33.2 Stetigkeit bei Funktionen mehrerer Veränderlicher

Definition 1

$$f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to W(f) \subseteq \mathbb{R}\ ,\ (x,y) \mapsto f(x,y)$$

(skalare Funktion)

heißt stetig im Punkt $(x^*, y^*) \in D(f)$

wenn für alle Folgen $(x_k, y_k) \in D(f)$ mit

$$x_k \to x^*\ ,\ y_k \to y^*$$

gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = f(x^*, y^*)$$

f heißt stetig auf ganz *D*(*f*), wenn *f* in jedem Punkt des Definitionsbereichs stetig ist.

Beispiel 1

$$f : \mathbb{R}^2 \to W(f) \subseteq \mathbb{R}\ ,\ (x,y) \mapsto f(x,y) := x^2 + y^2$$

ist auf ganz stetig $\mathbb{R}^2$, denn

$(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_k \to x^*\ ,\ y_k \to y^*$

$$\Rightarrow f(x_k, y_k) = x_k^2 + y_k^2 \underset{k\to\infty}{\to} (x^*)^2 + (y^*)^2 = f(x^*, y^*)$$

Der Fall einer vektorwertigen Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

wird auf die Stetigkeit einer reellwertigen Funktion, welche von *n* Veränderlichen abhängt zurückgeführt:

$$\vec{f} : D\left(\vec{f}\right) \subseteq \mathbb{R}^n \to W\left(\vec{f}\right) \subseteq \mathbb{R}^m \,,\; \vec{x} \mapsto \vec{f}\left(\vec{x}\right) = \begin{pmatrix} f_1\left(\vec{x}\right) \\ f_2\left(\vec{x}\right) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_m\left(\vec{x}\right) \end{pmatrix}$$

$$f\left(\vec{x}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(x_1 - x_2 + x_3\right) \\ \dfrac{x_1 \cdot x_2}{1 + e^{x^3}} \end{pmatrix}$$

stetig wenn $f_1\left(\vec{x}\right), f_2\left(\vec{x}\right), \ldots, f_m\left(\vec{x}\right)$ stetig sind.