

1 21. Die Taylorsche Formel

Funktion = Summe eines Polynoms + Fehlerterm (Restglied)

Problem: Funktionen auf Rechner darstellen (sin,cos,Expo,..)

Grundidee:

f(x) durch Polynom Pn(x) approximieren (annähern)

Polynom :

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, a_k \in \mathbb{R}, x \in I \subseteq \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

1. Forderung 0 ist im Intervall enthalten

Ansatz:

Wert von f an der Stelle x (exakt)

Näherung + Rest

$$\underbrace{f(x)}_{\text{exakt}} = \underbrace{P_n(x)}_{\text{Näherung}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Rest (Fehler)}}, x \in I, 0 \in I$$

Weitere Forderung:

an der Stelle 0 soll der Funktionswert und der Wert der k'ten Ableitung von k=0 (0.ableitung)

$$\underbrace{f^{(k)}(0)}_{\text{gegeben}} = P_n^{(k)}(0), k = 0, 1, 2, \dots, n$$

k'te Ableitung eines Polynoms:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

$$k = 1 \Rightarrow (P_n(x))' = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2x + 3 \cdot a_3x^2 + \dots + n \cdot a_nx^{n-1}$$

$$k = 2 \Rightarrow (P_n(x))'' = 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3x + \dots + n \cdot (n-1) a_nx^{n-2}$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$$

1.0.1 Näherungspolynom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) \underbrace{(x-0)^k}_{\text{Stelle 0 geht als Funktionswert ein}}$$

Stelle 0 geht als Funktionswert ein

Wenn x(hoch)k (x-0)(hoch)k

Problem: 0 nicht im Intervall ?

Forderung ist gleich, bzw bezieht sich auf x0

= (x-x0)(hoch)k

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k$$

1.1 Satz von Taylor

Funktion f soll in einem Intervall, $n+1$ mal stetig differenzierbar sein.
d.h. Ableitungen existieren und sind stetig

Formel:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{Taylorpolynom } n\text{-ter Ordnung (Hauptteil)}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n \text{ Restglied von Lagrange}}$$

Entwicklungspunkt $x_0 =$ beliebig, aber fest aus Intervall

Zwischenstelle *Symbol* liegt zwischen x und x_0 , kann also kleiner als x oder auch größer sein.

1.1.1 Fehlerabschätzung

$n+1$. Ableitung beschränkt im Intervall I .

= Für alle x aus I der Betrag der $n+1$ Ableitung von f an der Stelle x kleiner 0 einer Konstanten ist

$f^{(n+1)}$ beschränkt in I , d. h. $|f^{(n+1)}(x)| \leq M, x \in I$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f(x) - P_n(x)| &= |R_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x-x_0)^{n+1} \right| \\ &= \frac{1}{(n+1)!} |(x-x_0)^{n+1}| |f^{(n+1)}(\xi)| \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} |(x-x_0)^{n+1}| M \end{aligned}$$

Man sieht:

1. Je größer das n , desto kleiner wird der Faktor $1/(n+1)!$
auf Deutsch: mit Größerem n wird die approximation besser
2. Je weiter das x von x_0 weg liegt, desto größer wird der Betrag $x-x_0$,
desto mehr Einfluss hat der Term auf die Genauigkeit

1.1.2 Beispiel 1

Die Berechnung von Wurzeln - Wurzel(42)

mit TaylorPolynom 1. Ordnung; Entwicklungspunkt x_0 größer 0

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \text{Taylorpolynom } \sqrt{x_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_0}} (x - x_0)$$

setzen x ein (Wurzel(42)) und bestimmen $x_0 = 36$

$$\sqrt{x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_0}} (x - x_0) \Rightarrow \sqrt{42} \approx \sqrt{36} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{36}} (42 - 36)}_{\frac{6}{12}} = 6.5$$

Umstellen für Fehlerabschätzung des Restglieds

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)^2$$

$$\left| f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) \right| = \left| \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)^2 \right|$$

$$R_1 = \frac{1}{2!} f''(\xi) (x - x_0)^2$$

Fehlerabschätzung des Restglieds

Brauchen 2. Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

Dann einsetzen, ergibt:

$$\Rightarrow R_1 = \frac{1}{2!} \cdot \left(-\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\xi^3}} \right) (x - x_0)^2$$

Umstellen und einsetzen:

$$= -\frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{\xi^3}} (42 - 36)^2, \xi \text{ zwischen } x = 42 \text{ und } x_0 = 36$$

Jetzt alles zusammen packen:

$$\left| \underbrace{\sqrt{42} - \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) \right)}_{=6.5} \right| = \underbrace{\left| \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)^2 \right|}_{R_1} = \left| -\frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{\xi^3}} (6)^2 \right|$$

Den Abschnitt mit XI[ksi] verkürzen

$$\left| -\frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{\xi^3}} (6)^2 \right| = \left| -\frac{36}{8} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\xi^3}}_{>0}} \right| = \frac{18}{4} \frac{1}{\sqrt{\xi^3}}$$

Ein Bruch vergrößert sich, wenn der Nenner verkleinert wird.

