Prof. Dr. habil.
H.-J. Dobner

Mathematik für Informatiker (MfI) II

Seminar KW 21

Thema: Fourier-Reihen, f 2π-periodisch, stückweise stetig differenzierbar

1. Skizze
2. gerade/ungerade Funktion
   gerade $\Rightarrow$ **alle** $b_k=0$, $k=1,2,..$
   ungerade$\Rightarrow$ **alle** $a_k=0$, $k=0,1,2,..$
3. Mittelwerteigenschaft
4. Integrationsbereich festlegen
5. Berechnung der Fourier-Koeffizienten/Fourier-Reihe

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx\ ,\ k \ge 1$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx\ ,\ k \ge 1$$

$$f \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(k\,x) + b_k\sin(k\,x)\right)$$

Die Fourier–Reihe von f konvergiert für alle $x\in\mathbb{R}$.

f stetig in x:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(k\,x) + b_k\sin(k\,x)\right) = \boxed{f(x)}$$

=Funktionswert

f unstetig in x:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(k\,x) + b_k\sin(kx)\right) = \boxed{\lim_{h\to 0,h>0}\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}}$$

Mittelwert von f an der Stelle x

Muss nicht der Funktionswert sein!!

1. Aufgabe

Die Funktion $f(x)$ ist 2π-periodisch und in $(-\pi, \pi]$ definiert durch

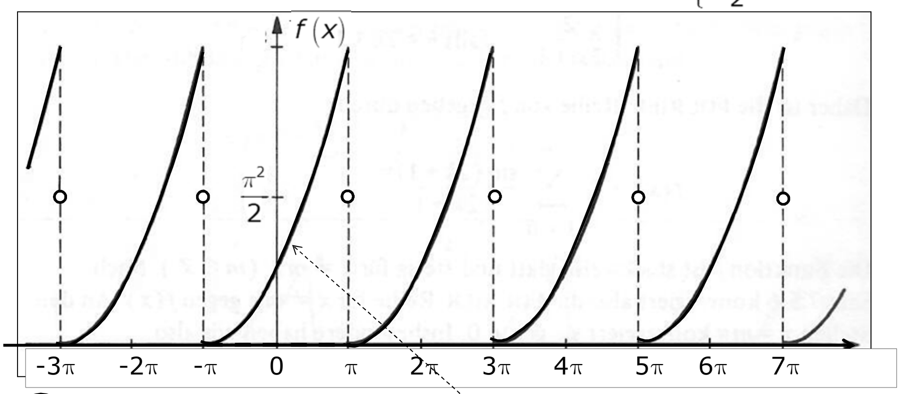
$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x+\pi}{2}\right)^2 & , -\pi < x < \pi \\ \dfrac{\pi^2}{2} & , x = \pi \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Fourier-Entwicklung der Funktion.

Lösung

(1) Skizze

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x+\pi}{2}\right)^2 & , -\pi < x < \pi \\ \dfrac{\pi^2}{2} & , x = \pi \end{cases}$$



(2) Die Funktion $f(x)$ ist weder gerade noch ungerade