HTWK Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig

Prof. Dr. habil.
H.-J. Dobner

§24. Potenzreihen

=>> INFORMATIK

Darstellung von Standard-Funktionen auf Rechenanlagen

Wir betrachten Reihen, die aussehen wie „unendliche" Polynome. Diese Reihen heißen Potenzreihen, sie sind definiert als eine unendliche Reihe von positiven ganzzahligen Potenzen einer Variablen x. Wie Polynome kann man auch Potenzreihen addieren, subtrahieren, differenzieren und integrieren und man erhält damit neue Potenzreihen.

Definition 1

Eine (reelle) Potenzreihe mit dem Mittelpunkt x=0 ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Eine (reelle) Potenzreihe mit dem Mittelpunkt oder Entwicklungspunkt $x=x_0$ ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(x-x_0\right)^k = a_0 + a_1\left(x-x_0\right) + a_2\left(x-x_0\right)^2 + \ldots + a_n\left(x-x_0\right)^n + \ldots$$

a_k ist eine gegebene (reelle) Zahlenfolge, der Mittelpunkt x_0 ist eine reelle Konstante und x ist eine reelle Variable.

Beispiel 1

Welche dieser Funktionen-Reihen sind Potenzreihen?

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k \sqrt{1-x^2}\left(1-x^2\right)}{k!} x^k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{2k^2}(x-2)^k \quad \Leftarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k + \frac{1}{x^k}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + \ldots + a_n (x-x_0)^n + \ldots}$$

Beispiel 2

$$a_k = 1, x_0 = 2 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (x-2)^k \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$a_k = \frac{1}{k!}, x_0 = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$a_k = \frac{1}{k}, x_0 = -3 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (x+3)^k \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Für welche Werte von x liegt Konvergenz vor?

Hängt von a_k und x_0 ab!

Beispiel 3

$$a_k = 1, k = 0,1,2,\ldots, x_0 = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Geometrische Reihe!!

Sie konvergiert für $|x|<1$ gegen $\frac{1}{1-x}$

Diese Konvergenz kann man wie folgt ausdrücken:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, -1 < x < 1$$

Für $|x| \geq 1$ ist die geometrische Reihe divergent.