$

im Fall der Normen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_2|$$

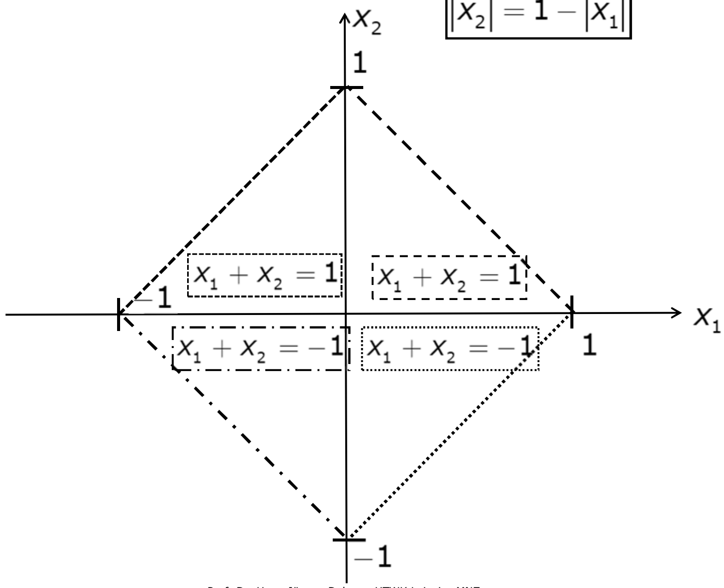
$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

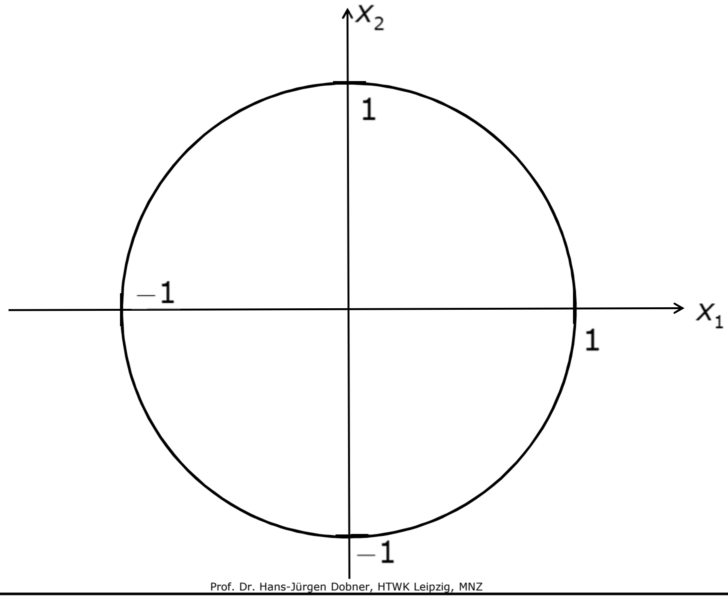
Lösung

$$K_1(0) = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left\|\vec{x}\right\|_1 = |x_1| + |x_2| = 1 \right\}$$

$$\boxed{|x_2| = 1 - |x_1|}$$



$$K_1(0) = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left\|\vec{x}\right\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1 \right\}$$



$$K_1(0) = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left\|\vec{x}\right\|_\infty = \max\{|x_1|,|x_2|\} = 1 \right\}$$