Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale

$f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, stetig $\quad 0 \le f(x) \le g(x)$

$|f(x)| \le g(x)$

<u>Majorantenkriterium</u>

$\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergent $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent

<u>Minorantenkriterium</u>

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergent $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx$ divergent

Analog für andere Intervalle

<u>7. Aufgabe</u>

Untersuchen Sie mit dem Vergleichskriterium das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

auf Konvergenz/Divergenz.

<u>Lösung</u> uneigentliches Integral 1.Art

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Naheliegende Abschätzung $|f(x)| = \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \le \frac{1}{x}$

Hilft leider nicht, da (Aufgabe 6) $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ divergent

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Trick. Zunächst partiell integrieren

$$\int \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)}\,\underbrace{\sin(x)}_{g'(x)}\,dx = \frac{1}{x}\left(-\cos(x)\right) - \int \frac{1}{x^2}\cos(x)\,dx$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}\left(\left[\frac{1}{x}\left(-\cos(x)\right)\right]_1^\beta - \int_1^\beta \frac{1}{x^2}\cos(x)\,dx\right)$$

$$= \boxed{\lim_{\beta\to\infty}\left[\frac{1}{x}\left(-\cos(x)\right)\right]_1^\beta} - \boxed{\lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{1}{x^2}\cos(x)\,dx}$$

$$= \boxed{\underbrace{\lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{1}{\beta}\cos(\beta)\right)}_{} - \left(\frac{1}{1}\cdot\left(-\cos(1)\right)\right)}$$

$=0$ (Einschließungskriterium)

Majorantenkriterium

$|f(x)| \le g(x)$:

$\int_1^\infty g(x)\,dx$ konv. $\Rightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx$ konv.

$$\boxed{\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\cos(x)\,dx}$$

Es ist

$$|f(x)| = \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| = \frac{|\cos(x)|}{x^2} \le \frac{1}{x^2} = g(x)$$

Hier hilft (Aufgabe 6) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ ist konvergent

$$\underset{\substack{\text{Majoranten-}\\ \text{kriterium}}}{\Rightarrow} \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx \text{ konvergent}$$