4. Aufgabe

bedingt konvergent, absolut konvergent, divergent

Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe

$$1-\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{3^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+-\ldots$$

Lösung

Bildungsgesetz

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = -\frac{3^2}{2^2}$$

$$a_3 = \frac{3^4}{2^2\cdot 4^2}$$

$$a_4 = -\frac{3^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}$$

$$a_k = (-1)^{k+1} \text{ ??}$$

$$\Downarrow$$

$$a_{\boxed{k}} = (-1)^{k+1}\frac{3^{\boxed{2k-2}}}{\boxed{??}}$$

$$\Downarrow$$

$$a_k = (-1)^{k+1}\frac{3^{2k-2}}{2^2\cdot 4^2\ldots\cdot(2k-2)^2},\ k=2,3,\ldots$$

a_1 hat keinen Einfluß auf das Konvergenzverhalten der Reihe

$$a_k = (-1)^{k+1}\frac{3^{2k-2}}{2^2\cdot 4^2\ldots\cdot(2k-2)^2},\ k=2,3,\ldots$$

Immer aufs „Ganze gehen“, d.h. Test auf absolute Konvergenz, wenn das schiefgeht kann man immer noch auf bedingte Konvergenz überprüfen. Wegen der Struktur der Reihenglieder bietet sich das Quotientenkriterium an.

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1 \Rightarrow \text{keine Aussage möglich}$$

$$a_{k+1} = (-1)^{\boxed{k+1}+1}\frac{3^{2(\boxed{k+1})-2}}{2^2\cdot 4^2\ldots\cdot(\boxed{2(k+}1)-2)^2}$$

Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner, HTWK Leipzig, MNZ

$$a_k = (-1)^{k+1} \frac{3^{2k-2}}{2^2 \cdot 4^2 \ldots \cdot (2k-2)^2}, k = 2,3,\ldots$$

$$a_{k+1} = (-1)^{k+2} \frac{3^{2(k+1)-2}}{2^2 \cdot 4^2 \ldots \cdot (2(k+1)-2)^2}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left| (-1)^{k+2} \frac{3^{2(k+1)-2}}{2^2 \cdot 4^2 \ldots \cdot (2(k+1)-2)^2} : (-1)^{k+1} \frac{3^{2k-2}}{2^2 \cdot 4^2 \ldots \cdot (2k-2)^2} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(-1)^{k+2}}{(-1)^{k+1}}\right| \left| \frac{3^{2(k+1)-2}}{2^2 \cdot 4^2 \ldots \cdot (2(k+1)-2)^2} \cdot \frac{2^2 \cdot 4^2 \ldots \cdot (2k-2)^2}{3^{2k-2}} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{3^{2k}}{3^{2k-2}} \frac{\cancel{2^2 \cdot 4^2 \ldots \cdot (2k-2)^2}}{\cancel{2^2 \cdot 4^2 \ldots \cdot (2k-2)^2} \cdot (2k)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^2}{4k^2} = 0$$

$\Rightarrow$ Reihe absolut konvergent