

7. Aufgabe

Ist die folgende Rechnung richtig? (Antwort mit Begründung!)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{1 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

Lösung

Diagram illustrating the evaluation of the limit and the application of L'Hôpital's rule:

- Initial limit: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x + x^2}$ (Type 0/0)
- First application of L'Hôpital's rule: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{1 + 2x}$ (Type 0/1)
- Second application of L'Hôpital's rule: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$ (Type 0/1)

Annotations:

- "Hier wird die erste l'Hospitalsche Regel verwendet." (Here the first l'Hôpital's rule is used.)
- "Erlaubt, Voraussetzungen erfüllt: Typ 0/0" (Allows, conditions fulfilled: Type 0/0)
- "Nicht erlaubt, Voraussetzungen nicht erfüllt: Typ 0/1" (Not allowed, conditions not fulfilled: Type 0/1)
- "FALSCH" (Wrong) is written twice, indicating the final result $\frac{1}{2}$ is incorrect.
- "Anmerkung: Der richtige Grenzwert ist 0." (Note: The correct limit value is 0.)

8. Aufgabe

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, x > 0$$

und den Entwicklungspunkt $x_0=1$ das Taylor-Polynom zweiter Ordnung. Geben sie das zugehörige Restglied an.

Lösung

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3$$

Taylorpolynom 2-ter Ordnung (Hauptteil) R_2 Restglied von Lagrange

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3}, f''(x) = \frac{6}{x^4}, f'''(x) = \frac{-24}{x^5}$$

$$f(1) = 1, f'(1) = -2, f''(1) = 6,$$

Taylor-Polynom zweiter Ordnung:

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3}, f''(x) = \frac{6}{x^4}, f'''(x) = \frac{-24}{x^5}$$

$$f(1) = 1, f'(1) = -2, f''(1) = 6,$$

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2$$

$$= 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2$$

Zugehöriges Restglied

$$\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3 = -\frac{4}{\xi^5}(x-1)^3, \xi \text{ zwischen } x_0 = 1 \text{ und } x > 0$$



Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner, HTWK Leipzig, MNZ

9. Aufgabe

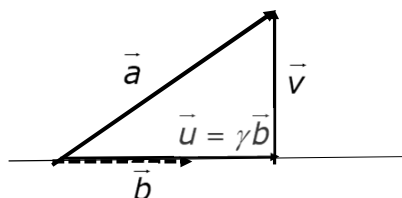
Bestimmen Sie Lot und Projektion des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

in Richtung des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung

orthogonale Projektion und Lot

$$\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$$



$$\gamma = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{b}\|^2} = \frac{7 \cdot 4 + 6 \cdot 2}{(\sqrt{4^2 + 2^2})^2} = \frac{40}{20} = 2$$

$$\Rightarrow \vec{u} = 2\vec{b} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \vec{a} - \gamma\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\underbrace{\|\vec{b}\|^2}_{\gamma}} \vec{b}$$

$$\vec{v} = \vec{a} - \gamma \vec{b}$$



Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner, HTWK Leipzig, MNZ