```
import sympy
from sympy import Eq, S, latex, plot_implicit, Matrix, Symbol, symbols, simplify, expand, collect, sc
from sympy import pi as Pi
from sympy import cos as Cos
from sympy import sin as Sin
from sympy.plotting.plot import plot3d
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
```

Занятие 17

Алгебра

Поверхности второго порядка

Уравнение поверхности второго порядка:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}$$

В матричном виде:

$$X^TAX + 2bX + c, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{pmatrix}, \quad c =$$

$$X^TA_1X, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{23} & a_{33} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Пример 1.

Записать уравнение поверхности второго порядка $x^2 - 2y^2 - z^2 + 2xy + 4xz + 6x - 8y + 4z - 12 = 0$ в матричном виде двумя способами.
Вначале построим матрицу A квадратичной формы, входящей в уравнение, и вектор b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Проверим, что эта матрица задает нашу поверхность второго порядка, для этого вычислим

$$X^TAX + 2bX + c, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad c = -12$$

```
x, y, z = symbols('x y z')
A = Matrix(((1, 1, 2), (1, -2, 0), (2, 0, -1)))
b = Matrix((3, -4, 2)).T
c = -12
X = Matrix((x, y, z))
u = X.T*A*X
v = b*X
display(A, u, v)
eq1 = simplify(expand(u[0] + 2*v[0] + c))
display(Eq(eq1, 0))
```

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & -2 & 0\\2 & 0 & -1\end{bmatrix}$$
$$\left[\begin{matrix}x \left(x + y + 2 z\right) + y \left(x - 2 y\right) + z \left(2 x - z\right)\end{matrix}\right]$$
$$\left[\begin{matrix}3 x - 4 y + 2 z\end{matrix}\right]$$
$$x^{2} + 2 x y + 4 x z + 6 x - 2 y^{2} - 8 y - z^{2} + 4 z - 12 = 0$$

Теперь составим расширенную матрицу A_1 и проверим, что получилось то же самое уравнение:

```
A1 = A.row_join(b.T).col_join(b.row_join(Matrix((c,)))) # (c,) - tuple, состоящий из одного элемента
display(A1)
X1 = X.col_join(Matrix((1,)))
display(Eq(simplify(expand(X1.T*A1*X1))[0], 0))
```

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\1 & -2 & 0 & -4\\2 & 0 & -1 & 2\\3 & -4 & 2 & -12\end{bmatrix}$$
$$x^{2} + 2 x y + 4 x z + 6 x - 2 y^{2} - 8 y - z^{2} + 4 z - 12 = 0$$

Классификация поверхностей второго порядка

Для классификации поверхностей второго порядка нужно привести их уравнение к каноническому виду, переходя к базису из собственных векторов или выделяя полные квадраты.

15 типов поверхностей второго порядка:

1. Эллипсоид
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$
2. Однополостной гиперболоид
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$
3. Двуполостной гиперболоид
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$
4. Конус
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$
5. Эллиптический параболоид
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$
6. Гиперболический параболоид
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$
7. Эллиптический цилиндр
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
8. Гиперболический цилиндр
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

9. Параболический цилиндр
$$y^2 = 2px$$
10. Пара пересекающихся плоскостей
$$y^2 - k^2x^2 = 0, \quad k \neq 0$$
11. Пара параллельных плоскостей
$$y^2 - k^2 = 0, \quad k \neq 0$$
12. Плоскость
$$y^2 = 0$$
13. Прямая
$$x^2 + y^2 = 0$$
14. Одна точка
$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$
15. Пустое множество
$$x^2 + y^2 + z^2 = -1, \quad x^2 + y^2 = -1, \quad x^2 = -1$$

Пример 2.

Определить тип поверхности второго порядка, заданной уравнением
$$14x^2 - 6\sqrt{2}xy - 6\sqrt{2}xz + 13y^2 + 2yz + 13z^2 - 4 = 0$$
Составим матрицу 3 порядка, соответствующую нашему уравнению, заметим, что вектор b в нашем случае нулевой. Найдем собственные векторы матрицы и перейдем к базису из собственных векторов.

```
A = Matrix(((14, -3*2**S.Half, -3*2**S.Half), (-3*2**S.Half, 13, 1), (-3*2**S.Half, 1, 13)))
X = Matrix((x, y, z))
display(A, Eq(simplify(expand(X.T*A*X))[0] - 4, 0))
P = Matrix([])
for item in A.eigenvects():
    degree = item[1]
    for i in range(degree):
        P = P.row_join(item[2][i].normalized())
A2 = P.T*A*P
x1, y1, z1 = symbols('x1 y1 z1')
X_new = Matrix((x1, y1, z1))
q_f2 = simplify(expand(X_new.T*A2*X_new))[0]
display(A2, q_f2)
```

$$\begin{bmatrix} 14 & -3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & 13 & 1 \\ -3\sqrt{2} & 1 & 13 \end{bmatrix}$$
$$14x^2 - 6\sqrt{2}xy - 6\sqrt{2}xz + 13y^2 + 2yz + 13z^2 - 4 = 0$$
$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$
$$8x_1^2 + 12y_1^2 + 20z_1^2$$

