In [1]:

```python
import sympy
from sympy import Expr, Eq, latex, plot_implicit
from sympy.core import S, pi, sympify
from sympy.core.logic import fuzzy_bool
from sympy.core.numbers import Rational, oo
from sympy.core.compatibility import ordered
from sympy.core.symbol import Dummy, _uniquely_named_symbol, _symbol
from sympy.simplify import simplify, trigsimp
from sympy.functions.elementary.miscellaneous import sqrt, Max
from sympy.functions.elementary.trigonometric import cos, sin
from sympy.functions.special.elliptic_integrals import elliptic_e
from sympy.geometry.exceptions import GeometryError
from sympy.geometry.line import Ray2D, Segment2D, Line2D, LinearEntity3D
from sympy.polys import DomainError, Poly, PolynomialError
from sympy.polys.polyutils import _not_a_coeff, _nsort
from sympy.solvers import solve
from sympy.solvers.solveset import linear_coeffs
from sympy.utilities.misc import filldedent, func_name
from sympy.geometry.entity import GeometryEntity, GeometrySet
from sympy.geometry.point import Point, Point2D, Point3D
from sympy.geometry.line import Line, Segment
from sympy.geometry.util import idiff
import matplotlib.pyplot as plt
```

Занятие 15

Алгебра

Кривые второго порядка на плоскости: гипербола

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D0%B0
https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D0%B0_(%D0%BC%D0%B0%D1
В SymPy пока нет классов Гипербола и Парабола, создадим их прототипы сами. Возьмем за образец класс эллипсов
https://github.com/sympy/sympy/blob/70381f282f2d9d039da860e391fe51649df2779d/sympy/geometry/ellipse.py#L38-L1478
https://docs.sympy.org/latest/modules/geometry/ellipses.html?highlight=ellipse#sympy.geometry.ellipse.Ellipse

In [2]:

```python
class Hyperbola(GeometrySet):
    """
     Attributes
    ==========
    center
    hradius
    vradius
    eccentricity
    periapsis
    focus_distance
    foci
    ==========
    конструктор __new__
    скопирован из Эллипса,
    изменена формула для  hradius и vradius через эсцентриситет
    """
    def __new__(
        cls, center=None, hradius=None, vradius=None, eccentricity=None, **kwargs):
        hradius = sympify(hradius)
        vradius = sympify(vradius)

        eccentricity = sympify(eccentricity)

        if center is None:
            center = Point(0, 0)
        else:
            center = Point(center, dim=2)

        if len(center) != 2:
            raise ValueError('The center of "{0}" must be a two dimensional point'.format(cls))

        if len(list(filter(lambda x: x is not None, (hradius, vradius, eccentricity)))) != 2:
            raise ValueError(filldedent('''
                Exactly two arguments of "hradius", "vradius", and
                "eccentricity" must not be None.'''))

        if eccentricity is not None:
            if hradius is None:
                hradius = vradius/sqrt( eccentricity**2 - 1)
            elif vradius is None:
                vradius = hradius*sqrt( eccentricity**2 - 1)

        if hradius == 0:
            return "Line"
        if vradius == 0:
            return "Rays"
        return GeometryEntity.__new__(cls, center, hradius, vradius, **kwargs)

    @property
    def ambient_dimension(self):
        return 2

    @property
    def center(self):
        return self.args[0]

    @property
    def hradius(self):
        return self.args[1]

    @property
    def vradius(self):
        return self.args[2]

    @property
    def focus_distance(self):
        return sqrt(self.hradius**2 + self.vradius**2)

    @property
    def eccentricity(self):
        """The eccentricity of the ellipse."""
        return self.focus_distance/self.hradius
    @property
    def periapsis(self):
        """The apoapsis of the hyperbola.
        The smallest distance between the focus and the contour."""
        return self.focus_distance-self.hradius

    @property
    def foci(self):
        return (self.center + Point(-self.focus_distance, 0), self.center + Point(self.focus_distance,
0))

    @property
    def major(self):
        return self.hradius

    @property
    def minor(self):
        return self.vradius

    def equation(self, x='x', y='y', _slope=None, equation=False):
        """
        Returns the equation of a hyperbola aligned with the x and y axes;
        when slope is given, the equation returned corresponds to a hyperbola
        with a major axis having that slope.
        Parameters
        ==========
        x : str, optional
            Label for the x-axis. Default value is 'x'.
        y : str, optional
            Label for the y-axis. Default value is 'y'.
       _slope : Expr, optional
                The slope of the major axis. Ignored when 'None'.
        Returns
        =======
        equation : sympy expression   """

        x = _symbol(x, real=True)
        y = _symbol(y, real=True)

        dx = x - self.center.x
        dy = y - self.center.y

        if _slope is not None:
            L = (dy - _slope*dx)**2
            l = (_slope*dy + dx)**2
            h = 1 + _slope**2
            a = h*self.major**2
            b = h*self.minor**2
            res= l/a - L/b

        else:
            t1 = (dx/self.hradius)**2
            t2 = (dy/self.vradius)**2
            res = t1 - t2
        if not equation:
            return res - 1
        else:
            return Eq(res, 1)
```

Пример 1

Построим нашу первую гиперболу, полуоси 2 и 3.

