THEMA: Reihen und Konvergenzkriterien

Zusammenfassung

- Bsp.: (Zahlen)Folge: $a_k = \frac{1}{2^k}$ mit $k = 1, \dots$, $a_1 = \frac{1}{2^1}$, $a_5 = \frac{1}{2^5}$, ...

  Reihe s_n: $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$, $s_1 = \frac{1}{2^1}$, $s_5 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}$, ...

$\Rightarrow$ Reihe = Partialsummenfolge

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k} = s$$

- Reihe konvergiert, wenn Grenzwert s existiert $\Rightarrow s =$ „Summe der Reihe" (Gegenteil: divergent)
- s_n ist die zur Folge a_k gehörige unendliche Reihe

- **konvergente Reihen**
  - $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$

    Geometrische Reihe
  - $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\beta}$ für $\beta > 1$ Bsp. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$
  - $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

- **divergente Reihen**
  - $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ für $|q| \geq 1$ $\left[\begin{array}{l} q = 1: s_n = n+1 \\ q = -1: s_n \text{ wechselnd } 0 \text{ und } 1 \end{array} \right]$

    Geometrische Reihe
  - $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\beta}$ für $0 \leq \beta \leq 1$ Bsp. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

    Harmonische Reihe

- Summe und Vielfache von konvergenten Reihen ergeben konvergente Reihe:

  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_k + \beta \cdot b_k)$ konvergent mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent

---

- **Konvergenzkriterien**
  - konvergent: ① absolut konvergent (beinhaltet bedingte Konvergenz), ② bedingt konvergent; ③ divergent } Möglichkeiten für Reihe
  - Vorgehen:

    [erkl.] a_k Nullfolge? (v.a. bei Verdacht auf nein)

    Nullfolgen-/Divergenzkriterium

    a_k Nullfolge? $\xrightarrow{\text{nein}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent

    a_k Nullfolge? $\xrightarrow{\text{ja}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent?

    QK, WK, Vgl.krit.

    $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent? $\xrightarrow{\text{konv.}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent

    $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent? $\xrightarrow{\text{div.}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv.?

    Leibniz-Kriterium

    $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv.? $\xrightarrow{\text{div.}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent

    $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv.? $\xrightarrow{\text{konv.}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bedingt konvergent

- notwendiges Kriterium: Nullfolgenkriterium / Divergenzkriterium:

a_k Nullfolge: $\lim_{k \to \infty} |a_k| = 0$ erfüllt: Konvergenz möglich
unerfüllt: divergent ($\sum_{k=1}^{\infty} a_k$)

hinreichende Kriterien: - Monotoniekriterium:

Reihe mon. fallend + nach unten beschränkt $\Rightarrow$ konvergent
$s_{n+1} - s_n \leq 0$ und $s_n \geq C$
oder mon. steigend + nach oben beschränkt
$s_{n+1} - s_n \geq 0$ und $s_n \leq C$

- Leibnizkriterium:

① Reihe alternierend
$\Rightarrow$ Faktor $(-1)^k / (-1)^{k+1}$
② $|a_k|$ monoton fallend
$\Rightarrow |a_k| \geq |a_{k+1}|$
(③ Nullfolge
$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} |a_k| = 0$ sowieso notwendig)

$\Rightarrow$ bedingt konvergent

- Vergleichskriterien:

Majorantenkriterium: $0 \leq |a_k| \leq c_k$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergente Reihe
$\Rightarrow$ absolut konvergent
Bsp. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Minorantenkriterium: $|a_k| \geq d_k \geq 0$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ divergente Reihe
$\Rightarrow$ divergent (aber nur $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$)
Bsp. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

- Quotientenkriterium (QK)

$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \Rightarrow$ absolut konvergent
(>1 divergent ($\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$)
$=1$ keine Aussage $\rightarrow$ anderes Kriterium)

- Wurzelkriterium (WK)

$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \Rightarrow$ absolut konvergent
(>1 divergent ($\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$)
$=1$ keine Aussage $\rightarrow$ anderes Kriterium)

- Rechen-Bemerkungen:

$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{c} = 1$, c ist konstante

$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{(k-1) \cdot k}$

$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{k+1}{k} \right)^k = e$

$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{k}{k+1} \right)^k = \frac{1}{e}$

Aufgaben

(1) Besteht die Möglichkeit der Konvergenz?

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$

c. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{2k-1}{2k}$

b. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(k)}$

(2) Das Minorantenkriterium zeigt Divergenz. Besteht dennoch Konvergenz? Zeige mit dem Leibniz-Kriterium!

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$

(3) Überprüfe das Konvergenzverhalten der Reihe

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k \cdot k!}{k^k}$ mit dem Quotientenkriterium

b. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \cdot 3^k}{k!}$ mit dem Quotientenkriterium

c. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{6+k}{k^2+7}\right)^k$ mit dem Wurzelkriterium

d. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{4k}\right)^k$ mit dem Wurzelkriterium

e. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{k+1}-1}{3+4^{2k}}$ mit dem Majorantenkriterium

f. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k+1)}$ mit dem Majorantenkriterium

g. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+\sqrt[k]{k}}$ mit dem Minorantenkriterium

h. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+2)}}$ mit dem Minorantenkriterium

i. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ mit dem Monotoniekriterium und dem Wissen, dass der Grenzwert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 2$ ist