Свободный член уравнения не изменился в результате такого преобразования квадратичной формы, поэтому оно запишется в виде

```
Eq(q_f2, 4)
```

$$8x_1^2 + 12y_1^2 + 20z_1^2 = 4$$

Поделим обе части уравнения на 4 и получим каноническое уравнение эллипсоида.

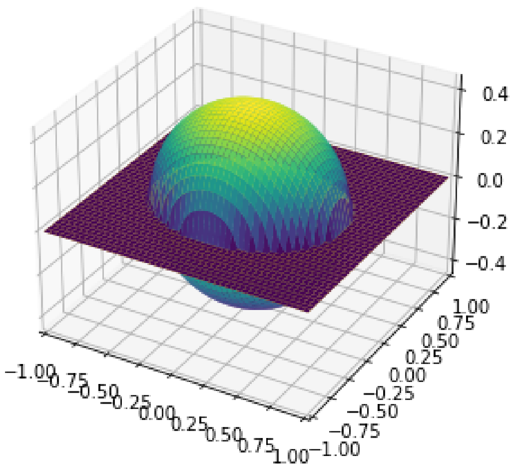
```
eq2 = Eq(q_f2/4, 1)
display(eq2)
```

$$2x_1^2 + 3y_1^2 + 5z_1^2 = 1$$

Получился эллипсоид. Выразим z и изобразим на графике

```
Z = solve(eq2, z1)
display(*Z)
plot3d(*Z, (x1, -1, 1), (y1, -1, 1))
```

$$-\frac{\sqrt{-10x_1^2 - 15y_1^2 + 5}}{5}$$
$$\frac{\sqrt{-10x_1^2 - 15y_1^2 + 5}}{5}$$




```
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x1ecef00f940>
```

Пример 3.

Определить тип поверхности второго порядка, заданной уравнением

$$3x^2 - 7y^2 + 3z^2 + 8xy - 8yz - 8xz + 10x - 14y - 6z - 8 = 0$$

Вначале приведем к каноническому виду квадратичную форму
$3x^2 - 7y^2 + 3z^2 + 8xy - 8yz - 8xz.$

```
A3 = Matrix(((3, 4, -4), (4, -7, -4), (-4, -4, 3)))
X3 = Matrix((x, y, z))
display(A3, simplify(expand(X3.T*A3*X3))[0])
P = Matrix([])
for item in A3.eigenvects():
    degree = item[1]
    for i in range(degree):
        P = P.row_join(item[2][i].normalized())
A3_new = P.T*A3*P
x1, y1, z1 = symbols('x1 y1 z1')
```

```
X3_new = Matrix((x1, y1, z1))
q_f_new = simplify(expand(X3_new.T*A3_new*X3_new))[0]
display(A3_new, q_f_new)
```

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$
$$3x^2 + 8xy - 8xz - 7y^2 - 8yz + 3z^2$$
$$\begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$
$$-9x_1^2 - y_1^2 + 9z_1^2$$

Введем вектор-столбец линейной формы $b = (5, -7, -3)$ и умножим его слева на транспонированную матрицу перехода к базису из собственных векторов.

```
b = Matrix((5, -7, -3))
b_new = P.T*b
display(b_new)
```

$$\begin{bmatrix} -6\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -3 \end{bmatrix}$$

Составляем новое уравнение, не содержащее попарных произведений переменных, т.е. $x_1 y_1$, $x_1 z_1$ и $y_1 z_1$:

```
u_new = q_f_new + 2*(b_new.T*X3_new)[0]
display(u_new)
```

$$-9x_1^2 - 12\sqrt{2}x_1 - y_1^2 + 2\sqrt{2}y_1 + 9z_1^2 - 6z_1$$

Теперь нужно выделить полные квадраты.

Выделим полный квадрат в выражении $ax^2 + bx$:

$$ax^2 + 2bx = a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}x + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{a}.$$

В результате таких замен получается квадратичная форма с теми же коэффициентами, что и до выделения квадратов, но становится нулевой линейная часть, а свободный член вычисляется по остаткам $-\frac{b^2}{a}$.

