```
In [1]: import sympy
import numpy as np
from sympy import Expr, Eq, latex, plot_implicit, Matrix, plot, solve, linsolve, nonlinsolve, symbols
from sympy import pi as Pi
from sympy import cos as Cos
from sympy import sin as Sin
import matplotlib.pyplot as plt
```

# Занятие 16

# Алгебра

## Кривые второго порядка на плоскости: парабола

## Парабола

геометрическое место точек, равноудалённых от данной прямой (называемой директрисой параболы) и данной точки (называемой фокусом параболы). Каноническое уравнение параболы в прямоугольной системе координат:

$$y^2 = 2px, p > 0 \quad \text{или } x^2 = 2py, \quad \text{если поменять местами оси.}$$

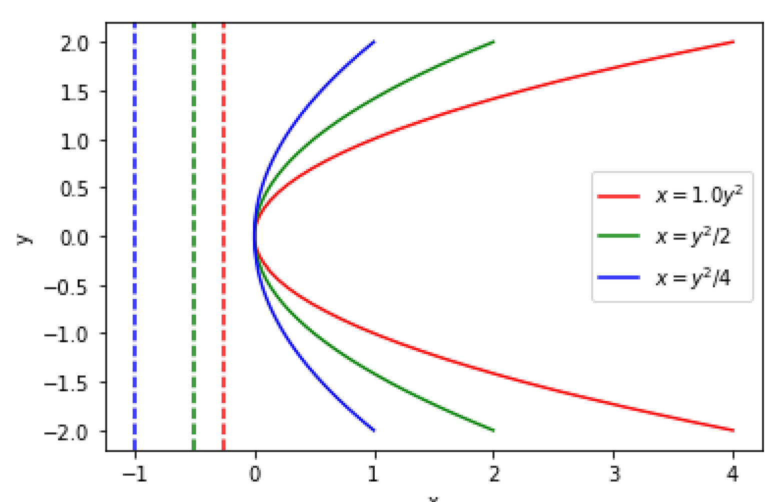
Число $p$ называется фокальным параметром, оно равно расстоянию от фокуса до директрисы. Поскольку каждая точка параболы равноудалена от фокуса и директрисы, то и вершина — тоже, поэтому она лежит между фокусом и директрисой на расстоянии $\frac{p}{2}$ от обоих.

### Пример 1

Построим параболы $y^2 = 2px$ с $p = \frac{1}{2}, 1, 2$, их директрисы.

```
In [2]: from sympy.abc import x, y
def parabola_x(p, y):
    return y**2/(2*p)
col = ('r', 'g', 'b', 'k', 'm', 'c')
ax = plt.gca()
Y = np.linspace(-2, 2)
for i, p in enumerate((1/2, 1, 2)):
    ax.plot(parabola_x(p, Y), Y, color=col[i],
            label=sympy.latex(Eq(x, parabola_x(p, y)), mode='inline'))
    ax.axvline(x=-p/2, color=col[i], linestyle='--')
ax.legend(loc='best')
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
```

```
Out[2]: Text(0, 0.5, 'y')
```




### Пример 2.

Изобразим на графике параболу $x^2 = 2py$ и параболу, полученную из нее поворотом на угол 30 градусов.

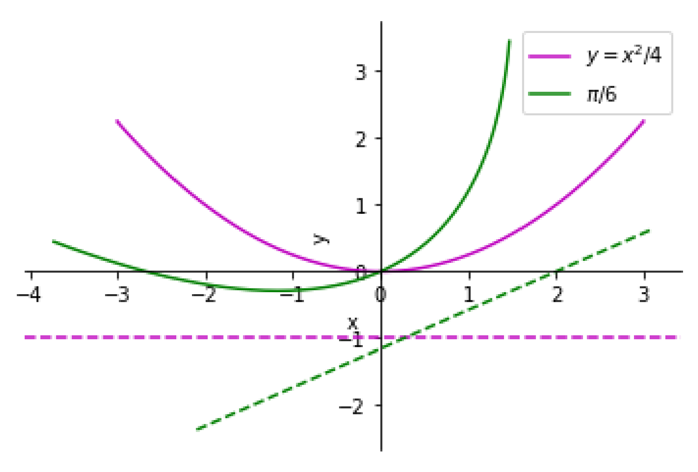
Для поворота воспользуемся преобразованием координат в матричном виде:

