In [1]:
```
import sympy
from sympy import S, Symbol, symbols, simplify, solve, diff,  plot_parametric, plot_implicit, Integral
from sympy import sin as Sin
from sympy import cos as Cos
from sympy import pi as Pi
%matplotlib inline
```

Занятие 13

Математический анализ

Применение интегралов для вычисления площади поверхности тела вращения

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX

дуги гладкой кривой $y = f(x)$ между точками $x = a$ и $x = b$

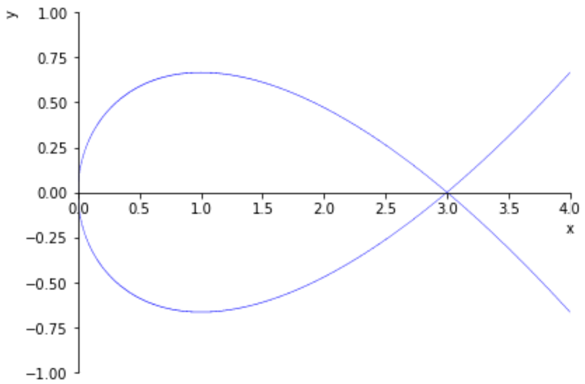
$$S_{OX} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Пример 1

Вычислить площадь поверхности образованной вращением вокруг OX петли кривой $9y^2 = x(3-x)^2$.

Изобразим график.

In [2]:
```
x = Symbol('x', positive=True)
y = Symbol('y')
Eq1 = sympy.Eq(9*y**2, x*(3 - x)**2)
plot_implicit(Eq1, (x, 0, 4), (y, -1, 1))
```



Out[2]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x2864f4abda0>

Выразим y из уравнения, определяющего неявно заданную функцию:

In [3]:
```
y1 = solve(Eq1, y)[0]
display(y1)
```

$$\frac{\sqrt{x}\,(3-x)}{3}$$

In [4]:
```
S_OX1 = 2*Pi*Integral(y1*(1 + y1.diff(x)**2)**S.Half, (x, 0, 3))
res1 = S_OX1.doit()
display(S_OX1, res1)
```

$$2\pi \int_0^3 \frac{\sqrt{x}\,(3-x)\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{3-x}{6\sqrt{x}}\right)^2 + 1}}{3}\, dx$$

$$-\frac{\pi\left(\int_0^3 (-3)\, dx + \int_0^3 (-2x)\, dx + \int_0^3 x^2\, dx\right)}{3}$$

Результат вычисления интеграла нужно упростить, пользуемся simplify. В случае применения simplify как метода не обязательно импортировать simplify из sympy.

In [5]:
```
res1.simplify()
```

Out[5]: 3π

Параметрически заданная кривая

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX дуги гладкой параметрически заданной кривой

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

между точками $t = a$ и $t = b$ выражается формулой

$$S_{OX} = 2\pi \int\limits_a^b \phi(t)\sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt$$

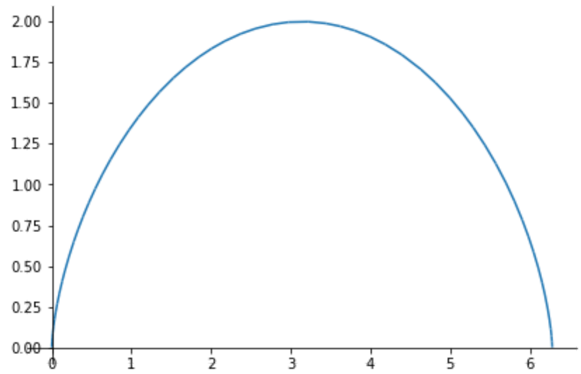
Пример 2.

Вычислить площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \qquad a > 0$$

около оси OX.

In [6]:
```
t = Symbol('t')
a = Symbol('a', positive=True)
x2 = a*(t - Sin(t))
y2 = a*(1 - Cos(t))
plot_parametric(x2.subs(a, 1), y2.subs(a, 1), (t, 0, 2*Pi))
S_OX2 = Integral(2*Pi*(y2*(x2.diff(t)**2 + y2.diff(t)**2)**S.Half).simplify(), (t, 0, 2*Pi))
display(S_OX2)
```



$$\int\limits_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\pi a^2 (1 - \cos(t))^{\frac{3}{2}}\, dt$$

sympy не удается вычислить этот интеграл, поэтому вручную проведем замену $1 - \cos(t) = 2\sin^2(t/2)$, замена осуществляется с помощью replace, это не замена переменной в интеграле, переменная остается все той же.

In [7]:
```
res = S_OX2.function.replace(1 - Cos(t), 2*Sin(t/2)**2)
display(sympy.Eq(S_OX2,res.integrate((t, 0, 2*Pi))))
```

$$\int\limits_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\pi a^2 (1 - \cos(t))^{\frac{3}{2}}\, dt = \frac{64\pi a^2}{3}$$

Поверхность тела вращения в полярной системе координат

Площадь поверхности тела, полученного при вращении сектора, ограниченного дугой кривой $r = F(\phi)$ и двумя полярными радиусами $\phi = \alpha$, $\phi = \beta$, вокруг полярной оси:

$$S_\phi = 2\pi \int_\alpha^\beta r \sin\phi \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\phi.$$

Пример 3.

Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $r = 2a(1 + \cos\phi)$ вокруг полярной оси.

Здесь применим simplify как функцию, в этом случае ее нужно импортировать из sympy или вызывать как sympy.simplify.

In [8]:
```
phi = Symbol('phi')
a = Symbol('a', positive=True)
r = 2*a*(1 + Cos(phi))
S_p = Integral(simplify(2*Pi*r*Sin(phi)*(r**2 + r.diff(phi)**2)**S.Half), (phi, 0, Pi))
display(sympy.Eq(S_p, S_p.doit()))
```

$$\int\limits_0^{\pi} 8\sqrt{2}\pi a^2 (\cos(\phi) + 1)^{\frac{3}{2}} \sin(\phi)\, d\phi = \frac{128\pi a^2}{5}$$

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OY

дуги гладкой кривой $y = f(x)$ между точками $y = c$ и $y = d$

$$S_{OY} = 2\pi \int\limits_a^b x(y)\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy$$

Пример 4.

Найти площадь поверхности вращения астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ вокруг оси OY.

Вначале выразим x из уравнения с помощью solve:

In [9]:
```
a = Symbol('a', positive=True)
x, y = symbols('x y', real=True)
Eq4 = sympy.Eq(x**(S(2)/3) + y**(S(2)/3), a**(S(2)/3))
x1, x2 = solve(Eq4, x)
display(x1, x2)
```

$$-\left(a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Для облегчения дальнейших вычислений раскроем скобки в подынтегральном выражении с помощью expand (применили как метод):

In [10]:
```
S_OY4 = 2*2*Pi*Integral((x2*(1 + x2.diff(y)**2)**S.Half).expand(), (y, 0, a))
S_OY4
```

Out[10]:
$$4\pi \int\limits_0^a \left(-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{y}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}} + \frac{a\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{y}}\right) dy$$

In [11]:
```
res4 = S_OY4.doit()
display(sympy.Eq(S_OY4, res4))
```

$$4\pi \int\limits_0^a \left(-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{y}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}} + \frac{a\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{y}}\right) dy = \frac{12\pi a^2}{5}$$

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг произвольной оси

При вычислении поверхности тела вращения относительно вертикальной оси $x = a$, образованного вращением дуги гладкой кривой $y = f(x)$ между точками $y = c$ и $y = d$, нужно из x вычитать a в интеграле:

$$S_{x=a} = 2\pi \int\limits_a^b (a - x(y))\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy$$

Пример 5.

Найти площадь поверхности, образованной вращением $y^2 = x$ вокруг оси $x = 1$. Заметим, что поверхность симметрична относительно оси OX, поэтому можно удвоить интеграл от 0 до 1, вместо интегрирования от -1 до 1.

In [12]:
```
y = Symbol('y', real=True)
x5 = y**2
S5 = 2*2*Pi*Integral(((1 - x5)*(1 + x5.diff(y)**2)**S.Half), (y, 0, 1))
display(sympy.Eq(S5, S5.doit()))
```

$$4\pi \int\limits_0^1 \left(1 - y^2\right)\sqrt{4y^2+1}\,dy = 4\pi\left(\frac{17\operatorname{asinh}(2)}{64} + \frac{7\sqrt{5}}{32}\right)$$

Пример 6.

Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

вокруг ее оси симметрии, график можно увидеть в Примере 2.

Поверхность образуется вращением левой половины дуги вокруг прямой $x = \pi a$. Принимая y за независимую переменную и учитывая, что ось вращения сдвинута относительно координатной оси OY на расстояние πa, имеем:

$$S_{x=\pi a} = 2\pi \int\limits_0^\pi (\pi a - x(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

In [13]:
```python
t = Symbol('t')
a = Symbol('a', positive=True)
x6 = a*(t - Sin(t))
y6 = a*(1 - Cos(t))
S6 = Integral(2*Pi*((Pi*a - x6)*(x6.diff(t)**2 + y6.diff(t)**2)**S.Half).simplify(), (t, 0, Pi))
display(S6)
```

$$\int_{0}^{\pi} 2\pi a^{2} \sqrt{2 - 2\cos\left(t\right)} \left(-t + \sin\left(t\right) + \pi\right)\, dt$$

Укажем вручную, что $\sqrt{2-2\cos(t)} = 2\sin(t/2)$, используем replace

In [14]:
```python
S7 = S6.replace((2 - 2*Cos(t))**S.Half, 2*Sin(t/2))
S7
```

Out[14]:

$$\int_{0}^{\pi} 4\pi a^{2} \left(-t + \sin\left(t\right) + \pi\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right)\, dt$$

In [15]:
```python
display(sympy.Eq(S6, S7.doit()))
```

$$\int_{0}^{\pi} 2\pi a^{2} \sqrt{2 - 2\cos\left(t\right)} \left(-t + \sin\left(t\right) + \pi\right)\, dt = -\frac{32\pi a^{2}}{3} + 8\pi^{2} a^{2}$$