Заметим, что вектор b_{new} содержит коэффициенты при линейных членах квадратичной формы, а диагональные элементы матрицы A_{new} являются коэффициентами при соответствующих квадратах.

```
c_new = -8
for i in range(3):
    c_new -= b_new[i]**2/(A3_new[i, i])
display(c_new)
```

$$1$$

Новые переменные x_2, y_2, z_2 связаны с x_1, y_1, z_1 соотношениями

$$x_2 = x_1 + \frac{b_1}{a_{11}}, \quad y_2 = y_1 + \frac{b_2}{a_{22}}, \quad z_2 = z_1 + \frac{b_3}{a_{33}},$$

где (b_1, b_2, b_2) - вектор b_{new}, $a_{ii}, i = 1, 2, 3$ - диагональные элементы матрицы A_{new}.

В новых переменных x_2, y_2, z_2 уравнение поверхности такое:

```
x2, y2, z2 = symbols('x2 y2 z2')
X3_last = Matrix((x2, y2, z2))
Eq((X3_last.T*A3_new*X3_last)[0] + c_new, 0)
```

$$-9x_2^2 - y_2^2 + 9z_2^2 + 1 = 0$$

Для получения канонического уравнения осталось перенести свободный член в правую часть и поделить обе части на свободный член с противоположным знаком, получим

```
eq3 = Eq((X3_last.T*A3_new*X3_last)[0]/(-c_new), 1)
display(eq3)
```

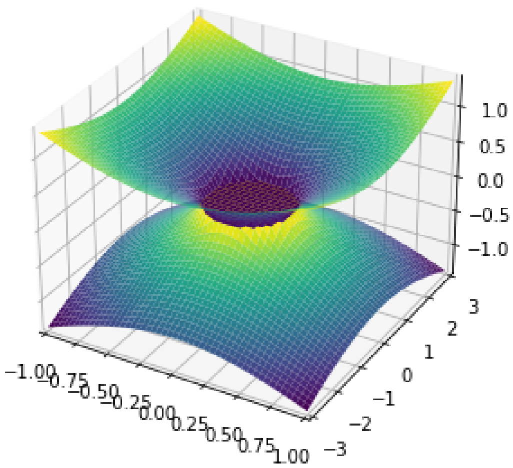
$$9x_2^2 + y_2^2 - 9z_2^2 = 1$$

Получился однополостной гиперболоид.

```
Z = solve(eq3, z2)
display(*Z)
plot3d(*Z, (x2, -1, 1), (y2, -3, 3))
```

$$-\frac{\sqrt{9x_2^2 + y_2^2 - 1}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{9x_2^2 + y_2^2 - 1}}{3}$$




```
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x1ecf0b92208>
```

Пример 4.

Привести уравнение поверхности второго порядка $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z - 5 = 0$ к каноническому виду. Построить график.

```
A4 = Matrix(((1, 1, 2), (1, 1, 2), (2, 2, 4)))
X4 = Matrix((x, y, z))
P = Matrix([])
for item in A4.eigenvects():
    degree = item[1]
    for i in range(degree):
        P = P.row_join(item[2][i].normalized())
A4_new = P.T*A4*P
x1, y1, z1 = symbols('x1 y1 z1')
X4_new = Matrix((x1, y1, z1))
q_f_new = simplify(expand(X4_new.T*A4_new*X4_new))[0]
display(A4_new, q_f_new)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$
$$6z_1^2$$

У матрицы квадратичной формы одно ненулевое собственное значение. Пересчитаем вектор коэффициентов линейной формы:

```
b = Matrix((0, 0, -3))
b_new = P.T*b
display(b_new)
u_new = q_f_new + 2*(b_new.T*X4_new)[0]
display(u_new)
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3\sqrt{5}}{5} \\ -\sqrt{6} \end{bmatrix}$$
$$-\frac{6\sqrt{5}y_1}{5} + 6z_1^2 - 2\sqrt{6}z_1$$

Видим, что только переменная z_1 входит в уравнение и во второй степени, и в первой, выделим полный квадрат и проведем замену переменной. При этом коэффициенты квадратичной формы останутся теми же, изменится только свободный член.

```
c_new = -5
c_new -= b_new[2]**2/(A4_new[2, 2])
print('c_new =', c_new)
b_last = b_new
b_last[2] = 0
x2, y2, z2 = symbols('x2 y2 z2')
X4_last = Matrix((x2, y2, z2))
eq4 = Eq((X4_last.T*A4_new*X4_last)[0] + 2*(b_last.T*X4_last)[0] + c_new, 0)
display(eq4)
```

```
c_new = -6
```

$$-\frac{6\sqrt{5}y_2}{5} + 6z_2^2 - 6 = 0$$

Получился параболический цилиндр. Чтобы поучить каноническое уравнение, достаточно выразить z_2^2 и провести замену переменной y_2, избавляющую от свободного члена:

```
Z = solve(eq4, z2**2)
display(*Z)
```

