```
In [1]: import sympy
from sympy import Eq, latex, plot_implicit, Matrix, symbols, simplify, expand, collect
from sympy import pi as Pi
from sympy import cos as Cos
from sympy import sin as Sin
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
```

Занятие 13

Алгебра

Квадратичные формы

Квадратичной формой нескольких переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называют однородный многочлен второй степени
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$
В частности, квадратичные формы двух и трех переменных можно записать в виде:
$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

Удобнее записывать квадратичные формы в матричном виде:
$$X^TAX, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a12 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Особенности матрицы квадратичной формы

Матрица квадратичной формы всегда симметрична. Внедиагональные элементы матрицы квадратичной формы равны половине коэффициента произведения переменных $x_ix_j, i \neq j$.

При переходе к новому базису матрица квадратичной формы изменяется по формуле
$$A' = P^TAP$$

В базисе из НОРМИРОВАННЫХ собственных векторов, соответствующих матрице A, матрица квадратичной формы имеет диагональный вид, на диагонали собственные значения. Такой вид называется каноническим видом квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду позволяет определить тип кривой или поверхности второго порядка. Канонический вид определен неоднозначно, т.е. у одной и той же квадратичной формы может быть несколько канонических видов, но выполняется

Закон инерции квадратичной формы

Число слагаемых с положительными (отрицательными) каноническими коэффициентами в каноническом виде квадратичной формы не зависит от способа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Пример 1.

Построить матрицу квадратичной формы $u = -x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 4xz$ и привести ее к каноническому виду. Вначале построим матрицу:
$$A\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Проверим, что эта матрица задает нашу квадратичную форму, для этого вычислим
$$X^TAX - u, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

```
In [2]: from sympy.abc import x, y, z
u = -x**2 - y**2 - z**2 + 2*x*y + 4*x*z
A = Matrix([[-1, 1, 2], [1, -1, 0], [2, 0, -1]])
X = Matrix([x, y, z])
res = simplify(expand(X.T*A*X))
display(X, res, res[0] - u)
```

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -x^2 + 2xy + 4xz - y^2 - z^2 \end{bmatrix}$$

$$0$$

Обратим внимание, что при умножении матриц X^TAX получается не число, а матрица, состоящая из одного элемента!

Найдем собственные векторы матрицы A, нормируем их и составим из них матрицу перехода P:

```
In [3]: ev = A.eigenvects()#собственные векторы матрицы $A$
P = Matrix([])
for item in ev:
    degree = item[1]
    print('собственное число', item[0], 'кратность', degree, 'собственный вектор')
    for i in range(degree): # это на случай кратных собственных чисел
        e_i = item[2][i]
        display(e_i)
        P = P.row_join(e_i.normalized()) # нормируем собственные векторы матрицы $A$
display(P)
```

```
собственное число -1 кратность 1 собственный вектор
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
собственное число -1 + sqrt(5) кратность 1 собственный вектор
```

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
собственное число -sqrt(5) - 1 кратность 1 собственный вектор
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{10}}{5} & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{bmatrix}$$

Найдем матрицу квадратичной формы в новом базисе:

```
In [4]: A_new = P.T*A*P
display(simplify(A_new))
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 + \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} - 1 \end{bmatrix}$$

Получим квадратичную форму в виде многочлена:

```
In [5]: res = simplify(expand(X.T*A_new*X))[0]
display(res)
```

$$-x^2 - y^2 + \sqrt{5}y^2 - \sqrt{5}z^2 - z^2$$

Сгруппируем слагаемые с помощью collect:

```
In [6]: collect(res, [x, y, z])
```

Out[6]: $$-x^2 + y^2\left(-1 + \sqrt{5}\right) + z^2\left(-\sqrt{5} - 1\right)$$

Каноническая форма содержит квадраты переменных x и z с отрицательными коэффициентами, а квадрат y - с положительным.

Пример 2.

Привести матрицу квадратичной формы $u = -x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 4xz$ из Примера 1 к каноническому виду методом выделения полных квадратов. Проверить выполнение Закона инерции.

План выделения полных квадратов:

заметим, что y входит только в одно произведение разных переменных, а именно, в $2xy$, поэтому будем выделять полный квадрат так, чтобы в него вошли все слагаемые с y, т.е. $2xy$ и $-y^2$. До полного квадрата эти слагаемые дополняются с помощью $-x^2$, получим $-(x-y)^2$ (или $-(y-x)^2$). Делаем замену переменных $Y = y - x$, что эквивалентно $y = Y + x$:

```
In [7]: from sympy.abc import Y, Z
u1 = simplify(expand(u.subs(y, Y + x)))
display(u, u1)
```

$$-x^2 + 2xy + 4xz - y^2 - z^2$$

$$-Y^2 + 4xz - z^2$$

Видим, что z входит только в одно произведение разных переменных, а именно, в $4xz$, поэтому будем выделять полный квадрат так, чтобы в него вошли все слагаемые с z, т.е. $4xz$ и $-z^2$. До полного квадрата эти слагаемые дополняются с помощью $-4x^2$, получим $-(2x-z)^2$ (или $-(z-2x)^2$). Делаем замену переменных $Z = z - 2x$, что эквивалентно $z = Z + 2x$:

