Aufgabe 11

$\int_1^e \frac{ln(x)}{x\cdot\sqrt{1+(ln(x))^2}}dx \qquad u = ln(x) = g(x) \qquad g'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow dx = \frac{du}{\frac{1}{x}} \quad du = \frac{1}{x}dx$

$\int_1^e \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}du = \sqrt{1+u^2} = \sqrt{1+(ln(x))^2} + C$

$\int_1^e \frac{ln(x)}{x\cdot\sqrt{1+(ln(x))^2}}dx = \left[\sqrt{1+(ln(x))^2}\right]_1^e = \sqrt{1+(ln(e))^2} - \sqrt{1+(ln(1))^2}$

$= \sqrt{1+(1)^2} - \sqrt{1+(0)^2} = \sqrt{2} - \sqrt{1} \approx 0,4132$

Aufgabe 12

$f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x, \quad [0,4]$

Der Schnittpunkt bei $x = 2$ teilt die Fläche A in $A_1 + A_2$

$A_1 = \int_0^2 (g(x) - f(x))dx \qquad A_2 = \int_2^4 (f(x) - g(x))dx$

$A_1 = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \int_0^2 -x^2 + 2x \ \ dx$

$= -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + C = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^2$

$= (-\frac{1}{3}2^3 + 2^2) - (-\frac{1}{3}0^3 + 0^2) = (-\frac{8}{3} + 4) - (0 + 0)$

$= -\frac{8}{3} + \frac{12}{3} = \frac{4}{3}$

$A_2 = \int_2^4 (x^2 - 2)dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_2^4 = (\frac{1}{3}4^3 - 4^2) - (\frac{1}{3}2^3 - 2^2)$

$= (\frac{64}{3} - 16) - (\frac{8}{3} - 4) = (\frac{64}{3} - \frac{48}{3}) - (\frac{8}{3} - \frac{12}{3})$

$= \frac{16}{3} + \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$

$\rightarrow A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{24}{3} = 8$

Aufgabe 13

$\int_0^1 xln(x)dx$ Unstetigkeitsstelle $= 0$; stetig in $(0, 1]$

Unbeschränkt für $x \to 0$
Stammfunktion: $\frac{1}{2}x^2ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C = x^2(\frac{1}{2}ln(x) - \frac{1}{4} + C)$

Bestimmtes Integral: $\int_\alpha^1 xln(x)dx = \lim\limits_{\alpha \to 0; \alpha > 0} \left[x^2(\frac{1}{2}ln(x) - \frac{1}{4})\right]_\alpha^1$

$= 1^2(\frac{1}{2}ln(1) - \frac{1}{4}) - \lim\limits_{\alpha \to 0; \alpha > 0} \alpha^2(\frac{1}{2}ln(\alpha) - \frac{1}{4})$

$= \underbrace{(\frac{1}{2}ln(1) - \frac{1}{4})}_{= \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}} - (\lim\limits_{\alpha \to 0; \alpha > 0} \frac{1}{2} \underbrace{\underbrace{\alpha^2}_{\to 0} \underbrace{ln(\alpha)}_{\to -\infty}}_{\text{“}0 \cdot -\infty\text{“}} - \alpha^2 \frac{1}{4})$

Zum L'Hospital:
$\lim\limits_{\alpha \to 0; \alpha > 0} \alpha^2 ln(\alpha) \underbrace{=}_{\text{“}0 \cdot -\infty\text{“}} \lim\limits_{\alpha \to 0; \alpha > 0} \frac{ln(\alpha)}{\frac{1}{\alpha^2}}$

$\underbrace{=}_{\text{“}\frac{-\infty}{\infty}\text{“}} \lim\limits_{\alpha \to 0; \alpha > 0} \frac{\frac{1}{\alpha}}{-\frac{2}{\alpha^3}} = \lim\limits_{\alpha \to 0; \alpha > 0} -\frac{\alpha^3}{2\alpha} \to 0$

Der zweite Term geht gegen 0 und somit ist das Ergebnis $-\frac{1}{4}$
Dadruch ist das uneigentliche Integral **konvegent**.

