8. Aufgabe

Untersuchen Sie mit dem Quotientenkriterium das Konvergenzverhalten der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!\,k!}$$

Lösung

$$a_k = \frac{(2k)!}{k!\,k!} \qquad a_{k+1} = \frac{(2(k+1))!}{(k+1)!\,(k+1)!}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(2(k+1))!}{(k+1)!\,(k+1)!}\cdot\frac{k!\,k!}{(2k)!}\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{(2k+2)!}{(2k)!}\cdot\frac{k!\,k!}{(k+1)!\,(k+1)!}$$

$$\boxed{(k+1)! = k!(k+1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{(2k+2)!}{(2k)!}\cdot\frac{k!\,k!}{(k+1)!\,(k+1)!}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{\cancel{(2k)!}(2k+1)(2k+2)}{\cancel{(2k)!}}\cdot\frac{\cancel{k!}\,\cancel{k!}}{\cancel{k!}(k+1)\cancel{k!}(k+1)}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)(k+1)} = \lim_{k\to\infty}\frac{(2k+1)(2\cancel{(k+1)})}{(k+1)\cancel{(k+1)}}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{2(2k+1)}{k+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{4k+2}{k+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{4+\frac{2}{k}}{1+\frac{1}{k}} = 4 > 1$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe divergent.

Leibniz-Kriterium

a_k nichtnegativ, monoton fallend und $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$ bzw. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k} a_k$ konvergent.

9. Aufgabe

Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten (bedingte oder absolute Konvergenz) der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}$

Lösung

$$a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} \qquad \approx k$$

Bemerkung:
Quotienten- und
Wurzelkriterium versagen
$\rightarrow$ Vergleichskriterium

$$|a_k| = \left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}$$

Ein Bruch verkleinert sich, wenn der Nenner vergrößert wird.

$$> \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{k+1}} = \frac{1}{k+1} = d_k$$ divergente Minorante

$\Rightarrow$ Nach dem Minorantenkriterium nicht absolut konvergent; bedingt konvergent??

Untersuchung auf bedingte Konvergenz mit dem Leibniz-Kriterium

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \underbrace{\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}}_{b_k>0}$$

$$b_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{k+2}} < \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{k}} = b_k$$

Ein Bruch vergrößert sich, wenn der Nenner verkleinert wird.

$\Rightarrow b_k$ monoton fallend

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} = \frac{1}{\sqrt{k^2+k}} \to 0 \text{ für } k \to \infty$$

$\Rightarrow$ Konvergenz nach dem Leibniz-Kriterium

Reihe bedingt konvergent!