<u>3. Aufgabe</u>

Sei **A** eine $n \times n$ Matrix, deren Einträge in jeder Zeile die Summe Null ergeben:

Zeigen Sie, dass det(**A**)=0 gilt.

<u>Lösung</u>

$$\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)$$

$$\forall i = 1,2,\ldots,n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & \ldots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{4,1} & \ldots & \ldots & a_{4,4} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ldots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & \ldots & \cdots & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{vmatrix} \ldots$$

$$\begin{aligned} a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + \ldots + a_{1,n} &= 0 \\ a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} + \ldots + a_{2,n} &= 0 \\ a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} + \ldots + a_{3,n} &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n,1} + a_{n,2} + a_{n,3} + \ldots + a_{n,n} &= 0 \end{aligned}$$

Addition der 2.ten, 3.ten,…,n-ten Spalte zur 1. Spalte

$$\boxed{\begin{matrix} a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + \ldots + a_{1,n-1} + a_{1,n} \\ a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} + \ldots - a_{2,n-1} + a_{2,n} \\ a_{3,1} - a_{3,2} - a_{3,3} - \ldots - a_{3,n-1} - a_{3,n} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n-1,1} + a_{n-1,2} + a_{n-1,3} + \ldots + a_{n-1,n-1} + a_{n-1,n} \\ a_{n,1} + a_{n,2} + a_{n,3} + \ldots + a_{n,n-1} + a_{n,n} \end{matrix}}$$

$$+$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \phantom{a_{1,1}} & \cdot(1) & \cdot(1) & & & \cdot(1) & \cdot(1) \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \\ a_{4,1} \\ \ddots \\ a_{n-1,1} \\ a_{n,1} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \\ \ldots \\ \ddots \\ \ddots \\ a_{n,2} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ddots \\ a_{n,3} \end{matrix} & \begin{matrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{4,4} \\ \ddots \\ \ddots \\ \ldots \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ddots \\ \ddots \\ \ddots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1,n-1} \\ a_{2,n-1} \\ \vdots \\ \ddots \\ \ddots \\ a_{n-1,n-1} \\ a_{n-1,n} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \\ a_{n,n} \end{matrix} \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\forall i = 1,2,\ldots,n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$$

$$\begin{vmatrix}
a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}+\ldots+a_{1,n-1}+a_{1,n} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\
a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,3}+\ldots+a_{2,n-1}+a_{2,n} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & \ldots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\
a_{3,1}+a_{3,2}+a_{3,3}-\ldots+a_{3,n-1}+a_{3,n} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & \ldots & \vdots & \vdots \\
 & \ldots & \ldots & a_{4,4} & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & \ddots & \ldots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
a_{n-1,1}+a_{n-1,2}+a_{n-1,3}+\ldots+a_{n-1,n-1}+a_{n-1,n} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
a_{n,1}+a_{n,2}+a_{n,3}+\ldots+a_{n,n-1}+a_{n,n} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n}
\end{vmatrix}$$

Die erste Spalte ist eine Nullspalte; daher ist det(**A**)=0.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -5 \\ -8 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Alle Zeilensummen sind Null $\Rightarrow$ det(**A**)=0.