In [2]:
```
import sympy
from sympy import S, Symbol, symbols, Function, integrate, diff, Curve
from sympy import sin as Sin
from sympy import cos as Cos
from sympy import pi as Pi
```

Занятие 11

Математический анализ

Применение интегралов для вычисления площади фигуры и длины дуги

Площадь плоской фигуры, ограниченной снизу осью OX, сверху параметрически заданной кривой

$x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$, $\alpha \leq t \leq \beta$

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\phi'(t)\,dt$$

Пример 1.

Окружность с центром в начале координат можно описать как график параметрически заданной функции $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Вычислим площадь части круга с центром в начале координат, нахходящуюся в первой координатной четверти, в этом случае вычисляем площадь фигуры, ограниченной параметрически заданной кривой и осью OX при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)(\cos(t))'\,dt = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(2t))\,dt = -\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{4}$$

Площадь получилась отрицательной, поскольку при увеличении значения параметра t уменьшаются значения x. В таком случае нужно поменять пределы интегрирования:

$$S = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(t)(\cos(t))'\,dt = \frac{\pi}{4}$$

Вообще же пределы интегрирования α (внизу) и β (вверху) расставляются так, чтобы $\phi(\alpha) \leq \phi(\beta)$.

In [3]:
```
from sympy.abc import t
(Sin(t)*Cos(t).diff(t)).integrate((t, Pi/2, 0))
```

Out[3]: $\frac{\pi}{4}$

Площадь плоской фигуры в полярных координатах

Площадь фигуры, ограниченной лучами $\phi = \phi_1$ и $\phi = \phi_2$ и кривой $r = r(\phi)$, $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\phi_1}^{\phi_2} r^2(\phi)\,d\phi.$$

Пример 2.

Вычислим по этой формуле площадь четверти окружности как в примере 1, в этом случае фигура ограничена лучами $\phi = 0$ и $\phi = \pi/2$ и кривой $r = 1$, поскольку все точки окружности находятся на расстоянии 1 от начала координат. $r = 1, 0 \leq \phi \leq \pi/2$,

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} 1\,d\phi = \phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

In [4]:
```
phi = S('phi')
S(1)/2*integrate(1, (phi, 0, Pi/2))
```

Out[4]: $\frac{\pi}{4}$

Применить объектно-ориентированный подход к функции, равной 1 не получится, но можно единицу сделать символом и проинтегрировать ее таким образом:

In [5]:
```
S(1).integrate((phi, 0, Pi/2))
```
Out[5]: $\frac{\pi}{2}$

Длина дуги кривой $y = f(x)$,

заключенной между точками с абсциссами a и b

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Пример 3.

Все та же четверть окружности... $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)$, $(f'(x))^2 = \frac{4x^2}{4(1-x^2)} = \frac{x^2}{1-x^2}$

$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x|_0^1 = \frac{\pi}{2}$

In [6]:
```
from sympy.abc import x
(1/((1 - x**2)**S.Half)).integrate((x, 0, 1))
```
Out[6]: $\frac{\pi}{2}$

Можно провести более универсальные вычисления, используя абстрактную функцию

In [7]:
```
f = Function('f')
from sympy.abc import a, b
l = ((1+(f(x).diff(x))**2)**S.Half).integrate((x, a, b))
l1 = l.subs({f(x): (1 - x**2)**S.Half, a: 0, b: 1})
sympy.Eq(l1, l1.doit())
```
Out[7]: $$\int\limits_0^1 \sqrt{\left(\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}\right)^2 + 1}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Длина дуги кривой, заданной параметрически

$x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, $\dot{\phi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t) > 0$

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{\phi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)}\,dt$$

Пример 4.

Вычислим длину верхней дуги окружности радиуса R с центром в точке (x_0, y_0):

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos(t) \\ y = y_0 + R\sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$

In [8]:
```
R, x0, y0 = symbols('R x0 y0', positive=True)
phi = x0 + R*Cos(t)
psi = y0 + R*Sin(t)
((phi.diff(t)**2 + psi.diff(t)**2)**S.Half).integrate((t, 0, Pi))
```
Out[8]: πR

Пример 5.

Вычислить длину кривой, заданной параметрически $x = \cos t + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$, $0 \le t \le T$.

In [9]:
```
t, T = symbols('t T', positive=True)
x = Cos(t) + t*Sin(t)
y = Sin(t) - t*Cos(t)
res = ((x.diff(t)**2 + y.diff(t)**2)**S.Half).integrate((t, 0, T))
res
```
Out[9]: $$\frac{T^2\sqrt{\sin^2(T) + \cos^2(T)}}{2}$$

In [10]:
```
sympy.simplify(res)
```
Out[10]: $\frac{T^2}{2}$

Кривые: класс Curve в SymPy

Взгляд под другим углом на задачу вычисления длины кривой.

В SymPy есть класс кривых Curve, кривые описываются параметрическими уравнениями, параметр всегда один, поскольку кривая - одномерный объект.

Аргументы Curve: tuple из выражений для координат x и y точек кривой и tuple из параметра и его начального и конечного значений.

У кривых есть атрибут длина length, воспользуемся этим инструментом для вычисления длины полуокружности из Примера 4.

In [8]:
```
Curve((phi, psi), (t, 0, Pi)).length
```
Out[8]: πR

Этот способ работает и для кривой, заданной как $y = f(x)$.

Пример 6.

Вычислим длину дуги параболы $y = x^2$ от $x = 0$ до $x = 2$:

In [9]:
```
Curve((x, x**2), (x, 0, 1)).length
```
Out[9]: $\frac{\operatorname{asinh}(2)}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

Длина дуги кривой, заданной в полярных координатах

Пусть кривая задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\phi)$, $r(\phi)$ непрерывна при $\phi_1 \le \phi \le \phi_2$.

Длина такой кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{r^2(\phi) + (r'(\phi))^2}\, d\phi.$$

Пример 7.

Кривая задана в полярной системе координат уравнением $r = \sin\phi$, $0 \le \phi \le \pi$, на этом интервале функция $\sin\phi$ неотрицательна, $r' = \cos(\phi)$:

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2\phi + \cos^2\phi}\, d\phi = \int_0^{\pi} 1\, d\phi = \pi.$$

In [10]:
```
phi = S('phi')
r = Sin(phi)
((r**2 + r.diff(phi)**2)**S.Half).integrate((phi, 0, Pi))
```
Out[10]: π

Приспособим класс кривых Curve к этой задаче, для этого заметим, что

$$\begin{cases} x = r(\phi)\cos\phi \\ y = r(\phi)\sin\phi \end{cases}$$

In [11]:
```
x = r*Sin(phi)
y = r*Cos(phi)
Curve((x, y), (phi, 0, Pi)).length
```
Out[11]: π