In [1]:
```
import sympy
from sympy import S, Symbol, symbols, simplify, nonlinsolve, Matrix, diff, factor
from sympy import log as Log
```

Занятие 15

Математический анализ

Экстремум функции нескольких переменных

Поиск экстремума ФНП:

1. Находим стационарные точки (все частные производные равны нулю) и точки, в которых производные не существуют
2. Проверяем выполнение достаточного условия экстремума.

Пример 1

Найти точки, в которых возможен экстремум функции $\ln(-x^2 + 3(y-5)^2 - 6xy)$

Вычисляем частные производные по x и y, решаем систему уравнений:

In [2]:
```
from sympy.abc import x, y
f = Log(-x**2 + 3*(y - 5)**2 - 6*x*y)
stat_points = nonlinsolve([f.diff(x), f.diff(y)], [x, y])
stat_points
```

Out[2]: $\left\{\left(-\frac{15}{4}, \frac{5}{4}\right)\right\}$

Достаточные условия экстремума

Пусть $P(a,b)$ - стационарная точка функции $f(x,y)$, т.е. $d\,f(a,b) = 0$. Обозначим $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{xy}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$. Тогда

1) если $\Delta > 0$, то функция $f(x,y)$ имеет экстремум в точке P,

при $f''_{xx}(a,b) > 0$ или $f''_{yy}(a,b) > 0$ минимум,

при $f''_{xx}(a,b) < 0$ или $f''_{yy}(a,b) < 0$ максимум

2) если $\Delta < 0$, то у функции $f(x,y)$ нет экстремума в точке P

3) если $\Delta = 0$, то требуется дальнейшее исследование.

Пример 2.

Проверим выполнение достаточных условий экстремума в стационарной точке Примера 1.

In [3]:
```
Delta = Matrix([[f.diff(x, 2), f.diff(x, y)], [f.diff(x, y), f.diff(y, 2)]]).det()
x0, y0 = tuple(*stat_points)
Delta.subs({x: x0, y: y0})
```

Out[3]: $-\frac{256}{16875}$

Вывод - у функции нет точек экстремума.

Пример 3.

Найти экстремум функции $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, $x, y, z > 0$

Вначале найдем стационарные точки

In [4]:
```
x, y, z = symbols('x y z', positive=True)
u = x + y**2/(4*x) + z**2/y + 2/z
stat_points = nonlinsolve([u.diff(x), u.diff(y), u.diff(z)], [x, y, z])
display(*stat_points)
```

$$\left(-\frac{1}{2},\ -1,\ -1\right)$$

$$\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 1\right)$$

$$\left(-\frac{i}{2},\ -i,\ i\right)$$

$$\left(\frac{i}{2},\ i,\ -i\right)$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}\,(1+i)}{4},\ \frac{\sqrt{2}\,(1+i)}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}\,(1+i)}{4},\ -\frac{\sqrt{2}\,(1+i)}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}\,(-1+i)}{4},\ \frac{\sqrt{2}\,(1-i)}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}\,(1-i)}{4},\ \frac{\sqrt{2}\,(-1+i)}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$$

Составим список только вещественных точек:

In [5]:
```
def Delta(u, x, y, z):
    return Matrix([[u.diff(x, 2), u.diff(x, y), u.diff(x, z)],
                   [u.diff(y, x), u.diff(y, 2), u.diff(y, z)],
                   [u.diff(z, x), u.diff(z, y), u.diff(z,2)],]).det()
for point in stat_points:
        x0, y0, z0 = point
        if x0.is_real and y0.is_real and z0.is_real:
            if Delta(u, x, y, z).subs({x: x0, y: y0, z: z0}) > 0:
                A = u.diff(x, 2).subs({x: x0, y: y0, z: z0})
                B = u.diff(y, 2).subs({x: x0, y: y0, z: z0})
                C = u.diff(z, 2).subs({x: x0, y: y0, z: z0})
                if A > 0 or B > 0 or C > 0:
                    display('minimum', point)
                elif A < 0 or B < 0 or C < 0:
                    display('maximum', point)
```

```
'minimum'
```

$$\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 1\right)$$

Ответ: точка (1/2,1,1) - точка минимума, минимальное значение функции 4.

Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

Условный экстремум функции $f(x, y)$ - максимум или минимум этой функции при условии, что x и y связаны уравнением связи $\phi(x, y) = 0$.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$$

Функция $f(x, y)$ имеет условный экстремум в стационарных точках функции Лагранжа, если второй дифференциал функции Лагранжа положителен (минимум) или отрицателен (максимум).

