Tutorium 12

THEMA: Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Zusammenfassung

- $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to W \subseteq \mathbb{R}^m$, $x \mapsto f(x) = y$

mit 1) $n = 1$, $m = 1$: Funktion (wie bisher) $D \subseteq \mathbb{R} \to W \subseteq \mathbb{R}$ — $x \mapsto f(x)$

2) $n > 1$, $m = 1$: skalare Funktion $D \subseteq \mathbb{R}^n \to W \subseteq \mathbb{R}$ — $(x_1, \dots x_n) \mapsto f(x_1, \dots x_n)$

↳ Ergebnis: Zahl

3) $n > 1$, $m > 1$: vektorwertige Funktion (Vektorfunktion) $D \subseteq \mathbb{R}^n \to W \subseteq \mathbb{R}^m$ — $(x_1, \dots x_n) \mapsto \vec{f}(x_1, \dots x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots x_n) \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots x_n) \end{pmatrix}$

4) $n = 1$, $m > 1$: Kurve $D \subseteq \mathbb{R} \to W \subseteq \mathbb{R}^n$ — $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

---

zu 2) skalare Funktion

- Stetigkeit: $\vec{f}$ stetig in $P = (x^*, y^*) \in D(f)$

wenn für alle Folgen $P_k = (x_k, y_k) \in D(f)$ mit $x_k \to x^*$, $y_k \to y^*$

$\lim_{k \to \infty} f(x_k, y_k) = f(x^*, y^*)$ gilt

$\vec{f}$ stetig auf ganz $D(f)$

wenn f in jedem $P \in D(f)$ stetig

- Höhenlinie / Niveaulinie mit $n = 2$ = Menge der Punkte in Ebene, an denen $f(x,y) = c$ konstanten Wert hat

$\to \{(x,y) \mid f(x,y) = c\}$

- Graph$(f) = \{(x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Graph = Fläche $z = f(x,y)$

---

zu 3) vektorwertige Funktion

- Stetigkeit: $\vec{f}$ stetig $\Leftrightarrow$ $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots f_m(\vec{x})$ stetig

$\vec{f}: \vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$

---

zu 4) Kurve

- Kurve = Abbildung $X: \underbrace{[\alpha, \beta]}_{\text{Parameterintervall}} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\underbrace{t}_{\text{Kurvenparameter}} \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

(Raumkurve = Kurve mit $n = 3$)

Parameterdarstellung
→ Orientierung der Kurve
→ unendlich viele je Kurve
→ eine bestimmte Kurve eindeutig

- $t_1 < t_2 \Rightarrow X(t_1) \to X(t_2)$ Kurve wird mit steigendem t durchlaufen

- $X(\alpha) = \begin{pmatrix} x_1(\alpha) \\ \vdots \\ x_n(\alpha) \end{pmatrix}$ Anfangspunkt, $X(\beta) = \begin{pmatrix} x_1(\beta) \\ \vdots \\ x_n(\beta) \end{pmatrix}$ Endpunkt
- geschlossene Kurve $\Leftrightarrow X(\alpha) = X(\beta)$
- doppelpunktfreie Kurve $\Leftrightarrow$ „keine Doppelpunkte" (außer $X(\alpha), X(\beta)$)
  d.h. einem Kurvenpunkt $\hat{=}$ genau ein Parameterwert t
- stetig bzw. stetig differenzierbar
  $\Longleftrightarrow x_1(t), \dots x_n(t)$ stetig bzw. stetig differenzierbar

- Partielle Ableitung (bei skalaren Funktionen)
  - bisher: Ableitung bei Funktionen mit 1 Variablen
    jetzt: Ableitung bei Funktionen mit ≥ 2 Variablen
    → gewöhnliche Ableitung nach betreffender Variable, andere Variablen dabei wie Konstanten behandeln („Zahl")
    $\hat{=}$ partielle Ableitung (1. Ordnung)
    → höhere Ordnung: Wiederholung des Verfahrens 1. Ordnung für entsprechende weitere Variablen

    Bsp.: $f_{xy}(x,y)$ (2. Ordnung)
    $\hat{=}$ erst $f_x(x,y)$, dann $f_y(f_x(x,y))$
  - 2 Variablen:
    $f: D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to W(f) \subseteq \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto f(x,y)$
    1. Ordnung Bsp: $f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \left(= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}\right)$
    2. Ordnung Bsp: $f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$
  - Satz von Schwarz: Reihenfolge der Ableitungen p-ter Ordnung von f vertauschbar,
    wenn alle stetig
    → Bsp.: $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$
    $f_{xyz}(x,y,z) = f_{xzy}(x,y,z) = f_{yxz}(x,y,z)$
    $= f_{yzx}(x,y,z) = f_{zxy}(x,y,z) = f_{zyx}(x,y,z)$
- Ableitung von vektorwertigen Funktionen → $\vec{f}: \vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots x_n) \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots x_n) \end{pmatrix}$
  mit Jacobi-Matrix
  $$D_{\vec{f}}(\vec{x^*}) = \vec{f}'(\vec{x^*}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x^*}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x^*}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x^*}) \\ \dots & \dots & & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x^*}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x^*}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x^*}) \end{pmatrix}$$

Aufgaben

① Bestimme und skizziere die Höhenlinien H_c der Funktion

a. $f(x,y) = y - x$ zu den Höhen $c \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

b. $f(x,y) = x \cdot y$

c. $f(x,y) = \sqrt{y-x}$ zu den Höhen $c_1 = 0$, $c_2 = 3$

d. $f(x,y) = \cos(4(x^2+y^2) - 2\pi)$ zur Höhe $c = 1$

② Bestimme die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion

a. $f(x,y) = \cos(x^2+y)$

b. $f(x,y,z) = e^{x^2 y} \cdot y^2 + z$ und alle gemischten 2. Ordnung

c. $f(x,y) = \sin(x^2 \cdot e^{3y})$

③ Bestimme die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion

a. $f(x,y) = x^2 \cdot 3y + x^3$

b. $f(x,y) = \sin(x^2 \cdot 3y)$

c. $f(x,y) = x e^{xy}$

④ Erfüllt die Funktion $\omega(x,y,z) = x^2 + y \cdot z$ die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \omega(x,y,z)}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 \omega(x,y,z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \omega(x,y,z)}{\partial y \partial z} \right) = 0 \text{ ?}$$

⑤ Bestimme die Jacobi-Matrix D_f der Funktion und berechne $D_f(\cdot\cdot)$

a. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + 3x_1 - 1 \\ x_1^2 + 7x_2 \end{pmatrix}$, $D_f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 - \sqrt{x_2}\, x_3^3 \\ 3\cos(x_1+x_2) + \sqrt{x_3^3} \end{pmatrix}$, $D_f\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D_f\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

⑥ Bestimme je 2 verschiedene Parameterdarstellungen des Graphen der Funktion

a. $f(x) = (x-3)^2$, $x \in [-1, 4]$

b. $f(x) = m(x - \alpha) + b$, $x \in [0, |\alpha|]$