HTWK
Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig
Prof. Dr. habil.
H.-J. Dobner

Mathematik für Informatiker (MfI) II

Seminar KW 24

Thema: Determinanten **A** $n\times n$ Matrix $|\mathbf{A}| \neq \mathbf{A}$

Entwicklung nach der k-ten Zeile, $1\le k\le n$

$$|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot \det(\mathbf{A}_{k,j})$$

$\mathbf{A}_{k,j}$ entsteht aus **A** durch Streichen der k-ten Zeile und j-ten Spalte

Entwicklung nach der l-ten Spalte, $1\le l\le n$

$$|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} \cdot a_{il} \cdot \det(\mathbf{A}_{i,l})$$

Sind zwei Zeilen/Spalten von **A** gleich oder linear abhängig, so ist det(**A**)=0

A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ det(**A**)$\neq$0

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$$

Die Determinante einer Matrix **A** ändert sich nicht, wenn man ein α-faches, einer Zeile/Spalte zu einer anderen Zeile/Spalte addiert.

Entsteht die Matrix **B** aus der Matrix **A** durch Vertauschen zweier Zeilen/Spalte, so ist $\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{B})$

Entsteht **B** aus der Matrix **A** durch Multiplikation einer Zeile/Spalte mit einer Zahl λ, so ist $\det(\mathbf{B}) = \lambda\det(\mathbf{A})$

Strategie: In einer Zeile/Spalte von **A** Nullen erzeugen und nach dieser Zeile/Spalte entwickeln. Mit den entstehenden Unterdeterminanten weiterverfahren bis nur noch 2×2 Matrizen oder Dreiecksmatrizen übrig sind.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

1. Aufgabe

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ + \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \\ + \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-1) \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der 1. Spalte

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + (-1)\boxed{\cdot 1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 - 0$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ + \\ \\ \end{matrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der 1. Spalte

$$
\begin{vmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{vmatrix}
$$

$$
|\mathbf{A}| = (-1)\cdot\begin{vmatrix}\boxed{1} & 1 & 1\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix} = (-1)\cdot 1\cdot \boxed{1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} - 0 + 0
$$

$$
\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}
$$

$$
= (-1)\cdot 1\cdot\left[(-2)\cdot(-1) - (-1)\cdot 1\right] = -3
$$

$\Rightarrow$ **A** regulär, d.h. **A** invertierbar