Tinkoff Generation 2019-2020. A'. Ростов-на-Дону.

Найти для каждой задачи как можно более эффективное решение (в смысле асимптотики от n) и пояснить, почему алгоритм имеет именно такую сложность.

Задача 1. Дан массив из n элементов и n запросов $q(l, r) = a_l \ \& \ a_{l+1} \ \& \ \dots \ \& \ a_r$. Ответить на запросы в online.

Задача 2. Пусть расстояние между перестановками A и B – это наименьшее k, при котором найдутся k транспозиций соседних элементов q_i таких, что выполняется $B = q_k \circ q_{k-1} \circ \ldots \circ q_1 \circ A$. Найти расстояние между перестановками A и B множества из n элементов.

Задача 3. Дана шоколадка размера $n \times n$. Одна из плиток шоколадки покрашена в красный. Двое игроков по очереди разламывают части шоколадки вдоль разрезов (обе части шоколадки остаются в игре). Побеждает тот, кому удается отломить красную плитку. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 4. Дан неориентированный граф с числами в вершинах. Количество вершин и ребер в нем не превосходит n. Есть два вида запросов: $update(v, x)$ – поменять число в вершине v на x, $get()$ – получить количество ребер, вершины которых содержат различные числа. Обработать n запросов.

Задача 5. Будем считать расстояние между точками плоскости как $d(A, B) = |A_x - B_x| + |A_y - B_y|$. Дано n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, точка O, а также числа d_0 и d_1. Узнать, существует ли точка X такая, что $d(X, O) \leq d_0$ и $d(X, A_i) \geq d_1$ для каждого i.

Задача 6. Дан неориентированный граф на n вершинах. Каждая его вершина имеет вес. Найти максимальную по весу клику.
Задача 6'. Теперь некоторые вершины графа окрашены в красный цвет. Найти максимальную по весу клику, содержащую не более двух красных вершин.

Задача 7. Дано взвешенное дерево на n вершинах $v[1], v[2], \ldots, v[n]$. Найти перестановку P n-элементного множества такую, что сумма $\sum_{i=1}^{n} d(v[i], v[P_i])$ максимальна.

Задача 8. Дан массив длины n и число $k \leq n$. Разбить массив на k отрезков $L_1, L_2, \ldots, L_k$ так, чтобы $\sum_{i=1}^{k} |L_i|$ была максимальна. $|L_i|$ – количество различных элементов на отрезке L_i.

Задача 9. Дан массив длины n и n запросов $p(l, r)$ ценностей отрезков. Ценность отрезка $p(l, r)$ задается формулой

$$p(l, r) = \sum_{l \leq i < j \leq r} (a_i - a_j)^2,$$

где a_i – i-тый элемент массива. Ответить на запросы в offline.
Задача 9'. Теперь есть два вида запросов – $p(l, r)$ и $s(l, r, x)$. Запрос $s(l, r, x)$ прибавляет x ко всем элементам отрезка $[l, \ r]$.

Задача 10. Дано несколько двоичных слов M_i суммарной длины не больше $2n$. Найти количество двоичных строк длины n, не содержащих ни одно M_i в качестве подстроки.

Вопросы

Вопрос 1. Сколько существует способов усадить k детей на n мест, идущих подряд, так, чтобы между любыми двумя детьми имелось хотя бы два свободных места?

Вопрос 2. Кто выигрывает в игре НИМ на кучках размерами 10, 11, 12?

Вопрос 3. Найти математическое ожидание числа инверсий случайной перестановки из n элементов.

Вопрос 4. Сумма Минковского для квадрата и равностороннего треугольника — выпуклый многоугольник. Сколько в нем вершин? Считается, что одна из сторон каждой из фигур параллельна оси Ox.

Вопрос 5. Дан набор полуплоскостей в формате $ax + by \geq 0$. Найдите хотя бы одну точку, принадлежащую пересечению полуплоскостей

- $a = 20, b = 19$
- $a = 20, b = 20$
- $a = 239, b = 1540$
- $a = -10, b = -10$
- $a = -10, b = 10$
- $a = 1, b = 100000$

Вопрос 6. Обозначим за $f(n)$ сумму всех простых делителей числа n. Среди всех делителей числа $A = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^{13} \cdot 11^{21} \cdot 13^{12}$. выбирается один делитель d случайно и равновероятно среди всех его делителей. Найдите математическое ожидание $f(d)$.