Zusammenfassung_0

Friday, 10 April 2020 22:05

① Umkehrfkt.

Hat die Fkt. $y=f(x)$ die Eigenschaft, dass jeder Wert $y \in W(f)$ an genau einer Stelle $x \in D(f)$ angenommen wird (Fkt. dann bijektiv), dann existiert die Umkehrfkt. f^{-1} von f.

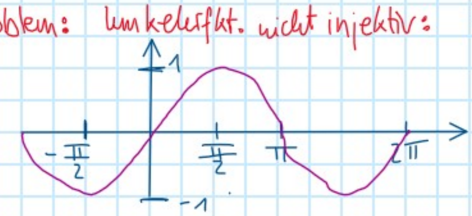
$$f^{-1}: W(f) \to D(f)$$

Kriterium für Existenz einer reellen Umkehrfkt.

f streng monoton steigend und stetig $\Rightarrow$ f^{-1} streng monoton steigend + stetig
f streng monoton fallend u. stetig $\Rightarrow$ f^{-1} streng monoton fallend + stetig

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Problem: Umkehrfkt. nicht injektiv: Bsp. sin-Fkt



$\Rightarrow$ Trick: auf ein Intervall einschränken

$$\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1], \; x \mapsto \sin(x)$$

$\Rightarrow$ sin streng monoton steigend + stetig

Fkt. $f(x)$	Umkehrfkt. $f^{-1}(x)$
sin: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$, $x \mapsto \sin(x)$	arcsin: $[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y \mapsto \arcsin(y) = x$
cos: $[0, \pi] \to [-1,1]$, $x \mapsto \cos(x)$	arccos: $[-1,1] \to [0, \pi]$, $y \mapsto \arccos(y) = x$
tan: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to (-\infty, \infty)$, $x \mapsto \tan(x)$	arctan: $(-\infty, \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $y \mapsto \arctan(y) = x$
cot: $(0, \pi) \to (-\infty, \infty)$, $x \mapsto \cot(x)$	arccot: $(-\infty, \infty) \to (0, \pi)$, $y \mapsto \text{arccot}(y) = x$ $[\Leftrightarrow \cot(x) = y]$

$\cot: (0,\pi) \to (-\infty,\infty), x \mapsto \cot(x)$ | $\operatorname{arccot}: (-\infty,\infty) \to (0,\pi), y \mapsto \operatorname{arccot}(y) = x$ $[\Leftrightarrow \cot(x) = y]$

$e^x: \mathbb{R} \to (0,\infty), x \mapsto e^x$ | $\ln: (0,\infty) \to \mathbb{R}, y \mapsto \ln(y)$

Ableitung der Umkehrfkt. $[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}, f'(x) \neq 0$

Eigenschaften eines Logarithmus

$\ln(1) = 0$, da $e^0 = 1$ $\qquad \lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

$\ln(e) = 1$, da $e^1 = e$ $\qquad \lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$

Multiplikationstheorem des Logarithmus

$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

$\Rightarrow \ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \ldots \ln(a_n)$

$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

Die allg. Potenz: $a^x := e^{x \cdot \ln(a)}, a > 0, x \in \mathbb{R}$

$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}, f(x) > 0$

② Die Regeln von de l'Hospital

Zweck: Entwicklung von Fkt.-Grenzwerten der Form „0/0" oder "∞/∞"

Sind f, g differenzierbare Funktionen, dann können zur Bestimmung von Grenzwerten des Typs $\frac{f(x)}{g(x)}$, welche auf unbestimmte Ausdrücke der Form „$\frac{0}{0}$" oder „a/∞" führen die l'Hospitalschen Regeln herangezogen werden.

1. L'Hospitalsche Regel: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

„$\frac{0}{0}$"

2. L'Hospitalsche Regel: $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

„$\frac{a}{\infty}$"

⇒ manchmal müssen die L'Hospitalischen Regeln mehrfach angewendet werden!

⇒ Zahlreiche Grenzwerte, die auf unbestimmte Ausdrücke des Typs $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, $\infty-\infty$ führen, können so umgeformt werden, dass die entsprechenden Grenzwerte mit den l'Hospitalschen Regeln bestimmt werden können.

Typ des Ausdrucks	Form des Ausdrucks	Umformung
$0-\infty$, $\infty-\infty$	$f(x)-g(x)$	$(f(x)-g(x))\,\frac{f(x)+g(x)}{f(x)+g(x)}$
$0\cdot(\pm\infty)$	$f(x)\cdot g(x)$	$\frac{f(x)}{1/g(x)}$
0^0, 1^∞, 0^∞, ∞^0	$f(x)^{g(x)}$	$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$ ↳ e-Fkt. stetig: $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = F(\lim\limits_{x\to x_0} x)$

③ Extremwerte

$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)} \neq 0$:

① n ungradzahlig $\rightarrow$ kein Extremum

② n gradzahlig $\rightarrow$ $f^{(n)}(x_0) < 0$?

ja: rel. Max

nein: rel. Min