In [3]:

```python
Hyp1 = Hyperbola(hradius=2, vradius=3)
Hyp1
```

Out[3]: $Hyperbola\left(Point2D\left(0,0\right),2,3\right)$

Теперь построим гиперболу по горизонтальной полуоси и эксцентриситету

In [4]:

```python
Hyp2 = Hyperbola(Point(0, 1), hradius=8, eccentricity=S(5)/4)
Hyp2
```

Out[4]: $Hyperbola\left(Point2D\left(0,1\right),8,6\right)$

Заметим, что vradius автоматически корректно вычислен при построении по формуле $b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$

Атрибуты класса Hyperbola

center

центр точка пересечения асимптот гиперболы

hradius

горизонтальная полуось

vradius

вертикальная полуось

eccentricity

эксцентриситет отношение фокусного расстояния к горизонтальной оси (той, на которой расположены фокусы)

periapsis

перифокусное расстояние (минимальное расстояние от фокуса до точки на эллипсе)

focus_distance

фокусное расстояние - половина расстояния между фокусами

foci

фокусы

Пример 2.

Выведем на экран атрибуты гиперболы Hyp1 Примера 1.

In [5]:

```python
props = {'center': Hyp1.center, 'hradius': Hyp1.hradius, 'vradius': Hyp1.vradius,
         'eccentricity': Hyp1.eccentricity, 'periapsis': Hyp1.periapsis,
         'focus_distance': Hyp1.focus_distance, 'foci': Hyp1.foci}
for key in props.keys():
    display(key, props[key])
```

```
'center'
```

$Point2D\left(0,0\right)$

```
'hradius'
```

2

```
'vradius'
```

3

```
'eccentricity'
```

$\frac{\sqrt{13}}{2}$

```
'periapsis'
```

$-2 + \sqrt{13}$

```
'focus_distance'
```

$\sqrt{13}$

```
'foci'

(Point2D(-sqrt(13), 0), Point2D(sqrt(13), 0))
```

Методы класса Hyperbola

equation(x='x', y='y', _slope=None)- уравнение гиперболы

необязательный аргумент _slope - наклон главной оси

Пример 3.

Выведем на экран уравнение гиперболы Hyp2, а также уравнение этой гиперболы, повернутой на угол с тангенсом 2.

In [6]:

```python
Hyp2.equation()
```

Out[6]: $\frac{x^2}{64} - \left(\frac{y}{6} - \frac{1}{6}\right)^2 - 1$

In [7]:

```python
Hyp2.equation(equation=True)
```

Out[7]: $\frac{x^2}{64} - \left(\frac{y}{6} - \frac{1}{6}\right)^2 = 1$

In [8]:

```python
Hyp2.equation(_slope=2, equation=True)
```

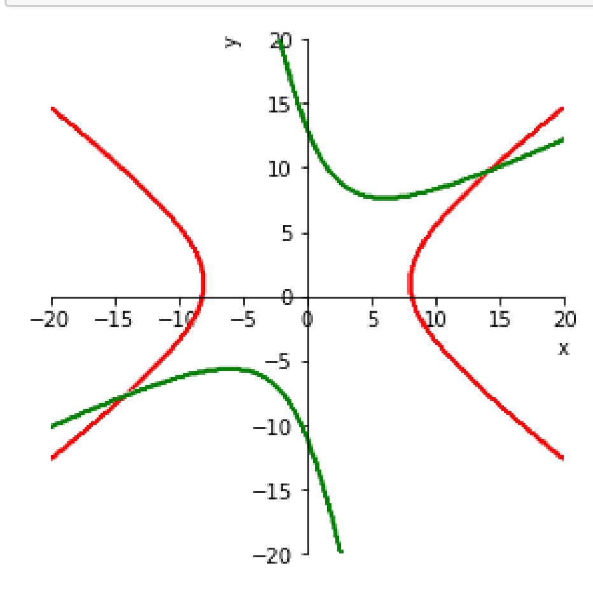
Out[8]: $-\frac{\left(-2x + y - 1\right)^2}{180} + \frac{\left(x + 2y - 2\right)^2}{320} = 1$

Пример 4.

