HTWK
Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig

Prof. Dr. habil.
H.-J. Dobner

§22. Reihen

=>> INFORMATIK Summenwertdarstellung reeller Zahlen.

Die Zifferndarstellung einer reellen Zahl R_B die kleiner 1 ist, lautet im Stellenwertsystem

$$R_B = \pm\left(0.z_1 z_2 \ldots z_m \ldots\right)_B$$

2/7=0.28571.. $=2\cdot 10^{-1}+8\cdot 10^{-2}+5\cdot 10^{-3}+7\cdot 10^{-4}+\ldots$

Der Wert von R_B bestimmt sich durch

$$R_B = \pm\underbrace{\left(z_1 B^{-1} + z_2 B^{-2} \ldots + z_m B^{-m} + \ldots\right)_B}_{\text{(unendliche) Reihe}}$$

Definition 1

Es sei a_k eine Zahlenfolge. Durch schrittweise Addition der ersten n Glieder erhält man eine Folge s_n mit den Gliedern

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \ldots, s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Die Folge s_n nennt man die zur Folge a_k gehörige unendliche Reihe. Das n-te Glied heißt n-te Partialsumme.

Beispiel 1

$$a_k = \frac{1}{k}, k = 1,2,3,\ldots$$

$$s_1 = 1, s_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \quad \ldots, s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Definition 2

Falls die Folge s_n der Partialsummen keinen Grenzwert besitzt, nennt man die Reihe divergent.

Die Reihe heißt konvergent, wenn s_n konvergiert. Dann setzt man

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{\mathbf{n}\to\infty} \sum_{k=1}^{\mathbf{n}} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Im Falle der Konvergenz sagt man die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

ist konvergent und nennt s den Grenzwert die Summe der unendlichen Reihe.

Beispiel 2

$$a_k = q^k, k = 0, 1, \dots$$

$$s_0 = a_0 = 1$$

$$s_1 = a_0 + a_1 = 1 + q$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - \lim_{n\to\infty} q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q}$$

Geometrische Reihe

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}\,,\ |q|<1}$$

Für $|q|>1$ wächst der Term q^{n+1} für $n\to\infty$ betragsmäßig unbeschränkt, so dass Divergenz der Folge s_n und somit der Reihe vorliegt.

Im Fall $|q|<1$ strebt q^{n+1} gegen den Grenzwert 0 und die Reihe ist konvergent.

Im Fall $q=1$ gilt für die Partialsumme $s_n=n+1$. Damit liegt Divergenz der Reihe vor.

Im Fall $q=-1$ wechselt s_n fortlaufend zwischen den Werten 1 und 0, d.h. es liegt Divergenz vor.