HTWK Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig

Prof. Dr. habil. H.-J. Dobner

§ 30. Norm und Skalarprodukt

In vielen - vor allem reellen - Vektorräumen stellt sich die Aufgabe Längen oder Abstände zu messen oder auch „so etwas" wie Winkel zwischen Vektoren zu beschreiben.

=>> INFORMATIK Computergraphik

Wir beginnen mit der Norm – der Länge von Vektoren.

30.1 Normierte Vektorräume

Definition 1

Eine Norm ordnet jedem Vektor $\vec{x}$ eines Vektorraumes V eine eindeutig bestimmte Zahl nichtnegative Zahl $\|\vec{x}\|$ zu

$$\|\ \| : V \to [0,\infty), \vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|$$

so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

(N1) $\forall \vec{x}$ $\|\vec{x}\| \geq 0$ und $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

(N2) $\forall \vec{x}, \lambda \in \mathbb{K} (\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{K} = \mathbb{C})$ $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$ Homogenität

(N3) $\forall \vec{x}, \vec{y}$ $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ Dreiecksungleichung

Wichtige Vektor-Normen

(a) Vektornormen

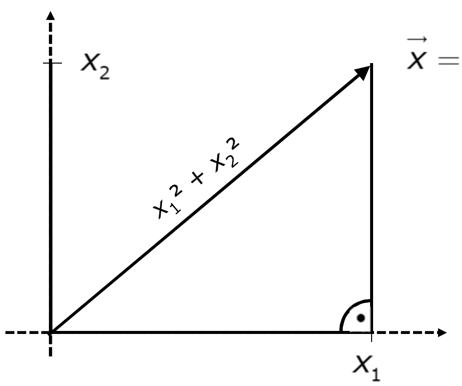
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Betragssummen-Norm $\left\|\vec{x}\right\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

Euklid-Norm $\left\|\vec{x}\right\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$

Maximum-Norm $\left\|\vec{x}\right\|_\infty = \max_{k=1,2,\ldots,n} |x_k|$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ Euklid-Norm $\left\|\vec{x}\right\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\left\|\vec{x}\right\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} \left|x_k\right|^p}, 1 \le p < \infty$$

$$\left\|\vec{x}\right\|_\infty = \max_{k=1,2,\dots,n} \left|x_k\right|$$

Beispiel 1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\left\|\vec{x}\right\|_1 = |-3| + |-4| + |2| = 9$$

$$\left\|\vec{x}\right\|_2 = \sqrt{|-3|^2 + |-4|^2 + |2|^2} = \sqrt{29} = 5.385164807134504$$

$$\left\|\vec{x}\right\|_\infty = \max\left\{|-3|, |-4|, |2|\right\} = 4$$

Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig