Теория меры. Лекция 1

Эрлих Иван Генрихович

5 сентября 2019 г.

Часть I
Теория вероятностей

Основной предмет этой теории — *случайные эксперименты.*

Определение. Случайный эксперимент обладает следующими свойствами:

1. Отсутствие *детерминистической регулярности* (в частности, повторяемость)

2. *Статистическая устойчивость:* отношение частоты события к кол-ву экспериментов не должно сильно изменяться при проведении ещё одной серии из *такого же* кол-ва экспериментов

Построение математической модели эксперимента

1. Выделение набора *результатов эксперимента*

2. Построение "биекции" между набором результатов и множеством *элементарных исходов* $\Omega = \{\omega_i\}$

3. Выделение множеств *благоприятных результатов эксперимента*

4. Построение "биекции" между множествами благоприятных результатов и *событиями* $A \subseteq \Omega$

   (множество событий обозначается как $\mathcal{F}$)

Определение. *Частота события* — отношение кол-ва произошедших благоприятных результатов к кол-ву проведённых экспериментов.

5. Построение "биекции" между частотами событий и *вероятностями* (p)

Дискретная теория вероятностей

В этой подтеории Ω конечно, а значит, $|\mathcal{F}| = 2^{|\Omega|}$.

Свойства вероятности:

1. $P(\Omega) = 1$

2. $P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$

Отсюда следует, что достаточно задать[1] P для всех $\omega \in \Omega$, и тогда

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

Классическая модель

Суть: элементарные исходы *равновероятны* ($P(\omega_i) = 1/|\Omega|$).

Отсюда следует, что $P(A) = |A|/|\Omega|$.

Пример задачи:
Пусть N гостей случайно рассаживаются за круглым столом. Какова вероятность события "гости A и B сели рядом"?

Пусть элементарный исход — перестановка гостей, тогда модель — классическая, и

$$P = \frac{N \cdot 2 \cdot (N-2)!}{N!} = \frac{2}{N-1}$$

Другая классическая модель — расстояние от A до B при обходе по часовой стрелке.

Неклассическая дискретная модель

Рассмотрим *схему испытаний Бернулли:* производится серия независимых испытаний с двумя исходами $\{0, 1\}$, частота каждого из которых равна $(1-p)$ и p соответственно; элементарный исход — кортеж из n исходов $\omega_i = (i_1, \ldots, i_n)$.
Очевидно, эта модель не является классической при $p \neq 1/2$.

Вероятность каждого исхода:

$$P(\omega_i) = \prod_{j=1}^{n} p^{i_j}(1-p)^{1-i_j} = p^{\sum i_j}(1-p)^{n-\sum i_j}$$

Найдём вероятность события "среди исходов было k единиц": поскольку $\sum i_j = k$, то

$$P = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Геометрическая вероятность

Суть: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (т. е. модель не дискретна), и $P(A) = \mu(A)/\mu(\Omega)$.

Проблема: как определить $\mathcal{F}$? Ведь существуют неизмеримые множества, для которых вероятность не определена.

[1] На самом деле P задаётся для событий вида $\{\omega\} \subseteq \Omega$, но автор конспекта (вслед за лектором) упростил обозначение для удобства чтения.

Теория меры. Лекция 2

Эрлих Иван Генрихович

12 сентября 2019 г.

Эксперимент: случайно бросается точка в $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Вероятность в этом случае определяется как $P(A) = \mu(A)/\mu(\Omega)$.

Чтобы вероятность была определена *всегда*, необходимо ограничиться измеримыми подмножествами Ω. В таком случае второе свойство вероятности (про объединение) выполняется; в общем случае это не так, а потому $\mathcal{F}$ нужно определять отдельно.

Задача о встрече. Два друга договорились о встрече между 12 и 13 часами. Каждый из них приходит в случайный момент времени и ждёт 15 минут. Найти вероятность встречи.

$$\Omega = [12, 13]^2$$
$$A = \{(x, y) \in \Omega \mid |x - y| \le 0.25\}$$
$$\mu(\Omega) = 1$$
$$\mu(A) = \mu(\Omega) - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$
$$P(A) = \frac{7}{16}$$

Определение вероятностного пространства

Определение. *Вероятностное пространство* — тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где:

- Ω — *пространство элементарных исходов*
- $\mathcal{F}$ — *σ-алгебра* событий:
  1. $\Omega \in \mathcal{F}$
  2. $\forall \mathcal{A} \subseteq \Omega \ (\mathcal{A} \in \mathcal{F} \Rightarrow (\Omega \setminus \mathcal{A}) \in \mathcal{F})$
  3. $\forall \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n, \ldots \in \mathcal{F} \ \left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i \in \mathcal{F}\right)$
- P — *σ-аддитивная вероятностная мера*, определённая на F:
  1. $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$
  2. $P(\Omega) = 1$
  3. $\forall \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n, \ldots \in \mathcal{F}$
     $\left((\forall i, j \in \mathbb{N} \ ((i \neq j) \Rightarrow (\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \varnothing))) \Rightarrow \left(P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(\mathcal{A}_i)\right)\right)$

Условная вероятность

Определение. *Условная вероятность* $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (очевидно, что это имеет смысл только при $P(B) > 0$)

Определение. Система событий $\{B_n\}_{n=1}^{\infty\,(N)}$ называется *разбиением* Ω, если:

1. $\forall i, j \in \mathbb{N}\ ((i \neq j) \Rightarrow (B_i \cap B_j = \varnothing))$
2. $\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty\,(N)} B_i = \Omega$

Теорема (о полной вероятности). Если $\{B_n\}_{n=1}^{\infty\,(N)}$ — разбиение Ω, и $\forall i\ (P(B_i) > 0)$, то

$$\forall A \in \mathcal{F}\ \left(P(A) = \sum_{i=1}^{\infty\,(N)} P(A|B_i)\, P(B_i) \right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(A) = P(A \cap \Omega) = P\left(A \cap \left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty\,(N)} B_i \right) \right) &= P\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty\,(N)} A \cap B_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty\,(N)} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{\infty\,(N)} P(A|B_i)\, P(B_i) \end{aligned}$$

Формула Байеса

Апостериорная вероятность находится через *априорные* следующим образом:

$$P(B_n|A) = \frac{P(A \cap B_n)}{P(A)} = \frac{P(A|B_n)\, P(B_n)}{\sum\limits_{i=1}^{\infty\,(N)} P(A|B_i)\, P(B_i)}$$

Замечание. Если $P(B) = 0$, то $P(A|B)$ либо не определена, либо равна нулю. (Более строгое и “реалистичное” определение даётся в курсе мат.статистики.)

Независимость событий

Определение. События A и B называются *независимыми* ($A \perp\!\!\!\perp B$), если $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$.

(Можно получить из более интуитивного, но не симметричного выражения $P(A|B) = P(A)$.)

Пример. Ещё раз рассмотрим схему испытаний Бернулли. Пусть событие A — “n-е испытание окончилось успехом”, а событие B — “среди первых $(n-1)$ испытаний было k успехов”.

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{\omega:\ i_n=1} p^{\sum i_j}(1-p)^{n-\sum i_j} \\
&= p \sum_{\omega:\ i_n=1} p^{\sum i_j - 1}(1-p)^{(n-1)-(\sum i_j - 1)} \\
&= p \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\omega: i_n=1, \\ \sum i_j = k}} p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= p \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= p \cdot (p + (1-p))^{n-1} \\
&= p \\
P(B) &= \sum_{\omega:\ \sum i_j = k + i_n} p^{\sum i_j}(1-p)^{n-\sum i_j} \\
&= \sum_{\omega:\ \sum i_j = k + i_n} p^{k+i_n}(1-p)^{n-k-i_n} \\
&= p^k (1-p)^{n-k} \sum_{\omega:\ \sum i_j = k + i_n} p^{i_n}(1-p)^{-i_n} \\
&= p^k (1-p)^{n-k} (C_{n-1}^{k}\, p/(1-p) + C_{n-1}^{k}) \\
&= p^k (1-p)^{n-k}\, C_{n-1}^{k} (p/(1-p) + 1) \\
&= C_{n-1}^{k}\, p^k (1-p)^{(n-1)-k} \\
P(A \cap B) &= \sum_{\omega:\ \sum i_j = k+1} p^{\sum i_j}(1-p)^{n-\sum i_j} \\
&= \sum_{\omega:\ \sum i_j = k+1} p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} \\
&= C_{n-1}^{k}\, p^{k+1}(1-p)^{(n-1)-k} \\
&= P(A)\, P(B)
\end{aligned}
$$

Теория меры. Лекция 3

Эрлих Иван Генрихович

19 сентября 2019 г.

Определение. Набор событий $\{A_i\}$ называется *независимым в совокупности*, если

$$\forall B \subseteq \{A_i\} \ \left(P\left(\bigcap B\right) = \prod_{b \in B} P(b) \right)$$

Пример Бернштейна. Покрасим вершины тетраэдра в красный, зелёный, синий и "красный + зелёный + синий" цвета. Вероятность выпадения красного, зелёного или синего равна $1/2$ для каждого из них, а вероятность выпадения сразу двух цветов равна $1/4 = (1/2)^2$; однако вероятность выпадения трёх цветов также равна $1/4$, а потому все три события не являются независимыми в совокупности.

Случайные величины

Случайная величина — это числовая характеристика случайного эксперимента (т. е. функция из Ω в $\mathbb{R}$).

Пример: кол-во единиц в серии испытаний Бернулли: $\xi(\omega) = \sum i_j$

С этим определением есть проблема: прообразы подмножеств $\mathbb{R}$ (в т. ч. промежутков) могут быть неизмеримыми.

Определение. $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной* в пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, если

$$\forall B \in \underbrace{\mathfrak{B}(\mathbb{R})}_{\substack{\text{борелевская} \\ \sigma\text{-алгебра}}} (\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F})$$

Пусть χ_ξ — множество значений ξ.

