In [21]:
```python
import sympy
from sympy import S, Symbol, symbols, Function, dsolve, solveset, plot_implicit, integrate, diff, plot
from sympy import sin as Sin
from sympy import cos as Cos
from sympy import exp as Exp
from sympy import log as Log
from sympy import pi as Pi
%matplotlib inline
```

Занятие 17

Математический анализ

Интегрирование при решении обыкновенных дифференциальных уравнений

Дифференциальными уравнениями

называются такие уравнения, в которых неизвестными являются функции, причем в уравнения входят не только сами функции, но и их производные. Если неизвестные функции зависят от многих переменных, то то такие уравнения называют

уравнениями в частных производных,

если же функции зависят только от одной переменной, то уравнения называются

обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной
$$u' = f(x,u), \qquad\qquad (1)$$
где функция двух переменных $f(x,u)$ определена в некоторой области B.

Решением обыкновенного дифференциального уравнения

(1) называется такая функция одной переменной $u = \phi(x)$, определенная на интервале $(r_1;r_2)$, что при подстановке ее в уравнение (1) вместо x получается тождество на всем интервале $(r_1;r_2)$. Такая подстановка возможна только в том случае, если $\phi(x)$ имеет производную на $(r_1;r_2)$, и если для любого $t \in (r_1;r_2)$ точка $(t;\phi(t)) \in B$.

Далее будем рассматривать случай, когда множество задания функции $f(x,u)$ является открытым прямоугольником:
$$B = \{(x,u):\ r_1 < x < r_2,\ a < u < b\},$$
причем сама $f(x,u)$ и ее частная производная $\partial f(x,u)/\partial u$ являются непрерывными функциями на B.

Каждое решение $u = \phi(x)$ уравнения (1) в плоскости XOU изображается некоторой кривой, тангенс угла наклона касательной к которой в каждой точке $(x;u)$ этой кривой равен значению функции $f(x,u)$ в этой точке. Кривая, изображающая решение уравнения (1) называется \textit{\textbf{интегральной кривой}} уравнения (1).

Поскольку $f(x,u)$ и $\partial f(x,u)/\partial u$ непрерывны на открытом прямоугольнике B, то для любой точки (x^*,u^*) из B существует единственное решение $u = \phi(x)$ уравнения (1), определенное в интервале $(c;d) \in (r_1;r_2)$, удовлетворяющее условию
$$\phi(x^*) = u^*.$$

Другими словами, через каждую точку $(x^*,u^*) \in B$ проходит единственная интегральная кривая уравнения (1) (если две интегральные кривые имеют общую точку, то считаем их не отдельными интегральными кривыми, а частями одной интегральной кривой, являющейся их объединением).

Рассмотрим уравнение
$$u' = \frac{3x^2}{2u},$$
в открытом прямоугольнике $B = \{(x,u):\ 0 < x < 5,\ 0 < u < 3\}$. Решение этого уравнения имеет вид
$$u = \sqrt{x^3 + C},$$
где C --- некоторая постоянная. Пусть интегральная кривая уравнения проходит через точку $(1;2) \in B$, тогда
$$2 = \sqrt{1 + C}, \quad C = 3,$$
поэтому уравнение такой интегральной кривой
$$u = \sqrt{x^3 + 3},$$
причем $x \in (0;\sqrt[3]{6})$, поскольку при других значения x кривая выходит за пределы заданного прямоугольника B.

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений численными методами придется рассматривать случай, когда область $\bar{B}$ замкнута. Будем считать, что $f(x,u)$ имеет непрерывную частную производную в замкнутой области $\bar{B}$, если в некоторой открытой области B, содержащей $\bar{B}$, существует функция $f^*(x,u)$, совпадающая с $f(x,u)$ на $\bar{B}$, которая имеет непрерывную частную производную в B, причем значения частной производной функции $f(x,u)$ в граничных точках $\bar{B}$ примем равными значениям частной производной функции $f^*(x,u)$ в этих точках.

ОДУ с разделяющимися переменными

Рассмотрим ОДУ вида

$$f(y)y' = g(x).$$

Такое ОДУ можно переписать в виде

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x), \qquad \Rightarrow \qquad f(y)\,dy = g(x)\,dx$$

Интегрируем обе части, левую по y, правую по x:

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

после вычисления интегралов получаем уравнение, не содержащее производной, оно называется общим интегралом ОДУ.

Например, решим ОДУ

$$y' \sin y = x^2,$$

перепишем его в виде

$$\sin y\,dy = x^2\,dx,$$

Проинтегрируем обе части:

$$\int \sin y\,dy = \int x^2\,dx,$$

вычисляя интегралы, получим:

$$-cos y = \frac{x^3}{3} + C$$

это общий интеграл этого ОДУ.

