31.4 Der Determinanten-Multiplikationssatz

Satz 1 (Der Determinanten-Multiplikationssatz)

Für zwei $n \times n$ Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ gilt:

(1) $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B}) \cdot \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$

Beweis:

Anwendung der Regeln zur Determinantenberechnung

Bemerkung

Der Determinanten-Multiplikationssatz lässt sich auf das Produkt endlich vieler $n \times n$ Matrizen ausdehnen.

Satz 2 (Die Determinante der Inversen)

Für eine reguläre $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ gilt:

(2) $$\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

Beweis:

Anwendung des Determinanten-Multiplikationssatzes

$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$

Beweis:

Anwendung des Determinanten-Multiplikationssatzes

$$1 = \det(\mathbf{E}) = \det\Big(\underbrace{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}}_{=\mathbf{E}}\Big) \underbrace{=}_{\text{Det. mult.satz}} \det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{A}^{-1})$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\det(\mathbf{A})\neq 0} \det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\det(\mathbf{A}^{-1})\neq 0} \det(\mathbf{A}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A}^{-1})}$$

Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig

Beispiel 1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$ aus §31.3 Beispiel 4

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \\ 6 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -4$$

$\Rightarrow$ **A** regulär

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} = \frac{-1}{4}$$

Prof. Dr. H.-J. Dobner, MNZ, HTWK Leipzig