Der Schlimmste Fall ist, wenn XI gleich X0, also 36 ist:

$$\leq \frac{18}{4} \frac{1}{\sqrt{36^3}}$$

$$= \frac{18}{4} \cdot \frac{1}{216} = \frac{1}{48} = 0.02083.. \leq 0.021$$

Zusammenfassung:

Fehlerabschätzung

$$|\sqrt{42} - 6.5| = \left| \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)^2 \right| = \left| -\frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{\xi^3}} (6)^2 \right| \leq 0.021$$

$$|\sqrt{42} - 6.5| \leq 0.021 \Rightarrow$$

$$6.5 - 0.021 \leq \sqrt{42} \leq 6.5 + 0.021$$

Fehlerterm $-\frac{36}{8} \frac{1}{\sqrt{\xi^3}}$

ist negativ, d. h., der tatsächliche Wert ist kleiner als der berechnete Wert 6.5.

Intervall, in dem die Wurzel liegt:

$$\sqrt{42} \in [6.5 - 0.021, 6.5] = [6.479, 6.5]$$

1.1.3 Beispiel 2

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, x_0 = 1, x \geq 1, n = 2$$

1. Schritt: Ableitungen + x0 einsetzen

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3} \rightarrow f'(1) = -2$$

$$f''(x) = \frac{6}{x^4} \rightarrow f''(1) = 6$$

$$f'''(x) = -\frac{24}{x^5} \quad f(x) = \frac{1}{x^2} = 1 + (-2) \frac{(x-1)}{1!} + 6 \frac{(x-1)^2}{2!} + R_2$$

Nun kommt die Fehlerabschätzung des Restglieds:
 Erstmal wieder Kürzen:

$$\underbrace{1 + (-2) \frac{(x-1)}{1!} + 6 \frac{(x-1)^2}{2!}}_{1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2}.$$

Mit dem Restglied:

$$R_2 = \frac{1}{3!} \cdot \frac{-24}{\xi^5} (x-1)^3 = -\frac{4}{\xi^5} (x-1)^3, 1 \leq \xi \leq x$$

Und die Abschätzung: eig 1 Einsetzten und schauen, was passiert

$$|R_2| = \left| -\frac{4}{\xi^5} (x-1)^3 \right|_{1 \leq \xi \leq x} = \left| -\frac{4}{\xi^5} \right|_{1 \leq \xi \leq x} \cdot \left| (x-1)^3 \right|_{1 \leq \xi \leq x} \leq 4 \cdot \left| (x-1)^3 \right|$$

1.1.4 Beispiel 3

$$f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + e^{-x}, x \in [-1, 1]$$

Wie immer erstmal Ableitungen + Einsetzen:

$$f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + e^{-x} \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - e^{-x} \Rightarrow f'(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f''(x) = 1 + x + e^{-x} \Rightarrow f''(0) = 1 + 1 = 2$$

Für Restglied wird dritte Ableitung benötigt

$$f'''(x) = 1 - e^{-x}$$

Für e gilt:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{e} - 1$$

Jetzt alles in die Formel einsetzen:

Taylorpolynom zweiter Ordnung um Entwicklungspunkt

$x_0=0$ aufstellen:

$$1 + x^2$$

Restglied und Lage von ξ angeben !!

$$R_2(x) = \frac{1}{3!}(1 - e^{-\xi})x^3, \quad \xi \text{ zwischen } x_0=0 \text{ und } x \in [-1, 1]$$

Restglied abschätzen Dreiecksungleichung $|a+b| \leq |a| + |b|$

$$|R_2(x)| = \left| \frac{1}{3!}(1 - e^{-\xi})x^3 \right| \leq \frac{1}{6}(|1| + |-e^{-\xi}|)|x^3| \quad \text{worst-case-Abschätzung}$$

$$= \frac{1}{6}(1 + e^{-\xi})|x^3| \leq \frac{1}{6}(1 + e)|x^3| \leq 0.6197|x^3|$$

$\xi \text{ zwischen } x_0=0 \text{ und } x \in [-1, 1]$