1 L'Hospital

1. Regel Bei $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

2. Regel Bei $\frac{a}{\infty}$: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Umformen bei: $0 \cdot \infty, 0^0, \infty, 1^\infty, \infty - \infty$

Typ des Ausdrucks	Form des Ausdrucks	Umformung
$0-\infty, \infty-\infty$	$f(x)-g(x)$	$(f(x)-g(x)) \frac{f(x)+g(x)}{f(x)+g(x)}$
$0\cdot(\pm\infty)$	$f(x)\cdot g(x)$	$\frac{f(x)}{1/g(x)}$
$0^0, 1^\infty, 0^\infty, \infty^0$	$f(x)^{g(x)}$	$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$ ↳ e-Fkt. stetig: $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = F(\lim\limits_{x\to x_0} x)$

2 Taylor

Formel:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{Taylorpolynom n-ter Ordnung (Hauptteil)}}$$

$$+ \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n \text{Restglied von Lagrange}}$$

Entwicklungspunkt x_0 = beliebig, aber fest aus Intervall
Zwischenstelle ξ liegt zwischen x und x_0, kann also kleiner als x oder auch größer sein.

2.0.1 Fehlerabschätzung

worst case: ξ zwischen x_0 und x so wählen, dass $|R_n(x)|$ größtmöglich wird.

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)| &= \left|\tfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}\right| \\ &= \tfrac{1}{(n+1)!}\left|(x-x_09)^{n+1}\right|\left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \\ &\leq \tfrac{1}{(n+1)!}\left|(x-x_09)^{n+1}\right| M \end{aligned}$$

Man sieht:
1. Je größer das n, dest kleiner wird der Faktor $1\frac{1}{(1-n)!}$
auf Deutsch: mit Großerem n wird die approximation besser
2. Je weiter das x von x_0 weg liegt, desto größer wird der Bertrag $x - x_0$, desto mehr Einfluss hat der Term auf die Genauigkeit

3 Reihen

Die Folge s_n nennt man die zur Folge a_k gehörige unendliche Reihe. Das n-te Glied heißt n-te Partialsumme. $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ Falls die Folge s_n der Partialsummen keinen Grenzwert besitzt, nennt man die Reihe **divergent**. Die Reihe heißt **konvergent**, wenn s_n konvergiert.
Dann setzt man $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$
Im Falle der Konvergenz sagt man die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist **konvergent** und nennt s den Grenzwert die Simme der unendlichen Reihe.

3.1 Geometrische Reihe

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, |q| < 1$
Für $|q| > 1$ wächst der Term $q_n + 1$ für $n \to \infty$ betragsmäßig unbeschränkt, so dass **Divergenz** der Folge s_n und somit der Reihe vorliegt.

Im Fall $q = 1$ gilt für die Partialsumme $s_n = n + 1$.
Damit liegt **Divergenz** der Reihe vor.

Im Fall $|q| < 1$ strebt $q_n + 1$ gegen den Grenzwert 0 und die Reihe ist **konvergent**.

Im Fall $q = -1$ wechselt s_n fortlaufend zwischen den Werten 1 und 0, d.h. es liegt **Divergenz** vor

3.2 harmonische Reihe

$$a_k = \underbrace{\frac{1}{k}}_{>0} \Rightarrow s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \overbrace{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}}^{harmonischeReihe}$$

Die harmonische Reihe ist **divergent**.
Divergenzkriterium: Falls die Folge a_k **nicht** gegen Null konvergiert, ist die unendliche Reihe
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **divergent.** Notwendig für die Konvergenz einer Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist die Bedingung, dass die Folge a_k eine Nullfolge ist, also $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$

4 Absolute und bedingte Konvergenz von Reihen, Konvergenzkriterien

Summen und Vielfache konvergenter Reihen ergeben wieder eine konvergente Reihe.

4.1 bedingte/ absolute Konvergenz

Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe der Beträge konvergent ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$
Eine konvergente Reihe, welche nicht absolut konvergent ist, heißt **bedingt konvergent**.
Eine **absolut konvergente** Reihe ist auch **(bedingt) konvergent**, die Umkehrung ist i.a. falsch.
Majorantenkriterium:
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern und es gelte $|a_k| \leq c_k$ für alle $k \geq m(fest)$
Dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **absolut konvergent**. Bsp:
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+k} \Rightarrow k$ ausklammern $= \frac{k}{k(k^2+1)} = \frac{1}{k^2+1}$
Die Reihe verhält sich wie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, sollte daher konvergieren. Begründung:
Aus $k^2 + 1 \geq k^2$ folgt: $\underbrace{\frac{k}{k^3+k}}_{=|a_k} = \frac{1}{k^2+1} \leq \underbrace{\frac{1}{k^2}}_{=c_k}$

Da nun die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+k}$

Minorantenkriterium:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ divergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern und es gelte $a_k \geq d_k$ für alle $k \geq m(fest)$

Dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **divergent**.

Bsp:

$\sum -k = 1^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ wächst ähnlich wie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$

Da nun die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, divergiert auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ und damit auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$

$2k - 1 \leq 2k \leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2k-1}}_{a_k} \geq \underbrace{\frac{1}{2k}}_{=c_k}$