3. Aufgabe

Gegeben ist die 3x3 Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix **A**.

Lösung

(I) Bilde **A**-λ**E**

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

(II) charakteristisches Polynom $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}|$

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ \underset{-}{0} & \underset{+}{2-\lambda} & \underset{-}{0} \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \longleftarrow$$

Entwicklung nach der zweiten Zeile

$$= 0 + (2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} + 0$$

$$= (2-\lambda)\cdot\left((1-\lambda)\cdot(-1-\lambda) - 1\cdot 3\right)$$

$$= \boxed{(2-\lambda)}\cdot(1-\lambda)\cdot(-1-\lambda) - 3\cdot\boxed{(2-\lambda)}$$

$$= \boxed{(2-\lambda)}\cdot\left[-1+\cancel{\lambda}-\cancel{\lambda}+\lambda^2-3\right] = (2-\lambda)\cdot(\lambda^2-4)$$

$$= (2-\lambda)\cdot(\lambda-2)(\lambda+2)$$

(III) Eigenwerte der Matrix **A:** Nullstellen von $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\right| = (2-\lambda)\cdot(\lambda-2)(\lambda+2)$$

$\Rightarrow$ Eigenwert der Matrix **A**

$\lambda_1 = 2$ Vielfachheit 2

$\lambda_2 = -2$ Vielfachheit 1

(IV) EV von **A** zum EW λ nichttriviale Lösungen des homogenen LGS $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\vec{x} = \vec{0}$

Eigenvektor zum EW $\lambda_1 = 2$

$$\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E})\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cancel{0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Rightarrow x_2 = t, t \in \mathbb{R} \\ \\ \Rightarrow x_1 = 3x_3, x_3 = s, s \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Alle Eigenvektoren zum EW $\lambda_1 = 2$

$$t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}, \boxed{s^2 + t^2 \neq 0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\text{schließt } \vec{x} = \vec{0} \text{ aus}}$$

Eigenvektor zum EW $\lambda_2 = -2$

$$\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E}\right)\vec{x} = \begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{3} \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow x_2 = 0 \\ \Rightarrow \boxed{x_1 = -x_3,\, x_3 = t,\, t \in \mathbb{R}} \end{array}$$

Alle Eigenvektoren zum EW $\lambda_2 = -2$

$$t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, \boxed{t \neq 0}$$

$\Updownarrow$

$\boxed{\text{schließt } \vec{x} = \vec{0} \text{ aus}}$

Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner, HTWK Leipzig, MNZ