Tutorium 9

THEMA: Determinanten

Zusammenfassung

- Determinante = Kenngröße für quadratische $n \times n$ Matrizen
- A_{ij} = A mit i-ter Zeile und j-ter Spalte gestrichen
- $\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot \det(A_{1j})$ unhandlich ab $n=3$
- Entwicklung nach k-ter Zeile: $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot \det(A_{kj})$, $1 \leq k \leq n$

  Entwicklung nach l-ter Spalte: $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} \cdot a_{il} \cdot \det(A_{il})$, $1 \leq l \leq n$
- Vorzeichen-Tableau (Schachbrettmuster):

$$\begin{matrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

- $\det(a) = a$

  $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

  $\det(E) = 1$

- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ A singulär, nicht invertierbar

  $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ A regulär, invertierbar (A^{-1})

- 2 Zeilen/Spalten gleich oder linear abhängig $\rightarrow \det(A) = 0$
- Zeile/Spalte enthält nur Nullen $\rightarrow \det(A) = 0$
- Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ * & \ddots \end{pmatrix}$ (untere) oder $\begin{pmatrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$ (obere) $\rightarrow \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$
  Produkt der Hauptdiagonalen

- α-faches von Zeile/Spalte zu anderer Zeile/Spalte addieren ($\alpha \in \mathbb{K}$) $\rightarrow$ det(A) bleibt gleich
- 2 Zeilen/Spalten vertauschen $\rightarrow \det(B) = -\det(A)$
- Zeile/Spalte $\cdot \lambda \rightarrow \det(B) = \lambda \cdot \det(A)$

  Matrix $\cdot \lambda \rightarrow \det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$
- $\det(A^T) = \det(A)$

- Rezept

① Matrix anschauen → einer der Sonderfälle?
→ geht durch Operationen aus bereits berechneter Matrix hervor?
→ schon geeignete Zeile mit vielen Nullen?
→ ...

② in geeigneter Zeile / Spalte Nullen erzeugen (oder A in Dreiecksform überführen)

③ nach der Zeile / Spalte entwickeln
→ mit Unterdeterminanten weiter ab ② bis nur noch 2×2 Matrizen oder Dreiecksmatrizen

④ Determinante ausrechnen

Aufgaben

1 Berechne die Determinante der Matrix A. Ist A singulär/regulär?

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1/4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

2 Berechne die Determinante ...
Existiert die inverse Matrix A^{-1}?

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 7 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

durch Entwickeln nach der 2. Zeile

b. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

durch Erzeugen geeigneter Nullen

3 Berechne die Determinante. (Tipp: Denk an die Sarrus-Regeln)

a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2i & 1 \\ 2 & 5 & -i \\ -1 & i & 3i \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

g. $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

h. $A' = 3 \cdot A$
$A'' = -A$ von f.

i. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

j. $A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

k. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

l. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

4 Berechne die Determinante. Für welche reellen Zahlen t ist die Matrix regulär?

a. $A = \begin{pmatrix} t & 3 \\ 3 & t \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & t \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} 5-t & 2 & 1 \\ 2 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$