2. Aufgabe

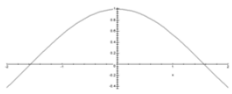
Beweisen Sie:

Ist f eine stetige, gerade Funktion auf dem Intervall $[-a,a]$, d.h.

$$\forall x \in [-a,a] : f(x) = f(-x)$$

dann gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$



Lösung

Additivität bzgl. des Integrationsintervalls

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{-a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Umkehrung der Integrationsgrenzen

$$= \underline{\underline{-}}\int_{0}^{-a} f(x)\,\underline{\underline{dx}} + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Substitution im ersten Integral $u=-x$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x) = -1 \Rightarrow \underline{\underline{du = -\,dx}}$$

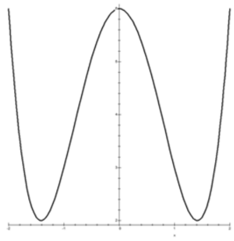
$$x = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$x = -a \Rightarrow u = a$$

$$= \int_{0}^{a} f(-u)\,\underline{\underline{du}} + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(-u)\cdot du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(u)\cdot du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

f gerade $f(-u)=f(u)$



3. Aufgabe

Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_{-2}^{2} \underbrace{\left(x^4 - 2x^2 + 6\right)}_{f(x)} dx$$

Lösung

$f(x) = x^4 - 2x^2 + 6$ und $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 6$

$\Rightarrow f(x) = f(-x)$ d.h. gerade Funktion

$$\int_{-2}^{2} \left(x^4 - 2x^2 + 6\right) dx \overset{\text{2.Aufgabe}}{=} 2\int_{0}^{2} \left(x^4 - 2x^2 + 6\right) dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{\boxed{2}}{3}x^3 + 6x\right]_0^2 = 2\left(\frac{1}{5}\cdot 32 - \frac{\boxed{2}}{3}\cdot 8 + 6\cdot 2\right) - 2\cdot(0) = \frac{\boxed{392}}{15}$$