In [1]:
```python
import sympy
from sympy import linsolve, Matrix, S, Symbol, symbols, linear_eq_to_matrix, Eq, zeros
```

Занятие 5

Алгебра

Прямые и плоскости в пространстве. Уравнения прямых и плоскостей.

1. Общее уравнение плоскости:
$$Ax+By+Cz+D=0,$$
коэффициенты A, B и C являются координатами вектора нормали (он по определению перпендикулярен плоскости).
2. Пусть $A(x_0,y_0,z_0)$ - фиксированная точка на плоскости α, вектор $\bar{n}(n_x,n_y,n_z)$ - нормаль к плоскости α, тогда в векторнй форме уравнение плоскости α запишется в виде:
$$\bar{n}\cdot\overline{MA}=0,$$
где $M(x,y,z)$ - произвольная точка на плоскости α, $\overline{MA}$ - вектор в плоскости α.
3. Пусть $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ и $\mathrm{C}(x_3,y_3,z_3)$ - три точки, определяющие плоскость, тогда уравнение плоскости можно записать в виде:
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$
4. Пусть в плоскости лежит точка $A(x_0,y_0,z_0)$ и плоскость параллельна векторам $a_1(x_1,y_1,z_1)$ и $a_2(x_2,y_2,z_2)$, тогда уравнение плоскости можно записать в виде:
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0$$
Уравнение прямой в пространстве: Параметрические уравнения прямой:
$$\begin{cases} x=x_0+ta_1 \\ y=y_0+ta_2 \\ z=z_0+ta_3 \end{cases}$$
в векторной форме:
$$X=A+t\bar{a}$$
X и A - радиус-векторы произвольной точки X и заданной точки A, лежащих на прямой с направляющим вектором $\bar{a}(a_1,a_2,a_3)$.

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух плоскостей:
$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

Пример 1.

Пусть плоскость α задана общим уравнением
$$3x+5y-2z+5=0.$$
Найти точку на плоскости, через которую проходит прямая, заданная уравнениями:
$$\begin{cases} x=1+3t \\ y=-2+2t \\ z=-t \end{cases}$$
Решим СЛАУ:
$$\begin{cases} 3x+5y-2z+5=0 \\ x=1+3t \\ y=-2+2t \\ z=-t \end{cases},$$
Введем ее в виде списка уравнений, и решим с помощью linsolve()

In [2]:
```python
x, y, z, t = symbols('x y z t')
SLAE = [Eq(3*x + 5*y - 2*z + 5, 0), Eq(x, 1 + 3*t), Eq(y, -2 + 2*t), Eq(z, -t)]
res = linsolve(SLAE, x, y, z, t)
res
```
Out[2]: $\left\{\left(\frac{9}{7}, -\frac{38}{21}, -\frac{2}{21}, \frac{2}{21}\right)\right\}$

Выделим координаты x,y,z точки пересечения:

In [3]:
```python
for element in res:
    point = element[:-1]
point
```
Out[3]: $\left(\frac{9}{7}, -\frac{38}{21}, -\frac{2}{21}\right)$

Пример 2.

Определить, пересекаются ли прямые в пространстве, если одна из них проходит через точки $A(1,2,3)$ и $B(-3,5,0)$, а вторая прямая проходит через начало координат перпендикулярно плоскости $5x-2y+3z-1=0$.

Вначале найдем координаты направляющего вектора для прямой AB, для этого составим матрицы (векторы-столбцы) из координат точек A и B, затем вычтем один вектор-столбец из другого:

In [4]:
```python
A = Matrix([1, 2, 3])
B = Matrix([-3, 5, 0])
a1 = B - A
a1
```
Out[4]: $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$

Запишем уравнение прямой AB в векторной форме:

In [5]:
```python
t1 = Symbol('t1')
AB = A + t1*a1
AB
```
Out[5]: $\begin{bmatrix} 1-4t_1 \\ 3t_1+2 \\ 3-3t_1 \end{bmatrix}$

Составим уравнение второй прямой, она проходит через точку $O(0,0,0)$, ее направляющим вектором является вектор нормали к плоскости $5x-2y+3z-1=0$, т.е. $(5,-2,3)$.

In [6]:
```python
t2 = Symbol('t2')
a2 = Matrix([5, -2, 3])
OC = t2*a2
OC
```
Out[6]: $\begin{bmatrix} 5t_2 \\ -2t_2 \\ 3t_2 \end{bmatrix}$

Составим СЛАУ из уравнений двух этих прямых

In [7]:
```python
SLAE1 = [Eq(AB[i] - OC[i], 0) for i in range(len(AB))]
display(*SLAE1)
```
$-4t_1-5t_2+1=0$

$3t_1+2t_2+2=0$

$-3t_1-3t_2+3=0$

In [8]:
```python
linsolve(SLAE1, t1, t2)
```
Out[8]: $\emptyset$

СЛАУ несовместна, прямые не пересекаются.

Можно проверить совместность СЛАУ с помощью теоремы Кронекера-Капелли, для этого приведем СЛАУ к матричному виду с помощью linear_eq_to_matrix

In [9]:
```python
A2, b2 = linear_eq_to_matrix(SLAE1, [t1, t2])
```

Составим расширенную матрицу СЛАУ

In [10]:
```python
A2b2 = A2.row_join(b2)
display(A2b2)
```
$\begin{bmatrix} -4 & -5 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

Сравним ранги матрицы левой части и расширенной матрицы

In [11]:
```python
A2.rank() == A2b2.rank()
```
Out[11]: False

Вывод: СЛАУ несовместна, следовательно, прямые не пересекаются.

Пример 3.

Найти точку пересечения прямых в пространстве, если одна из них проходит через точки $A(-1,2,1)$ и $B(3,5,2)$, а вторая прямая проходит через точки $C(1,3,7)$ и $D(-3,5,-2)$.

In [12]:
```python
A = Matrix([-1, 2, 1])
B = Matrix([3, 5, 2])
a1 = B - A
AB = A + t1*a1
AB
```
Out[12]: $\begin{bmatrix} 4t_1-1 \\ 3t_1+2 \\ t_1+1 \end{bmatrix}$

In [13]:
```python
C = Matrix([1, 3, 7])
D = Matrix([-3, S(1)/2, S(1)/2])
a2 = D - C
CD = C + t2*a2
CD
```
Out[13]: $\begin{bmatrix} 1-4t_2 \\ 3-\frac{5t_2}{2} \\ 7-\frac{13t_2}{2} \end{bmatrix}$

In [14]:
```python
SLAE2 = [Eq(AB[i], CD[i]) for i in range(len(AB))]
display(*SLAE2)
```
$4t_1-1=1-4t_2$

$3t_1+2=3-\frac{5t_2}{2}$

$t_1+1=7-\frac{13t_2}{2}$

Решим систему:

In [15]:
```python
A3, b3 = linear_eq_to_matrix(SLAE2, [t1, t2])
display(A3, b3)
A3b3 = A3.row_join(b3)
display(A3b3, A3.rank(), A3b3.rank())
```
$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{13}{2} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 3 & \frac{5}{2} & 1 \\ 1 & \frac{13}{2} & 6 \end{bmatrix}$

2

2

Вывод: СЛАУ совместна, найдем, при каких значениях параметров прямые пересекаются:

In [16]:
```python
Set_t1_t2 = linsolve(SLAE2, t1, t2)
Set_t1_t2
```
Out[16]: $\left\{\left(-\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$

Выделим значения параметров и подставим их в уравнения прямых в векторной форме, убедимся, что получается одна и та же точка

In [17]:
```python
for element in Set_t1_t2:
    T1, T2 = element
K1 = A + T1*a1
K2 = C + T2*a2
display(K1, K2)
```
$\begin{bmatrix} -3 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -3 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Пример 4.

Найти точку пересечения прямой, проходящей через точку $A(-1,0,1)$ параллельно вектору $a(3,-2,0)$ и плоскости $3x+4y-z+5=0$.

Составим канонические уравнения прямой и уравнение плоскости, обединим все уравнения в одну систему и решим ее с помощью linsolve, затем выделим значения переменных x,y,z.

In [18]:
```python
x, y, z, t = symbols('x y z t')
X = Matrix([x, y, z])
A = Matrix([-1, 0, 1])
a = Matrix([3, -2, 0])
SLAE_AB = [Eq(X[i], A[i] + a[i]*t) for i in range(len(AB))]
display(*SLAE_AB)
KMN = Eq(3*x + 4*y - z + 5, 0)
display(KMN)
SLAE_AB.append(KMN)
points = linsolve(SLAE_AB, x, y, z, t)
for item in points:
    display(item[:-1])
```
$x=3t-1$

$y=-2t$

$z=1$

$3x+4y-z+5=0$

$(-4,\ 2,\ 1)$

Пример 5.

Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат, в которой лежит прямая, заданная уравнениями:
$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=2-3t \\ z=5+2t \end{cases}$$

Найдем две различные точки на прямой, придавая разные значения параметру t, например, 0 и 1. Затем составим уравнение плоскости, проходящей через 3 точки.

In [19]:
```python
O = zeros(3, 1)
A = Matrix([3, 2, 5])
a = Matrix([2, -3, 2])
x, y, z, t = symbols('x y z t')
X = Matrix([x, y, z])
AB = A + t*a
M1 = AB.subs(t, 0)
M2 = AB.subs(t, 1)
Eq(Matrix([(P - M1).T for P in (X, M2, O)]).det(), 0)
```
Out[19]: $19x+4y-13z=0$