

Technische Universität Dortmund  
Fakultät Statistik  
Sommersemester 2021

Grundlagen der Versuchaplanung: Bericht über das 2.Experiment

# Temperaturexperiment

Dozenten:

JProf. Dr. Kirsten Schorning, M.Sc. Onur Gül, B.Sc. Wiebke Dammann

Autorinnen:

Kaya Maria Bayer

Ketevan Gurtskaia

Danuscha Große-Hering

Alicia Hemmersbach

05.Juli 2021

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Problemstellung und Versuchsbedingungen</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Analyse des Problems</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Modell, Hypothesen und statistische Auswertungsmethoden</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Versuchsplanung</b>	<b>6</b>
<b>6</b>	<b>Versuchsablauf</b>	<b>7</b>
<b>7</b>	<b>Anhang</b>	<b>8</b>
A	Literatur . . . . .	8
B	Aufgaben Verteilung . . . . .	8
C	Erklärung zum Bericht . . . . .	9

# 1 Einleitung

Ein Thermometer besitzen vermutlich die meisten Haushalte. Einige davon besitzen wahrscheinlich auch ein Thermometer, welches die Temperatur draußen und drinnen messen kann. Möglicherweise hat man sich bereits die Frage gestellt, worin der Unterschied zwischen dem Innen- und Außensensor dieser Thermometer liegt und ob dieser lediglich darin besteht, dass Außensensoren wetterfest sind, oder ob beide Sensoren, unabhängig von weiteren äußeren Einflüssen, die gleichen Temperaturen messen würden, wenn man den Innensensor nach außen und den Außensensor nach innen legt.

Genau dieser Frage wird in dem folgenden Temperaturexperiment nachgegangen. Es soll überprüft werden, ob es Unterschiede bei den Messungen der beiden Sensoren drinnen und draußen gibt.

Dazu sollen mit 10 gleichen Thermometern einige Messungen drinnen und draußen durchgeführt werden. Hierbei wird dann der Unterschied der zwei gemessenen Temperaturen zwischen Innen- und Außensensor ausgewertet und mit Hilfe eines statistischen Tests interpretiert.

Im Folgenden wird auf die Problemstellung des Experiments und die Versuchsbedingungen, dann auf die Analyse des Problems, das zugehörige statistische Modell, die Hypothesen, die statistischen Auswertungsmethoden des Experiment und die Versuchsplanung eingegangen.

## 2 Problemstellung und Versuchsbedingungen

Ziel des Experimentes ist es, herauszufinden, ob die Messungen der Innen- und Außensensoren am selben Ort bei gleicher Temperatur übereinstimmen, oder ob es Unterschiede gibt. Außerdem soll untersucht werden, ob es einen Unterschied macht, ob draußen oder drinnen gemessen wird.

Um diese beiden Fragestellungen zu beantworten, sollen insgesamt 6 Messungen mit jeweils 10 Thermometern, die einen Außen- und einen Innensensor haben, durchgeführt werden, sodass nach der Durchführung des Experimentes 120 Messwerte vorliegen. Dabei sollen alle Thermometer gleich alt und zudem möglichst neu sein. Außerdem dürfen die Thermometer keine sichtbaren oder bekannten Schäden haben. Die Messungen werden in 2 Zeitslots über einen Tag verteilt, an dem keine extremen Wetterbedingungen herrschen, vorgenommen. Somit wird sichergestellt, dass in beiden Zeitslots ähnliche Temperaturen vorliegen. Außerdem werden die Thermometer vor jeder Messung randomisiert in 2 Gruppen mit jeweils 5 Thermometern aufgeteilt. Die eine Gruppe der Thermometer misst die Temperatur draußen und die andere Gruppe der Thermometer misst die Temperatur drinnen. Der Raum, in welchen die Innenmessungen stattfinden, soll hierbei keine angeschaltete Heizung oder Klimaanlage haben. Außerdem sollen, falls vorhanden, alle Fenster geschlossen und soweit abgedunkelt sein, dass keine direkte Sonneneinstrahlung, zum Beispiel durch Fenster, auf die Thermometer trifft.

Die Messungen draußen sollen an einem windgeschützten Ort ohne direkte und auch ohne gespiegelte Sonneneinstrahlung, zum Beispiel durch Wasser, stattfinden. Außerdem sollten die Thermometer an einem trockenen Ort platziert werden und es sollten andere direkte Wärmequellen mindestens 10 Meter Abstand von dem Messort haben.

Für die Messungen werden die 5 Thermometer draußen und die 5 Thermometer drinnen jeweils nebeneinander auf einen ebenen identischen Tisch gelegt. Außerdem ist darauf zu achten, dass die Innen- und Außensensoren direkt nebeneinander liegen.

Es werden jeweils 3 Messungen pro Thermometer in 2 Zeitslots durchgeführt. Der erste Slot ist von 4:00 - 6:00 Uhr und der zweite Slot von 16:00 - 18:00 Uhr. Insgesamt beträgt jeder Zeitslot zwei Stunden. Zu Beginn der Zeitslots werden die Thermometer für 15 Minuten in den Kühlschrank gelegt. Somit wird die Temperatur von allen Thermometern gleichmäßig neutralisiert. Nach Ablauf der 15 Minuten werden die Thermometer dann von 2 Versuchsleitern aus dem Kühlschrank entnommen und auf dem dafür vorgesehenen Tisch platziert. Dabei ist ein Versuchsleiter für die Thermometer draußen und ein Versuchsleiter für die Thermometer drinnen zuständig. Die Thermometer sollen jeweils 20 Minuten auf dem Tisch liegen und sich der jeweiligen Temperatur anpassen, bevor die angezeigten Temperaturen von den anderen beiden Versuchsleitern abgelesen und notiert werden. Nach der ersten Messung in beiden Slots kommen alle Thermometer für 15 Minuten zurück in den Kühlschrank, damit sich die Temperatur erneut neutralisieren kann. Nach Ablauf der 15 Minuten werden die Thermometer wieder von den ersten beiden Versuchsleitern auf dem Tisch platziert. Darauf hin werden die Temperaturen 20 Minuten abgelesen und notiert. Die dritte Messung in beiden Zeitslots läuft nach dem gleichen Schema so ab. Es ist zu beachten, dass das Ablesen und Notieren der Werte möglichst schnell passiert, damit alle 5 Werte jeweils zur gleichen tatsächlich herrschenden Temperatur abgelesen werden.

In der möglicherweise verbleibenden Zeit der Slots und zwischen dem ersten und zweiten Slots können die Thermometer jeweils auf den Tischen liegen bleiben, wobei auch hierbei darauf zu achten ist, dass sie in der Zwischenzeit keinem Regen oder anderen Wetterextrema ausgesetzt sind.

### 3 Analyse des Problems

Es soll untersucht werden, ob die Messungen der Innen- und Außensensoren der Thermometer gleich sind, ist die vorliegende interessierende Variable die Temperaturdifferenz der Innen- und Außensensoren:

$$y_{\text{Differenz}} = y_{\text{Außensensor}} - y_{\text{Innensensor}}$$

Die wahre Temperatur ist eine Einflussvariable. Diese können wir jedoch nicht kontrollieren. Zudem ist auch der Ort des Thermometers eine interessierende Einflussvariable, welche wir kontrollieren können. In dem Versuch werden wir zwei feste Orte festlegen: Innerhalb und Außerhalb eines Gebäudes.

Im folgenden werden mögliche Störvariablen genannt und inwiefern man diese kontrollieren kann. Generell haben die Wetter- bzw. die Klimabedingungen einen hohen Einfluss auf den Versuch. In geschlossenen Räumen ist dies die Nutzung einer Heizung oder Klimaanlage und die Luftfeuchtigkeit. Die Klimabedingungen im Raum werden konstant gehalten. Das bedeutet, dass sowohl die Klimaanlage, wie auch die Heizung oder Anlagen zur Regulierung der Luftfeuchtigkeit, ausgeschaltet werden. Außerhalb eines Gebäudes fällt auch die Luftfeuchtigkeit, die Sonnenbestrahlung an dem Messort, die Windstärke, wie auch Regen. Auch diese Bedingungen möchten wir möglichst konstant halten. Dies wird umgesetzt, indem die Thermometer an windgeschützten und überdachten ohne direkter Sonnenbestrahlung platziert werden sollen. Neben diesen Wetterfaktoren, kann auch das Thermometer einen Einfluss haben. Zum einen können Messungenauigkeiten zwischen unterschiedlichen Gerätehersteller oder Modellen zusätzlich zu den Messungenauigkeiten der einzelnen Thermometer dazukommen. Dies würde dazu führen, dass unser Versuch komplizierter würde. Deswegen halten wir das Modell des Thermometers konstant. Zudem ist die Tageszeit bzgl. der unterschiedlichen Temperaturen am Tage eine Störvariable.

Zusammengefasst sollen die meisten Störvariablen möglichst konstant gehalten werden und somit soll dessen Einfluss nicht erfasst werden. Jedoch können wir sie Messzeiten beeinflussen.

Durch die Variation der Messzeiten ist eine Variation der Temperatur möglich. Das bedeutet genauer: Zur Zeit des Sonnenaufgangs ist es tendenziell kälter, als zur Nachmittagszeit. [1]. Deswegen wird die Messzeit als Blockvariable mit zwei Stufen aufgefasst. Dabei entspricht die erste Stufe die Morgenstunden und die zweite Stufe die Nachmittagsstunden.

### 4 Modell, Hypothesen und statistische Auswertungsmethoden

Nach der Durchführung des Experiments liegen die Versuchsergebnisse zur Auswertung vor.

60 Messwerte der Innensensoren:  $V_1^a, \dots, V_{30}^a, V_{31}^i, \dots, V_{60}^i$

60 Messwerte der Außensensoren:  $W_1^a, \dots, W_{30}^a, W_{31}^i, \dots, W_{60}^i$

wobei  $a \hat{=}$  Messungen außerhalb des Gebäudes,  $i \hat{=}$  Messungen im Gebäude, jeweils 30 Beobachtungen für alle vier Kombinationen {Außensensor, Innensensor}  $\times$  {Draußen, Drinnen}. Stichprobenumfang  $n$  ist 60, Versuchsumfang  $N$  ist  $2 \cdot n = 120$ .

Da es in diesem Experiment sich um verbundene Stichproben handelt (die Paare  $(V_j, W_j), j = 1, \dots, 60$  sind bivariate Zufallsvektoren von Messungen der Innen- und Außensensoren eines Thermometers), werden die Differenzen  $X_j := W_j - V_j$ , mit  $j = 1, \dots, 60$ , unter der Voraussetzung, dass die Einzelwerte repräsentativ für die beiden Arten des Sensors sind, betrachtet (für die erste Fragestellung ist es nicht relevant, wo die Messung stattgefunden hat, deswegen werden hier die Ortindikatoren "a" und "i" weggelassen).

Die erste Fragestellung ist ob die Messungen der Innen- und Außensensoren übereinstimmen

Bevor der Haupttest durchgeführt wird, muss man die Normalverteilungsannahme ( $H_0 : X_j \sim N(\mu, \sigma_1^2)$ ) gegen  $H_1$  : Es liegt keine Normalverteilung vor) zum Niveau  $\alpha = 0.05$  überprüfen. Dies geschieht mit dem Shapiro-Wilk Test in R:

```
shapiro.test(W - V)
```

Ist der P-Wert größer 5%, so spricht nichts gegen die Normalverteilung, das ist aber auch kein Beweis dafür, dass Z normal verteilt ist. Trotzdem kann man mit der Annahme weiter arbeiten.

Als nächstes wird einen weiteren Vortest, diesmal auf Varianzhomogenität gemacht. Sei  $\sigma_1^2$  die Varianz von V und  $\sigma_2^2$  die Varianz von W, dann ist  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  gegen  $H_0 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$  in R mit:

```
var.test(V, W)$p.value
```

Für die Hauptfragestellung betrachtet man die Differenz zwischen den Beiden Stichprobenmittelwerten (in der Versuchsplanung heißt diese Differenz "Effekt" [3]).  $\mu = \mu_2 - \mu_1$ , mit  $\mu_1$  al Mittelwert von V und  $\mu_2$  von W. Folgende Hypothesen werden getestet:  $H_0 : \mu = 0$  bzw.  $\mu_1 = \mu_2$  gegen  $H_1 : \mu \neq 0$  bzw.  $\mu_1 \neq \mu_2$ . Mit  $\bar{X} = n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j$  ist die Teststatistik  $T_n := \frac{\sqrt{n}\bar{X}}{\sqrt{(n-1)^{-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}}$ . Die Ablehnung von  $H_0$  zum Niveau  $\alpha$

erfolgt genau dann, wenn  $|T_n| \geq t_{n-1; 1-\alpha/2}$  gilt [2]. In R verwendet man den zweiseitigen Zweistichproben-t-Test:

```
t.test(W, V, paired = TRUE, var.equal = TRUE)
```

falls die Varianzhomogenität nicht abgelehnt wurde und

```
t.test(W, V, paired = TRUE, var.equal = FALSE)
```

falls die Daten signifikant gegen die Gleichheit der Varianzen sprechen. Es ist wichtig anzugeben (mit paired = TRUE), dass es sich um gepaarte Stichproben handelt, da sonst die Ergebnisse verzerrt werden können, was zu Fehlinterpretation führen kann.

Wird mit dem Shapiro-Wilk Test die Normalverteilungsannahme abgelehnt, so wird ein Lage-Vergleichstest durchgeführt. Mit dem zweiseitigen Zweistichproben-Wilcoxon-Rang-Test werden dann die Hypothesen  $H_0 : med_i = med_a$  bzw.  $med_a - med_i = 0$  gegen  $H_1 : med_i \neq med_a$  bzw.  $med_a - med_i \neq 0$  zum Niveau  $\alpha = 0.05$  getestet. In R mit:

```
wilcox.test(W-V)$p.value
```

Ist der P-Wert des Haupttests kleiner 5%, so liegt einen signifikanten Unterschied zwischen den Messungen der Innen- und Außensensoren vor. Falls aber der P-Wert größer 0.05 ist, kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden, nichts spricht gegen die Annahme, dass die Messwerte von den beiden Sensoren übereinstimmen.

Die zweite Fragestellung des Experiments ist, ob es einen Unterschied gibt, wenn Messungen im Gebäude und außerhalb des Gebäudes durchgeführt werden. Diese Frage wird mittels einfacher Varianzanalyse beantwortet. Hier betrachtet man der Einfluss nur eines qualitativen Faktors A, also die einfache Varianzanalyse. Außerdem hat der Faktor A genau 2 Stufen (Dinnen und Draußen) und es liegt ein Modell mit festen Effekten vor [5]. Interessierende Beobachtungen sind die Differenzen zwischen den Innen- und Außensensoren  $X_{11} := W_1^a - V_1^a, \dots, X_{130} := W_{30}^a - V_{30}^a$  und  $X_{21} := W_{31}^i - V_{31}^i, \dots, X_{230} := W_{60}^i - V_{60}^i$ .

Die Modellgleichung hat die Form:  $X_{ij} = \mu + a_i + e_{ij}$  mit  $i = 1, 2, j = 1, \dots, 30$ .  $a_i$  sind die Hauptwirkungen der Faktorstufen  $A_i$  wobei  $A_1 \hat{=}$  Messungen außerhalb des Gebäudes,  $A_2 \hat{=}$  Messungen im Gebäude. Das Modell wird durch die folgenden Nebenbedingungen vervollständigt; Die Fehler ( $e_{ij}$  sind voneinander unabhängig mit Erwartungswert  $E(e_{ij}) = 0$  und Varianz  $var(e_{ij}) = \sigma^2$ , die Summe der  $a_i$  ist gleich 0 [5]. Um die einfache Varianzanalyse durchzuführen, muss man zwei Voraussetzungen überprüfen. Die Messungen  $X_{ij}$  müssen Normalverteilung für jede Stufe  $i = 1, 2$  besitzen. Das kann wie für den t-Test mit dem Shapiro-Wilk-Test für  $X_1$  und  $X_2$  getan werden.  $X_1 := (X_{11}, \dots, X_{130})^T$ ,  $X_2 := (X_{21}, \dots, X_{230})^T$  und  $X := (X_1 X_2)^T$ . Die zweite Voraussetzung ist die Gleichheit der Varianzen. Falls eine Normalverteilung für jede Stufe angenommen werden kann, kann die Homogenität der Varianzen mittels des Bartlett-Tests getestet werden [4]. Sei  $Ort := (1, \dots, 1, 2, \dots, 2)^T$ , dann ist der Test in R:

```
bartlett.test(X ~ Ort)
```

Die Hypothesen für die Hauptfragestellung sind:  $H_0 : a_1 = a_2 = 0$  bzw. Faktor A hat keinen Einfluss auf die Variable X vs.  $H_1 : a_1 \neq a_2$  bzw. Faktor A hat Einfluss auf die Variable X. Sind beide Voraussetzungen erfüllt, so kann man der ANOVA-Test anwenden.

```
anova(lm(X~Ort))
```

Ist die Hypothese der Normalverteilung bei allen Stufen abgelehnt worden oder die Hypothese der Gleichheit der Varianzen wird abgelehnt, so kann der ANOVA-Test nicht benutzt werden. Als Alternative wird der verteilungsfreie Kruskal-Wallis-Test, welcher den Wilcoxon-Rang-Summen-Test verallgemeinert, verwendet [4].

```
kruskal.test(lm(X~Ort))
```

Ist der P-Wert des ANOVA- bzw. Kruskal-Wallis-Tests kleiner als 0.05, so kann man schließen, dass der Ort der Messungen einen signifikanten Einfluss auf die Differenzen zwischen den Messwerte der Außen- und Innensensoren haben. Ist der P-Wert aber größer als 0.05, so kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden, was aber kein Beweis dafür ist, dass es keinen Einfluss des Faktors auf die Beobachtungen gibt, eventuell liegen zu wenig Daten vor.

## 5 Versuchsplanung

## 6 Versuchsablauf

Zunächst muss bestimmt werden, welche Personen Innen/Außen die Thermometer aufstellen und die Messungen ablesen und dokumentieren. B

Uhrzeit	Beschreibung	Versuchsleiterin
03:30 Uhr	Vorbereitung der Messorte	alle
03:55 Uhr	Aufstellen der Thermometer	D.Grosse-Hering/K.Bayer
04:00 Uhr	Beginn der 1.Messung	
04:20 Uhr	Ende der 1.Messung: dokumentieren, Zwischenlagerung	A.Hemmersbach/K.Gurtskaia
04:40 Uhr	Aufstellen der Thermometer	D.Grosse-Hering/K.Bayer
04:45 Uhr	Beginn der 2.Messung	
05:05 Uhr	Ende der 2.Messung: dokumentieren, Zwischenlagerung	A.Hemmersbach/K.Gurtskaia
05:25 Uhr	Aufstellen der Thermometer	D.Grosse-Hering/K.Bayer
05:40 Uhr	Beginn der 3.Messung	
06:00 Uhr	Ende der 3.Messung: dokumentieren, Zwischenlagerung	A.Hemmersbach/K.Gurtskaia
06:20 Uhr	Pause	alle
15:55 Uhr	Aufstellen der Thermometer	A.Hemmersbach/D.Grosse-Hering
16:00 Uhr	Beginn der 1.Messung	
16:20 Uhr	Ende der 1.Messung: dokumentieren, Zwischenlagerung	K.Bayer/K.Gurtskaia
16:40 Uhr	Aufstellen der Thermometer	A.Hemmersbach/D.Grosse-Hering
16:45 Uhr	Beginn der 2.Messung	K.Bayer/K.Gurtskaia
17:05 Uhr	Ende der 2.Messung: dokumentieren, Zwischenlagerung	
17:25 Uhr	Aufstellen der Thermometer	A.Hemmersbach/D.Grosse-Hering
17:40 Uhr	Beginn der 3.Messung	
18:00 Uhr	Ende der 3.Messung: dokumentieren, Zwischenlagerung	K.Bayer/K.Gurtskaia
18:20 Uhr	Nachbesprechung	alle
18:50 Uhr	Digitalisierung der Messdaten	A.Hemmersbach

## 7 Anhang

### A Literatur

- [1] *Am späten Nachmittag ist es wärmer als am Mittag.*  
URL: <https://wetterkanal.kachelmannwetter.com/am-spaeten-nachmittag-ist-es-waermer-als-am-mittag/>.
- [2] Norbert Henze.  
*Stochastik: Eine Einführung mit Grundzügen der Maßtheorie.*  
Springer Spektrum, Springer-Verlag GmbH, 2019.
- [3] Wilhelm Kleppman.  
*Versuchsplanung: Produkte und Prozesse optimieren.*  
Carl Hanser Verlag, 2020.
- [4] Prof. Dr. Christine Müller.  
„Schätzen und Testen“.  
Technische Universität Dortmund.  
2020/2021.
- [5] Dieter Rasch, L.Rob Verdooren und Jim I.Gowers.  
*Planung und Auswertung von Versuchen und Erhebungen.*  
Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2007.

### B Aufgaben Verteilung

```
Versuchsleiterin <- c("K.Bayer","A.Hemmersbach","D.Grosse-Hering","K.Gurtskaia")

set.seed(1539)

#Morgens Innen
sample(Versuchsleiterin,2)
## "D.Grosse-Hering" "A.Hemmersbach"

#Morgens Aussen
##"K.Bayer" "K.Gurtskaia"

set.seed(1540)

#Nachmittags Innen
sample(Versuchsleiterin,2)
##"A.Hemmersbach" "K.Bayer"

#Nachmittags Aussen
## "D.Grosse-Hering" "K.Gurtskaia"

set.seed(1540)
#Digitalisierung der Daten
sample(Versuchsleiterin,1)
##"A.Hemmersbach"
```

Die Erstgenannte Person wird für die Aufstellung der Thermometer und die zweitgenannte Person ist für die Dokumentierung der Messdaten zuständig.



## C Erklärung zum Bericht

### Erklärung zum Bericht von Gruppe 2

Die Einleitung wurde geschrieben von Kaya Maria Bayer

Die Problemstellung und die Versuchsbedingungen wurden beschrieben von Kaya Maria Bayer

Das Problem wurde analysiert von Danuscha Große-Hering

Das Modell und die Hypothesen wurden aufgestellt von Ketevan Gurtskaia

Die statistische Auswertungsmethode wurde bestimmt von Ketevan Gurtskaia

Die Versuchsplanung wurde vorgenommen von Alicia Hemmersbach

Der Versuchsplan wurde dokumentiert von Alicia Hemmersbach

Das Versuchsprotokoll wurde geschrieben von Danuscha Große-Hering

Die Literatur wurde herausgesucht von der gesamten Gruppe.

Der Bericht wurde endgültig zusammengestellt von Danuscha Große-Hering

Datum	Vor- und Nachname in Klartext	Unterschrift
04.Juli.2021	Kaya Maria Bayer	
04.Juli.2021	Alicia Hemmersbach	
04.Juli.2021	Ketevan Gurtskaia	<i>K. Gurtskaia</i>
04.Juli.2021	Danuscha Große-Hering	<i>D. Große-Hering</i>