Определение. Пусть Ω не более чем счётно. Величины ξ и η *независимы* ($\xi \perp\!\!\!\perp \eta$), если

$$\forall x \in \chi_\xi \ \forall y \in \chi_\eta \ (P(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = x \wedge \eta(\omega) = y\}) \\ = P(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = x\})\, P(\{\omega \in \Omega \mid \eta(\omega) = y\}))$$

Распределения

Пусть Ω не более чем счётно, и $\chi_\xi = \{x_k\}$. Определим $p_k = P(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = x_k\})$.

Заметим, что случайная величина создаёт ещё одно вероятностное пространство $(\chi_\xi, \mathcal{F}', P')$, где $\mathcal{F}' = 2^{\chi_\xi}$, а $P'(x_k) = p_k$.

Определения. *Распределение* — вероятностная мера, определённая на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.

Распределение случайной величины — распределение, порождённой случайной величиной: $\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\ (P'(B) = P(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \in B\}))$

Примеры.

1. Бернуллиевское распределение: $\{x_k\} = \{0, 1\}$, $p_0 = 1 - p$, $p_1 = p$, $p \in (0, 1)$
2. Биномиальное распределение $Bin(p, n)$: $\{x_k\} = \{0, 1, \ldots, n\}$, $p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
3. Геометрическое распределение $Geom(p)$: $\{x_k\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $p_k = q^{k-1}p$, $q = 1-p$, $p \in (0, 1)$
4. Пуассоновское распределение $Poiss(\lambda)$: $\{x_k\} = \mathbb{N}$, $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$

Чтобы понять суть последнего распределения, рассмотрим $Bin(p, n)$ при фиксированном k, $n \to \infty$ и $n \cdot p_n \to \lambda$:

$$\begin{aligned}
C_n^k p^k (1-p)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(p_n \cdot n)^k}{n^k} \frac{(1-p_n)^n}{(1-p_n)^k} \\
&= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \frac{(p \cdot n)^k}{k!} \frac{((1-p_n)^{-1/p_n})^{-n \cdot p_n}}{(1-p_n)^k}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \to \infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}$$

Математическое ожидание

Пусть в случайном эксперименте (с некоторой числовой характеристикой) было проведено N испытаний $a_1, \ldots, a_n$. *Среднее значение* числовой характеристики естественным образом определяется как среднее арифметическое её значений во всех испытаниях (его также можно выразить через множество значений характеристики и их частоты).

Переходя от испытаний к элементарным исходам, а от числовой характеристики — к случайной величине (а также от частот к вероятностям), мы перейдём от среднего значения к *математическому ожиданию случайной величины*:

$$E\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)\, P(\omega)$$

Данное выражение также можно переписать через $\chi_\xi = \{x_k\}$ и p_k:

$$E\xi = \sum_{x_k \in \chi_\xi} x_k p_k$$

Отсюда следует, что для расчёта мат. ожидания достаточно знать распределение величины.

При использовании мат. ожидания может возникнуть следующая проблема: если Ω бесконечно (но не более чем счётно), то сумма из определения фактически становится числовым рядом. Если этот ряд сходится условно, то по теореме Римана перестановка такого ряда может сойтись к чему угодно (или разойтись); в связи с этим в дальнейшем будем считать, что мат. ожидание определено, если вышеуказанная сумма конечна, или же ряд *сходится абсолютно.*

Теория меры. Лекция 4

Эрлих Иван Генрихович

3 октября 2019 г.

Снова о пуассоновском распределении

Теорема Пуассона. Пусть:

1. $n \to \infty$, $p_n \to 0$, $n \cdot p_n \to \lambda$
2. $\xi_n \sim Bin(n, p_n)$, $\eta \sim Poiss(\lambda)$

...тогда $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\xi_n = k\} = P\{\eta = k\}$.

Уточнение теоремы (без доказательства). Пусть $\xi \sim Bin(n,p)$ и $\eta \sim Poiss(\lambda)$, тогда выполнено следующее:

$$\forall A \subseteq \mathbb{N}\ (|P\{\xi \in A\} - P\{\eta \in A\}| \le np^2)$$

Обратно к мат. ожиданию

Свойства:

1. Линейность: $E(a\xi + b\eta) = a\,E\xi + b\,E\eta$
2. Если множество значений ξ не более чем счётно, то $E\xi = \sum\limits_{x_k \in \chi_\xi} x_k p_k$
3. $\forall \varphi(x)\ (E\varphi(\xi) = \sum\limits_{x_k \in \chi_\xi} \varphi(x_k)\, P\{\xi = x_k\})$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} E\varphi(\xi) &= \sum_{\omega\in\Omega} \varphi(\xi(\omega)) \cdot P(\omega) \\ &= \sum_{x_k \in \chi_\xi} \sum_{\omega:\, \xi(\omega) = x_k} \varphi(x_k)\, P(\omega) \\ &= \sum_{x_k \in \chi_\xi} \varphi(x_k)\, P\{\xi = x_k\} \end{aligned}$$

4. Если $\xi \le \eta$, то $E\xi \le E\eta$
5. Если $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$, то $E(\xi\eta) = E\xi\, E\eta$

   Доказательство. Выразим $E(\xi\eta)$ через множества значений, после чего применим независимость и сгруппируем слагаемые.

Определение. Говорят, что событие A выполняется *почти наверное*, если $P(A) = 1$.

6. Если $\xi = c$ почти наверное, то $E\xi = c$

Определение. *k-й момент случайной величины:* $E\xi^k$
Пример: если $\xi \sim Poiss(\lambda)$, то $E\xi^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Дисперсия

Определение. *Дисперсия* случайной величины ξ:

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

Определение. *Центрированный k-й момент:* $E(\xi - E\xi)^k$

Свойства:

1. Альтернативная формула:

$$\begin{aligned} D\xi &= E(\xi - E\xi)^2 \\ &= E(\xi^2 - 2\xi\, E\xi + (E\xi)^2) \\ &= E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 \\ &= E\xi^2 - (E\xi)^2 \end{aligned}$$

2. $D\xi \geq 0$, причём $D\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = const$ почти наверное (более того, эта константа равна $E\xi$)

3. $D(C\xi + A) = C^2\, D\xi$

Ковариация и корреляция

Определения. Пусть ξ, η — случайные величины.

1. *Ковариация* ξ и η:
$$cov(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))$$

   Свойства:

   (a) Альтернативная формула:

   $$cov(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi\, E\eta$$

   (b) Если $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$, то $cov(\xi, \eta) = 0$

   (c) $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\, cov(\xi, \eta)$

   (d) $D\xi = cov(\xi, \xi)$

2. Величины ξ и η *не коррелированы*, если $cov(\xi, \eta) = 0$.
   …следовательно, $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$

3. *Корреляция* ξ и η (ξ и η не должны "равняться константе почти наверное"):

$$corr(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$$

Теорема. $|corr(\xi, \eta)| \leq 1$
Доказательство. Пусть $\xi' = \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}$ (*центрированная величина*), тогда

$$\begin{aligned} E\xi' &= 0 \\ D\xi' &= D\left(\frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}\right) \\ &= \frac{D(\xi - E\xi)}{D\xi} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} D(\xi' \pm \eta') &= D\xi' + D\eta' \pm 2\, cov(\xi', \eta') \\ cov(\xi', \eta') &= E((\xi' - E\xi')(\eta' - E\eta')) \\ &= E\left(\frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}} \cdot \frac{\eta - E\eta}{\sqrt{D\eta}}\right) \\ &= corr(\xi, \eta) \\ D(\xi' \pm \eta') &= 2(1 \pm corr(\eta, \xi)) \end{aligned}$$

Осталось применить неотрицательность дисперсии.
Следствие. Если $corr(\xi, \eta) = \pm 1$, то $\xi = \pm a\eta + b$ при $a > 0$ (поскольку дисперсия их суммы/разности равна 0).

Теорема (неравенство Чебышёва). Если существует $D\xi$, то $P\{|\xi - E\xi| > \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$.
Доказательство. Пусть $\eta = (\xi - E\xi)^2$, тогда $E\eta = D\xi$. Найдём $E\eta$:

$$\begin{aligned} E\eta &= \sum_{\omega \in \Omega} \eta(\omega)\, P(\omega) \\ &\geq \sum_{\omega:\, \eta(\omega) > \varepsilon^2} \eta(\omega)\, P(\omega) \\ &\geq \sum_{\omega:\, \eta(\omega) > \varepsilon^2} \varepsilon^2\, P(\omega) \\ &= \varepsilon^2\, P\{\eta > \varepsilon^2\} \\ &= \varepsilon^2\, P\{|\xi - E\xi| > \varepsilon\} \end{aligned}$$

Теория меры. Лекция 5

Эрлих Иван Генрихович

10 октября 2019 г.

Теорема (неравенство Маркова). Если $\xi \geq 0$, и существует $E\xi$, то

$$P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
E\xi &= \sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)\cdot P(\omega) \\
&= \sum_{\omega\colon \xi(\omega)\geq\varepsilon} \xi(\omega)\cdot P(\omega) + \sum_{\omega\colon \xi(\omega)<\varepsilon} \xi(\omega)\cdot P(\omega) \\
&\geq \sum_{\omega\colon \xi(\omega)\geq\varepsilon} \xi(\omega)\cdot P(\omega) \geq \varepsilon \sum_{\omega\colon \xi(\omega)\geq\varepsilon} P(\omega) \\
&= \varepsilon\cdot P\{\xi\geq\varepsilon\}
\end{aligned}$$

Следствие (неравенство Чебышёва). Если существует $D\xi$, то $P\{|\xi - E\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$. (Применяем неравенство Маркова к $\eta = (\xi - E\xi)^2$.)

Теорема (закон больших чисел, ЗБЧ). Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность попарно не коррелированных случайных величин, причём все их дисперсии ограничены сверху числом C, тогда

$$P\left\{\left|\frac{\sum\xi_i - \sum E\xi_i}{n}\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Доказательство. Пусть $\overline{\xi} = \xi - E\xi$, тогда

$$\begin{aligned}
P\left\{\left|\frac{\sum\overline{\xi_i}}{n}\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{D\left(\frac{\sum\overline{\xi_i}}{n}\right)}{\varepsilon^2} &= \frac{D\left(\sum\overline{\xi_i}\right)}{n^2\varepsilon^2} \\
&= \frac{\sum D\overline{\xi_i}}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sum D\xi_i}{n^2\varepsilon^2} \\
&= \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

Следствие. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, тогда

$$P\left\{\left|\frac{\sum\xi_i}{n} - E\xi_1\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

То есть, среднее значение случайных величин стремится к их мат. ожиданию (грубо говоря, случайность пропадает).

