6. Aufgabe

Berechnen sie die Determinante der folgenden Matrix

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & \alpha & 0 & \beta\\ -\alpha & 0 & \gamma & 0\\ 0 & -\gamma & 0 & \delta\\ -\beta & 0 & -\delta & 0\end{pmatrix},\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$$

Lösung

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}0 & \alpha & 0 & \beta\\ -\alpha & 0 & \gamma & 0\\ 0 & -\gamma & 0 & \delta\\ -\beta & 0 & -\delta & 0\end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der 1. Zeile

Entwicklung nach der 1. Zeile

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\overset{+}{0} & \overset{-}{\alpha} & \overset{+}{0} & \overset{-}{\beta}\\ \overset{-}{-\alpha} & \overset{+}{0} & \overset{-}{\gamma} & \overset{+}{0}\\ \overset{+}{0} & \overset{-}{-\gamma} & \overset{+}{0} & \overset{-}{\delta}\\ \overset{-}{-\beta} & \overset{+}{0} & \overset{-}{-\delta} & \overset{+}{0}\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}0 & \alpha & 0 & \beta\\ -\alpha & 0 & \gamma & 0\\ 0 & -\gamma & 0 & \delta\\ -\beta & 0 & -\delta & 0\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}0 & \alpha & 0 & \beta\\ -\alpha & 0 & \gamma & 0\\ 0 & -\gamma & 0 & \delta\\ -\beta & 0 & -\delta & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\cdot\alpha\begin{vmatrix}-\alpha & \gamma & 0\\ 0 & 0 & \delta\\ -\beta & -\delta & 0\end{vmatrix}+(-1)\cdot\beta\begin{vmatrix}-\alpha & 0 & \gamma\\ 0 & -\gamma & 0\\ -\beta & 0 & -\delta\end{vmatrix}$$

Jeweils Entwicklung nach der 2. Zeile

Jeweils Entwicklung nach der 2. Zeile

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$|\mathbf{A}| = (-1)\cdot\alpha \begin{vmatrix} -\alpha & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\delta} \\ -\beta & -\delta & 0 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\beta \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \boxed{-\gamma} & 0 \\ -\beta & 0 & -\delta \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot(-1)\cdot\alpha\cdot\boxed{\delta}\cdot \begin{vmatrix} -\alpha & \gamma \\ -\beta & -\delta \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)\cdot\beta\cdot(\boxed{-\gamma})\cdot \begin{vmatrix} -\alpha & \gamma \\ -\beta & -\delta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

$$= \alpha\cdot\delta\cdot\left[(-\alpha)\cdot(-\delta) - (-\beta)\cdot\gamma\right] + \beta\cdot\gamma\cdot\left[(-\alpha)\cdot(-\delta) - (-\beta)\cdot\gamma\right]$$

$$= \alpha\cdot\delta\cdot\left[\alpha\cdot\delta + \beta\cdot\gamma\right] + \beta\cdot\gamma\cdot\left[\alpha\cdot\delta + \beta\cdot\gamma\right]$$

$$= \alpha^2\delta^2 + 2\alpha\beta\gamma\delta + \beta^2\gamma^2$$