In [1]:
```
import numpy as np
import sympy
from sympy import S, Symbol, symbols, solve, solveset, integrate, Integral, diff, plot_parametric, plot_implicit, latex, plot
from sympy import sin as Sin
from sympy import cos as Cos
from sympy import pi as Pi
import matplotlib.pyplot as plt
```

Занятие 12

Математический анализ

Применение интегралов для вычисления объема тела вращения

Пусть тело ограничено поверхностью, образованной вращением графика функции $f(x)$ вокруг оси OX.

Объем тела вращения вокруг оси OX

$$V_{OX} = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$$

Пример 1

Вычислить объем тела вращения вокруг OX фигуры, образованной параболой $y = kx - x^2$, $k > 0$ и осью OX.

In [2]:
```
k = Symbol('k', positive=True)
x = Symbol('x')
y = k*x - x**2
roots = solveset(y, x, domain=S.Reals)
a = min(roots)
b = max(roots)
V_OX = Pi*Integral(y**2, (x, a, b))
display(sympy.Eq(V_OX, V_OX.doit()))
```

$$\pi \int\limits_0^k \left(kx - x^2\right)^2 dx = \frac{\pi k^5}{30}$$

Объем тела вращения, ограниченного параметрически заданной кривой

Пусть тело ограничено кривой, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b]$$

тогда объем тела можно вычислить по формуле

$$V_{OX} = \pi \int\limits_a^b \psi^2(t) \frac{d\phi(t)}{dt}\,dt.$$

Пример 2.

Вычислить объем эллипсоида, получающегося вращением вокруг OX эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Используем параметрические уравнения эллипса:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

Заметим, что $\frac{d(a\cos t)}{dt} = -a\sin t\,dt$, а верхняя дуга эллипса получается при t от 0 до π, получим формулу для объема:

$$V_{OX} = -a\pi \int\limits_0^\pi (b\sin t)^2 \sin t\,dt = -ab^2\pi \int\limits_0^\pi \sin^3 t\,dt$$

In [3]:
```
a, b = symbols('a b', positive=True)
t = Symbol('t')
x = a*Cos(t)
y = b*Sin(t)
V_OX = Pi*Integral(y**2*x.diff(t), (t, Pi, 0))
display(sympy.Eq(V_OX, V_OX.doit()))
```

$$\pi \int\limits_\pi^0 \left(-ab^2 \sin^3(t)\right) dt = \frac{4\pi a b^2}{3}$$

Объем тела вращения в полярной системе координат.

Объем тела, полученного при вращении сектора, ограниченного дугой кривой $r = F(\phi)$ и двумя полярными радиусами $\phi = \alpha$, $\phi = \beta$, вокруг полярной оси:

$$V_p = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin\phi\,d\phi.$$

По этой формуле можно вычислять объем тела вращения вокруг полярной оси фигуры, ограниченной замкнутой кривой, заданной в полярных координатах.

Пример 3.

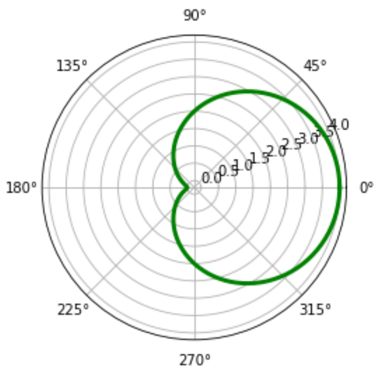
Найти объем тела, которое получается вращением кардиоиды $r = a(1 + \cos\phi)$ вокруг полярной оси. Вначале построим график кардиоиды в полярной системе координат. В sympy нет инструмента для построения таких графиков непосредственно, можно воспользоваться plot_parametric, замечая, что

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases},$$

но можно воспользоваться функцией polar из matplotlib.pyplot, передавая linspace значений угла ϕ и функцию $r = F(\phi)$, а нашем случае $r = a(1 + \cos\phi)$.

