

Aufgaben 1

1. Aufgabe

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \ln(x)}{x^3 - 3x + 2} \quad \rightarrow \text{Typ } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{3x^2 - 3} \quad \rightarrow \text{Typ } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{6x} = \frac{-1}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{(\sin(x))^2} \quad \rightarrow \text{Typ } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \cos(x^2)}{2(\sin(x) \cdot \cos(x))} \quad \rightarrow \text{Typ } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos(x^2) \cdot \sin(x^2))}{2(\cos^2(x) \cdot \sin^2(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) \cdot \sin(x^2)}{\cos^2(x) \cdot \sin^2(x)} = \frac{1}{1} = 1$$

2. Aufgabe

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} e^{x \cdot \ln(x)} = e^{\left(\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x \cdot \ln(x) \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x \cdot \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x \cdot \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x \right)$$

$$= 0 \cdot \ln 0 = 0$$

$$= e^0 = 1$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 4)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln(x^2 + 4) \cdot \frac{1}{x}} = e^{\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^2 + 4) \cdot \frac{1}{x} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^2 + 4) \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 4)}{x} \quad \rightarrow \text{Typ } \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x^2 + 4}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 + 4} \quad \rightarrow \text{Typ } \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2x} \quad \rightarrow \text{Typ } \frac{2}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0}{2} = 0$$

$$= e^0 = 1$$

3. Aufgabe

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0, \quad x_0 = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad f(1) = 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \quad f'(1) = -\frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x^5}} \quad f''(1) = \frac{3}{4}$$

$$f'''(x) = -\frac{15}{8\sqrt{x^7}}$$

$$T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{\frac{3}{4}}{2}(x-1)^2 = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2$$

$$R_2(x) = \frac{-\frac{15}{8\sqrt{x^7}}}{6}(x-1)^3 = -\frac{15}{48\sqrt{x^7}}(x-1)^3$$

$$\xi \quad \text{zwischen} \quad x_0 = 1 \quad \text{und} \quad x > 0$$

4. Aufgabe

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \quad , x \in [0, 1] \quad , x_0 = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \qquad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \qquad f''\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{64}{17\sqrt{17}}$$

$$f'''(x) = -\frac{3x \cdot (1+x^2)^2}{\sqrt{(1+x^2)^9}}$$

$$T_2(x) = \frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{17\sqrt{17}} \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right)^2$$

$$R_2(x) = -\frac{3\xi \cdot (1+2\xi)^2}{\sqrt{(1+\xi^2)^9}} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right)^3$$

$$\xi \quad \text{zwischen} \quad x_0 = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad x \in [0, 1]$$

Das Restglied R_2 kann den Wert Null annehmen, wenn z.B. x den Wert 0.25 annimmt. Somit ist ein Faktor Null, was das ganze Produkt Null werden lässt.

5. Aufgabe

$$f(x) = (1+x)^3 + e^{-2x}, \quad x \in [-1, 1], \quad x_0 = 0$$

$$f(x) = (1+x)^3 + e^{-2x}$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + e^{-2x} \qquad f(0) = 2$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 - 2e^{-2x} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = 6x + 6 + 4e^{-2x} \qquad f''(0) = 10$$

$$f'''(x) = 6 - 8e^{-2x}$$

$$T_2(x) = 2 + 1(x-0) + \frac{10}{2}(x-0)^2 = 2 + x + 5x^2$$

$$R_2(x) = \frac{1}{6} \cdot (6 - 8e^{-2\xi}) \cdot (x-0)^3 = \frac{1}{6} \cdot (6 - 8e^{-2\xi}) \cdot x^3$$

$$\xi \text{ zwischen } x_0 = 0 \text{ und } x \in [-1, 1]$$

Restglied Abschätzen:

$$\begin{aligned} |R_2(x)| &= \left| \frac{1}{6} \cdot (6 - 8e^{-2\xi}) \cdot x^3 \right| \\ &\leq \frac{1}{6} \cdot (|6| + |-8e^{-2\xi}|) \cdot |x^3| \\ &= \frac{1}{6} \cdot (6 + 8e^{-2\xi}) \cdot |x^3| \end{aligned}$$

worst-case-Abschätzung:

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{6} \cdot (6 + 8e^2) \cdot |x^3| \\ &\leq 10.8521 \cdot |x^3| \end{aligned}$$