$$X' = AX, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$
$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

```
In [3]: from sympy.abc import x, y
def parabola_y(p, x):
    return x**2/(2*p)
p0 = 2
alpha = np.pi/6
A = Matrix([[np.cos(alpha), - np.sin(alpha)], [np.sin(alpha), np.cos(alpha)]])
ax = plt.gca()
X = np.linspace(-3, 3)
Y = parabola_y(p0, X)
XY = Matrix((X, Y))
XY_new = A*XY
directrix = Matrix(([-3, 3], [-p0/2, -p0/2]))
directrix_new = A*directrix
X1 = list(XY_new[0, :])
Y1 = list(XY_new[1, :])
directrixX1 = list(directrix_new[0, :])
directrixY1 = list(directrix_new[1, :])
ax.plot(X, Y, color='m', label=sympy.latex(Eq(y, parabola_y(p0, x)), mode='inline'))
ax.plot(X1, Y1, color='g', label=sympy.latex(sympy.pi/6, mode='inline'))
ax.axhline(y=-p0/2, color='m', linestyle='--')
ax.plot(directrixX1, directrixY1, color='g', linestyle='--')
ax.spines['right'].set_color('none') # Правая сторона рамки стала бесцветной, но не исчезла!
ax.spines['top'].set_color('none')
ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0)) # Нижняя сторона рамки переместилась в начало координат
ax.spines['left'].set_position(('data', 0))

ax.legend(loc='best')
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
```

```
Out[3]: Text(0, 0.5, 'y')
```




### Пример 3.

Составим уравнение параболы $y^2 = 2px$, повернутой на угол $\pi/3$ против часовой стрелки. Для этого составим матрицу поворота с тригонометрическими функциями из sympy, а также матрицу-столбец из выражения для $x$, соотвествующего уравнению параболы, и переменной $y$.

$$X' = AX, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2p} \\ y \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$
$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Умножим матрицу-столбец на матрицу поворота, получим параметрические уравнения повернутой параболы, в роли параметра выступает $y$.

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = AX = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2p} \\ y \end{pmatrix}$$

С помощью solve выразим $y$ через $x'$ ($x'$ как в Примере 2, в нашем случае это первый элемент матрицы-столбца $AX$). Затем выражение $y$ через $x'$ подставим во второй элемент матрицы-столбца $AX$, получим выражение $y'$ через $x'$, т.е. уравнение повернутой параболы.

```
In [4]: x, y, p, x1, y1 = symbols('x y p x1 y1')
alpha_sympy = sympy.pi/3
A_sympy = Matrix([[sympy.cos(alpha_sympy), - sympy.sin(alpha_sympy)],
                  [sympy.sin(alpha_sympy), sympy.cos(alpha_sympy)]])
X = Matrix((x, parabola_y(p, x)))
X_new = A_sympy*X
solution3_0 = nonlinsolve([Eq(x1, X_new[0]), Eq(y1, X_new[1])], x, y1)
solution3 = [sol[1].subs(x1, x) for sol in solution3_0]
equation3 = [Eq(y, item) for item in solution3]
display(*equation3)
```

$$y = \frac{2p}{3} - \frac{\sqrt{3}x}{3} - \frac{2\sqrt{p^2 - 4\sqrt{3}px}}{3}$$

$$y = \frac{2p}{3} - \frac{\sqrt{3}x}{3} + \frac{2\sqrt{p^2 - 4\sqrt{3}px}}{3}$$

### Пример 4.

Составим уравнение директрисы параболы $y^2 = 2px$, повернутой на угол $\pi/3$ против часовой стрелки. Действия аналогичны Примеру 3, только матрица-столбец $X$ состоит из переменной $x$ и числа $-p/2$.

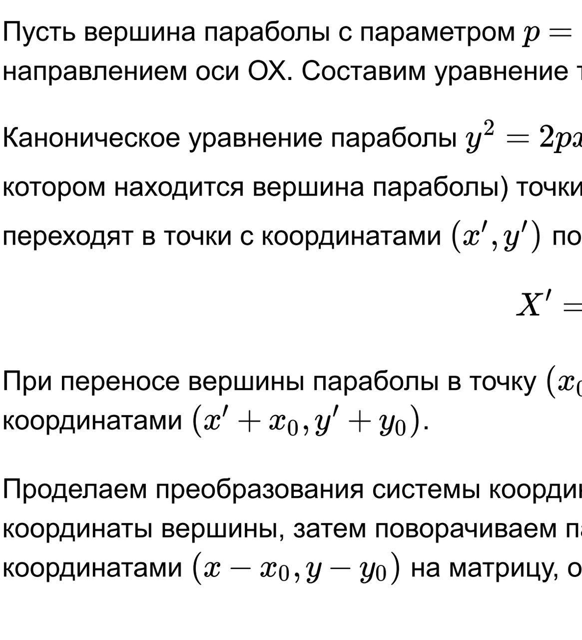
```
In [5]: x, y, p, x1, y1 = symbols('x y p x1 y1')
alpha_sympy = sympy.pi/3
A_sympy = Matrix([[sympy.cos(alpha_sympy), - sympy.sin(alpha_sympy)],
                  [sympy.sin(alpha_sympy), sympy.cos(alpha_sympy)]])
X = Matrix((x, -p/2))
X_new = A_sympy*X
solution4_0 = nonlinsolve([Eq(x1, X_new[0]), Eq(y1, X_new[1])], x, y1)
solution4 = [sol[1].subs(x1, x) for sol in solution4_0]
equation4 = [Eq(y, sol) for sol in solution4]
display(*equation4)
```

