In [1]:
```
import sympy
from sympy import Symbol, symbols, S, Function, integrate, Integral, diff
```

# Занятие 9

# Математический анализ

# Интегрирование функции: первообразная и неопределенный интеграл

Пусть задана функция одной переменной $f(x)$.

Первообразной функции $f(x)$ называется такая (дифференцируемая) функция $F(x)$, что
$$F'(x) = f(x).$$

Если $F(x)$ --- первообразная функции $f(x)$, то и любая функция вида $F(x) + \mathrm{C}$, где C - константа, явояется первообразной функции $f(x)$.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ образует неопределенный интеграл функции $f(x)$.

### Пример 1

Пусть $f(x) = \sin(x)$, тогда неопределенный интеграл
$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

В sympy для интегрирования есть

integrate(f, x), возвращает неопределенный интеграл $\int f(x), dx$ (на самом деле возвращает одну из первообразных)

In [2]:
```
x = Symbol('x')
integrate(sympy.sin(x), x)
```

Out[2]: $-\cos(x)$

integrate можно применять и как метод.

In [3]:
```
sympy.sin(x).integrate(x)
```

Out[3]: $-\cos(x)$

В случае интегрирования функции одной переменной необязательно явно указывать переменную интегрирования:

In [4]:
```
sympy.cos(x).integrate()
```

Out[4]: $\sin(x)$

Но если нужно интегрировать $\sin(x)$ по $y$, то необходимо указать переменную интегрирования, чтобы получить желаемый результат:

In [5]:
```
y = Symbol('y')
sympy.cos(x).integrate(y)
```

Out[5]: $y\cos(x)$

Определенный интеграл
$$\int_a^b f(x) \, dx$$
вычисляется с помощью метода integrate(f(x), (x, a, b)) или f(x).integrate((x, a, b)).

Обратите внимание, в определенном интеграле передается в качестве аргумента tuple, состоящий из имени переменной и пределов интегрирования.

integrate(f, (x, a, b)) или f(x).integrate((x, a, b)) возвращает определенный интеграл $\int_a^b f(x), dx$

### Пример 2.

Определенный интеграл
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x| \, dx$$

In [6]:
```
display(integrate(abs(sympy.sin(x)), (x, -sympy.pi/2, sympy.pi/2)),
        abs(sympy.sin(x)).integrate((x, -sympy.pi/2, sympy.pi/2)))
```

$2$

$2$

### Пример 3.

Формула Ньютона - Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Проверим, что она выполняется для $sin(x)$

In [7]:
```
F = integrate(sympy.sin(x), x)
F.subs(x,sympy.pi) - F.subs(x, 0)
```

Out[7]: $2$

### Пример 4.

Можно использовать абстрактные функции в интеграле, например:

In [8]:
```
f = Function('f')
a, b = symbols('a b')
F = integrate(f(x), x)
display(F)
Fab = integrate(f(x), (x, a, b))
display(Fab)
```

$$\int f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Можно подставить вместо абстрактной функции, например, $e^x$:

In [9]:
```
F.subs(f(x), sympy.exp(x))
```

Out[9]: $\int e^x\,dx$

Обратим внимание, что произошла только подстановка, сам интеграл вычислен не был.

Кроме того, сам интеграл $F$ не изменился.

In [10]:
```
F
```

Out[10]: $\int f(x)\,dx$

Для представления невычисленного интеграла в Sympy есть класс Integral.

https://docs.sympy.org/latest/modules/integrals/integrals.html#sympy.integrals.integrals.Integral (https://docs.sympy.org/latest/modules/integrals/integrals.html#sympy.integrals.integrals.Integral)

### Пример 5.

Составим уравнение

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

Используем Integral, integrate и объектно-ориентированный подход:

In [11]:
```
C = Symbol('C')
sympy.Eq(Integral(sympy.exp(x)), sympy.exp(x).integrate() + C)
```

Out[11]:

$$\int e^{x}\, dx = C + e^{x}$$

### Пример 6.

Представим интегралы от функций $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$ и $\sqrt{x}$ как в Примере 5.

