Algorithmus: Lösung der Eigenwertaufgabe $\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$

(I) Bilde **A**-λ**E**

(II) Berechne das charakteristische Polynom

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$$

(III) Bestimme die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$. Diese Nullstellen sind die Eigenwerte der Matrix **A**.

(IV) Bestimme zu jedem Eigenwert λ alle nichttrivialen Lösungen des homogenen LGS $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\vec{x} = \vec{0}$

Diese Lösungen sind die Eigenvektoren von **A** zum Eigenwert λ

Beispiel 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(I) Bilde **A**-λ**E**

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

(II) Berechne das charakteristische Polynom

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\{(2-\lambda)(3-\lambda)-6\}$$

Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig

(III) Bestimme die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$. Diese Nullstellen sind die Eigenwerte der Matrix **A**.

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (1-\lambda)\{\underbrace{(2-\lambda)(3-\lambda)-6}_{\lambda^2-5\lambda}\}$$ $$\boxed{\Rightarrow \lambda_1 = 1}$$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 5\lambda = -\lambda\left(\lambda^2 - 6\lambda + 5\right)$$ $$\boxed{\Rightarrow \lambda_2 = 0}$$

$$spur(A) = 2+3+1 = 6 = 1+0+\lambda_3$$ $$\boxed{\Rightarrow \lambda_3 = 5}$$

$\Downarrow$

Summe der Eigenwerte $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig