

VISIÓN COMPUTACIONAL.

5.2 - Análisis de Frecuencia

5. Detección de Características II.

- Concepto y uso de correlación.
- Casa de patrones o plantillas.
- **Análisis de frecuencia.**
- Ondeletas.
- Análisis de texturas.

Análisis de Frecuencia.

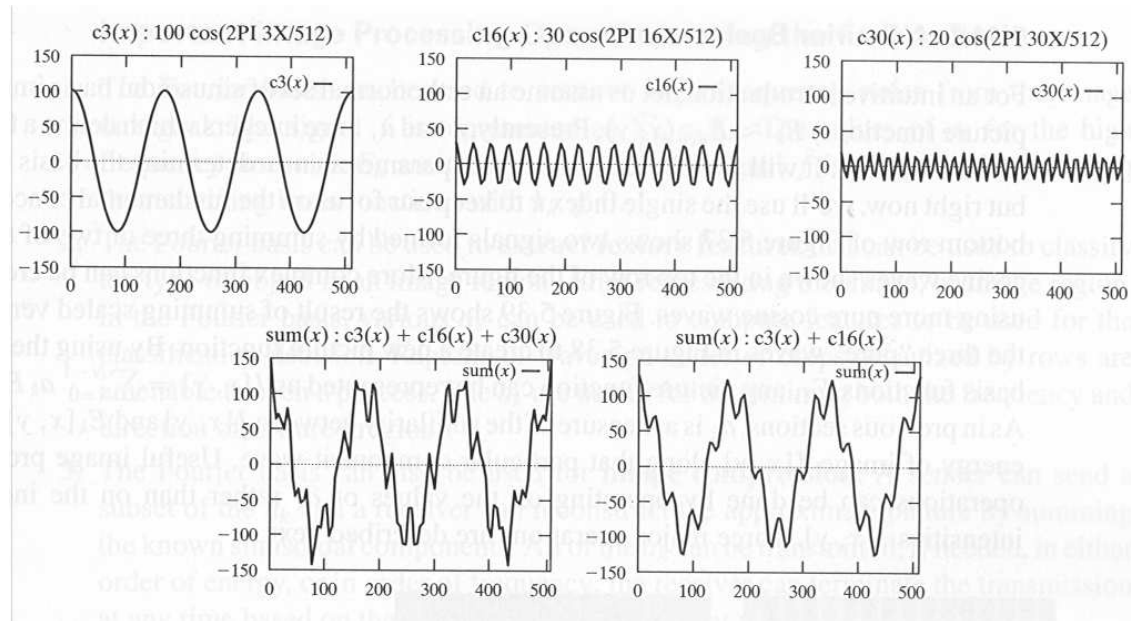
La transformada de Fourier es una herramienta que nos permite pasar del *dominio espacial* al *dominio de la frecuencia* en donde podemos aplicar diferentes operaciones que nos den información particular una vez que volvamos al dominio espacial mediante la transformada inversa de Fourier.

Algunas de las operaciones que se realizan en el dominio de la frecuencia son:

- Eliminar altas frecuencias (como ruido).
- Extraer características de texturas.
- Compresión y transmisión de imágenes.

Transformada de Fourier.

El matemático Fourier imaginó la superficie del océano como la suma de ondas sinusoidales. Las grandes ondas causadas por la marea o por los barcos (bajas frecuencias) tenían largas longitudes de onda, mientras que las pequeñas ondas causadas por el viento u objetos arrojados (altas frecuencias) tenían pequeñas longitudes de onda.



La teoría de Fourier muestra cómo la mayoría de las funciones reales pueden ser representadas en términos de sinusoidales, la energía a lo largo de estos vectores puede ser interpretada en términos de la estructura que representa la función.

Transformada de Fourier.

Sea $f(x)$ una función continua de variable real x , la *transformada de Fourier* $F\{f(x)\}$, se define como:

$$F(f(x)) = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j2\pi ux) \partial x$$

donde $j = \sqrt{-1}$

Dada una $F(u)$, se puede encontrar $f(x)$ empleando la *transformada inversa de Fourier* :

$$F^{-1}(F(u)) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp(j2\pi ux) \partial u$$

Estas ecuaciones se denominan *par de transformadas de Fourier*, y existen siempre que $f(x)$ sea continua e integrable y $F(u)$ sea integrable.

Transformada de Fourier.

La transformada de Fourier de una función real es, en general, compleja, es decir:

$$F(u) = |F(u)|e^{j\phi(u)}$$

donde

$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2}$, (espectro de Fourier de $f(x)$),

$\phi(u) = \arctan \left[\frac{I(u)}{R(u)} \right]$ (ángulo de fase o espectro de fase)

y $P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$ (espectro de potencia o densidad espectral).

A u se le llama *variable de frecuencia*.

Transformada de Fourier en 2D.

Si $f(x, y)$ es continua e integrable y $F(u, v)$ es integrable, entonces existe el siguiente par de transformadas de Fourier:

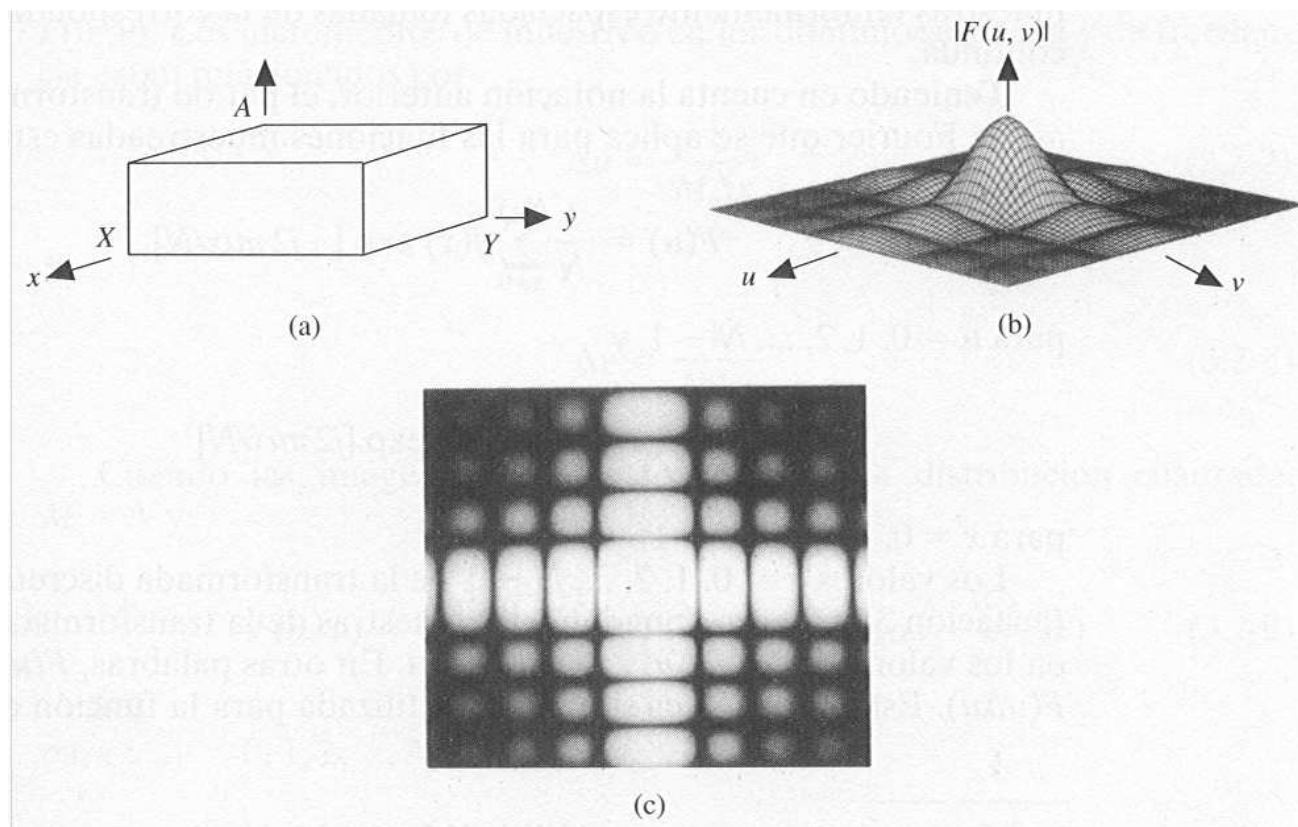
$$F(f(x, y)) = F(u, v) = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] \partial x \partial y$$

y

$$F^{-1}(F(u, v)) = f(x, y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy)] \partial u \partial v$$

donde u y v son las variables de frecuencia, y el espectro de Fourier, la fase y el espectro de potencia se calculan de manera análoga que en 1D.

Transformada de Fourier en 2D.



Transformada discreta de Fourier en 2D.

El muestreo de una función continua está ahora en una cuadrícula bidimensional, con divisiones de ancho Δx y Δy en los ejes x y y respectivamente. La función discreta $f(x, y)$ representa muestras de la función $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ para $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ e $y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Lo mismo cumple para $F(u, v)$. Los incrementos de muestreo en los dominios espacial y de frecuencia están relacionados por:

$$\Delta u = \frac{1}{M \Delta x}$$

y

$$\Delta v = \frac{1}{N \Delta y}$$

Transformada discreta de Fourier en 2D.

Cuando las imágenes se muestrean con una distribución cuadrada, $M = N$:

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)/N]$$

para $u, v = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, y

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy)/N]$$

para $x, y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

El espectro de Fourier, la fase y el espectro de potencia se calcula de manera análoga que en el caso continuo.

Transformada discreta de Fourier en 2D.

Cuando las imágenes se muestrean con una distribución no cuadrada, $M \neq N$:

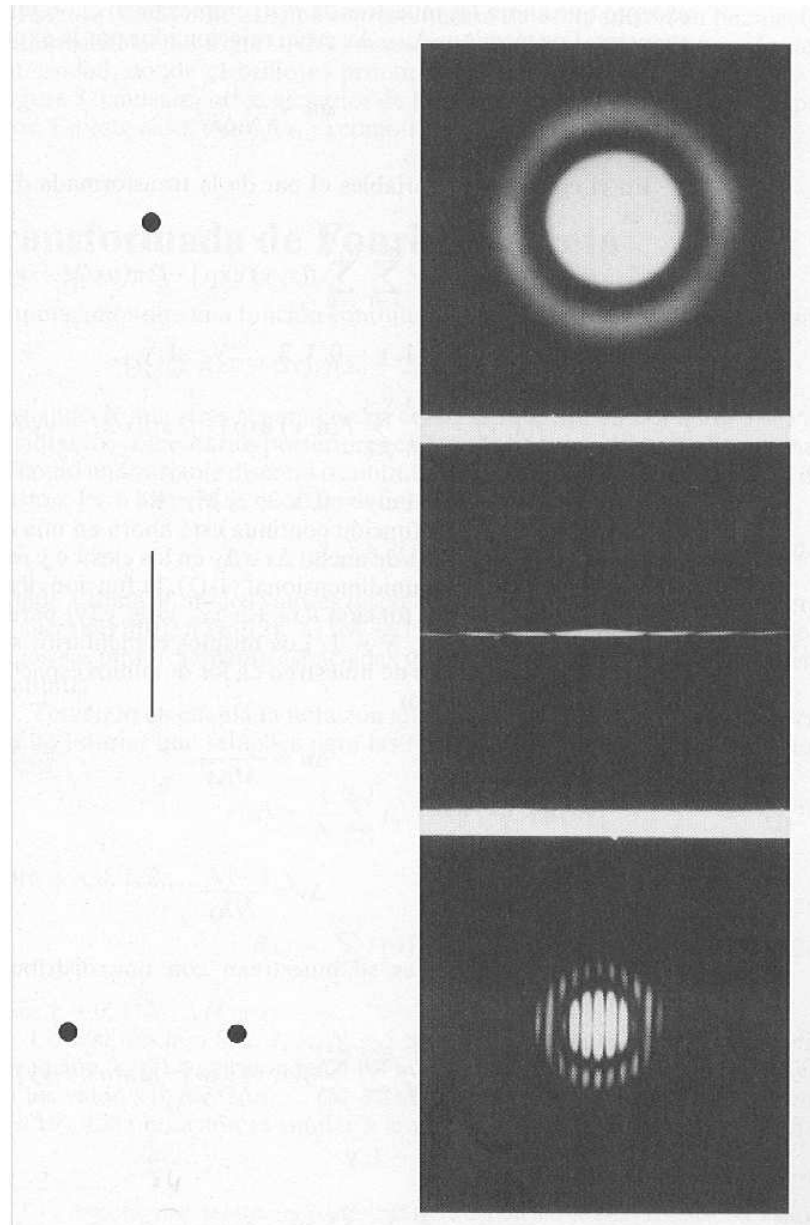
$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux/M + vy/N)]$$