Центральная предельная теорема

Пусть ξ_k — число успехов в схеме испытаний Бернулли (k,p), тогда

$$P\left\{a \le \frac{\xi_k - kp}{\sqrt{kp(1-p)}} \le b\right\} \xrightarrow{k\to\infty} \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

Часть II

Теория меры

Системы множеств

Определение. Система множеств S называется *полукольцом*, если:

1. $\varnothing \in S$
2. $\forall A, B \in S\ (A \cap B \in S)$
3. $\forall A, A_1 \in S\ \left(A_1 \subset A \Rightarrow \exists A_2, \ldots, A_n \in S\ \left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A\right)\right)$

Пример: $\{[a,b) \subseteq [A,B)\}$

Определение. Система множеств R называется *кольцом*, если:

1. $R \ne \varnothing$
2. $\forall A, B \in R\ (A \cap B \in R)$
3. $\forall A, B \in R\ (A \triangle B \in R)$

Определение. *Единицей* системы множеств называется множество E из этой системы, чьими подмножествами являются все множества системы.

Определение. Кольцо с единицей называется *алгеброй*.

Утверждение. Если R — кольцо, то:

1. R — полукольцо
2. $\forall A, B \in R\ (A \cup B \in R)$
3. $\forall A, B \in R\ (A \setminus B \in R)$

Доказательство.

1. $\varnothing = A \triangle A \in R$
2. $\forall A, B \in R\ (A \cap B \in R)$
3. $A_1 \subset A \Rightarrow A = A_1 \sqcup (A \triangle A_1)$
4. $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$

5. $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$

Утверждение. Пересечение произвольного числа колец является кольцом.
Доказательство. Пусть $\bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha = R$, тогда:

1. $\forall \alpha \in \Lambda\ (\varnothing \in R_\alpha) \Rightarrow \varnothing \in R$
2. $A, B \in R \Rightarrow \forall \alpha \in \Lambda\ (A, B \in R_\alpha) \Rightarrow \forall \alpha \in \Lambda\ (A \cup B \in R_\alpha) \Rightarrow A \cup B \in R$ (аналогично для $\triangle$)

Следствие. Пересечение произвольного числа алгебр с общей единицей является алгеброй.

Утверждение. Пусть X — система множеств, тогда существует кольцо $R(X)$, для которого верно следующее:

1. $X \subseteq R(X)$
2. $\forall R_1 \supseteq X\ (R(X) \subseteq R_1)$

…то есть, $R(X)$ — минимальное (по включению) кольцо, содержащее X.

Теория меры. Лекция 6

Эрлих Иван Генрихович

15 октября 2019 г.

Доказательство. Пусть $X = \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Определим $M(X) = \mathcal{P}\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)$; это множество является алгеброй, а значит, и кольцом, причём оно содержит X.

Рассмотрим пересечение всех колец[1], содержащих X. Это множество является кольцом, содержащим X, и любое другое такое кольцо содержит в себе это пересечение.

Лемма. Пусть S — полукольцо, $A_1, \ldots, A_n \in S$, и $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subseteq A$, тогда

$$\exists A_{n+1}, \ldots, A_m \in S \ \left(\bigsqcup_{k=1}^{m} A_k = A\right)$$

Доказательство. Индукция по n:

- $n = 1$: по определению
- $n-1 \to n$: пусть $A = \left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k\right) \sqcup \left(\bigsqcup\limits_{j=1}^{q} B_j\right)$. Понятно, что $A_n \subseteq \bigsqcup\limits_{j=1}^{q} B_j$ Определим $D_j = A_n \cap B_j$, тогда $D_j \in S$, и $B_j = D_j \sqcup \left(\bigsqcup\limits_{\ell=1}^{\ell_j} C_{j,\ell}\right)$. Заметим, что $\bigsqcup\limits_{j=1}^{q} D_j = A_n$, и

$$A = \left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{q} \bigsqcup_{\ell=1}^{\ell_j} C_{j,\ell}\right)$$

Теорема. Пусть S — полукольцо, тогда

$$R(S) = K(S) = \left\{\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \;\middle|\; A_i \in S\right\}$$

Доказательство. Для любого кольца $R_1(S)$ выполнено $R_1(S) \supseteq K(S)$ (по свойству замкнутости относительно объединения), поэтому осталось доказать, что $K(S)$ — кольцо:

1. $K(S) \supseteq S \neq \varnothing$
2. Пусть $A, B \in K(S)$, $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, $B = \bigsqcup\limits_{j=1}^{k} B_j$. Определим $C_{i,j} = A_i \cap B_j$, тогда $C_{i,j} \in S$ и $A \cap B = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{k} C_{i,j}$.

[1] …а существует ли оно?

3. По лемме получаем, что $A_i = \left(\bigsqcup\limits_{j=1}^{k} C_{i,j}\right) \sqcup \left(\bigsqcup\limits_{s=1}^{s_i} D_{i,s}\right)$ и $B_j = \left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} C_{i,j}\right) \sqcup \left(\bigsqcup\limits_{\ell=1}^{\ell_i} E_{j,\ell}\right)$, значит, $A \triangle B = \left(\bigsqcup\limits_{i,s} D_{i,s}\right) \sqcup \left(\bigsqcup\limits_{j,\ell} E_{j,\ell}\right)$

Лемма 2. Пусть S — полукольцо, и $A_1, \ldots, A_n \in S$, тогда $\exists B_1, \ldots, B_k \in S \; \forall i \left(A_i = \bigsqcup\limits_{k \in \Lambda_i} B_k\right)$ (обратите внимание, что B_i попарно не пересекаются).

Доказательство. Индукция по n:

- $n = 1$: $B_1 = A_1$
- $n - 1 \to n$: пусть $B_1, \ldots, B_q$ — искомый набор для $A_1, \ldots, A_{n-1}$. Определим $C_s = B_s \cap A_n$, тогда $A_n = \left(\bigsqcup\limits_{s=1}^{q} C_s\right) \sqcup \left(\bigsqcup\limits_{p=1}^{m} D_p\right)$, где $D_p \in S$. Далее, $B_s = C_s \sqcup \left(\bigsqcup\limits_{r=1}^{r_s} B_{s,r}\right)$, и $\{C_s\} \cup \{B_{s,r}\} \cup \{D_p\}$ является искомым набором.

Определение. Система множеств R называется *σ-кольцом*, если:

1. R — кольцо
2. $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq R \; \left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in R\right)$

Определение. Система множеств R называется *δ-кольцом*, если:

1. R — кольцо
2. $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq R \; \left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in R\right)$

Утверждение. σ-кольцо является δ-кольцом; δ-алгебра является σ-алгеброй.

Доказательство.

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_i)$$
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = E \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} (E \setminus A_i)$$

Пример. Множество ограниченных подмножеств $\mathbb{R}$ является δ-кольцом, но не является σ-кольцом.

Определение. *Боре́левская σ-алгебра* на множестве A — наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые подмножества. (Названа в честь Эми́ля Боре́ля[2].)

[2]Его полное имя состоит из пяти слов. Здесь указаны четвёртое и пятое, как самые используемые.

Теория меры. Лекция 7

Эрлих Иван Генрихович

17 октября 2019 г.

Конечные меры на системах множеств

Определение. Пусть S — полукольцо. Функция $m : S \to [0, +\infty)$ называется *конечной мерой* на S, если выполняется свойство *аддитивности*:

$$\forall A, A_1, \ldots, A_n \in S \ \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = A \Rightarrow m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \right)$$

Определение. m называется *σ-аддитивной конечной мерой* на полукольце S, если:

1. m — конечная мера на S
2. $\forall A, \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in S \ \left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A \Rightarrow m(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i) \right)$

Лемма 1. Если m — мера на полукольце S, и множества $A, A_1, \ldots, A_n \in S$ таковы, что $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, то

$$m(A) \le \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

Доказательство. По ранее доказанной лемме существует такой набор попарно непересекающихся множеств $B_1, \ldots, B_q$, что любое множество из $\{A, A_1, \ldots, A_n\}$ представимо как объединение некоторых элементов набора (можно считать, что $\forall B_i \ \exists A_j \ (B_i \subseteq A_j)$). Далее,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup_{i=1}^{q} B_i \supset A$$

$$\sum_{i=1}^{n} m(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j:\, B_j \subseteq A_i} m(B_j) \ge \sum_{k=1}^{q} m(B_k) \ge m(A)$$

Лемма 2. Если m — мера на полукольце S, и множества $A, A_1, \ldots, A_n \in S$ таковы, что A_i попарно не пересекаются, и $A_i \subset A$, то

$$m(A) \ge \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

Доказательство. По определению полукольца набор $\{A_i\}$ можно “дополнить до A”, а дальше всё очевидно.

Следствие. С помощью предельного перехода данную лемму можно обобщить на бесконечный набор $\{A_i\}$.

Примеры:

1. Промежутки в $\mathbb{R}$ образуют полукольцо, на котором длина промежутка является мерой.

   Теорема. Длина промежутка — σ-аддитивная мера.

   Доказательство. Пусть $\lfloor a, b\rceil = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} \lfloor a_i, b_i\rceil$ — некоторый промежуток.

   - Возьмём такой отрезок $[\alpha, \beta] \subseteq \lfloor a, b\rceil$, что $m[\alpha, \beta] > m\lfloor a, b\rceil - \varepsilon/2$.
   - Определим такие интервалы $(\alpha_i, \beta_i) \supseteq \lfloor a_i, b_i\rceil$, что $m(\alpha_i, \beta_i) < m\lfloor a_i, b_i\rceil + \varepsilon/2^{i+1}$.
   - Так как $[\alpha, \beta] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha_i, \beta_i)$, то по лемме Гейне-Бореля существует конечное подпокрытие (пусть это будут интервалы $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^{k}$)
     Далее,

     $$m\lfloor a, b\rceil < m[\alpha, \beta] + \varepsilon/2 \leq \sum_{j=1}^{k} m(\alpha_j, \beta_j) + \varepsilon/2$$
     $$\leq \sum_{j=1}^{\infty} m(\alpha_j, \beta_j) + \varepsilon/2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} m\lfloor a_i, b_i\rceil + \varepsilon$$

     Устремляя ε к нулю, получаем $m\lfloor a, b\rceil \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} m\lfloor a_i, b_i\rceil$. Равенство получается по следствию из леммы 2.

