Definition 1 (Erweiterung)

Ist V ein komplexer Vektorraum, dann muss ein Skalarprodukt folgende Eigenschaften haben:

$$\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

(S1) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$: $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$

(S2) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{C}$: $\langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

(S3) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$: $\overline{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$

(S4) $\forall \vec{x} \in V$: $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$ und $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

Ein komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt heißt auch unitärer Raum.

Skalarprodukt im $\mathbb{C}^n$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \qquad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \overline{y_k}$$

Beispiel 2

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ i \\ 1-i \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1-2i \\ 4 \\ 1+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= (-2) \cdot (1+2i) + i \cdot 4 + (1-i) \cdot (1-i) \\ &= -2 - 4i + 4i + 1 - i - i - 1 = -2 - 2i \end{aligned}$$

Folgerung

Aus (S1) – (S4) folgt

V **reeller** Vektorraum mit Skalarprodukt

(S+) $\left\langle \vec{x}, \alpha \vec{y} + \beta \vec{z} \right\rangle = \alpha \left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle + \beta \left\langle \vec{x}, \vec{z} \right\rangle, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

V **komplexer** Vektorraum mit Skalarprodukt

(S+) $\left\langle \vec{x}, \lambda \vec{y} + \mu \vec{z} \right\rangle = \overline{\lambda} \left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle + \overline{\mu} \left\langle \vec{x}, \vec{z} \right\rangle, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$