```
In [8]: u2 = simplify(expand(u1.subs(z, Z + 2*x)))
display(u2)
```

$$-Y^2 - Z^2 + 4x^2$$

Как и в примере 1, в каноническом виде два отрицательных квадрата и один положительный, Закон инерции выполняется.

Классификация кривых второго порядка

Все кривые второго порядка на плоскости описываются уравнением вида
$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \qquad (1)$$

Невырожденные кривые второго порядка - эллипс, гипербола и парабола.

Для классификации кривых нужно привести уравнение (1) к каноническому виду.

Пусть $a_{12} \neq 0$.

Вначале приведем к каноническому виду квадратичную форму из уравнения (1), в качестве матрицы перехода к новому базису можно использовать матрицу поворота на угол α:
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
угол α находится из условия
$$\mathrm{ctg}(2\alpha) = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

В результате получаем уравнение вида (1), но с нулевым коэффициентом при xy.

Рассмотрим разные случаи:

1) если $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, то от слагаемых a_1x и a_2y можно избавиться переносом начала координат, соответствующая замена переменных
$$x = x' - \frac{a_1}{a_{11}}, \quad y = y' - \frac{a_2}{a_{22}} \qquad (2)$$
После такой замены уравнение кривой примет вид
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_0 = 0 \qquad (3)$$

Если $a_{11}a_{22} > 0$, причем $a_{11}a_0 < 0$, то кривая - эллипс или окружность.

Если $a_{11}a_{22} < 0$, причем $a_0 \neq 0$, то кривая - гипербола.

Остальные варианты случая 1) вырожденные (прямые, точки, пустое множество).

2) если $a_{11} \neq 0$, $a_{22} = 0$ ($a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$), тогда в уравнении (1) с нулевым коэффициентом при xy можно избавиться от a_1x (a_2y) переносом начала координат.

После переноса получаем каноническое уравнение параболы или вырожденный случай.

Пример 3.

Определить тип кривой второго порядка, заданной уравнением
$$x^2 - 2xy - y^2 + 4x - 2 = 0$$
Составляем матрицу $A3$ из коэффициентов уравнения, коэффициенты при xy, x и y делим на 2 и располагаем в симметричных относительно главной диагонила позициях. Вектор переменных состоит из трех координат, последняя координата 1, она нужна для слагаемых первого и нулевого порядков:

```
In [9]: A3 = Matrix([[1, -1, 2], [-1, -1, 0], [2, 0, -2]])
X3 = Matrix([x, y, 1])
display(A3, X3)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Убедимся, что эта матрица действительно определяет наше уравнение:

```
In [10]: eq3 = Eq(simplify(expand(X3.transpose()*A3*X3))[0], 0)
display(eq3)
```

$$x^2 - 2xy + 4x - y^2 - 2 = 0$$

Теперь составим матрицу поворота, матрица третьего порядка, правый нижний элемент равен 1, это матрица поворота в трехмерном пространстве в плоскости XY.

```
In [11]: alpha = sympy.acot((A3[0, 0] - A3[1, 1])/(2*A3[0, 1]))/2
P = Matrix([[Cos(alpha), -Sin(alpha), 0], [Sin(alpha), Cos(alpha), 0], [0, 0, 1]])
display(P)
```

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}} & \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

После поворота (уже в новых координатах x_1, y_1) наша матрица примет вид

```
In [12]: A3 = simplify(expand((P.transpose()*A3*P)))
display(A3)
```

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{\sqrt{2} + 2} \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2 - \sqrt{2}} \\ \sqrt{\sqrt{2} + 2} & \sqrt{2 - \sqrt{2}} & -2 \end{bmatrix}$$

Запишем получившееся уравнение

```
In [13]: from sympy.abc import X, Y, Z
X3 = Matrix((X, Y, 1))
simplify(expand((X3.T*A3*X3)[0]))
```

Out[13]: $$\sqrt{2}X^2 + 2X\sqrt{\sqrt{2} + 2} - \sqrt{2}Y^2 + 2Y\sqrt{2 - \sqrt{2}} - 2$$

Осталось перенести начало координат так, чтобы исчезли слагаемые с X и Y. Соответствующая замена имеет вид (2):
$$X = X' - \frac{a_1}{a_{11}}, \quad Y = Y' - \frac{a_2}{a_{22}}$$

```
In [14]: X3_new = Matrix((X - A3[0, 2]/A3[0, 0], Y - A3[1, 2]/A3[1, 1], 1))
eq3_new = simplify(expand(X3_new.T*A3*X3_new))[0]
display(X3_new, eq3_new)
```

$$\begin{bmatrix} X - \frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} \\ Y + \frac{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{2}X^2 - \sqrt{2}Y^2 - 4$$

Осталось поделить выражение на 4 и перенести свободный член в правую часть:

```
In [15]: free = eq3_new.subs({X: 0, Y: 0})
eq3_last = eq3_new/(-free) + 1
Eq(eq3_last, 1)
```

Out[15]: $$\frac{\sqrt{2}X^2}{4} - \frac{\sqrt{2}Y^2}{4} = 1$$

Заменим переменные X и Y на x, y, чтобы изобразить получившуюся гиперболу на одной координатной плоскости с графиком исходного уравнения.

```
In [16]: eq3_last_xy = Eq(eq3_last.subs({X: x, Y: y}), 1)
display(eq3_last_xy)
```

$$\frac{\sqrt{2}x^2}{4} - \frac{\sqrt{2}y^2}{4} = 1$$

Изобразим на графике исходную кривую и получившуюся гиперболу.

```
In [17]: p = plot_implicit(eq3, line_color='g', aspect_ratio=(1, 1), xlabel='$x$', ylabel='$y$',
                  title=latex(eq3_last_xy, mode='inline') + '\n', adaptive=False, show=False)
p.extend(plot_implicit(eq3_last_xy, line_color='m', aspect_ratio=(1, 1), adaptive=False, show=False))
p.show()
```