Изобразим графики обеих гипербол Примера 3, исходной и повернутой. Для того, чтобы изобразить эллипс на графике, нужны его переменные, извлечем их с помощью .free_symbols

In [9]:

```python
eq2 = Hyp2.equation(x='x', y='y')
dict_free = {str(a): a for a in eq2.free_symbols}
p = plot_implicit(eq2, (dict_free['x'], -20, 20), (dict_free['y'], -20, 20),
                  line_color='r', aspect_ratio=(1, 1), show=False, adaptive=False)
p.extend(plot_implicit(Hyp2.equation(x='x', y='y', _slope=2), (dict_free['x'], -20, 20), (dict_free['y'
], -20, 20),
                  line_color='g', aspect_ratio=(1, 1), show=False, adaptive=False))
p.show()
```

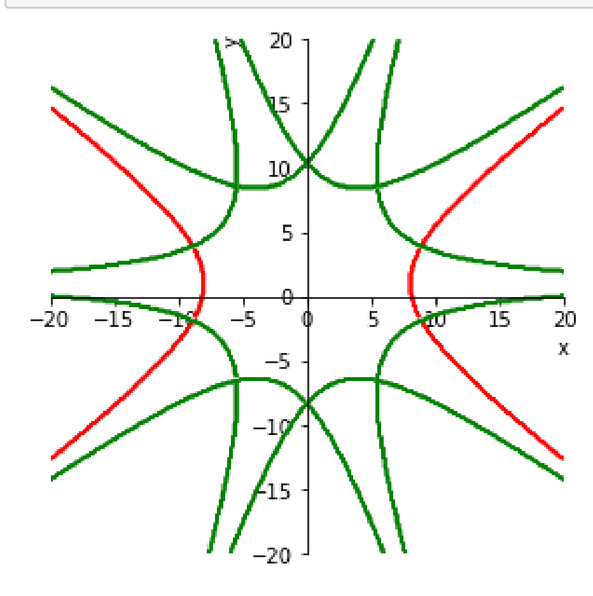


Пример 5.

Изобразим на графике гиперболы, полученные из Hyp2 поворотом на некоторый угол.

In [10]:

```python
eq2 = Hyp2.equation(x='x', y='y')
dict_free = {str(q): q for q in eq2.free_symbols}
p = plot_implicit(eq2, (dict_free['x'], -20, 20), (dict_free['y'], -20, 20),
                  line_color='r', aspect_ratio=(1, 1), show=False, adaptive=False)
for i in range(1, 5):
    p.extend(plot_implicit(Hyp2.equation(x='x', y='y', _slope=sympy.tan(i*pi/5)),
                          (dict_free['x'], -20, 20), (dict_free['y'], -20, 20),
                          line_color='g', aspect_ratio=(1, 1), show=False, adaptive=False))
p.show()
```



Пример 6.

Изобразим график гиперболы, используем в легенде возможность вывода по столбцам:

plt.legend(loc='upper left', ncol=2, mode="expand")

ncol - количество столбцов

mode="expand" - легенда растягивается по ширине графика

Для автоматического формирования красивой подписи в легенде используем

dir1='директриса x = latex(S(a)**2/c, mode='inline')

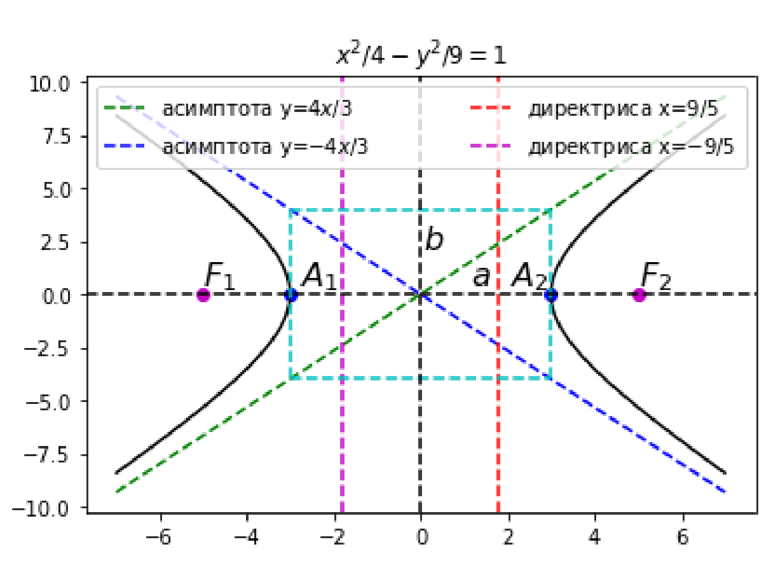
превращение a в символ с помощью $S(a)$ предотвращает округление