In [4]:
```
Phi = np.linspace(0, 2*np.pi, 256)
R = 2*(1 + np.cos(Phi))
plt.polar(Phi, R, color='green', lw=3)
```

Out[4]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x230ee0916a0>]
```



Верхняя дуга кардиоиды соответствует интервалу $[0, \pi]$ значений угла ϕ, поэтому пределы интегрирования будут 0 и π

In [5]:
```
phi, a = symbols('phi a')
r = a*(1 + Cos(phi))
V_p = S(2)/3*Pi*Integral(r**3*Sin(phi), (phi, 0, Pi))
display(sympy.Eq(V_p, V_p.doit()))
```

$$\frac{2\pi \int\limits_0^{\pi} a^3 (\cos(\phi) + 1)^3 \sin(\phi)\, d\phi}{3} = \frac{8\pi a^3}{3}$$

Объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, $f_1(x) \le f_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, вокруг оси OX

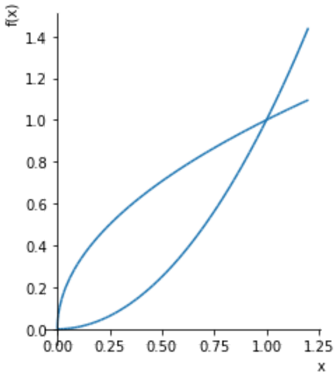
$$V_{OX} = \pi \int\limits_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))\, dx.$$

Пример 4.

Вычислить объем тела, получающегося вращением вокруг OX фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Вначале изобразим на графике обе кривые и найдем пределы инетгрирования, решая уравнение:

In [17]:
```python
x = Symbol('x')
y1 = x**2
y2 = x**S.Half
plot(y1, y2, (x, 0, 1.2), aspect_ratio=(1, 1))
roots = solve(sympy.Eq(y1, y2))
a = min(roots)
b = max(roots)
print(a, b)
```




