Um von den Trigonometrischen Funktionen an bestimmten Stellen den Wert oder den Schnittpunkt von 2 Funktionen zu bestimmen, empfehle ich eine Wertetabelle der Funktionen zu nutzen. :)

(Beispiel unter https://i.pinimg.com/originals/ff/1b/5f/ff1b5f471d2289a8ad6df451bbb84b0d.gif)

Tutorium 5

THEMA: bestimmtes Integral

Zusammenfassung

- unbestimmtes Integral: $\int f(x)\,dx$ Funktionenschar
  bestimmtes Integral: $\int_a^b f(x)\,dx$ Zahl
  ← obere und untere Integrationsgrenze

  Stetige Funktionen in $[a,b]$ sind auch in $[a,b]$ integrierbar, nur für manche kann Stammfunktion nicht explizit angegeben werden

- Hauptsatz der Differential-/Integralrechnung

  f in $[a,b]$ stetig: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$

- Integralbegriff

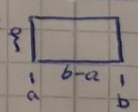
Newton-Leibniz	Riemann
• f in $[a,b]$ def. und stetig und $F'(x) = f(x)$: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ heißt bestimmtes Integral von f auf $[a,b]$ und ist eine Zahl	• Näherung für Fläche unter f zwischen a und b mit Riemannscher Zwischensumme $A_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1})$ → Summe von Rechteckflächen
• basiert auf Gegenableitung	• $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} A_n$
	• basiert auf Ausschöpfungsmethode

- Mittelwertsatz der Integralrechnung (MWS)

  f, g in $[a,b]$ stetig und g dort ohne Vorzeichenwechsel (überall ≥ 0 oder ≤ 0):

  $\exists\, \xi \in (a,b): \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$

  Sonderfall $g(x) = 1$: $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$, d.h. Flächeninhalt unter f durch Rechteck möglich darzustellen



→ Anwendung f. Abschätzung

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \int_a^b |f(x)|\,dx \underset{\text{MWS}}{\leq} M\cdot(b-a)$$ mit dem Wissen $|f(x)| \leq M$ in $[a,b]$

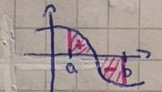
$$\Rightarrow -M(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Eigenschaften (f und g stetig)

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \quad , \alpha \in \mathbb{R}$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^s f(x)dx + \int_s^b f(x)dx \quad , a \leq s \leq b$
- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ Dreiecksungleichung
- $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- $\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & , f \text{ gerade } [\underline{\text{d.h.}}\ f(-x) = f(x)] \\ 0 & , f \text{ ungerade } [\underline{\text{d.h.}}\ f(-x) = -f(x)] \end{cases}$

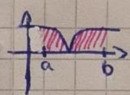
Flächenberechnung

- $\int_a^b f(x)\,dx$ orientierte Fläche



positive Zahl
negative Zahl

$\int_a^b |f(x)|dx$ Fläche zwischen f und x-Achse, tatsächlicher Flächeninhalt



positive Zahl

- Fläche zwischen

	x-Achse und Funktion	2 Funktionen
	$A = \int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$	$A = \int_a^b \lvert f(x) - g(x)\rvert\,dx$
①	Zerlege $[a,b]$ an den Nullstellen $[f(x)=0]$ und bestimme für Teilintervalle $\lvert f\rvert$	Zerlege $[a,b]$ an den Schnittpunkten $[f(x)=g(x)]$ und bestimme für Teilintervalle $\lvert f-g\rvert$
②	Integriere die Teil-Integrale	Integriere die Teil-Integrale
③	Addiere Integrale	Addiere Integrale

- bestimmtes Integral bei Substitutionsregel / partieller Integration

jeweils 2 Möglichkeiten

Substitution: ① erst unbestimmtes Integral mit Substitution bestimmen, dann Integrationsgrenzen einsetzen (auch resubstituieren!)
② Substitution durchführen und Grenzen ebenfalls transformieren
mit $x_{oben} = \ldots$, $x_{unten} = \ldots$ mit $u = \ldots$ ersetzen $u_{oben} = \ldots$, $u_{unten} = \ldots$
dann ohne Rücksubstitution berechnen

partielle Integration: ① wie ① bei Substitution nur mit Regel der part. Integration
② direkt bei jedem ... $u \cdot v$ - Schritt Grenzen einsetzen

Aufgaben

① Bestimme den Wert des bestimmten Integrals

a. $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$

b. $\int_3^4 x^2 + e^x\,dx$

c. $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

d. $\int_{-1}^3 \frac{1}{2x^4}\,dx$

② Bestimme den Wert des best. Integrals

a. mittels Substitution $\int_0^1 (x^2+2)^3 \cdot 2x\,dx$, $u = x^2+2$

b. mittels partieller Integration $\int_0^{\pi} 3x \sin x\,dx$

c. mittels Substitution $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(3x)\,dx$, $u = 3x$

d. mittels partieller Integration $\int_0^1 x \cdot e^x\,dx$

gerne mal beide Methoden ausprobieren (siehe Zusammenfassung) um zu schauen, was ihr persönlich lieber verwendet

③ Bestimme den Wert des best. Integrals. Ist f eine gerade / ungerade Funktion?

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \int_{-3}^{3} -x^3 + 5x\,dx$$

④ Berechne die Fläche A

a. die von f und der x-Achse im Intervall $[2, 5]$ eingeschlossen wird. $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$

b. die von f und g im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ eingeschlossen wird. $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(\frac{x}{2})$

c. die von f und g im Intervall $[0, 5]$ eingeschlossen wird. $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = 4x - 2$

⑤ Bestimme eine Zwischenstelle ξ, mit der der MWS gültig ist für $f(x) = x^5 + 2$ im Intervall $[0,2]$

⑥ Schätze mit dem MWS den Wert für das bestimmte Integral $\int_1^4 \frac{1}{2}x^2 + 3\,dx$ ab.