Можем выразить y:

$$y = \pm\arccos\frac{-x^3}{3} + C + \pi n, \qquad n \in \mathbf{Z}.$$

Здесь нужно учитывать область определения $\arccos$.

Задача Коши

Сформулируем задачу нахождения решения уравнения (1) таким образом, чтобы это решение было единственным.

Найти решение дифференциального уравнения (1) на отрезке $[x_0, x_0 + l]$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x_0) = u_0, \qquad a < u_0 < b, \qquad\qquad (2)$$

где u_0 --- заданное число, $f(x, u)$ и ее частная производная $\partial f(x, u)/\partial u$ непрерывны на замкнутом прямоугольнике $B = \{(x, u):\ x_0 \le x \le x_0 + l,\ a \le u \le b\}$.

Решением задачи Коши

является функция одной переменной $u = \phi(x)$, имеющая непрерывную производную на отрезке $[x_0, x_0 + l]$, удовлетворяющая уравнению (1) и начальному условию (2).

Пример 1.

ОДУ с разделяющимися переменными

$$e^{2y-3}y' = x.$$

перепишем его в виде

$$e^{2y-3}\,dy = x\,dx,$$

Проинтегрируем обе части:

$$\int e^{2y-3}\,dy = \int x\,dx,$$

вычисляя интегралы, получим:

$$\frac{e^{2y-3}}{2} = \frac{x^2}{2} + C,$$

это общий интеграл этого ОДУ.

In [22]:
```
x, y = symbols('x y', real=True)
C = Symbol('C', positive=True)
ODE1 = sympy.Eq(integrate(Exp(2*y - 3), y), integrate(x, x) + C)
ODE1
```

Out[22]:

$$\frac{e^{2y-3}}{2} = C + \frac{x^2}{2}$$

Можем выразить y с помощью solveset:

In [23]:
```
ODE1y = sympy.Eq(y, *solveset(ODE1, y, domain=S.Reals))
ODE1y
```

Out[23]:
$$y = \frac{\log\left(2C + x^2\right)}{2} + \frac{3}{2}$$

Заметим, что, поскольку C - произвольное число, то $2C$ для простоты корректно заменить на C.

Отметим, что для удобства вычислений было введено ограничение на значения C, а именно, positive=True. На самом деле C может принимать и отрицательные значения, но в этом случае сужается область определения решения, поскольку в соответствии с облатстью определения логарифмической функции $x^2 + C > 0$.

Ответ:

$$y = \frac{\ln(x^2 + C) + 3}{2}.$$

Пример 2.

Решить аналитически задачу Коши

$$y \cdot y'(1 + e^x) = e^x, \qquad y(0) = 1.$$

Найти общий интеграл, учесть начальное условие. Построить график y, пользуясь plot_implicit.

In [32]:
```
x, y, C = symbols('x y C', real=True)
ODE2 = sympy.Eq(integrate(y, y), integrate(Exp(x)/(1 + Exp(x)), x) + C)
display(ODE2)
```

$$\frac{y^2}{2} = C + \log\left(e^x + 1\right)$$

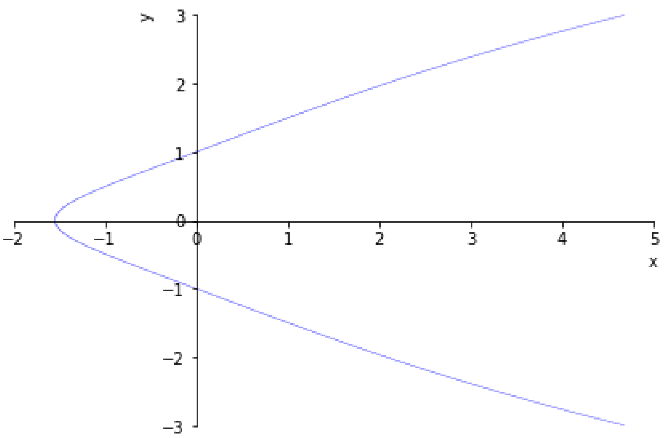
Подставим в левую и правую части полученного уравнения начальные значения $x = 0$, $y = 1$ и выразим C, используя solveset:

In [33]:
```
x0y0 = {x: 0, y: 1}
Cval = solveset(sympy.Eq(ODE2.lhs.subs(x0y0), ODE2.rhs.subs(x0y0)), C)
Cval
```

Out[33]:
$$\left\{\frac{1}{2} - \log\left(2\right)\right\}$$

Теперь в общий интеграл подставим найденной значение константы C и построим график с помощью plot_implicit.

