Aufgaben 4

16. Aufgabe

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -19 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$\overrightarrow{u}$ … orthogonale Projektion von $\overrightarrow{a}$ in Richtung $\overrightarrow{b}$
$\overrightarrow{v}$ … Lot von $\overrightarrow{a}$ in Richtung $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{u} = \frac{\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle}{\| \overrightarrow{b} \|^2} \cdot \overrightarrow{b}$$

$$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = -19 \cdot (-4) + 3 \cdot 3 + 7 \cdot 12 = 169$$

$$\|b\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} \rangle} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 12^2} = \sqrt{169}$$

$$\overrightarrow{u} = \frac{169}{\sqrt{169}^2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -19 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 - (-4) \\ 3 - 3 \\ 7 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

17. Aufgabe

$$U = \left\{ \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{y} \right\}$$

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

18. Aufgabe

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\mathbf{A}\right) = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{2+j} \cdot a_{2\ j} \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ j}\right)$$

$$= (-1)^3 \cdot a_{2\ 1} \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ 1}\right) + (-1)^4 \cdot a_{2\ 2} \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ 2}\right)$$

$$+(-1)^5 \cdot a_{2\ 3} \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ 3}\right) + (-1)^6 \cdot a_{2\ 4} \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ 4}\right)$$

$$= -1 \cdot 2 \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ 1}\right) + 0 \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ 2}\right)$$

$$-1 \cdot 3 \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ 3}\right) + 0 \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ 4}\right)$$

$$= -2 \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ 1}\right) - 3 \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,\ 3}\right)$$

$$= -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 9 & -3 & -6 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & -3 & -10 \\ -7 & 1 & 10 \\ -8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

19. Aufgabe

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & s \\ s & 0 & s & 3s \\ 1 & 3s & 0 & 4s \\ s & 3 & 0 & 5s \end{pmatrix}$$

a) regulär $\rightarrow \det\left(\mathbf{A}\right) \neq 0$

$$\det\left(\mathbf{A}\right) = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{1+j} \cdot a_{1\ j} \cdot \det\left(\mathbf{A}_{1,\ j}\right)$$

$$= (-1)^2 \cdot 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & s & 3s \\ 3s & 0 & 4s \\ 3 & 0 & 5s \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 0 \cdot \begin{pmatrix} s & s & 3s \\ 1 & 0 & 4s \\ s & 0 & 5s \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 0 \cdot \begin{pmatrix} s & 0 & 3s \\ 1 & 3s & 4s \\ s & 3 & 5s \end{pmatrix}$$

$$+(-1)^5 \cdot s \cdot \begin{pmatrix} s & 0 & s \\ 1 & 3s & 0 \\ s & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -s \cdot \begin{pmatrix} s & 0 & s \\ 1 & 3s & 0 \\ s & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} s & 0 & s \\ 1 & 3s & 0 \\ s & 3 & 0 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 3s & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3s \\ s & 3 \end{pmatrix}$$

$$= s \cdot \begin{pmatrix} 3s & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3s \\ s & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 3s & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 3s \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3s \\ s & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 3s \cdot s = 3 + 3s^2$$

$$= s \cdot 0 + s \cdot \left(3 + 3s^2\right)$$

$$= s \cdot \left(3 + 3s^2\right)$$

$$= 3s + 3s^3$$

$$= -s \cdot \left(3s + 3s^3\right)$$

$$= -3s^2 - 3s^4$$

$$-3s^2 - 3s^4 = 0$$

$$s = 0$$

Die Matrix $\mathbf{A}$ ist regulär für alle Zahle $s \neq 0,\ s \in \mathbb{R}$.

b) $s = 2$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 9 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\left(\mathbf{A}\right)} \cdot \text{adj}\left(\mathbf{A}\right)^T$$

$$\det\left(\mathbf{A}\right) = -3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2^4 = -3 \cdot 4 - 3 \cdot 16 = -12 - 48 = -60$$

$$= -\frac{1}{60} \cdot \text{adj}\left(\mathbf{A}\right)^T$$

20. Aufgabe

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ tx_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$