```
0 1
```

Объем тела вращения получится как разность объемов тел, полученных вращением каджой функции отдельно, интегрирование ведется от 0 до 1. Воспользуемся линейностью интеграла:

In [7]:
```python
V_OX = Pi*Integral(y2**2-y1**2, (x, a, b))
display(sympy.Eq(V_OX, V_OX.doit()))
```

$$\pi \int\limits_0^1 \left(-x^4 + x\right)\, dx = \frac{3\pi}{10}$$

Объем тела, получающегося вращением вокруг OY.

Случай 1.

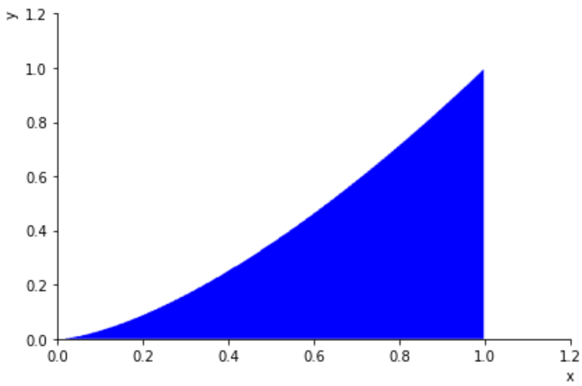
Пусть тело ограничено поверхностью, полученной при вращении вокруг оси OY фигуры, ограниченной графиком $f(x)$ при x от a до b и прямыми $x = a$ и $x = b$. Этот объем вычисляется по формуле

$$V_{OY} = 2\pi \int\limits_a^b x f(x)\, dx$$

Пример 5.

Вычислить объем тела, получающегося вращением вокруг OY фигуры, ограниченной полукубической параболой $y^2 = x^3$, осью OX и прямой $x = 1$. Вначале построим график фигуры, которую вращают около оси OY.

In [19]:
```python
x, y = symbols('x y')
plot_implicit(sympy.And(y**2 < x**3, x < 1), (x, 0, 1.2), (y, 0, 1.2))
```



Out[19]:
```
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x230ef8959e8>
```

In [16]:
```python
y1 = x**(S(3)/2)
V_OY = 2*Pi*Integral(x*y1, (x, 0, 1))
display(sympy.Eq(V_OY, V_OY.doit()))
```

$$2\pi \int\limits_0^1 x^{\frac{5}{2}}\, dx = \frac{4\pi}{7}$$

Случай 2.

Пусть тело ограничено поверхностью, полученной при вращении вокруг оси OY фигуры, ограниченной графиком $f(x)$ и прямыми $y = c$ и $y = d$. Этот объем вычисляется по формуле

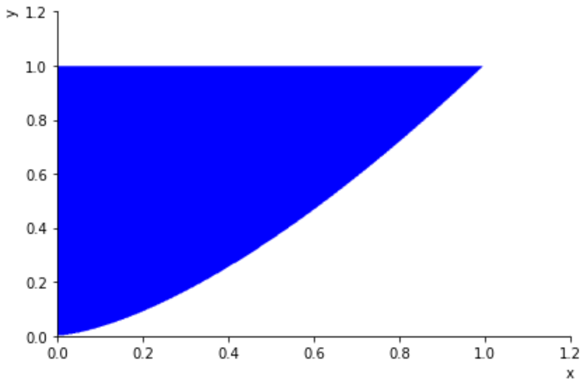
$$V_{OY} = \pi \int_c^d x^2(y)\, dy$$

Пример 6.

Вычислить объем тела, получающегося вращением вокруг OY фигуры, ограниченной полукубической параболой $y^2 = x^3$, осью OY и прямой $y = 1$.

Изобразим на графике фигуру, вращающуюся около оси OY в примере 5

In [21]:
```
x, y = symbols('x y')
plot_implicit(sympy.And(y**2 > x**3, y < 1), (x, 0, 1.2), (y, 0, 1.2))
```



Out[21]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x230efc45ac8>

In [11]:
```
x = y**(S(2)/3)
V_OY = Pi*Integral(x**2, (y, 0, 1))
display(sympy.Eq(V_OY, V_OY.doit()))
```

$$\pi \int_0^1 y^{\frac{4}{3}}\, dy = \frac{3\pi}{7}$$

Объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, $f_1(x) \le f_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, вокруг оси OY

$$V_{OY} = 2\pi \int_a^b x(f_2(x) - f_1(x))\, dx.$$

Пример 7.

Вычислить объем тела, получающегося вращением вокруг OY фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ (см. Пример 4).

В силу симметрии вращаемой фигуры относительно биссектрисы первой координатной четверти результат будет такой же, как в Примере 4.

In [13]:
```
x = Symbol('x')
y1 = x**2
y2 = x**S.Half
V_OY = 2*Pi*Integral(x*(y2 - y1), (x, 0, 1))
display(sympy.Eq(V_OY, V_OY.doit()))
```

$$2\pi \int_0^1 x\left(\sqrt{x} - x^2\right)\, dx = \frac{3\pi}{10}$$

Вычисление объема тела вращения по известным поперечным сечениям.

Пусть $S = S(x)$ - площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к некоторой прямой (которую принимаем за ось OX), в точке с абсциссой x, то объем этого тела равен

$$V = \int_{x_1}^{x_2} S(x)\, dx,$$

где x_1 и x_2 - абсциссы крайних сечений тела.

Пример 8.

Определить объем клина, отсеченного от круглого цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания и наклоненной к основанию под углом α. Радиус основания равен R.

Примем за ось OX диаметр основания, по которому секущая плоскость пересекает основание, и за ось OY диаметр основания, ему перпендикулярный. Уравнение окружности основания будет $x^2 + y^2 = R^2$. Площадь сечения ABC, отстоящего на расстоянии x от начала координат O, равна

$$S(x) = S(ABC) = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}y^2 \text{tg}\alpha.$$

Учтем, что $y^2 = R^2 - x^2$. Абсциссы крайних точек сечений тела в нашем случае $-R$ и R.

In [12]:
```
x, alpha, R = symbols('x, alpha, R')
y2 = R**2 - x**2
(sympy.tan(alpha)*y2/2).integrate((x, -R, R))
```

Out[12]:

$$\frac{2R^3 \tan(\alpha)}{3}$$