Пример 4.

Найти экстремум функции $f = 6 - 4x - 3y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$. Физический смысл - найти самую высокую точку кривой, образующейся при пересечении цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ плоскостью $f = 6 - 4x - 3y$.

Составляем функцию Лагранжа и ищем условный экстремум. Вначале найдем стационарные точки.

In [6]:
```
x, y, lam = symbols('x y lamda')# нужны символы без ограничений по знаку!
varrs = [x, y, lam]
f = 6 - 4*x - 3*y
restriction = x**2 + y**2 - 1
L = f + lam*restriction
stat_points = nonlinsolve([L.diff(var)for var in varrs], varrs)
display(stat_points, *varrs)
```

$$\left\{\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{5}{2}\right), \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}\right)\right\}$$

x

y

λ

Теперь составляем выражение для второго дифференциала функции Лагранжа

In [7]:
```
dx, dy, dx2, dy2 = symbols('dx dy dx^2 dy^2')
d2L = L.diff(x,2)*dx2 + 2*L.diff(x,y)*dx*dy + L.diff(y,2)*dy2
factor(d2L)
```

Out[7]: $2\lambda\left(dx^2 + dy^2\right)$

Ясно, что при $\lambda > 0$ второй дифференциал положителен, при $\lambda < 0$ отрицателен, поэтому точка (-4/5,-3/5) - точка локального максимума, (4/5,3/5) - точка локального минимума.

Найдем максимальное и минимальное значение функции $f = 6 - 4x - 3y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$:

In [8]:
```
ff = Symbol('f')
for point in stat_points:
    display(point[:-1], sympy.Eq(ff, f.subs({var: point[j] for j, var in enumerate(varrs)})))
```

$$\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

$f = 11$

$$\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$f = 1$

Пример 5.

С помощью метода Лагранжа найти экстремум функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ при условии $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.

In [9]:
```
x, y, z, lam = symbols('x y z lamda')
varrs = [x, y, z, lam]
u = x**2 + y**2 + z**2
restriction = x**2/25 + y**2/9 + z**2/4 - 1
L = u + lam*restriction
stat_points = nonlinsolve([L.diff(var)for var in varrs], varrs)
display(stat_points)
dx, dy, dz, dx2, dy2, dz2 = symbols('dx dy dz dx^2 dy^2 dz^2')
d2L = 0
diffs = {x: (dx, dx2), y: (dy, dy2), z: (dz, dz2)}
for i, var in enumerate(varrs[:-1]):
    d2L += L.diff(var, 2)*diffs[var][1]
    for j in range(i + 1, 3):
        d2L += 2*L.diff(var, varrs[j])*diffs[var][0]*diffs[varrs[j]][0]
display(d2L)
```

$$\{(-5, 0, 0, -25), (0, -3, 0, -9), (0, 0, -2, -4), (0, 0, 2, -4), (0, 3, 0, -9), (5, 0, 0, -25)\}$$

$$2dx^2\left(\frac{\lambda}{25} + 1\right) + 2dy^2\left(\frac{\lambda}{9} + 1\right) + dz^2\left(\frac{\lambda}{2} + 2\right)$$

Подставим значения λ стационарных точек в выражение для второго дифференциала:

In [10]:
```
L2_points = [d2L.subs(lam, lval) for lval in (-4, -9, -25)]
display(*L2_points)
```

$$\frac{42dx^2}{25} + \frac{10dy^2}{9}$$

$$\frac{32dx^2}{25} - \frac{5dz^2}{2}$$

$$-\frac{32dy^2}{9} - \frac{21dz^2}{2}$$

При $\lambda = -4$ второй дифференциал положителен, стационарные точки (0, 0, -2) и (0, 0, 2) - точки минимума.

При $\lambda = -9$ второй дифференциал не является знакопостоянным, соответствующие стационарные точки не являются точками экстремума.

При $\lambda = -25$ второй дифференциал отрицателен, стационарные точки (-5, 0, 0) и (5, 0, 0) - точки максимума.

In [11]:
```
uu = Symbol('u')
for point in stat_points:
    if point[-1] != -9:
        display(point[:-1], sympy.Eq(uu, u.subs({var: point[j] for j, var in enumerate(varrs)})))
```

$(-5, 0, 0)$

$u = 25$

$(0, 0, -2)$

$u = 4$

$(0, 0, 2)$

$u = 4$

$(5, 0, 0)$

$u = 25$