6. Aufgabe

Zeigen Sie, dass sich bei Überführung einer quadratischen Matrix in Dreicksform die Eigenwerte ändern.

Lösung

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow P_{\mathbf{A}}(\lambda)=|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & -1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\cdot(-1-\lambda)-6 \;=\lambda^2-7 \;\Rightarrow spek(\mathbf{A})=\left\{-\sqrt{7},\sqrt{7}\right\}$$

Überführung von **A** in Dreicksform

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{array}{c}\cdot(-3)\\ +\end{array} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -7\end{pmatrix} \quad \not\Leftrightarrow$$

7. Aufgabe

Beweisen Sie, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stets linear unabhängig sind.

Lösung

Beweis indirekt. Wir nehmen an, dass zwei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda,\mu,\ \lambda\neq\mu$ linear abhängig sind.

$\vec{x}\neq\vec{0}$ Eigenvektor von **A** zum Eigenwert $\lambda \;\Rightarrow \boxed{\mathbf{A}\vec{x}=\lambda\vec{x}}$

$\vec{y}\neq\vec{0}$ Eigenvektor von **A** zum Eigenwert $\mu \;\Rightarrow \boxed{\mathbf{A}\vec{y}=\mu\vec{y}}$

$\vec{x},\vec{y} \;\Rightarrow\; \exists\alpha\in\mathbb{K}:\vec{x}=\alpha\vec{y}$

$$\mathbf{A}\vec{x}=\mathbf{A}\alpha\vec{y}=\alpha\,\mathbf{A}\vec{y}=\alpha\,\mu\,\vec{y}=\mu\,\alpha\,\vec{y}=\mu\,\vec{x}\;\Rightarrow \underbrace{\vec{x}\text{ EV zum EW }\mu}_{}$$

Widerspruch zu

$\Rightarrow$Annahme falsch $\Rightarrow$ Beh. richtig

Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner, HTWK Leipzig, MNZ