2. Полукольцо полуинтервалов $(a, b]$, мерой на котором является $m(a, b] = \varphi(b) - \varphi(a)$, где φ — ограниченная неубывающая непрерывная справа функция.

   Теорема. Указанная мера является σ-аддитивной.

   Доказательство для ограниченных полуинтервалов. Каждый полуинтервал $(a_i, b_i]$ из разбиения можно покрыть интервалом (α_i, β_i), где $\alpha_i = a_i$ и $\beta_i - b_i < \varepsilon/2^i$; эти интервалы покрывают произвольный подотрезок. Дальнейшее доказательство аналогично предыдущему.

Теорема. Пусть m — мера на полукольце S, тогда функция $\nu : R(S) \to [0, +\infty)$, где $\nu(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)$ для $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, является мерой.

Доказательство. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup\limits_{r=1}^{s} B_r$, тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i) = \sum\limits_{r=1}^{s} m(B_r) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{r=1}^{s} \mu(A_i \cap B_r)$ (это следует из того, что попарные пересечения не пересекаются между собой), а значит, ν определена корректно.

Проверим выполнение аддитивности: пусть $A, A_1, \ldots, A_n \in R(S)$ таковы, что $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$; представим каждое A_i как дизъюнктное объединение элементов S, тогда аддитивность следует из определения ν.

Теорема. Если в условиях предыдущей теоремы m — σ-аддитивная мера, то ν — тоже σ-аддитивная мера.

Доказательство. Пусть $A, \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in R(S)$ таковы, что $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, тогда

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{k} B_j$$

$$A_i = \bigsqcup_{\ell=1}^{\ell_i} C_{i,\ell}$$

$$D_{j,i,\ell} = B_j \cap C_{i,\ell}$$

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{k} m(B_j) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\ell_i} m(D_{j,i,\ell}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\ell_i} \sum_{j=1}^{k} m(D_{j,i,\ell}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\ell_i} m(C_{i,\ell}) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$$

Следствие. Пусть ν — σ-аддитивная мера на кольце R, и множества $A, \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in R$ таковы, что $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, тогда

$$\nu(A) \le \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$$

Доказательство. Пусть $B_1 = A \cap A_1$, и $B_n = (A \cap A_n) \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k$, тогда $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, и $\nu(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(A_i)$.

Теория меры. Лекция 8

Эрлих Иван Генрихович

24 октября 2019 г.

Внешняя мера

Пусть S — полукольцо с единицей E, m — σ-аддитивная мера на S, ν — продолжение m на $R(S)$.

Определения.

1. *Внешняя мера Жорда́на* μ_J^* на полукольце S определяется следующим образом:

$$\forall A \subseteq E \quad \left(\mu_J^*(A) = \inf_{\substack{A_i \in S \\ A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}} \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \right)$$

2. *Внешняя мера Лебе́га* μ^* на полукольце S определяется следующим образом:

$$\forall A \subseteq E \quad \left(\mu^*(A) = \inf_{\substack{A_i \in S \\ A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i}} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \right)$$

Утверждение. Если $A \in R(S)$, то $\mu^*(A) = \nu(A)$.

Доказательство. Поскольку $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} B_i$ для некоторых $B_i \in S$, то $\mu^*(A) \leq \nu(A)$. Далее, поскольку $A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} C_j$ для некоторых $C_j \in S$, то по ранее доказанному следствию $\nu(A) \leq \mu^*(A)$.

Утверждение.

$$\mu^*(A) = \mu'^*(A) = \inf_{\substack{B_i \in S \\ A \subseteq \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i}} \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i)$$

Доказательство. Очевидно, что $\mu^*(A) \leq \mu'^*(A)$. Пусть $\{A_i\}$ — произвольное покрытие A; определим $B_1 = A_1$, $B_i = A_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} A_j$. Заметим, что $B_i \in R(S)$, а потому $B_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{j_i} C_{i,j}$ для некоторых $C_{i,j} \in S$; следовательно, $A \subset \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} \bigsqcup\limits_{j=1}^{j_i} C_{i,j}$, отсюда

$$\mu'^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{j_i} m(C_{i,j}) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

...и обратное неравенство доказано.

Теорема. Если $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq E$, и $B \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, то

$$\mu^*(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i)$$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \{A_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty} \ \left(\forall i \left(B_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \right) \wedge \sum_{j=1}^{\infty} m(A_{i,j}) < \mu^*(B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right)$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \left(\mu^*(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i) + \varepsilon \right)$$

Осталось выполнить предельный переход.

Следствие. $\forall A, B \subseteq E \ (|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \triangle B))$

Доказательство. Пусть $\mu^*(A) \geq \mu^*(B)$, тогда $A \subset B \cup (A \triangle B)$, и $\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B)$.

Определение. Множество $A \subseteq E$ называется *измеримым по Лебегу*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A_\varepsilon \in R(S) \ (\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon)$$

Обозначим семейство измеримых по Лебегу множеств как M.
(Заметим, что $R(S) \subseteq M$.)

Теорема. M является алгеброй.

Доказательство. Заметим, что $E \in M$ и $\varnothing \in M$.

Пусть $A, B \in M$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A_\varepsilon, B_\varepsilon \in R(S) \ (\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon/2 \wedge \mu^*(B \triangle B_\varepsilon) < \varepsilon/2)$. Заметим, что

$$(A \cap B) \triangle (A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) \subseteq (A \triangle A_\varepsilon) \cup (B \triangle B_\varepsilon)$$
$$(A \triangle B) \triangle (A_\varepsilon \triangle B_\varepsilon) \subseteq (A \triangle A_\varepsilon) \cup (B \triangle B_\varepsilon)$$

"Взяв меру" от обеих частей, получаем измеримость.

Теорема. μ^* является мерой на M (т. е. аддитивна).

Доказательство. Пусть $B, C \in M$, и $B \cap C = \varnothing$, тогда $A = B \sqcup C \in M$, и $\mu^*(A) \leq$

$\mu^*(B) + \mu^*(C)$.

$$
\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0 \ \exists B_\varepsilon, C_\varepsilon \in R(S) \ (\mu^*(B \triangle B_\varepsilon) < \varepsilon \wedge \mu^*(C \triangle C_\varepsilon) < \varepsilon)& \\
A \triangle (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) &\subseteq (B \triangle B_\varepsilon) \cup (C \triangle C_\varepsilon) \\
B_\varepsilon \cap C_\varepsilon &\subseteq (B_\varepsilon \setminus B) \cup (C_\varepsilon \setminus C) \\
\mu^*(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) &= \mu^*(B_\varepsilon) + \mu^*(C_\varepsilon) - \mu^*(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) \quad (*) \\
&\geq \mu^*(B) + \mu^*(C) - 2\varepsilon - \mu^*(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) \\
&\geq \mu^*(B) + \mu^*(C) - 4\varepsilon \\
\mu^*(A) &\geq \mu^*(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) - \mu^*(A \triangle (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)) \\
&\geq \mu^*(B) + \mu^*(C) - 6\varepsilon
\end{aligned}
$$

Отметим, что равенство $(*)$ справедливо, поскольку $\mu^* = \nu$ на $R(S)$.

Определение. μ^* на M называется *мерой Лебега.*

Теорема. M является σ-алгеброй.

Доказательство. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^\infty \in M$, и $A = \bigcup\limits_{i=1}^\infty A_i$. Определим $B_1 = A_1$, $B_i = A_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} A_j$; отсюда получаем $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^\infty B_i$, и $\forall n \left(\bigsqcup\limits_{i=1}^n B_i \subseteq A\right)$. Далее,

$$\sum_{i=1}^n \mu(B_i) = \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^n B_i\right) = \mu^*\left(\bigsqcup_{i=1}^n B_i\right) \leq \mu^*(A)$$

…и ряд $\sum\limits_{i=1}^\infty \mu(B_i)$ сходится, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \left(\sum\limits_{i=N+1}^\infty \mu(B_i) < \varepsilon\right)$; далее,

$$
\begin{aligned}
\exists C \in R(S) \left(\mu\left(C \triangle \bigsqcup_{i=1}^N B_i\right) < \varepsilon\right)& \\
A \triangle C \subseteq \left(C \triangle \bigsqcup_{i=1}^N B_i\right) \cup \bigsqcup_{i=N+1}^\infty B_i& \\
\mu^*(A \triangle C) \leq 2\varepsilon&
\end{aligned}
$$

Теорема. μ^* — σ-аддитивная мера на M.

Доказательство. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^\infty \in M$ не пересекаются, и $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^\infty A_i$, тогда $\mu^*(A) \leq \sum\limits_{i=1}^\infty \mu^*(A_i)$. Теперь заметим, что $\forall n \left(\mu^*(A) \geq \mu^*\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^n A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^n \mu^*(A_i)\right)$, и предельным переходом мы доказываем обратное неравенство.

Теория меры. Лекция 9

Эрлих Иван Генрихович

31 октября 2019 г.

Определение. *Классическая мера Лебега* λ (из курса мат. анализа) — мера Лебега, полученная из внешней меры Лебега на полукольце полуинтервалов в $\mathbb{R}$.

Общий алгоритм построения меры Лебега.

1. Взять полукольцо S с единицей E и σ-аддитивной мерой m.

1.5. Построить на алгебре $R(S)$ σ-аддитивную меру ν как продолжение m.[1]

2. Определить внешнюю меру Лебега μ^* на подмножествах $E \in R(S)$.

3. Искомая мера Лебега μ — сужение внешней меры Лебега на измеримые подмножества E.

Определения.

1. $\mathfrak{B}_{a,b} = \{A \cap [a,b] \mid A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$

2. *Мера Бореля* — λ, ограниченная на $\mathfrak{B}_{a,b}$.

