5. Aufgabe

Bestimmen Sie alle Stellen im Intervall [1,6], an denen die Funktion $f(x) = 4\ln(x) + \frac{1}{2}x^2 - 4x,\ x \in [1,6]$ eine waagrechte Tangente besitzt. Liegt an diesen Stellen auch ein relatives Extremum vor? Besitzt die Funktion $f(x)$ im Intervall [1,6] ein Minimum und Maximum? (Antworten mit Begründung!)

Lösung

$$f(x) = 4\ln(x) + \frac{1}{2}x^2 - 4x$$

$$f'(x) = \frac{4}{x} + x - 4$$

waagrechte Tangente, d.h. $f'(x) = 0$

$$f(x) = 4\ln(x) + \frac{1}{2}x^2 - 4x,\ x \in [1,6]$$

$$f'(x) = \frac{4}{x} + x - 4 = 0 \quad \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} \Rightarrow x = 2$$

Extremum an der Stelle x=2?

$$f''(x) = -\frac{4}{x^2} + 1 \quad \Rightarrow f''(2) = -\frac{4}{4} + 1 = 0$$

$$f'''(x) = \frac{8}{x^3}, f'''(2) = 1 \neq 0 \Rightarrow$$ n=3 ungerade, kein Extremum an der Stelle x=2.

$f(x)$ ist stetig auf dem abgeschlossenen Intervall [1,6], daher hat f im Intervall [1,6] ein Minimum und ein Maximum.