Kreissatz von Gerschgorin

Ist **A** eine $n \times n$ Matrix, λ Eigenwert von **A**:

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$$

$$K_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - a_{ii}| \le r_i = \sum_{k=1, k \neq i}^{n} |a_{ik}| \right\}, i = 1, 2, \ldots, n$$

Ist ein Kreis disjunkt zur Vereinigung der übrigen n-1 Kreise, so liegt in diesem Kreis genau ein Eigenwert von **A**

5. Aufgabe

Bestimmen und skizzieren Sie die Gerschgorin-Kreise der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie an Hand der Kreise eine Abschätzung für die Lage der Eigenwerte, durch Angabe der Mengen, in welcher die Eigenwerte liegen. Bestimmen Sie an Hand der Gerschgorin-Kreise den betragsgrößten Eigenwert λ^* der Matrix **A**.

Lösung

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a_{11} = 0, r_1 = 1 \\ a_{22} = 1, r_2 = 1 \\ a_{33} = -4, r_3 = 0 \\ a_{44} = -2, r_4 = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$K_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - a_{ii}| \le r_i = \sum_{k=1, k \ne i}^{n} |a_{ik}| \right\}$$

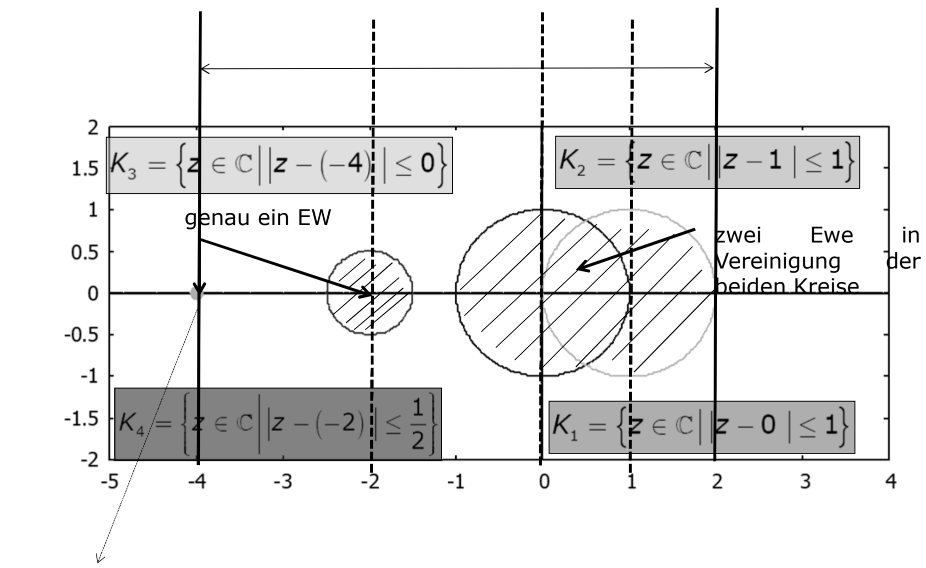
$$= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \sqrt{\left[\mathrm{Re}(z - a_{ii})\right]^2 + \left[\mathrm{Im}(z - a_{ii})\right]^2} \le r_i \right\}$$

$$K_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - 0| \le 1 \right\}$$

$$K_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - 1| \le 1 \right\}$$

$$K_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - (-4)| \le 0 \right\}$$

$$K_4 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - (-2)| \le \frac{1}{2} \right\}$$



betragsgrößter Eigenwert $\lambda^* = -4$

Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner, HTWK Leipzig, MNZ