Пусть $S = \{(a,b] \mid a, b \in \overline{\mathbb{R}}\}$, и $\varphi(x)$ — неубывающая непрерывная справа ограниченная функция. Определим $m(a,b] = \varphi(b) - \varphi(a)$.

Определение. *Мера Лебега-Стильтьéса* — лебегово продолжение определённой выше σ-аддитивной меры m.

σ-конечные меры

Пусть S — полукольцо подмножеств X, причём $X \notin S$, m — σ-аддитивная мера на S, ν — продолжение m на $R(S)$, и $\exists \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in S$ $\left(X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)$. Из доказанного ранее получаем, что $\exists \{B_i\}_{i=1}^{\infty} \in R(S)$ $\left(X = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i\right)$.

Определим $R_i = R(S) \cap B_i$ (очевидно, что это — алгебра с единицей B_i). Заметим, что m можно продлить по Лебегу до σ-аддитивной меры μ_i на σ-алгебре M_i с единицей B_i. Определим следующую функцию:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A \cap B_i)$$

[1] Данный пункт нужен только для доказательства свойств меры.

Отметим, что $\mu(A) \in \overline{\mathbb{R}}^+ = [0, +\infty]$.

Определение. $A \subseteq X$ называется *измеримым по Лебегу*, если $\forall i \ (A \cap B_i \in M_i)$.

Теорема. Множество M измеримых по Лебегу подмножеств X является σ-алгеброй.
Доказательство.

1. $X = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \in M$
2. Пусть $A, C \in M$, тогда

$$\begin{gathered} A \cap B_i \in M_i \\ C \cap B_i \in M_i \\ (A \cap B_i) \cap (C \cap B_i) \in M_i \\ (A \cap C) \cap B_i \in M_i \end{gathered}$$

   (аналогично для $\triangle$)

Теорема. μ на M является σ-аддитивной мерой.

Доказательство. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in M$, тогда

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j \cap B_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_i(A_j \cap B_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \end{aligned}$$

Определение. μ на M называется *σ-конечной мерой.* (Корректность — без доказательства.)

Свойства мер

Непрерывность

Пусть на кольце R задана конечная мера μ, и дана такая последовательность элементов кольца $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, что $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in R$.

Определение. Если для любой такой последовательности $\{A_i\}$ верно $\mu(A) = \lim\limits_{i \to \infty} \mu(A_i)$, то μ называется *непрерывной.*

Теорема. μ непрерывна $\Leftrightarrow$ μ σ-аддитивна (на R).

Полнота

Определение. Заданная на кольце R подмножеств X мера μ называется *полной*, если

$$\forall A \in R \ \forall B \ (\mu(A) = 0 \land B \subset A \Rightarrow B \in R)$$

Примеры: мера Лебега полна, а мера Бореля — нет.

Неизмеримые множества

Теорема. Пусть A — измеримое по классической мере Лебега подмножество $[0,1]$, мера которого больше нуля, тогда существует неизмеримое $B \subset A$.

Доказательство. Введём на $[0,1]$ отношение эквивалентности "разность чисел рациональна". Используя аксиому выбора, составим множество $E = \{x_\alpha\}$ представителей классов эквивалентности.

Пусть $\{r_n\} = \mathbb{Q} \cap [-1,1]$; рассмотрим $E_n = E + r_n$. Очевидно, что эти множества не пересекаются (если это не так, то их общий элемент представим как $x_\alpha + r_a$ и $x_\beta + r_b$, отсюда $x_\alpha \sim x_\beta$, и $r_a = r_b$ — противоречие).

Покажем, что $\forall n \ \nexists C_n \subset E_n \ (\lambda(C_n) > 0)$. Пусть $\exists m \ \exists c_m(\lambda(C_m) = d > 0)$, тогда $C_n = C_m - r_m + r_n$, и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(C_i) = +\infty$; но в то же время $\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i \subset [-1,2]$, и та же сумма не должна превышать числа 3 — противоречие.

Поскольку каждое $x \in [0,1]$ представимо как $x_\alpha + r_n$, то $\{E_n\}$ образуют дизъюнктное покрытие $[0,1]$; следовательно, $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A \cap E_n$, и B можно определить как $\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A \cap C_n$. ■

Структура измеримых множеств

Теорема. Пусть μ — σ-конечная мера Лебега на σ-алгебре M, полученная продолжением σ-аддитивной меры m на полукольце S, и $A \in M$ имеет конечную меру, тогда $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{ij} \setminus A_0$, где:

1. $A_{ij} \in R(S)$
2. $A_{i1} \subseteq A_{i2} \subseteq \dots$
3. $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$, где $B_i = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{ij}$
4. $\mu(B_i) < \infty$, $\mu(A_0) = 0$

Теория меры. Лекция 10

Эрлих Иван Генрихович

7 ноября 2019 г.

Доказательство. Покажем, что для любого i найдётся $C_i = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} D_{ij} \supset A$, где $D_{ij} \in S$, для которого выполнено неравенство $\mu(C_i \setminus A) < 1/i$:

$$\mu(C_i \setminus A) = \mu(C_i) - \mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(D_{ij}) - \mu^*(A)$$

По определению внешней меры Лебега получаем, что C_i существует (как объединение элементов достаточно "хорошего" покрытия).

Положим $B_i = \bigcap\limits_{r=1}^{i} C_r$, тогда $B_i = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_{ij}$, где $E_{ij} = \bigcap\limits_{r=1}^{i} D_{rj}$. Покажем, что мера разности стремится к нулю:

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \setminus A\right) \leq \mu\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \setminus A\right) \leq \mu(C_n \setminus A) < 1/n \to 0$$

Наконец, положим $A_{ij} = \bigcup\limits_{\ell=1}^{j} E_{i\ell}$. ■

Теорема Каратеодóри о продолжении меры

Теорема. Пусть S — полукольцо с единицей E, $\mathcal{A} = \sigma(S)$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая S, m — σ-аддитивная мера на S, тогда существует единственная σ-конечная мера μ_0 на $\mathcal{A}$, для которой выполнено следующее:

$$\forall A \in S \ (\mu_0(A) = m(A))$$

Доказательство. Продолжим по Лебегу m на множество M измеримых по Лебегу подмножеств E. Заметим, что $\mathcal{A} \subseteq M$, и полученная мера Лебега μ удовлетворяет условию на μ_0. Положим $\mu_0 = \mu$.

Предположим, что существует мера μ_1, отличная от μ и также удовлетворяющая условию на μ_0. Это означает, что

$$\exists A \in \mathcal{A} \ (\mu_0(A) \neq \mu_1(A))$$
$$\forall B \in S \ (\mu_0(B) = \mu_1(B))$$

Отсюда следует, что $\forall C \in R(S)$ $(\mu_0(C) = \mu_1(C))$. Без ограничения общности предположим, что A имеет конечную меру (в противном случае воспользуемся σ-конечностью и рассмотрим "конечномерное" разбиение A).

Воспользуемся предыдущей теоремой:

$$A = \underbrace{\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}}_{H} \setminus A_0$$

Определим A_0':

$$A_0' = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij} \cap A_0$$

(очевидно, что $\mu_0(A_0') = 0$)

Заметим, что $A = H \setminus A_0'$, отсюда получаем $A_0' = H \setminus A$, а значит, $A_0' \in \mathcal{A}$.

Далее,

$$\begin{aligned}
\mu_0(A) &= \mu_0\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij} \setminus A_0'\right) \\
&= \mu_0\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}\right) - \mu_0(A_0') \\
&= \lim_{i\to\infty} \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}\right) = \lim_{i\to\infty} \lim_{j\to\infty} \mu_0(A_{ij}) \\
&= \lim_{i\to\infty} \lim_{j\to\infty} \mu_1(A_{ij}) = \mu_1(A \sqcup A_0')
\end{aligned}$$

Осталось показать, что $\mu_1(A_0') = 0$, и мы придём к противоречию.

`[...]`

Случайные величины. Снова.

Определение. Случайная величина ξ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — отображение из Ω в $\mathbb{R}$, для которого выполнено $\forall c \in \mathbb{R}\ (\xi^{-1}(c, +\infty) \in \mathcal{F})$.

Определение. Распределение P' случайной величины — вероятностная мера на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, индуцированная случайной величиной: $P'(B) = P(\xi^{-1}(B))$.

Определение. Распределение — вероятностная мера на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Определение. *Функция распределения случайной величины:* $F_\xi(x) = P(\xi^{-1}(-\infty, x])$

Свойства F_ξ: монотонность, непрерывность справа.

Утверждение. Показанное построение F по P биективно.

Доказательство. F задаёт меру на полукольце полуинтервалов, которое порождает борелевскую (минимальную) σ-алгебру. По теореме Каратеодори продолжение такой меры существует и единственно.

Измеримые функции

Определение. Пара (X, M), где M — σ-алгебра с единицей X, называется *измеримым пространством.* Элементы M называется *измеримыми множествами.*

Определение. Пусть (X, M) — измеримое пространство. Функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *измеримой*, если $\forall c \in \overline{\mathbb{R}}\ (f^{-1}(c, +\infty] \in M)$.

Лемма. Множества $f^{-1}(\pm\infty)$, $f^{-1}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(a, b)$ измеримы.

Доказательство для $+\infty$. $f^{-1}(+\infty) = f^{-1}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(n, +\infty]\right) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f^{-1}(n, +\infty] \in M$

Теорема. Если f измерима на (X, M), то $\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\ (f^{-1}(B) \in M)$.

Доказательство. *Принцип подходящих множеств:*

Пусть $S = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid f^{-1}(A) \in M\}$, тогда:

1. $\mathbb{R} \in S$
2. $\forall A, C \in S\ (A \cap C \in S \wedge A \triangle C \in S)$
3. $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in S\ \left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in S\right)$

Следовательно, S — σ-алгебра, содержащая все полуинтервалы, а значит, $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subseteq S$. ■

Теория меры. Лекция 11

Эрлих Иван Генрихович

14 ноября 2019 г.

Определение. *Борелевская функция* — отображение из $G \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ в $\mathbb{R}$, для которого верно следующее: $\forall c \in \mathbb{R}$ $(f^{-1}(c, +\infty) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.

Замечание 1. Если f — борелевская функция, и $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, то $f^{-1}(B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Замечание 2. Если f — непрерывная функция, определённая на открытом $G \subseteq \mathbb{R}$, то она является борелевской.

Теорема. Если f измерима и конечна на (X, M), $f(X) \subseteq G \subseteq \mathbb{R}$ (здесь $G \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$), и $g(y)$ — борелевская функция, то $g \circ f$ — измеримая функция на (X, M).

Замечание. Если g измерима относительно классической меры Лебега, то $g \circ f$ не обязательно измерима.

Доказательство.

$$(g \circ f)^{-1}(c, +\infty) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(c, +\infty)}_{\in \mathfrak{B}(\mathbb{R})}) \in M$$

Теорема. Если f, g измеримы и конечны на (X, M), то $\alpha f + \beta g$ (здесь $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) и $f \cdot g$ также измеримы; если же $g \neq 0$ на X, то f/g также измерима.

Доказательство.

1. Измеримость $\alpha \cdot f$ и $f + \alpha$ следует из предыдущей теоремы.
2. $\{x \in X \mid f(x) > g(x)\} = \bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in X \mid g(x) < q\} \cap \{x \in X \mid q < f(x)\}$, значит, это множество измеримо.

   Далее, $\{x \in X \mid f(x) + g(x) > c\} = \{x \in X \mid f(x) > c - g(x)\}$, значит, сумма функций измерима.
3. Измеримость f^2 следует из предыдущей теоремы. Далее, $f \cdot g = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$ измерима.
4. $1/g$ измерима (по предыдущей теореме), значит, f/g измерима.

Теорема. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых на (X, M) функций, $\varphi(x) = \sup\limits_n f_n(x)$, $\psi(x) = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} f_n(x)$, тогда φ и ψ измеримы.

Доказательство.

$$\{x \in X \mid \varphi(x) \in (c, +\infty]\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid f_n(x) \in (c, +\infty]\} \in M$$

Далее, $\varphi_k(x) = \sup\limits_{n \geq k} f_n(x)$ измеримы, и

$$\{x \in X \mid \psi(x) \in (c, +\infty]\} = \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X \mid \varphi_k(x) \in (c + 1/r, +\infty]\}$$

Следствие. $F(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ измерима на $(E, E \cap M)$, где E — множество, на котором существует предел. Более того, $E \in M$.

Лестница Кантора и множество Кантора

Построение множества Кантора

1. Определим семейства множеств $L^n = \{l_i^n\}_{i=1}^{2^n}$ и $R^n = \{r_i^n\}_{i=1}^{2^n}$:

$$\begin{aligned} l_1^0 &= 0, & r_1^0 &= 1 \\ l_{2i-1}^{n+1} &= l_i^n, & r_{2i-1}^{n+1} &= (2l_i^n + r_i^n)/3 \\ l_{2i}^{n+1} &= (l_i^n + 2r_i^n)/3, & r_{2i}^{n+1} &= r_i^n \end{aligned}$$

2. Определим семейства отрезков $\{\mathcal{J}_i^n\}_{i=1}^{2^n}$ и интервалов $\{\mathcal{I}_i^n\}_{i=1}^{2^n}$:

$$\mathcal{J}_i^n = [l_i^n, r_i^n], \quad \mathcal{I}_i^n = (r_{2i-1}^n, l_{2i}^n)$$

Множество $\mathcal{C} = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \bigcup\limits_{i=1}^{2^n} \mathcal{J}_i^n$ называется *канторовым.* Соответственно, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=1}^{2^n} \mathcal{I}_i^n$ является его дополнением до $[0, 1]$.

Свойства $\mathcal{C}$: оно замкнуто, нигде не плотно, континуально, и его мера Лебега равна нулю (как предел $\{(2/3)^n\}$).

(Множество называется *нигде не плотным*, если в любой окрестности любого его элемента существует её открытое подмножество, не содержащее ни одного элемента множества.)

Построение лестницы Кантора

Определим $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x \\ f_{n+1}(x) &= \begin{cases} \frac{2i-1}{2^n}, & x \in [r_{2i-1}^{n+1}, l_{2i}^{n+1}] \\ \frac{r_i^n - x}{r_i^n - l_i^n} \cdot \frac{i-1}{2^n} + \frac{x - l_i^n}{r_i^n - l_i^n} \cdot \frac{i}{2^n}, & x \in (l_i^n, r_i^n) \\ f_n(x), & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

Функция $\varphi(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ называется *лестницей Кантора.*

Свойства: она не убывает, непрерывна на всей области определения, и её производная равна нулю во всех точках, кроме элементов $\mathcal{C}$ (где её не существует).

Теория меры. Лекция 12

Эрлих Иван Генрихович

21 ноября 2019 г.

Теорема. Существует непрерывная биекция $f : [0,1] \to [0,1]$, а также измеримая относительно классической меры Лебега на $[0,1]$ функция $g(x)$, для которых выполнено следующее:

1. $g \circ f$ неизмерима на $[0,1]$

2. Существует такое измеримое E, что $f^{-1}(E)$ неизмеримо.

Доказательство. Пусть φ — лестница Кантора. Определим функцию $\psi : [0,1] \to [0,1]$: $\psi(x) = (x + \varphi(x))/2$. Она непрерывна и строго возрастает, следовательно, существует обратная функция f, которая также непрерывна и строго возрастает.

Заметим, что ϕ отображает интервалы $\mathcal{I}_j^i$ в интервалы вдвое меньшей длины, значит, $\lambda(\psi([0,1] \setminus \mathcal{C})) = 1/2$, отсюда $\lambda(\psi(\mathcal{C})) = 1/2$. Возьмём неизмеримое подмножество $\psi(\mathcal{C})$ и обозначим его как Q.

По определению f получаем $\psi^{-1}(Q) = f(Q) \subseteq \mathcal{C}$. Поскольку $\lambda(\mathcal{C}) = 0$, то $f(Q)$ измеримо; положим $E = f(Q)$. Из всего вышесказанного получаем, что $f^{-1}(E) = Q$ неизмеримо.

(Вспомнив свойства борелевских функций, можно заключить, что E не является борелевским множеством, т. е. $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subsetneq M_\lambda$.)

Положим $g = I_E$, тогда $g \circ f = I_Q$.

Сходимость последовательностей измеримых функций

Рассмотрим измеримое пространство (X, M) с σ-конечной мерой μ.

Определение. Последовательность измеримых функций $\{f_n\}$ *сходится по мере* к измеримой функции f (обозначение: $f_n \xrightarrow{\mu} f$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \left(\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0 \right)$$

Определение. Последовательность измеримых функций $\{f_n\}$ *сходится почти всюду* к измеримой функции f (обозначение: $f_n \to f$), если

$$\mu\{x \in X \mid f_n(x) \nrightarrow f(x)\} = 0$$

Лемма. Пусть $E = \{x \in X \mid f_n(x) \to f(x)\}$, тогда

$$X \setminus E = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{ x \in X \,\middle|\, |f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{m} \right\}$$

Доказательство. Достаточно выписать определение "несходимости", после чего перевести его из кванторно-логической формы в теоретико-множественную.

Теорема. Если $\mu(X) < \infty$, то из сходимости почти всюду следует сходимость по мере.
Доказательство. Если $f_n \to f$, то

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{x \in X \;\middle|\; |f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\right\}\right) = 0$$

Отсюда получаем

$$\forall m \in \mathbb{N} \; \left(\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{x \in X \;\middle|\; |f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\right\}\right) = 0\right)$$
$$\forall m \in \mathbb{N} \; \left(\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{x \in X \;\middle|\; |f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\right\}\right) = 0\right)$$
$$\forall m \in \mathbb{N} \; \left(\lim_{n\to\infty}\mu\left\{x \in X \;\middle|\; |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\right\} = 0\right)$$

Переход от пересечения к пределу (через непрерывность) использует конечность меры.

Теория меры. Лекция 13

Эрлих Иван Генрихович

28 ноября 2019 г.

Контрпример к теореме для меры, не являющейся всюду конечной: $f_n(x) = I_{[-n,n]}$, $f \equiv 1$. f_n сходятся к f почти всюду, но не по мере.

Контрпример к обратной теореме на пространстве $([0,1], M_\lambda, \lambda)$ (*пример Рисса*):

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall k = 0, \ldots, 2^n - 1\ \left(\varphi_{n,k} = I_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]}\right)$$

Определим $f_{k+2^n} = \varphi_{n,k}$, $f \equiv 0$. f_n сходятся к f по мере, но ни в какой точке отрезка $[0,1]$ нет сходимости (это можно вывести из теоремы Кантора о вложенных отрезках).

Следствие из леммы. Если $\mu(X) < \infty$, то

$$f_n \to f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \left(\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in X \mid |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = 0\right)$$

Доказательство.

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{x \in X \,\middle|\, |f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\right\}\right) = 0$$

$$\forall m\ \left(\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{x \in X \,\middle|\, |f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\right\}\right) = 0\right)$$

$$\forall m\ \left(\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{x \in X \,\middle|\, |f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\right\}\right) = 0\right)$$

Теорема Рисса. Пусть (X, M, μ) — σ-конечное пространство, и $f_n \xrightarrow{\mu} f$, то существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, для которой выполнено $f_{n_k} \to f$.

Доказательство.

1. Пусть $\mu(X)$ конечна. Запишем определение сходимости по мере:

$$\forall \varepsilon > 0\ \left(\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0\right)$$

Построим последовательность $\{n_k\}$, для которой выполнено следующее:

$$\forall k\ \left(\mu\left\{x \in X \mid |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\} < \frac{1}{2^k}\right)$$

Покажем сходимость полученной подпоследовательности почти всюду с помощью вышеуказанного следствия: если $1/k_0 < \varepsilon$ и $1/2^{k_0-1} < \delta$, то

$$\mu\left(\bigcup_{i=k_0}^{\infty}\{x \in X \mid |f_{n_k}(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) < \sum_{i=k_0}^{\infty}\frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k_0-1}} < \delta$$

2. Пусть $\mu(X) = +\infty$. Поскольку $X = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i$, где $\mu(B_i) < \infty$, то для B_1 можно построить последовательность из предыдущего пункта $\{f_{n_{1,k}}\}$, которая сходится к f почти всюду. Выберем подпоследовательность этой последовательности, которая сходится к f почти всюду на B_2 (обозначим её как $\{f_{n_{2,k}}\}$). Повторяя данную процедуру, получим набор вложенных последовательностей $\{f_{n_{i,k}}\}$; возьмём в качестве искомой подпоследовательности $\{f_{n_{i,i}}\}$.

Теорема. Если $f_n \to f$ и $g_n \to g$, то:

1. f и g единственны почти всюду
2. $af_n + bg_n \to af + bg$
3. Если $h : G \to \mathbb{R}$ непрерывна, где $G \subseteq \mathbb{R}$ открыто, и $f_n, f : X \to G$, то $h \circ f_n \to h \circ f$.
4. $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$
5. Если $g_n, g \neq 0$ на X, то $f_n/g_n \to f/g$

Доказательство.

1. Пусть $f_n \to f$ и $f_n \to \tilde{f}$, тогда

$$\forall t \in \underbrace{\{x \in X \mid f_n(x) \to f(x)\}}_{A} \cap \underbrace{\{x \in X \mid f_n(x) \to \tilde{f}(x)\}}_{B}\ (f(t) = \tilde{f}(t))$$

Отсюда следует, что $\mu(X \setminus (A \cap B)) = \mu((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) = 0$.

3. Зафиксируем $t \in A$, тогда $h(f_n(t)) \to h(f(t))$ (непрерывность по Гейне), и

$$\{x \in X \mid h(f_n(x)) \to h(f(x))\} \supseteq \{x \in X \mid f_n(x) \to f(x)\}$$

Взяв дополнение от обоих множеств, получим сходимость почти всюду.

Пример: $f_n(x) = x + 1/n$. Заметим, что $f_n(x) \xrightarrow{\mu} x$, но возведение в квадрат “испортит” сходимость.

Теорема (критерий сходимости по мере). Если $\mu(X) < \infty$, то

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \Leftrightarrow \forall\{n_k\}\ \exists\{n_{k_m}\}\ (f_{n_{k_m}} \to f)$$

Доказательство.

- ($\Rightarrow$) По теореме Рисса.

- ($\Leftarrow$) От противного: пусть $\neg(f_n \xrightarrow{\mu} f)$, т. е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \exists \delta_0 > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N \ \ (\mu\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon_0\} \geq \delta_0) \tag{1}$$

  Возьмём $n_0 = 0$, после чего положим $n_{k+1} = n$ из (1) при $N = n_k+1$. Полученные числа $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ задают подпоследовательность функций, для которой выполнено следующее утверждение:

$$\mu\{x \in X \mid |f_{n_k}(x) - f(x)| > \varepsilon_0\} \geq \delta_0 \tag{2}$$

  Выделим такую подпоследовательность $\{n_{k_m}\}$, что $f_{n_{k_m}} \to f$ (очевидно, что она удовлетворяет (2)); ввиду конечности меры получаем $f_{n_{k_m}} \xrightarrow{\mu} f$, что противоречит (2).

Теорема. Если $\mu(X) < \infty$, $f_n \xrightarrow{\mu} f$ и $g_n \xrightarrow{\mu} g$, то:

1. $af_n + bg_n \xrightarrow{\mu} af + bg$
2. Если $h : G \to \mathbb{R}$ непрерывна, где $G \subseteq \mathbb{R}$ открыто, и $f_n, f : X \to G$, то $h \circ f_n \xrightarrow{\mu} h \circ f$.
3. $f_n \cdot g_n \xrightarrow{\mu} f \cdot g$
4. Если $g_n, g \neq 0$ на X, то $f_n/g_n \xrightarrow{\mu} f/g$

Доказательство.

3. Достаточно показать, что $\forall \{n_k\} \ \exists \{n_{k_m}\} \ (f_{n_{k_m}} \cdot g_{n_{k_m}} \to f \cdot g)$, а это можно получить из теоремы Рисса: возьмём $\{n_{k_i}\}$, для которой выполнено $f_{n_{k_i}} \to f$, а потом возьмём $\left\{n_{k_{i_j}}\right\}$, для которой выполнено $g_{n_{k_{i_j}}} \to g$.

Теория меры. Лекция 14

Эрлих Иван Генрихович

12 декабря 2019 г.

Теорема 1. Предел по мере единственен с точностью до эквивалентности (т. е. предельные функции отличаются на множестве меры нуль).

Доказательство. Пусть $f_n \xrightarrow{\mu} f$ и $f_n \xrightarrow{\mu} g$, тогда

$$\{x \in X \mid |f(x) - g(x)| > \varepsilon\} \subseteq \{x \in X \mid |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon/2\} \cup \{x \in X \mid |g(x) - f_n(x)| > \varepsilon/2\}$$

Меры двух последних множеств стремятся к нулю для любого ε, значит, мера первого множества стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 2. Если $f_n \xrightarrow{\mu} f$ и $g_n \xrightarrow{\mu} g$, то $f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\{x \in X \mid |f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| > \varepsilon\} \subseteq \\ \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon/2\} \cup \{x \in X \mid |g_n(x) - g(x)| > \varepsilon/2\}\end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть $\mu(X) < \infty$; если $f_n \xrightarrow{\mu} f$ и $g_n \xrightarrow{\mu} g$, то $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$ и (при $g_n, g \neq 0$) $f_n/g_n \xrightarrow{\mu} f/g$.

Доказательство. Функции $h(x) = x^2$ и $z(x) = 1/x$ непрерывны в своих областях определения, значит, $h \circ f_n = f_n^2 \xrightarrow{\mu} f^2$ (аналогично для $z(x)$); выражая произведение через квадраты (и частное — через обратную в смысле деления), получаем искомое.

Теорема 4 (критерий Коши). Последовательность $\{f_n\}$ сходится по мере тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall \gamma > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq N\ (\mu\{x \in X \mid |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\} < \gamma)$$

Доказательство. Выполнимость критерия для сходящейся последовательности очевидна:

$$\begin{aligned}&\{x \in X \mid |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\} \subseteq \\ &\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon/2\} \cup \{x \in X \mid |f_m(x) - f(x)| > \varepsilon/2\}\end{aligned}$$

Докажем обратное: возьмём подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, для которой выполняется утверждение

$$\mu \underbrace{\{x \in X \mid |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| > 2^{-i}\}}_{A_i} < 2^{-i}$$

Пусть $A = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=m}^{\infty} A_i$; заметим, что $\mu(A) = 0$, и для любого $x \in X \setminus A$ последовательность $\{f_{n_k}(x)\}$ фундаментальна; определим $f(x)$ как значение предела $\{f_{n_k}\}$ при фиксированном $x \in X \setminus A$.

Заметим, что если $x \in A$, то $x \in \bigcup\limits_{i=m+1}^{\infty} A_i$, а мера этого объединения ограничена сверху числом 2^{-m}. (Далее действуем как обычно — одновременно применяем фундаментальность $\{f_n\}$ и сходимость $\{f_{n_k}\}$.)

Теорема Егорова. Пусть $\mu(X) < \infty$, и $f_n \to f$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists E_\varepsilon \in M \ ((\mu(X \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon) \wedge (f_n \rightrightarrows f \text{ на } E_\varepsilon))$$

Доказательство. По критерию сходимости почти всюду

$$\forall \varepsilon > 0 \ \left(\mu \left(\underbrace{\bigcup_{k=n_m}^{\infty} \{x \in X \mid |f_k(x) - f(x)| > 1/m\}}_{G_n} \right) < \frac{\varepsilon}{2^m} \right)$$

Пусть $E_\varepsilon = X \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} G_m$, тогда $\mu(X \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$, а равномерная сходимость следует из того, что $E_\varepsilon = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} (X \setminus G_m) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n_m}^{\infty} \{x \in X \mid |f_k(x) - f(x)| \le 1/m\}$.

Интеграл Лебега

Определение. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *простой*, если она представима в следующем виде:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k I_{E_k}(x)$$

…где $E_i \cap E_j = \varnothing$ при $i \ne j$, и $\mu(E_k) < \infty$ при $c_k \ne 0$.

Каноническое представление: $c_1 < \cdots < c_n$ и $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k = X$

Определение. Интеграл Лебега для простой функции:

$$(L) \int_X f(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, \mu(E_k)$$

Лемма. Интеграл Лебега не зависит от представления простой функции.

Доказательство. Пусть $\{c_k, E_k\}$ и $\{d_j, D_j\}$ — два представления (каноническое и произвольное). Заметим, что $E_k = \bigcup\{D_j \mid d_j = c_k\}$; определим $\Gamma_k = \{j \mid d_j = c_k\}$ и запишем:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\, \mu(E_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j \in \Gamma_k} \mu(D_j) = \sum_j d_j\, \mu(D_j)$$

Теорема 1 (линейность по функциям). Пусть f и g — простые функции, $a, b \in \mathbb{R}$, тогда $af + bg$ — простая функция, и

$$(L) \int_X (af + bg)\, d\mu = a\,(L) \int_X f\, d\mu + b\,(L) \int_X g\, d\mu$$

Доказательство. Перебрав все пары элементов канонических (sic!) представлений и "скомбинировав" их (пересекая множества и т. п.), получим, что $af + bg$ — простая функция. Равенство интегралов показывается по определению.

Утверждение 1.

1. Если простая функция неотрицательна, то и её интеграл неотрицателен.
2. Если $f(x) \geq g(x)$, то $\int\limits_X f\,d\mu \geq \int\limits_X g\,d\mu$.

Утверждение 2. Модуль интеграла не больше интеграла модуля.
Утверждение 3. Если $X = A \sqcup B$, то

$$\int\limits_X f\,d\mu = \int\limits_A f\,d\mu + \int\limits_B f\,d\mu$$

Теория меры. Лекция 15

Эрлих Иван Генрихович

19 декабря 2019 г.

Теорема. Пусть $\{g_n\}, g$ — простые функции, $\{g_n\}$ — неубывающая неотрицательная (в поточечном смысле) на $E \in M$ последовательность, и $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) \geq g(x)$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E g_n \, d\mu \geq \int\limits_E g \, d\mu$$

Доказательство (для конечного предела интегралов). Пусть $F_n = \{x \in E \mid g_n(x) < g(x) - \varepsilon\}$, тогда $F_i \supset F_{i+1}$, и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing$. Определим $F = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ (здесь E_k — множества с ненулевыми коэффициентами $a_1, \ldots, a_m$ из канонического представления g); очевидно, что $\mu(F) < \infty$. Заметим, что $F_1 \subset F$, отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(F_n) = 0$.

$$\int\limits_E g \, d\mu = \underbrace{\int\limits_{F_n} g \, d\mu}_{\leq \mu(F_n)\cdot a_m} + \underbrace{\int\limits_{E\setminus F_n} g \, d\mu}_{\leq \int_{E\setminus F_n} (g_n+\varepsilon)\, d\mu} \to \lim_{n\to\infty} \int\limits_E g_n \, d\mu + \varepsilon \cdot a_m$$

Определение. Пусть $f(x)$ — неотрицательная измеримая функция, и $E \in M$. Пусть Q_f — множество всех простых функций, не превосходящих f на E. Интеграл Лебега для f на E определяется следующим образом:

$$\int\limits_E f \, d\mu = \sup_{h \in Q_f} \int\limits_E h \, d\mu$$

Функция называется *интегрируемой*, если её интеграл конечен.

Если же f — произвольная измеримая функция, то $f = f^+ - f^-$ (здесь f^+, f^- — неотрицательные функции), и

$$\int\limits_E f \, d\mu = \int\limits_E f^+ \, d\mu - \int\limits_E f^- \, d\mu$$

Замечание. Для простых функций старое и новое определения совпадают.

Утверждение. Пусть $\{g_n\}$ — неубывающая неотрицательная последовательность простых функций, $E \in M$, и $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ для всех $x \in E$, тогда

$$\int\limits_E g \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E g_n \, d\mu$$

Доказательство.

$$\int\limits_E g\,d\mu = \sup_{h\in Q_g}\int\limits_E h\,d\mu$$
$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) \geq h(x)$$
$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_E g_n(x)\,d\mu \geq \int\limits_E h(x)\,d\mu$$
$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_E g_n(x)\,d\mu \geq \int\limits_E g(x)\,d\mu$$

Обратное неравенство следует из того, что $g_n \in Q_g$.

Лемма. Для любой неотрицательной измеримой функции f и $E \in M$ существует последовательность $\{f_n\}$ неубывающих неотрицательных простых функций, которая сходится к f на E.

Доказательство. Пусть $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, где $\mu(E_k) < \infty$.

$$f_m(x) = \begin{cases} 0, & x \in \bigsqcup\limits_{k=m+1}^{\infty} E_k \\ 2^m, & x \in \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} E_k \text{ и } f(x) \geq 2^m \\ \frac{k-1}{2^m}, & f(x) \in \left[\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right) \end{cases}$$

Теорема 1.

1. Пусть $f, g \geq 0$ на E, тогда $\int\limits_E (f+g)\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu$
2. Пусть $f \geq 0$ на E, и $E = A \sqcup B$, где $A, B \in M$, тогда
$$\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_A f\,d\mu + \int\limits_B f\,d\mu$$

Доказательство. Пусть $f_n \to f$ и $g_n \to g$, тогда $f_n + g_n \to f + g$, и

$$\int\limits_E (f+g)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_E (f_n+g_n)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_E f_n\,d\mu + \lim_{n\to\infty}\int\limits_E g_n\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu$$

Теорема 2.

1. Пусть $\mu(E) = 0$, и f измерима на E, тогда f интегрируема на E, и $\int\limits_E f\,d\mu = 0$
2. Пусть f измерима и интегрируема на E, g измерима на E, и $f = g$ почти всюду, тогда $\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_E g\,d\mu$
3. Если f интегрируема на E, то $\mu\{x \in E \mid f(x) = \pm\infty\} = 0$

Доказательство.

1. Очевидно.

2. Рассмотрим $E_1 = \{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$; заметим, что $\mu(E \setminus E_1) = 0$, и утверждение доказано.

Утверждение. Если f интегрируема на E, и $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\alpha \cdot f$ интегрируема на E, и $\int\limits_E \alpha f \, d\mu = \alpha \int\limits_E f \, d\mu$.

Доказательство.

1. $\alpha = 0$: очевидно

2. $\alpha > 0$: пусть $\alpha \cdot f = \alpha \cdot f^+ - \alpha \cdot f^-$, тогда

$$\int\limits_E f^+ \, d\mu = \frac{1}{\alpha} \sup_{\alpha \cdot h \in Q_{\alpha \cdot f^+}} \int\limits_E \alpha \cdot h \, d\mu = \frac{1}{\alpha} \int\limits_E \alpha \cdot f^+ \, d\mu$$

Теорема. Интеграл аддитивен.

Доказательство. Пусть $f \geq 0$, $g \leq 0$ на E. Определим $E_1 = \{x \in E \mid f(x) + g(x) \geq 0\}$ и $E_2 = E \setminus E_1$, тогда

$$\int\limits_{E_1} f \, d\mu = \int\limits_{E_1} (f + g) \, d\mu + \int\limits_{E_1} (-g) \, d\mu$$

Далее,

$$-\int\limits_{E_2} g \, d\mu = \int\limits_{E_2} (-f - g) \, d\mu + \int\limits_{E_2} f \, d\mu$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\int\limits_E (f + g) \, d\mu &= \int\limits_{E_1} (f + g)^+ \, d\mu - \int\limits_{E_2} (f + g)^- \, d\mu \\
&= \int\limits_{E_1} f \, d\mu - \int\limits_{E_1} (-g) \, d\mu + \int\limits_{E_2} f \, d\mu - \int\limits_{E_2} (-g) \, d\mu \\
&= \int\limits_E f \, d\mu - \int\limits_E (-g) \, d\mu
\end{aligned}$$

Теорема.

1. f интегрируема на $E \Leftrightarrow |f|$ интегрируема на E

2. Модуль интеграла не превосходит интеграла модуля

Теорема. Если f, g измеримы, f интегрируема на E, и $|g| \leq |f|$, то g интегрируема на E, и $\int\limits_E |g| \, d\mu \leq \int\limits_E |f| \, d\mu$

Следствия.

1. Если $\mu(E) < \infty$, $|f| \leq C$ на E, то f интегрируема на E, и $\left| \int\limits_E f \, d\mu \right| \leq C \cdot \mu(E)$

Предельные переходы

Теорема Ле́ви

Теорема. Пусть $\{f_n\}$ — неубывающая неотрицательная последовательность измеримых функций, и $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, тогда

$$\int\limits_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,d\mu$$

Доказательство. Пусть $g_n = f_n - f_{n-1}$, и $g_1 = f_1$, и $\psi_{m,n} \to g_n$, где $\{\psi_{m,n}\}$ — неубывающая последовательность неотрицательных простых функций. Определим

$$F_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \psi_{m,n}(x)$$

Заметим, что

$$F_{m+1}(x) - F_m(x) = \sum_{n=1}^{m} (\psi_{m+1,n}(x) - \psi_{m,n}(x)) + \psi_{m+1,m+1}(x) \geq 0$$

... и $F_m(x) \leq \sum\limits_{n=1}^{m} g_n(x) = f_m(x) \leq f(x)$.

Также отметим, что

$$\lim_{m\to\infty} F_m(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \lim_{m\to\infty} \psi_{m,n}(x) = \sum_{n=1}^{N} g_n(x) = f_N(x)$$

Следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} F_m(x) = f(x)$. Так как F_m — простые функции, то

$$\int\limits_E f\,d\mu = \lim_{m\to\infty} \int\limits_E F_m\,d\mu$$

В то же время для любого m выполнено

$$\int\limits_E F_m\,d\mu \leq \int\limits_E f_m\,d\mu \leq \int\limits_E f\,d\mu$$

Таким образом, мы “зажали” последовательность интегралов.

Следствие. Пусть $\{f_i\}$ — неубывающая последовательность интегрируемых на E функций, причём их интегралы ограничены числом $C \in \mathbb{R}$, тогда $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ интегрируема на E, и

$$\int\limits_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,d\mu$$

Доказательство. Пусть $\psi_n = f_n - f_1$ — последовательность неотрицательных функций. Применяя теорему Леви, получаем искомое.

Лемма Фату́

Теорема. Пусть $\{f_n\}$ — неотрицательная последовательность измеримых функций, и $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ измерима, тогда

$$\int\limits_E f\,d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,d\mu$$

Доказательство. Пусть $\varphi_n = \inf\limits_{k\ge n} f_k$. Заметим, что $\varphi_n \le f_n$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$ на $E_1 = \{x \in E \mid f_n(x) \to f(x)\}$.

$$\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_{E_1} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_1} \varphi_n\,d\mu = \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_E \varphi_n\,d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,d\mu$$

Теорема Лебега

Теорема. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность измеримых функций, $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, F интегрируема на E, и $|f_n| \le F$ на E, тогда

$$\int\limits_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,d\mu$$

Доказательство. Заметим, что все f_n интегрируемы. Определим $\varphi_n = F + f_n$ и $\psi_n = F - f_n$ (все эти функции неотрицательны и интегрируемы).

$$\int\limits_E F\,d\mu - \int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_E (F - f)\,d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_E (F - f_n)\,d\mu = \int\limits_E F\,d\mu - \varlimsup_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,d\mu$$

Аналогично получаем

$$\int\limits_E F\,d\mu + \int\limits_E f\,d\mu \le \int\limits_E F\,d\mu + \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,d\mu$$

Отсюда

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,d\mu \le \int\limits_E f\,d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,d\mu$$

То есть, верхний предел оказался не больше нижнего; следовательно, они равны, и существует обычный предел, равный выражению посередине.

Следствие. Теорема Лебега верна для сходимости по мере.

Доказательство. Предположим, что теорема Лебега неверна, т. е. существует подпоследовательность интегралов, которая не сходится к интегралу предела. По теореме Рисса у соответствующей подпоследовательности функций существует подпоследовательность, сходящаяся к пределу всей последовательности функций почти всюду, значит, по теореме Лебега интегралы подпоследовательности сходятся к интегралу предела — противоречие.