In [12]:
```
functions = (sympy.sin, sympy.cos, sympy.log, sympy.sqrt)
for func in functions:
    display(sympy.Eq(Integral(func(x)), func(x).integrate() + C))
```

$$\int \sin{\left(x \right)}\, dx = C - \cos{\left(x \right)}$$

$$\int \cos{\left(x \right)}\, dx = C + \sin{\left(x \right)}$$

$$\int \log{\left(x \right)}\, dx = C + x \log{\left(x \right)} - x$$

$$\int \sqrt{x}\, dx = C + \frac{2 x^{\frac{3}{2}}}{3}$$

## Замена переменной в интеграле

Для корректной замены переменных в интеграле Integral используется метод transform.

Методу transform передается переменная, которую нужно заменить, и выражение, на которое нужно ее заменить.

### Пример 7.

Проведем замену переменной $y = \sqrt{x}$ в интеграле $\int xe^{x^2}\, dx$.

In [13]:
```
y = Symbol('y', positive=True)
I1 = Integral(sympy.exp(sympy.sqrt(x))/sympy.sqrt(x))
sympy.Eq(I1, I1.transform(sympy.sqrt(x), y))
```

Out[13]:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int 2 e^{y}\, dy$$

Обратите внимание на то, что использован положительный символ $y$ (positive=True).

Без этого ограничения возникает неоднозначность, и результат замены получается такой:

In [14]:
```
y = Symbol('y')
I1 = Integral(sympy.exp(sympy.sqrt(x))/sympy.sqrt(x))
sympy.Eq(I1, I1.transform(sympy.sqrt(x), y))
```

Out[14]:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{2 y e^{\sqrt{y^{2}}}}{\sqrt{y^{2}}}\, dy$$

Эту замену можно провести иначе, заменив $x$ на $y^2$.

In [15]:
```
y = Symbol('y', positive=True)
sympy.Eq(I1, I1.transform(x, y**2))
```

Out[15]:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int 2 e^{y}\, dy$$

### Пример 8.

Запишем формулу интегрирования по частям:

In [16]:
```
g = Function('g')
Part_rule = sympy.Eq(integrate(f(x)*diff(g(x)), x), f(x)*g(x) - integrate(diff(f(x))*g(x), x))
Part_rule
```

Out[16]:

$$\int f(x)\frac{d}{dx}g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)\frac{d}{dx}f(x)\,dx$$

Вычислим $\int x\ln(x)\,dx$, воспользовавшись формулой интегрирования по частям.

Заметим, что $g(x)$ можно выразить как первообразную от сомножителя $x$.

In [17]:
```
Ex8 = Part_rule.subs([(f(x), sympy.log(x)), (g(x), x.integrate())])
Ex8
```

Out[17]:

$$\int \log(x)\frac{d}{dx}\frac{x^2}{2}\,dx = \frac{x^2\log(x)}{2} - \int \frac{x^2\frac{d}{dx}\log(x)}{2}\,dx$$

## Выделение правой и левой части уравнения.

Для выделения частей уравнения применяются методы rhs и lhs.

### Пример 9.

В Примере 8 вычислить правую часть уравнения.

Вначале выделим правую часть уравнения.

In [18]:
```
Ex9 = Ex8.rhs
Ex9
```

Out[18]:

$$\frac{x^2\log(x)}{2} - \int \frac{x^2\frac{d}{dx}\log(x)}{2}\,dx$$

Для вычисления интеграла в полученном выражении воспользуемся методом doit

In [19]:
```
res = Ex9.doit()
res
```

Out[19]:

$$\frac{x^2\log(x)}{2} - \frac{x^2}{4}$$

проверим дифференцированием:

In [20]:
```
res.diff()
```

Out[20]: $x\log(x)$

# Несобственные интегралы

## Интегрирование функций с точками разрыва.

### Пример 10.

Вычислим интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

По определению несобственного интеграла II рода это

$$I = \lim_{A\to 0+}\int_A^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{A\to 0+} 2(\sqrt{1}-\sqrt{A}) = 2.$$

In [21]:
```
integrate(1/sympy.sqrt(x), (x, 0, 1))
```

Out[21]: 2

## Бесконечные пределы интегрирования.

### Пример 11.

Вычислим интеграл

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx.$$

По определению несобственного интеграла I рода это

$$I = \lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)\Bigg|_1^A = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{-1}{A} - (-1)\right) = 1$$

In [22]:
```
integrate(1/x**2, (x, 1, sympy.oo))
```

Out[22]: $1$