Satz 4 Quotientenkriterium

Gilt für die Folge a_k

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \qquad \boxed{\textbf{(I)}}$$

dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leftrightarrow s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

absolut konvergent und damit konvergent.

Gilt $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ so ist die Reihe divergent. $\boxed{\textbf{(II)}}$

Im Fall $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$ $\boxed{\textbf{(III)}}$

kann keine allgemeine Aussage getroffen werden, die Reihe kann sowohl konvergent als auch divergent sein.

$(k+1)! = k!(k+1)$

Beispiel 4 zum Quotientenkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \qquad a_k = \frac{1}{k!}\; a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}, k = 0,1,2,\ldots$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{1} = \frac{k!}{k!(k+1)}$$

$$= \frac{1}{(k+1)} \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1} = 0$$

Quotientenkriterium $\Rightarrow$ die Reihe ist absolut konvergent.

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 2.71828..$$

$(k+1)! = k!(k+1)$

Beispiel 5 zum Quotientenkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!} \qquad a_k = \frac{(-2)^k}{k!} \qquad a_{k+1} = \frac{(-2)^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(-2)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{(-2)^k}\right| = \left|\frac{(-2)^{k+1}}{(-2)^k} \cdot \frac{k!}{k!(k+1)}\right|$$

$$= \left|(-2) \cdot \frac{1}{(k+1)}\right| = \frac{2}{k+1} \quad \to 0 \ \text{ für } k \to \infty$$

Quotientenkriterium $\Rightarrow$ die Reihe ist absolut konvergent.

Satz 4 Wurzelkriterium

Gilt für die Folge a_k

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1. \qquad \boxed{\textbf{(I)}}$$

dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

absolut konvergent und damit konvergent.

Gilt $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ so ist die Reihe divergent. **(II)**

Im Fall $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$ **(III)**

kann keine allgemeine Aussage getroffen werden, die Reihe kann sowohl konvergent als auch divergent sein.

Beispiel 6 zum Wurzelkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k} \qquad a_k = \frac{2+(-1)^k}{2^k},$$

Anwendung des Wurzelkriteriums

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{2+(-1)^k}{2^k}\right|} = \frac{1}{2}\sqrt[k]{\left|2+(-1)^k\right|} = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt[k]{1}, k \equiv 1(2) \to \frac{1}{2} & \text{für } k \to \infty \\ \frac{1}{2}\sqrt[k]{3}, k \equiv 0(2) \to \frac{1}{2} & \text{für } k \to \infty \end{cases}$$

Wurzelkriterium $\Rightarrow$ Reihe ist absolut konvergent