In [30]:
```
plot_implicit(sympy.Eq(ODE2.lhs, ODE2.rhs.subs(C, *Cval)),
              (x, -2, 5), (y, -3, 3))
```



Out[30]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x27d01722dd8>

Сеточные функции, сеточные нормы

Зададим на отрезке $[x_0, x_0 + l]$ равномерную сетку ω_h, т.е. множество точек $x_j = x_0 + jh$, $h = l/N$, $N \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1, \ldots, N$. Определим на сетке функцию ϕ, обозначим $\phi_j = \phi(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, N$.

Норму сеточной функции ϕ определим так:

$$||\phi||_h = \max_{0 \le j \le N} |\phi_j|.$$

Будем использовать сеточную норму как характеристику отклонения сеточных функций. Заметим, что каждой функции $\phi(x)$, определенной на отрезке $[x_0, x_0 + l]$, соответствует сеточная функция ϕ.

Метод Эйлера

Приближенное решение y задачи Коши

$$\begin{aligned} u' &= f(x,u), \\ u(x_0) &= u_0, \quad a < u_0 < b, \end{aligned} \qquad (3)$$

будем искать в виде сеточной функции, определенной на равномерной сетке $\omega_h = \{x_j = x_0 + jh,\ j = 0, 1, \dots, N\}$, $h = l/N$, $N \in \mathbb{N}$.

Идея метода состоит в замене производной ее разностным аналогом:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) = y(x)}{h} \approx \frac{y(x+h) = y(x)}{h}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h},$$

следовательно, взяв из ОДУ $u' = f(x,u)$ ($y' \approx f(x,y)$), получим

$$y(x+h) = y(x) + f(x,y)h. \qquad (4)$$

Далее из начального условия имеем $y_0 = y(x_0) = u_0$, где x_0, u_0 заданные в условии числа. Это позволяет нам определить функцию $y(x)$, являющуюся решением ОДУ, в точке x_0. Для определения значения $y(x)$ в соседнем узле сетки $x_1 = x_0 + h$ воспользуемся формулой (4), получим

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h.$$

Значения y на сетке ω_h вычисляются по схеме

$$\begin{aligned} y_0 &= u_0, \\ y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k &= 0, 1, \dots, N, \end{aligned}$$

далее для простоты будем считать, что сеточная функция y целиком находится в прямоугольнике $\bar{B}$, т.е.

$$a \le y_k \le b, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Для оценки точности приближенного решения обозначим погрешность приближенного решения $\epsilon_k = u_k - y_k$, $k = 0, 1, \dots, N$, где u_k --- сеточная функция, совпадающая на ω_h с точным решением u. Так мы определили сеточную функцию ϵ, описывающую отклонение приближенного решения от точного на сетке ω_h.

При отсутствии погрешности округления

$$\begin{aligned} &||\epsilon||_h \le \frac{h}{2}\left(\frac{M_x}{M_u} + M_0\right)(e^{lM_2} - 1), \\ &M_0 = \max_{\bar{B}} |f(x,u)|, \quad M_x = \max_{\bar{B}} |f'_x(x,u)|, \quad M_u = \max_{\bar{B}} |f'_u(x,u)|. \end{aligned}$$

Таким образом, метод Эйлера является методом первого порядка точности относительно h.

Метод Рунге-Кутта ("предиктор-корректор")

Приближенное решение y задачи Коши (1), (2) ищем в виде сеточной функции, определенной на равномерной сетке $\omega_h = \{x_j = x_0 + jh,\ j = 0, 1, \dots, N\}$, $h = l/N$, $N \in \mathbb{N}$.

Значения y на сетке ω_h вычисляются по схеме

$$\begin{aligned} y_0 &= u_0, \\ y^*_{k+1} &= y_k + hf(x_k, y_k), \\ y_{k+1} &= y_k + h\frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y^*_{k+1})}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Идея такая: сначала находим значение y в соседнем узле сетки x_{k+1} по методу Эйлера, а потом вычисляем производную в этом узле, находим среднее значение производных в x_k и x_{k+1}, причем в формулу производной в x_{k+1} подставляем найденное по методу Эйлера значение y^*_{k+1}. Это среднее значение производной используем для получения более точного значения неизвестной функции y_{k+1} в x_{k+1}.

Погрешность $||\epsilon||_h$ приближенного решения в этой схеме равна $O(h^2)$, т.е. метод Рунге-Кутта имеет второй порядок точности относительно h.

```
In [ ]:
```