$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **absolut konvergent**, wenn

die Reihe der Beträge konvergent $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Eine konvergente Reihe, welche nicht absolut konvergent ist, heißt **bedingt konvergent**.

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ bedingt konvergent

Majorantenkriterium

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent Reihe mit $c_k \geq 0$

Gilt $|a_k| \leq c_k$ für alle $k \geq m$ $(m \text{ fest})$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Minorantenkriterium

$\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ divergente Reihe mit $d_k \geq 0$

Gilt $a_k \geq d_k$ für alle $k \geq m$ $(m \text{ fest})$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

4. Aufgabe

Beweisen Sie mit dem Majorantenkriterium, die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Lösung

$$a_k = \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k \cdot k}$$

Für $k \geq 2$ gilt

Ein Bruch vergrößert sich, wenn der Nenner verkleinert wird.

$$< \frac{1}{k \cdot (k-1)}$$

1. Aufgabe $\rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k \cdot (k-1)}}_{c_k \geq 0}$ konvergent

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k-1)}$$

Dann ist nach dem Majorantenkriterium $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent

5. Aufgabe

Untersuchen Sie mit dem Majoranten/Minoranten-Kriterium, die Konvergenz der Reihen

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{5k-1}$, b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k + \sqrt{k}}$.

Lösung

Ein Bruch verkleinert sich, wenn der Nenner vergrößert wird.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{5k-1}$

$$a_k = \frac{5}{5k-1} = \frac{1}{k - \frac{1}{5}} > \frac{1}{k} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ divergent}$$

Dann ist nach dem Minorantenkriterium $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{5k-1}$ divergent

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k + \sqrt{k}}$

$$|a_k| = a_k = \frac{1}{\underbrace{2^k + \sqrt{k}}_{>0}} \le \frac{1}{2^k} = c_k$$

Ein Bruch vergrößert sich, wenn der Nenner verkleinert wird.

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ konvergent}$$

Dann ist nach dem Majorantenkriterium

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k + \sqrt{k}}$ konvergent