Программа курса

1. Вероятностное пространство как математическая модель случайного эксперимента. Статистическая устойчивость.

2. Дискретное вероятностное пространство. Классическая вероятность. Построение простейших вероятностных пространств. Элементы комбинаторики. Вероятность суммы событий.

3. Геометрические вероятности. Задача "о встрече".

4. Условная вероятность. Формулы полной вероятности и Байеса.

5. Независимость событий, виды и взаимосвязь.

6. Случайные величины. Независимость случайных величин. Распределение. Примеры. Математическое ожидание, дисперсия, ковариация, корреляция. Свойства.

7. Схема испытаний Бернулли. Математическая модель, теорема Пуассона.

8. Неравенство Маркова и Чебышева. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема (б/д).

9. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, сигма-алгебры). Примеры. Минимальное кольцо, содержащее полукольцо. Понятие наименьшего кольца, алгебры, сигма-алгебры, содержащей систему множеств. Борелевская сигма-алгебра на прямой.

10. Меры на полукольцах. Классическая мера Лебега на полукольце промежутков и ее сигма-аддитивность.

11. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Наследование сигма-аддитивности при продолжении меры. Внешняя мера Лебега. Мера Лебега. Свойства. Сигма-алгебра измеримых по Лебегу множеств. Сигма-аддитивность меры Лебега на сигма-алгебре измеримых по Лебегу множеств.

12. Структура измеримых множеств. Теорема Каратеодори.

13. Полнота и непрерывность мер. Теоремы о связи непрерывности и сигма-аддитивности.

14. Мера Бореля. Меры Лебега-Стилтьеса на прямой и ее сигма-аддитивность.

15. Сигма-конечные меры.

16. Неизмеримые множества.

17. Измеримые функции. Их свойства. Измеримые функции и предельный переход.

18. Множество Кантора и кривая Кантора. Теорема о существовании композиции измеримой от непрерывной, не являющейся измеримой функцией. Неполнота меры Бореля.

19. Общее понятие вероятностного пространства, случайной величины на нем. Понятие распределения случайной величины и распределения. Понятие функции распределения случайной величины и функции распределения. Доказательство свойств функции распределения.

20. Сходимость по мере и почти всюду. Их свойства (арифметические, связь сходимостей, Теорема Рисса).

21. Теорема Егорова.

22. Интеграл Лебега для простых функций и его свойства. Определение интеграла Лебега в общем случае. Основные свойства интеграла Лебега.

23. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.

Список формулировок и определений, не ответ на которые может привести к удалению с экзамена с оценкой «неудовлетворительно»

1. Условная вероятность. Формулы полной вероятности и Байеса.

2. Независимость событий, виды и взаимосвязь.

3. Математическое ожидание, дисперсия, ковариация, корреляция.

4. Неравенство Маркова и Чебышева. Закон больших чисел.

5. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, сигма-алгебры). Понятие наименьшего кольца, алгебры, сигма-алгебры, содержащей систему множеств. Борелевская сигма-алгебра.

6. Меры на полукольцах. Сигма-аддитивности меры.

7. Внешняя мера Лебега. Измеримость множества по Лебегу.

8. Теорема Каратеодори.

9. Полнота и непрерывность мер.

10. Мера Бореля. Мера Лебега-Стилтьеса на прямой.

11. Сигма-конечные меры.

12. Измеримые функции.

13. Множество Кантора и кривая Кантора.

14. Общее понятие вероятностного пространства, случайной величины на нем. Понятие распределения случайной величины и распределения. Понятие функции распределения случайной величины и функции распределения.

15. Сходимость по мере и почти всюду. Связь сходимостей, Теорема Рисса.

16. Теорема Егорова.

17. Интеграл Лебега для конечно-простых функций. Определение интеграла Лебега в общем случае.

18. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости (для обеих видов сходимости).

Список литературы.

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1981, 1989.

2. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., Наука,1979.

3. **Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М., Факториал, 1998, 2002.**

4. **Ширяев А.Н. Вероятность. М., Наука, 1989, 2-е изд.**

5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1, 2. М., Мир, 1967.