Aufgabe 14

$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x(1+x^2)}}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}dx$

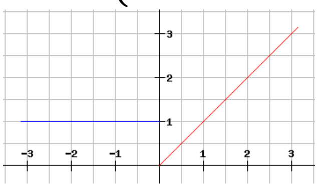
Für $\int_{1}^{\infty}$:
$|f(x)| = \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} = \frac{1}{(x+x^3)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{(x^3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{3\cdot\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

Da $\frac{3}{2} > 1$ **konvergiert** dieser Abschnitt (Majorantenkriterium).

Für $\int_{\frac{1}{2}}^{1}$:
Da man die Grenzen ($\frac{1}{2}$ und 1) und den Bereich im Intervall (zwischen $\frac{1}{2}$ und 1) problemlos einsetzten kann und es keine Unstetigkeitsstellen gibt, ist dieser Abschnitt **konvergent**
Damit folgt, dass das ganze uneigentliche Integral **konvergent** ist.

Aufgabe 15

$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$



$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{0} 1dx + \int_{0}^{\pi} xdx)$

$= \frac{1}{2\pi}([x]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\pi}) = \frac{1}{2\pi}((0-(-\pi)) + (\frac{\pi^2}{2} - \frac{0^2}{2})) = \frac{1}{2\pi}(\pi + \frac{\pi^2}{2})$

$= \frac{\pi}{2\pi} + \frac{\pi^2}{4\pi} = \frac{2\pi}{4\pi} + \frac{\pi^2}{4\pi} = \frac{2\pi+\pi^2}{4\pi} = \frac{\pi(2+\pi)}{4\pi} = \frac{2+\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0} 1cos(kx) + \int_{0}^{\pi} xcos(kx))$

$= \frac{1}{\pi}(\left[\frac{1}{k}sin(kx)\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{cos(kx)}{k^2} + \frac{xsin(kx)}{k}\right]_{0}^{\pi})$

$= \frac{1}{k\pi}([sin(kx)]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{cos(kx)}{k} + xsin(kx)\right]_{0}^{\pi})$

$= \frac{1}{k\pi}((\underbrace{sin(0)}_{\to 0} - (\underbrace{sin(k(-\pi))}_{\to 0}))) + (\frac{\overbrace{cos(k\pi)}^{(-1)^k}}{k} + \pi \underbrace{sin(k\pi)}_{\to 0} - \frac{\overbrace{cos(0)}^{\to 1}}{k}))$

$= \frac{1}{k\pi}(\frac{(-1)^k)}{k} - \frac{1}{k}) = \frac{1}{k\pi}(\frac{(-1)^k - 1}{k}) = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}$

$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin(kx) dx = \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0} 1 sin(kx) dx + \int_{0}^{\pi} x sin(kx) dx)$

$= \frac{1}{\pi}(\left[-\frac{1}{k} cos(kx)\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{sin(kx)}{k^2} - \frac{x cos(kx)}{k}\right]_{0}^{\pi})$

$= \frac{1}{k\pi}((\underbrace{-cos(0)}_{\to -1} - (-\underbrace{cos(-\pi k)}_{(-1)^k}) + ((\frac{\overbrace{sin(k\pi)}^{0}}{k} - \pi \underbrace{cos(k\pi)}_{(-1)^k}) - (\frac{\overbrace{sin(0)}^{0}}{k}))))$

$= \frac{1}{k\pi}((-1^k - 1) + (-\pi(-1)^k))$

$= \frac{1}{k\pi}((-1)^k \cdot 1 - 1 + (-\pi(-1)^k)) = \frac{1}{k\pi}((-1)^k \cdot 1 - \pi(-1)^k - 1)$

$= \frac{1}{k\pi}((-1)^k(-\pi - 1))$

$f \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cdot cos(kx) + b_k \cdot sin(kx))$

$f \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \cdot cos(kx) + \frac{1}{k\pi}((-1)^k(-\pi - 1)) \cdot sin(kx))$

Stelle $x = 0$:

$f \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \cdot cos(0) + \frac{1}{k\pi}((-1)^k(-\pi - 1)) \cdot sin(0))$

$f \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2})$

$= \frac{\pi}{2} + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}|}} = \frac{\pi}{2} + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|(-1)^k \frac{-1}{\pi k^2}|}}$

$= \frac{\pi}{2} + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|-1| \sqrt[k]{|\frac{-1}{\pi k^2}|}} = \frac{\pi}{2} + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|\frac{-1}{\pi k^2}|}}$

$= \frac{\pi}{2} + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(\frac{1}{k^2\pi})^{\frac{1}{k}}} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{1} = \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{3\pi}{2}$