1 Seminar 1 - L'Hospital + Taylorsche Formel

1.1 L'Hospital

Erste l'Hospitalsche Regel

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Zweite l'Hospitalsche Regel

$$\lim_{x \to x_0} |g(x)| = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Die Erste Untersucht 0/0
Die Zweite setzt vorraus, dass g gegen +/- Unendlich geht

1.1.1 1. Aufgabe

Bestimmen Sie mittels der Regel(n) von de L'Hospital den Funktionenlimes

$$\lim_{x \to 0} \frac{10^{2x} - 2 + 10^{-2x}}{10^{2x} - 10^{-2x}}$$

Werkzeug:

$$\boxed{(\mathrm{I})\, f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}}$$

Damit erstmal umformulieren:

$$\frac{10^{2x} - 2 + 10^{-2x}}{10^{2x} - 10^{-2x}} \xrightarrow[(\mathrm{I})]{} 10^{2x} = e^{2x\ln(10)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{10^{2x} - 2 + 10^{-2x}}{10^{2x} - 10^{-2x}} \underset{(\mathrm{II})}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x\ln(10)} - 2 + e^{-2x\ln(10)}}{e^{2x\ln(10)} - e^{-2x\ln(10)}}$$

Typ 0/0

Nächstes Werkzeug:

$$\text{(II)}\left(e^{2x\ln(10)}\right)' = 2\ln(10)10^{2x}$$

Daraus ergibt sich:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\ln(10)\cdot 10^{2x} - 2\cdot\ln(10)\cdot 10^{-2x}}{2\cdot\ln(10)\cdot 10^{2x} + 2\cdot\ln(10)\cdot 10^{-2x}} = 0$$

1.1.2 2. Aufgabe

$$\lim_{x\to 0, x>0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^x$$

1. Typ bestimmten: Unendlich(hoch)0
Nicht für die Regeln 1/2 geeignet
Werkzeug:

$$\text{(I)}\, f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$$

Daraus folgt: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^x \underset{\text{(I)}}{=} \lim_{x\to 0} e^{x\cdot\left[\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]}$

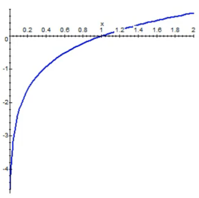
Weiter Umstellen mit Multiplikationstheorem: $\log(x\,y) = \log(x) + \log(y)$

$$= \lim_{x\to 0} e^{x\cdot\left[\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(x^2)\right]} = \lim_{x\to 0} e^{x\cdot\left[-\ln(x^2)\right]}$$

Weiter Umstellen, da e-fkt stetig:

$$\underbrace{=}_{\text{e Fktn stetig}} e^{\lim_{x\to 0} x\cdot\left[-\ln(x^2)\right]} = e^{-\lim_{x\to 0} x\cdot\ln(x^2)}$$

Typbestimmung... wie verhält sich der logarithmus ?



Typ - Unendlich * 0

Werkzeug:

$$(\mathrm{II})\, u(x)\,v(x) \underset{\text{Umformung}}{\rightarrow} \frac{u(x)}{1/v(x)}$$

Daraus ergibt sich: $$\lim_{x\to 0} x\cdot \ln(x^2) = \lim_{x\to 0} \ln(x^2)\cdot x \underset{(\mathrm{II})}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2)}{\frac{1}{x}}$$

Was ist, wenn x gegen 0 geht ? = -Unendlich/Unendlich

Anwendung 2. L'Hospital regel: $$\underset{"\frac{-\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2x = 0$$

Jetzt wieder zusammensetzten: $$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x\to 0} e^{-x\cdot \ln(x^2)} = e^0 = 1$$