Занятие 7

Математический анализ

Исследование функции с sympy.calculus.util и sympy.calculus.singularities

In [1]:
```
import sympy
from sympy import S, Interval, plot
from sympy import sin as Sin
from sympy import pi as Pi
from sympy.calculus.util import continuous_domain, function_range, periodicity, stationary_points, maximum, minimum, AccumBounds
from sympy.calculus.singularities import singularities, is_increasing, is_decreasing, is_monotonic
from sympy.calculus.singularities import is_strictly_increasing, is_strictly_decreasing
%matplotlib inline
```

Анализ функции в sympy автоматизируется с помощью пакета sympy.calculus, в частности sympy.calculus.util и sympy.calculus.singularities.

В sympy.calculus реализованы функции, позволяющие находить область определения функции, сингулярные точки (точки, в которых функция не существует), область значений, интервал значений непрерывной функции на некотором интервале, стационарные точки и точки экстремума, а также определять, является ли функция монотонной на заданном интервале.

Класс sympy.calculus.util.AccumulationBounds служит для вычисления интервала значений непрерывной функции на некотором промежутке, быть может, бесконечном. У экземпляров этого класса есть свойства delta, max, min, mid, представляющие соотвественно разность наибольшего и наименьшего значения, наибольшее, наименьшее значения и середину интервала между наибольшим и наименьшим значениями.

Схема анализа функции.

1. Область определения

sympy.calculus.util.continuous_domain(f, symbol, domain)

f - выражение, описывающее функцию,

symbol - переменная, от которой зависит исследуемая функция,

domain - область значений переменной, на которой рассматривается функция,

если функция рассматривается на всей вещественной прямой, то domain=S.Reals

Сингулярные точки (точки, в которых функция не существует) находятся с помощью

sympy.calculus.singularities.singularities(f, symbol, domain=None)

2. Область значений

sympy.calculus.util.function_range(f, symbol, domain)

3. Периодичность

sympy.calculus.util.periodicity(f, symbol, check=False)

4. Стационарные точки

sympy.calculus.util.stationary_points(f, symbol, domain=Reals)

5. Точки экстремума

sympy.calculus.util.maximum(f, symbol, domain=Reals)

sympy.calculus.util.minimum(f, symbol, domain=Reals)

6. Монотонность

sympy.calculus.singularities.is_decreasing(f, interval=Reals, symbol=None)

sympy.calculus.singularities.is_increasing(f, interval=Reals, symbol=None)

sympy.calculus.singularities.is_monotonic(f, interval=Reals, symbol=None)

sympy.calculus.singularities.is_strictly_decreasing(f, interval=Reals, symbol=None)

sympy.calculus.singularities.is_strictly_increasing(f, interval=Reals, symbol=None)

7. Минимальное и максимальное значение функции на интервале

sympy.calculus.util.AccumulationBounds(min, max)

Мы будем далее использовать принятое для AccumulationBounds сокращение AccumBounds

Свойства: delta, max, min, mid

Пример. Анализ функции и построение графика.

$f(x) = \frac{1}{\sin(2x)}$.

1. Область определения

Для того, чтобы использовать continuous_domain из sympy.calculus.util

from sympy.calculus.util import continuous_domain

In [2]:
```
from sympy.abc import x
f = 1/Sin(2*x)
D = continuous_domain(f, x, S.Reals)
D
```

Out[2]:

$$\mathbb{R} \setminus \left(\{2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{2n\pi + \pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{2n\pi + \frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2n\pi + \frac{3\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}\right)$$

Сингулярные точки (точки, где функция не определена)

In [3]:
```
singularities(f, x)
```

Out[3]:

$$\{2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{2n\pi + \pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{2n\pi + \frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2n\pi + \frac{3\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$$

2. Область значений

sympy.calculus.util.function_range(f, symbol, domain)

In [4]:
```
function_range(f, x, S.Reals)
```

Out[4]: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

3. Периодичность

sympy.calculus.util.periodicity(f, symbol, check=False)

In [5]:
```
periodicity(f, x, check=False)
```

Out[5]: π

Значит, функция периодична с периодом π.

4. Стационарные точки

sympy.calculus.util.stationary_points(f, symbol, domain=Reals)

In [6]:
```
stationary_points(f, x)
```

Out[6]:

$$\left(\left\{2n\pi + \frac{5\pi}{4} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \setminus \left(\{2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{2n\pi + \pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{2n\pi + \frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2n\pi + \frac{3\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}\right)\right)$$
$$\cup \left(\left\{2n\pi + \frac{3\pi}{4} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \setminus \left(\{2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{2n\pi + \pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{2n\pi + \frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2n\pi + \frac{3\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}\right)\right)$$
$$\cup \left(\left\{2n\pi + \frac{7\pi}{4} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \setminus \left(\{2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{2n\pi + \pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{2n\pi + \frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2n\pi + \frac{3\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}\right)\right)$$
$$\cup \left(\left\{2n\pi + \frac{\pi}{4} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \setminus \left(\{2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{2n\pi + \pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{2n\pi + \frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2n\pi + \frac{3\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}\right)\right)$$

