Lösungen Aufgaben

1 a. $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = e \neq 0 \quad \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$ divergent

b. $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^k}{\ln(k)}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\ln(k)}_{\to\infty}} = 0 \quad \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\ln(k)}$ Nullfolge, Konvergenz möglich

c. $\lim\limits_{k\to\infty}\left|(-1)^k\cdot\frac{2k-1}{2k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|1-\frac{1}{2k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} 1-\frac{1}{\underbrace{2k}_{\to\infty}} = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\frac{2k-1}{2k}$ divergent

---

2 (1) alternierend, da Faktor $(-1)^k$

(2) $|a_k| \geq |a_{k+1}|$ gilt, da $|a_k| = \left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ und $|a_{k+1}| = \left|\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{(k+1)+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{k+2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \frac{1}{\sqrt{k+2}}$ ab $k=1$

(3) Nullfolge, da $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)}{\sqrt{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{k+1}}_{\to\infty}} = 0$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ ist bedingt konvergent

---

3 a. $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(-4)^{k+1}\cdot(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{(-4)^k\cdot k!}{k^k}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{(-4)^{k+1}\cdot(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}\cdot\frac{k^k}{(-4)^k\cdot k!}\right|$

$= \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{\cancel{(-4)^k}\cdot(-4)}{\cancel{(-4)^k}}\cdot\frac{\cancel{(k+1)}\cdot\cancel{k!}\cdot k^k}{(k+1)^k\cdot\cancel{(k+1)}\cdot\cancel{k!}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|(-4)\cdot\frac{k^k}{(k+1)^k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} 4\cdot\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{4}{e} > 1$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-4)^k\cdot k!}{k^k}\right|$ ist divergent [, also $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-4)^k\cdot k!}{k^k}$ nicht absolut konvergent (aber eventuell bedingt konvergent)]

---

b. $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(k+1)^2\cdot 3^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{k^2\cdot 3^k}{k!}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^{\cancel{2}}\cdot\cancel{3^k}\cdot 3}{\cancel{k!}\cdot\cancel{(k+1)}}\cdot\frac{\cancel{k!}}{k^2\cdot\cancel{3^k}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{3(k+1)}{k^2}$

$= \lim\limits_{k\to\infty}\frac{3k+3}{k^2} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{3\cancel{k}}{k^{\cancel{2}}}+\frac{3}{k^2} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{3}{\underbrace{k}_{\to\infty}} + \lim\limits_{k\to\infty}\frac{3}{\underbrace{k^2}_{\to\infty}} = 0+0 = 0 < 1$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^2\cdot 3^k}{k!}$ ist absolut konvergent

---

c. $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|(-1)^k\cdot\left(\frac{6+k}{k^2+7}\right)^k\right|} = \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\left(\frac{(-1)\cdot(6+k)}{k^2+7}\right)^k\right|} = \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{6+k}{k^2+7}\right)^k}$

$= \lim\limits_{k\to\infty}\frac{6+k}{k^2+7} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{\cancel{k}(1+\frac{6}{k})}{k^{\cancel{2}}(1+\frac{7}{k^2})} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1+\overbrace{\frac{6}{k}}^{\to 0}}{\underbrace{k}_{\to\infty}(1+\underbrace{\frac{7}{k^2}}_{\to 0})} = 0 < 1$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\left(\frac{6+k}{k^2+7}\right)^k$ ist absolut konvergent

d. $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\left(\frac{k+1}{4k}\right)^k\right|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k+1}{4k}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{4k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k}}{4\cancel{k}} + \frac{1}{4k}$

$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{4} + \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{1}{4k}}_{\to\infty} = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4} < 1$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{4k}\right)^k$ ist absolut konvergent

---

e. $|a_k| \le c_k$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergente Majorante

$|a_k| = \left|\frac{4^{k+1}-1}{3+4^{2k}}\right| = \frac{4^{k+1}-1}{3+4^{2k}} < \frac{4^{k+1}}{3+4^{2k}} < \frac{4^{k+1}}{4^{2k}} = \frac{4\cdot 4^k}{4^k\cdot 4^k} = 4\cdot\frac{\cancel{4^k}}{\cancel{4^k}\cdot 4^k}$

Zähler vergrößern/ Nenner verkleinern

$= 4\cdot\frac{1}{4^k} = 4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^k \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^k$ konvergente Majorante

Geometrische Reihe mit $|q|<1$

Vielfaches einer konvergenten Reihe

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{k+1}-1}{3+4^{2k}}$ absolut konvergent

---

f. $|a_k| = \left|\frac{1}{k\cdot(k+1)}\right| = \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k^2+k} \le \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergente Majorante

Nenner verkleinern

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ absolut konvergent

---

g. $|a_k| \ge d_k$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ divergente Minorante

$|a_k| = \left|\frac{1}{k+\sqrt[k]{k}}\right| = \frac{1}{k+\sqrt[k]{k}} \ge \frac{1}{k+k} = \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}$ divergente Minorante

Nenner vergrößern

Vielfaches

$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{k+\sqrt[k]{k}}\right|$ divergent, also $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+\sqrt[k]{k}}$ nicht absolut konvergent

aber eventuell bedingt konvergent

$\Rightarrow$ nicht möglich ohne alternierenden Faktor

$\Rightarrow$ divergent

---

h. $|a_k| = \left|\frac{1}{\sqrt{k(k+2)}}\right| = \frac{1}{\sqrt{k(k+2)}} = \frac{1}{\sqrt{k^2+2k}} \ge \frac{1}{\sqrt{k^2+2k^2}} = \frac{1}{\sqrt{3k^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{k^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{k}$

Nenner vergrößern

$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{k}$ divergente Minorante

$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{k(k+2)}}\right|$ divergent, also $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+2)}}$ nicht absolut konv.

und nicht bedingt konv.

da kein alternierender Faktor

$\Rightarrow$ divergent

i. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ mit dem Monotoniekriterium und dem Wissen, dass der Grenzwert der Reihe $\sum_{k=1} \frac{1}{k^2} < 2$ ist

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$$

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}} + \frac{1}{(n+1)^3} - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}} = \frac{1}{(n+1)^3} > 0$$

alles positiv

$\Rightarrow$ s_n streng monoton steigend

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \underset{\text{Nenner verkleinern}}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$$ also $s_n < 2 = C$ obere Schranke

$\Rightarrow$ nach dem Monotoniekriterium konvergent