$$y = -p + \sqrt{3}x$$

### Пример 5.

Построим график параболы, повернутой на угол $\pi/3$ градусов против часовой стрелки и ее директрису, уравнения параболы и директрисы включим в легенду. Используем уравнения, полученные в Примерах 3 и 4. Параметр $p$ положим равным 2.

```
In [6]: p0 = plot(aspect_ratio=(1, 1),
                  axis_center=(0, 0),
                  xlim=(-3, 10),
                  ylim=(-2, 10),
                  xlabel='$x$', ylabel='$y$',
                  legend=True,
                  show=False)
for item in equation3 + equation4:
    Y = item.rhs.subs(p, 2)
    p0.extend(plot(Y,
                  aspect_ratio=(1, 1),
                  axis_center=(0, 0),
                  xlim=(-3, 10),
                  ylim=(-2, 10),
                  xlabel='$x$', ylabel='$y$',
                  legend=True,
                  show=False,
                  label=latex(Y, mode='inline')))
p0.show()
```




### Пример 6.

Пусть вершина параболы с параметром $p = 3$ находится в точке A(-2, 3), а ось параболы образует 30 градусов с положительным направлением оси OX. Составим уравнение такой параболы и изобразим параболу на графике.

Каноническое уравнение параболы $y^2 = 2px$. При повороте на угол $\alpha$ против часовой стрелки относительно начала координат (в котором находится вершина параболы) точки параболы с координатами $(x, y)$, где в соответствии с уравнением параболы $x = \frac{y^2}{2p}$, переходят в точки с координатами $(x', y')$ по формуле

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = AX = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2p} \\ y \end{pmatrix}.$$

При переносе вершины параболы в точку $(x_0, y_0)$ параллельно осям координат точка с координатами $(x', y')$ переходит в точку с координатами $(x' + x_0, y' + y_0)$.

Проделаем преобразования системы координат в обратном порядке, т.\,е. сначала вычитаем из координат точек на параболе координаты вершины, затем поворачиваем параболу по часовой стрелке на угол $\alpha$, что соответствует умножению вектора с координатами $(x - x_0, y - y_0)$ на матрицу, обратную матрице $A$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

получаем параболу с вершиной в начале координат симметричную относительно оси OX, с ветвями, направленными в сторону положительного направления оси OX, ее каноническое уравнение $y'^2 = 2px'$, где $x' = (x - x_0)\cos(\alpha) + (y - y_0)\sin(\alpha)$, $y' = -(x - x_0)\sin(\alpha) + (y - y_0)\cos(\alpha)$.

```
In [7]: from sympy.abc import x, y, alpha
alpha, x0, y0 = symbols('alpha x0 y0')
sin_a = Sin(alpha)
cos_a = Cos(alpha)
A1 = Matrix([[cos_a, sin_a],
             [-sin_a, cos_a]])
X = A1*Matrix((x - x0, y - y0))
eq6 = Eq((X[1])**2, 2*p*(X[0]))
display(eq6)
```

$$(-(x - x_0)\sin(\alpha) + (y - y_0)\cos(\alpha))^2 = 2p((x - x_0)\cos(\alpha) + (y - y_0)\sin(\alpha))$$

Теперь подставим в полученное уравнение координаты вершины, параметр $p$ и угол параболы и построим график:

```
In [8]: p0 = plot_implicit(eq6.subs({x0: -2, y0: 3, p: 3, alpha: Pi/6}),
                   (x, -3, 10),
                   (y, 0, 12),
                   aspect_ratio=(1, 1),
                   xlabel='$x$',
                   ylabel='$y$',
                   title=latex(eq6, mode='inline') + '\n',
                   adaptive=False)
```