29.2 Fourier-Reihen

Taylor–Reihe: Darstellung differenzierbarer Funktionen durch Potenzreihen

Problem: Darstellung unstetiger Funktionen

Fourier–Reihe: Darstellung unstetiger Funktionen durch trigonometrische Reihen

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\,x) + b_k \sin(k\,x)\right) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Definition 1

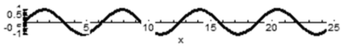
f heißt periodisch mit der Periode $p>0$ (p–periodisch), wenn gilt

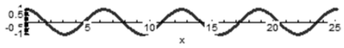
$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x) = f(x+p)$$

Wir gehen von der Periode 2π aus, denn durch die Maßstabsänderung

$$x = \frac{p}{2\pi}t \;\Leftrightarrow\; t = \frac{2\pi}{p}x$$

geht jede p–periodische Funktion in eine 2π–periodische Funktion über.

$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$ 

$\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ 

<u>Definition 2</u>

Sei f eine 2π- periodische Funktion, welche im Perioden-intervall $[0, 2\pi]$ integrierbar ist.

Dann heißen die Zahlen

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \qquad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx\ ,\ k = 1,2,3,\ldots \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx\ ,\ k = 1,2,3,\ldots \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$$

die Fourier–Koeffizienten der Funktion f.

Die mit den Fourier–Koeffizienten von f gebildete trigonometrische Reihe

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\,x) + b_k \sin(k\,x)\right)$$

heißt Fourier–Reihe von f. Das Symbol $\sim$ bedeutet

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\,x) + b_k \sin(k\,x)\right)$$

dass der Funktion f formal die Fourier-Reihe zugeordnet wird, wobei auf die Konvergenz der Reihe und die Darstellung des Funktionswertes $f(x)$ keine Rücksicht genommen wird. Die endliche Summe

$$F_n(f(x)) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\,x) + b_k \sin(k\,x)\right), n \in \mathbb{N}$$

bezeichnet man als das n-te Fourier–Polynom zu f.

Bemerkung

Hat die Funktion f die Periode p, so ersetzt man f durch die 2π-periodische Funktion

$$f^*(x) = f\left(\frac{p}{2\pi} \cdot t\right)$$

und berechnet die Fourier-Entwicklung von f^*; um die Fourier-Entwicklung von f zu erhalten, muss man die Substitution wieder rückgängig machen.