5. Максимальное и минимальное значения функции

maximum(f, symbol, domain=Reals) minimum(f, symbol, domain=Reals)

In [7]:
```
display(maximum(f, x), minimum(f, x))
```

∞

$-\infty$

6. Монотонность

In [8]:
```
display(is_decreasing(f),
is_increasing(f),
is_monotonic(f),
is_strictly_decreasing(f),
is_strictly_increasing(f))
```

```
False

False

False

False

False
```

7. Минимальное и максимальное значение функции на интервале

Поскольку наша функция принимает сколь угодно большие значения, положительные и отрицательные, то нет смысла искать минимальное значение и т.п.

Рассмотрим функцию на интервале $[\pi/6, \pi/3]$, для этого интервала найдем интервал значений функции, ее максимальное, минимальное значения, длину и середину интервала от минимального до максимального значения функции.

Свойства: delta, max, min, mid

In [9]:
```
f_AccB = f.subs(x, AccumBounds(Pi/6, Pi/3))
display(f_AccB, f_AccB.max, f_AccB.min, f_AccB.delta, f_AccB.mid)
```

$$\left\langle 1, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right\rangle$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$1$$

$$-1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Исследование периодической функции на одном периоде.

Найдем пересечение с интервалом $[0, \pi]$ (период) области определения, множества сингулярных точек и стационарных точек.

1. Область определения

In [10]:
```
period_pi = Interval(0, Pi)
continuous_domain(f, x, period_pi)
```

Out[10]: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

Сингулярные точки (точки, где функция не определена)

In [11]:
```
singularities(f, x, period_pi)
```

Out[11]: $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$

2. Область значений

In [12]:
```
function_range(f, x, period_pi)
```

Out[12]: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

4. Стационарные точки

In [13]:
```
stationary_points(f, x, period_pi)
```

Out[13]: $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

5. Максимальное и минимальное значения функции

In [14]:
```
display(maximum(f, x, period_pi), minimum(f, x, period_pi))
```

∞

$-\infty$

6. Монотонность

Исследуем на периоде открытые интервалы (Interval.open), на которые период разбивают сингулярные и стационарные точки, т.е. $(0, \pi/4)$, $(\pi/4, \pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/4)$, $(3\pi/4, \pi)$.

In [15]:
```
intervals = [Interval.open(k*Pi/4, (k + 1)*Pi/4) for k in range(4)]
for interval in intervals:
    display(interval)
    print(is_monotonic(f, interval=interval),
          is_decreasing(f, interval=interval), is_increasing(f, interval=interval),
          is_strictly_decreasing(f, interval=interval), is_strictly_increasing(f, interval=interval))
```

$\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

```
True True False True False
```

$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

```
True False True False True
```

$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

```
True False True False True
```

$\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$

```
True True False True False
```

7. Минимальное и максимальное значение функции на интервале

Найдем максимальное и минимальное значение функции на каждом из интервалов монотонности в пределах одного периода

In [16]:
```
right = 0
for k in range(4):
    left = right
    right = left + Pi/4
    display(Interval.open(left, right))
    f_AccB = f.subs(x, AccumBounds(left, right))
    display(f_AccB, f_AccB.max, f_AccB.min, f_AccB.delta, f_AccB.mid)
```

$\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

$\langle 1, \infty \rangle$

∞

1

∞

∞

$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\langle 1, \infty \rangle$

∞

1

∞

∞

$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

$\langle -\infty, -1 \rangle$

-1

$-\infty$

∞

$-\infty$

$\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$

$\langle -\infty, -1 \rangle$

-1

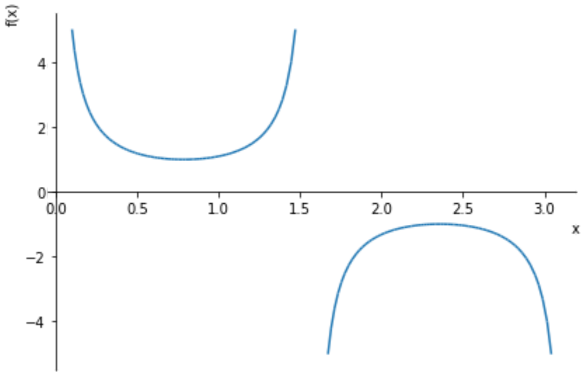
$-\infty$

∞

$-\infty$

Построим график функции на одном периоде и убедимся в соответствии графику информации, полученной при анализе.

In [17]:
```
plot((f, (x, 0.1, Pi/2-0.1)), (f, (x, Pi/2 + 0.1, Pi-0.1)))
```



Out[17]:
```
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x1d309ac2ac8>
```