$$\frac{\sqrt{5}y_2}{5} + 1$$

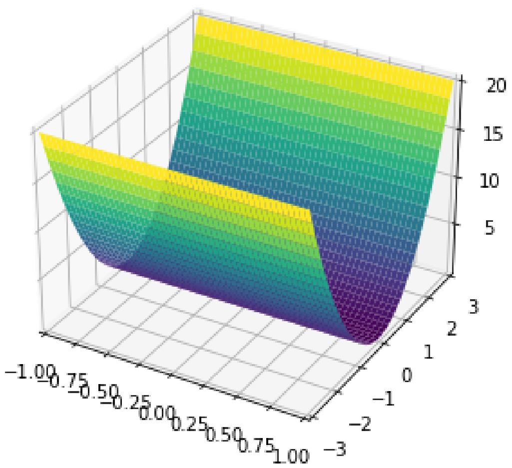
Для того, чтобы избавиться от свободного члена, проведем замену переменной $y_2 = y_3 - \sqrt{5}$:

```
y3 = Symbol('y3')
eq4 = Eq(z2**2, simplify(expand(Z[0].subs(y2, y3 - 5**S.Half))))
eq4
```

$$z_2^2 = \frac{\sqrt{5}y_3}{5}$$

Выразим с помощью solve y_3 из полученного уравнения и построим график:

```
Y = solve(eq4, y3)
plot3d(*Y, (x2, -1, 1), (z2, -3, 3))
```




```
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x1ecf0de57b8>
```

Пример 5.

Привести уравнение поверхности второго порядка $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z + 1 = 0$ к каноническому виду. Построить график.

```
A4 = Matrix(((1, 1, 3), (1, 5, 1), (3, 1, 1)))
X4 = Matrix((x, y, z))
b = Matrix((-1, 3, 1))
u = simplify(expand(X4.T*A4*X4))[0] + 2*(b.T*X4)[0]
display(u)
P = Matrix([])
for item in A4.eigenvects():
    degree = item[1]
    for i in range(degree):
        P = P.row_join(item[2][i].normalized())
A4_new = P.T*A4*P
x1, y1, z1 = symbols('x1 y1 z1')
X4_new = Matrix((x1, y1, z1))
```

```
q_f_new = simplify(expand(X4_new.T*A4_new*X4_new))[0]
display(A4_new, q_f_new)
```

$$x^2 + 2xy + 6xz - 2x + 5y^2 + 2yz + 6y + z^2 + 2z$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$-2x_1^2 + 3y_1^2 + 6z_1^2$$

```
b_new = P.T*b
display(b_new)
u_new = q_f_new + 2*(b_new.T*X4_new)[0]
display(u_new)
```

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$-2x_1^2 + 2\sqrt{2}x_1 + 3y_1^2 - 2\sqrt{3}y_1 + 6z_1^2 + 2\sqrt{6}z_1$$

```
c_new = 1
for i in range(3):
    c_new -= b_new[i]**2/(A4_new[i, i])
display(c_new)
```

$$0$$

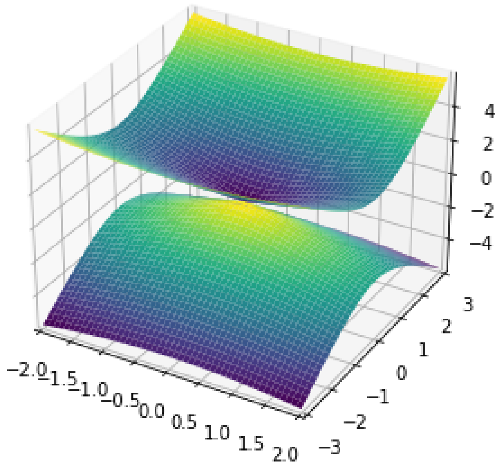
```
b_last = zeros(3, 1)
x2, y2, z2 = symbols('x2 y2 z2')
X4_last = Matrix((x2, y2, z2))
eq4 = Eq((X4_last.T*A4_new*X4_last)[0] + 2*(b_last.T*X4_last)[0] + c_new, 0)
display(eq4)
```

$$-2x_2^2 + 3y_2^2 + 6z_2^2 = 0$$

Получился конус. Чтобы поучить каноническое уравнение, достаточно выразить x_2^2:

```
X = solve(eq4, x2)
display(*X)
plot3d(*X, (y2, -2, 2), (z2, -3, 3))
```

$$-\frac{\sqrt{6y_2^2 + 12z_2^2}}{2}$$
$$\frac{\sqrt{6y_2^2 + 12z_2^2}}{2}$$




```
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x1ecf10bbda0>
```