In [1]:
```
import sympy
from sympy import S, solve, Matrix, diff, plot, solve
from sympy import log as Log
from sympy.plotting import plot3d
from sympy.geometry import Point
%matplotlib inline
```

Занятие 16

Математический анализ

Градиент функции нескольких переменных, производная по направлению, касательная плоскость.

Градиент функции $z = f(x, y)$ - вектор $gradz$:

$$grad\ z = \frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j,$$

где i, j - орты. Градиент функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ - вектор $gradu$:

$$grad\ z = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k,$$

где i, j, k - орты.

Производная функции $u = f(x, y, z)$ по направлению $l = P\bar{P}_1$ это $\frac{\partial u}{\partial l}$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{P_1 \to P} \frac{f(P_1) - f(P)}{PP_1} = l \cdot grad\ u,$$

где l - единичный вектор заданного направления.

Пример 1

Найти градиент функции $\ln(x^2 + (y-2)^2 + xy)$ в произвольной точке и в точке $(0, 1)$. Найти производную в точке $(0, 1)$ по направлению вектора $(-3/5, 4/5)$.

Вычисляем частные производные по x и y, составляем градиент:

In [2]:
```
from sympy.abc import x, y
def f(x, y):
    return Log(-x**2 + 3*(y - 5)**2 - 6*x*y)
def grad_f(f, *var):
    return Matrix([f(*var).diff(variable) for variable in var])
grad_f(f, x, y)
```

Out[2]:

$$\begin{bmatrix} \frac{-2x-6y}{-x^2-6xy+3(y-5)^2} \\ \frac{-6x+6y-30}{-x^2-6xy+3(y-5)^2} \end{bmatrix}$$

Вычислим градиент в заданной точке, найдем скалярное произведение градиента на единичный вектор заданного направления $(-3/5, 4/5)$:

In [3]:
```
def grad_f_point(f, var_dict):
    return grad_f(f, *var_dict.keys()).subs(var_dict)
grad1 = grad_f_point(f, {x: 0, y: 1})
display(grad1, grad1.dot(Matrix((-S(3)/5, S(4)/5))))
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$-\frac{13}{40}$$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательная плоскость

к поверхности в точке M (точке касания) называется плоскость, в которой лежат все касательные в точке М к различным кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Нормаль

к поверхности - прямая, перпендикулярная касательной плоскости в точке касания.

Пусть уравнение поверхности $z = f(x, y)$, тогда

уравнение касательной плоскости

в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ поверхности

$$z - z_0 = f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Уравнения нормали:

$$\frac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Пример 2.

Поверхность задана уравнением $z = x^2 + y^2$. Составить уравнение касательной плоскости и нормали в точке $\mathrm{M}(1, -2, 5)$.

In [5]:
```
from sympy.abc import z
M = Point(1, -2, 5)
dictM = {x: M.x, y: M.y, z: M.z}
f = x**2 + y**2
fdx, fdy = [f.diff(p).subs(dictM) for p in [x, y]]
display(fdx, fdy)
planeM = sympy.Eq(z - M.z, fdx*(x - M.x) + fdy*(y - M.y))
norm_line = sympy.Eq(sympy.Eq((x - M.x)/fdx, (y - M.y)/fdy, evaluate=False),
                     (z - M.z)/(-1), evaluate=False)
display(planeM, norm_line)
```

2

-4

$z - 5 = 2x - 4y - 10$

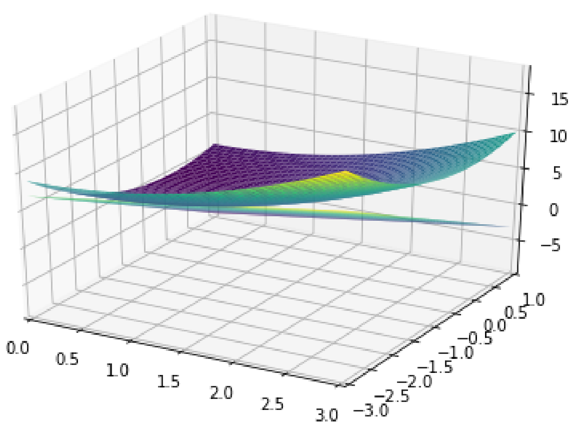
$\frac{x}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{y}{4} - \frac{1}{2} = 5 - z$

Построим на одном графике поверхность и касательную плоскость.

Представим для этого уравнение плоскости как выражение для z:

In [5]:
```
zz= solve(planeM, z)[0]
display(sympy.Eq(z, zz))
plot3d(zz, f, (x, 0, 3), (y, -3, 1))
```

$z = 2x - 4y - 5$



Out[5]: `<sympy.plotting.plot.Plot at 0x1c82436bb00>`

Неявно заданная функция

уравнение касательной плоскости

в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ поверхности $F(x, y, z) = 0$

$$F_x'(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y'(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z'(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Уравнения нормали:

$$\frac{x - x_0}{F_x'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z'(x_0, y_0, z_0)}$$

Пример 3.

Поверхность задана уравнением $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$. Составить уравнение касательной плоскости и нормали в точке M(4,3,4).

In [6]:
```
M = Point(4, 3, 4)
dictM = {x: M.x, y: M.y, z: M.z}
F = x**2/16 + y**2/9 - z**2/8
Fdx, Fdy, Fdz = [F.diff(p).subs(dictM) for p in [x, y, z]]
display(Fdx, Fdy, Fdz)
planeM = sympy.Eq(Fdx*(x - M.x) + Fdy*(y - M.y) + Fdz*(z - M.z), 0)
norm_line = sympy.Eq(sympy.Eq((x - M.x)/Fdx,(y - M.y)/Fdy, evaluate=False),
                    (z - M.z)/Fdz, evaluate=False)
display(planeM, norm_line)
```

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3}$$

$$-1$$

$$\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} - z = 0$$

$$2x - 8 = \frac{3y}{2} - \frac{9}{2} = 4 - z$$

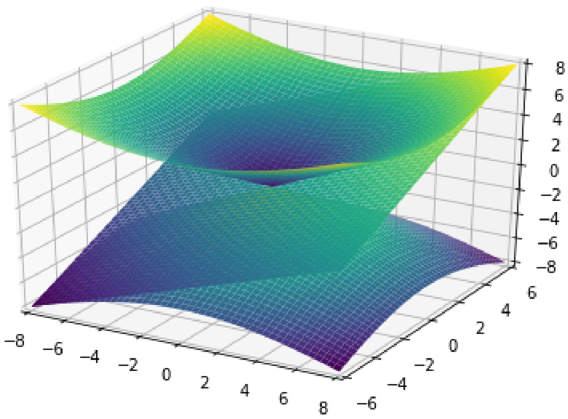
Изобразим на графике:

In [7]:
```
zz1, zz2 = list(solve(F, z))
zz3 = M.z - 1/Fdz*(Fdx*(x - M.x) + Fdy*(y - M.y)) #это выразили z из уравнения касательной плоскости
display(zz1, zz2, zz3)
plot3d(zz1, zz2, zz3, (x, -8, 8), (y, -6, 6))
```

$$-\frac{\sqrt{18x^2 + 32y^2}}{6}$$

$$\frac{\sqrt{18x^2 + 32y^2}}{6}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{2y}{3}$$



Out[7]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x1c8243b3828>