32.3 Aussagen über Eigenwerte und Eigenvektoren

Satz 1

Ist **A** eine $n \times n$ Matrix, bei der alle Zeilensummen gleich s sind, dann hat **A** den Eigenwert s und

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist ein zu s gehörender Eigenvektor.

Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig

Beispiel 1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ -3 & 9 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{matrix}$$

Alle Zeilensummen sind gleich 6.

$\Rightarrow$ 6 ist Eigenwert von **A** und

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ist Eigenvektor zum Eigenwert s=6

Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig

Satz 2 Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \boxed{c_0} + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \ldots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \boxed{(-1)^n}\lambda^n$$

sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die - nicht notwendig verschiedenen – Eigenwerte von **A**. Dann gilt:

$$c_{n-1} = (-1)^{n-1}\, spur(\mathbf{A}) \quad spur(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

$$\boxed{c_0} = \det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

Ist **A** eine 3×3 Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = \boxed{c_0} + \boxed{c_1}\lambda + c_2\lambda^2 + \boxed{(-1)^3}\lambda^3$$

$$\boxed{c_1} = -\left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right\}$$

Satz 3 (Eine Eigenwertabschätzung)

Ist **A** eine $n \times n$ Matrix, dann gilt für alle Eigenwerte λ von **A** die Ungleichung $|\lambda| \le \|\mathbf{A}\|$

dabei ist $\| \; \|$ eine beliebige Matrixnorm

Beispiel 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 1 & 0 \\ -14 & -23 & 53 & 18 \end{pmatrix}$$

Zeilensummen-Norm

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,m} \sum_{k=1}^{m} |a_{ik}|$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\{2, 14, 16, 108\} = 108$$

für alle Eigenwerte λ von **A** gilt $|\lambda| \le 108$

Eigenwerte von **A** : $2, 18, 2 - i\sqrt{24}, \; 2 + i\sqrt{24},$