6. Aufgabe

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Lösung

$a_k = \binom{\alpha}{k}, x_0 = 0$

$$\binom{\alpha}{k} := \begin{cases} 1, k = 0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}, k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$a_k = \binom{\alpha}{k}, x_0 = 0$

$$\binom{\alpha}{k} := \begin{cases} 1, k = 0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}, k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

1. Fall:

$\alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Faktor für $k = \alpha + 1$ wird Null $\Rightarrow a_k = \binom{\alpha}{k} = 0$ für $k > \alpha$

$\Rightarrow$ die Potenzreihe ist eine endliche Summe, also ein Polynom

$$\sum_{k=0}^{k \leq \alpha} \binom{\alpha}{k} x^k$$

und daher für alle reellen Zahlen x konvergent, d.h. $\rho = \infty$.

$$a_k = \binom{\alpha}{k}, x_0 = 0$$

$$\binom{\alpha}{k} := \begin{cases} 1, k = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}, k = 1,2,\ldots \end{cases}$$

2. Fall:

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

Bestimmung des Konvergenzradius ρ mit dem Quotientenkriterium

$$a_k = \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} \qquad k \geq 1$$

$$a_{k+1} = \binom{\alpha}{k+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{(k+1)!}$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$\binom{\alpha}{k+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k)}{(k+1)!}$$

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{k}}{\binom{\alpha}{k+1}} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} \quad \frac{(k+1)!}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(\alpha-k)} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\cancel{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}}{\cancel{k!}} \quad \frac{\cancel{k!}(k+1)}{\cancel{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}(\alpha-k)} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k+1}{\alpha-k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1+\underbrace{\frac{1}{k}}_{\to 0}}{\left|\underbrace{\frac{\alpha}{k}}_{\to 0}-1\right|} = 1$$