In [11]:

```python
%matplotlib inline
a = 3
b = 4
Hyp6 = Hyperbola(hradius=a, vradius=b)
c = Hyp6.focus_distance
eq6 = Hyp6.equation(x='x', y='y')
dict_free = {str(a): a for a in eq6.free_symbols}
x = dict_free['x']
y = dict_free['y']
y1, y2 = solve(eq6, y)
X1 = [a + i/100 for i in range(400)]
X2 = [-a - i/100 for i in range(400)]
Y11 = [float(y1.subs(x, x1)) for x1 in X1]
Y12 = [-y for y in Y11]
Y21 = [float(y2.subs(x, x1)) for x1 in X1]
Y22 = [-y for y in Y21]
ymax = max(Y11)
ymin = -ymax
plt.plot(X1, Y11, 'k')
plt.plot(X1, Y12, 'k')
plt.plot(X2, Y21, 'k')
plt.plot(X2, Y22, 'k')
x = S('x')
asympt1 = 'асимптота y=' + latex(S(b)/a*x, mode='inline')
asympt2 = 'асимптота y=' + latex(-S(b)/a*x, mode='inline')
plt.plot([-7, 7], [-7*b/a, 7*b/a], 'g--', label=asympt1)
plt.plot([-7, 7], [7*b/a, -7*b/a], 'b--', label=asympt2)
dir1 = 'директриса x=' + latex(S(a)**2/c, mode='inline')
dir2 = 'директриса x=' + latex(-S(a)**2/c, mode='inline')
plt.axvline(x=a**2/c, color='r', linestyle='--', label=dir1)
plt.axvline(x=-a**2/c, color='m', linestyle='--', label=dir2)
plt.plot([-a, -a], [-b, b], 'c--')
plt.plot([a, a], [-b, b], 'c--')
plt.plot([-a, a], [-b, -b], 'c--')
plt.plot([-a, a], [b, b], 'c--')
plt.axhline(y=0, color='k', linestyle='--')
plt.axvline(x=0, color='k', linestyle='--')
plt.scatter(-c, 0, color='m')
plt.scatter(c, 0, color='m')
plt.scatter(-a, 0, color='b')
plt.scatter(a, 0, color='b')
plt.annotate(r'$F_1$', xy=(-c, 0), xycoords='data', xytext=(0, +5), textcoords='offset points', fontsiz
e=16)
plt.annotate(r'$F_2$', xy=(c, 0), xycoords='data', xytext=(0, +5), textcoords='offset points', fontsize
=16)
plt.annotate(r'$A_1$', xy=(-a, 0), xycoords='data', xytext=(+5, +5), textcoords='offset points', fontsi
ze=16)
plt.annotate(r'$A_2$', xy=(a, 0), xycoords='data', xytext=(-20, +5), textcoords='offset points', fontsi
ze=16)
plt.annotate(r'$a$', xy=(a, 0), xycoords='data', xytext=(-40, +5), textcoords='offset points', fontsize
=16)
plt.annotate(r'$b$', xy=(0, b), xycoords='data', xytext=(+1, -20), textcoords='offset points', fontsize
=16)
plt.title(latex(Hyp1.equation(equation=True), mode='inline'))
plt.legend(loc='upper left', ncol=2, mode="expand")
```

Out[11]:

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x26cd8bcdd30>
```



Уравнения директрис и асимптот при повороте на угол α

Пусть a - горизонтальная полуось, c - фокусное расстояние, x_0 - горизонтальная координата центра гиперболы, тогда уравнение директрис

$$x = x_0 \pm \frac{a^2}{c}$$

При повороте на угол α получается уравнение

$$y = y_0 - \operatorname{ctg}\alpha (x - x_0) \pm \frac{a^2}{c}\sqrt{1 + \operatorname{ctg}\alpha}$$

Уравнение асимптоты

$$y = y_0 \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$$

При повороте на угол α получаются уравнения

$$y_1 = y_0 + k_1(x - x_0), \quad y_2 = y_0 + k_2(x - x_0),$$
$$k_1 = \frac{b + a\operatorname{tg}\alpha}{a - b\operatorname{tg}\alpha}, \quad k_2 = \frac{-b + a\operatorname{tg}\alpha}{a + b\operatorname{tg}\alpha}$$