para $u = 0, 1, 2, \dots, M - 1$, $v = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, y

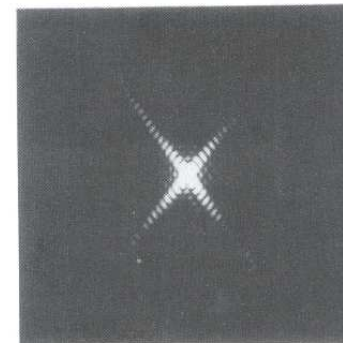
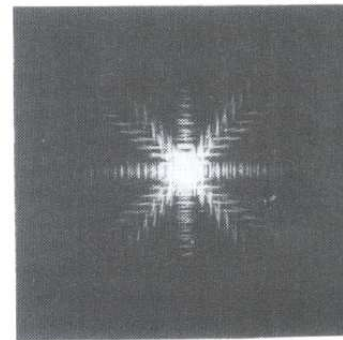
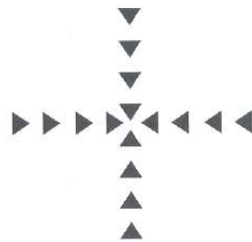
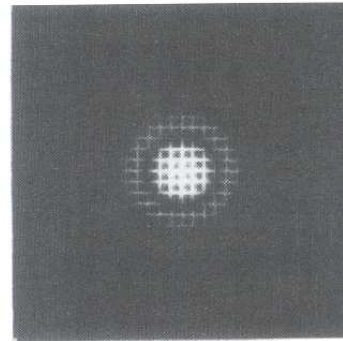
$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp[j2\pi(ux/M + vy/N)]$$

para $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$, $y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

Ejemplos.

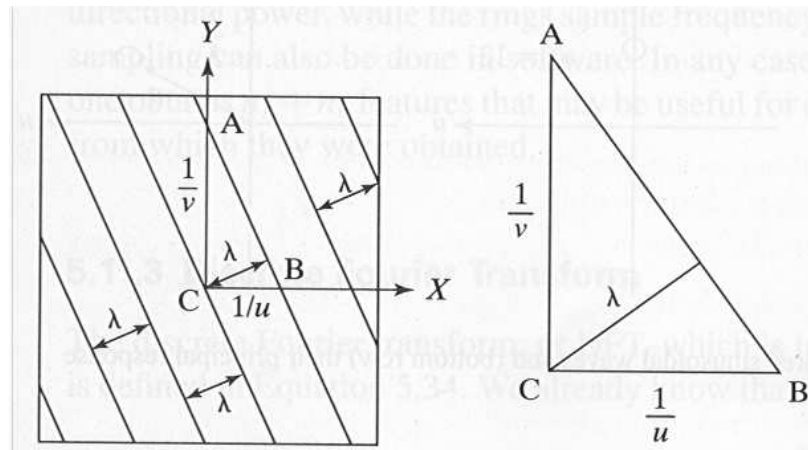


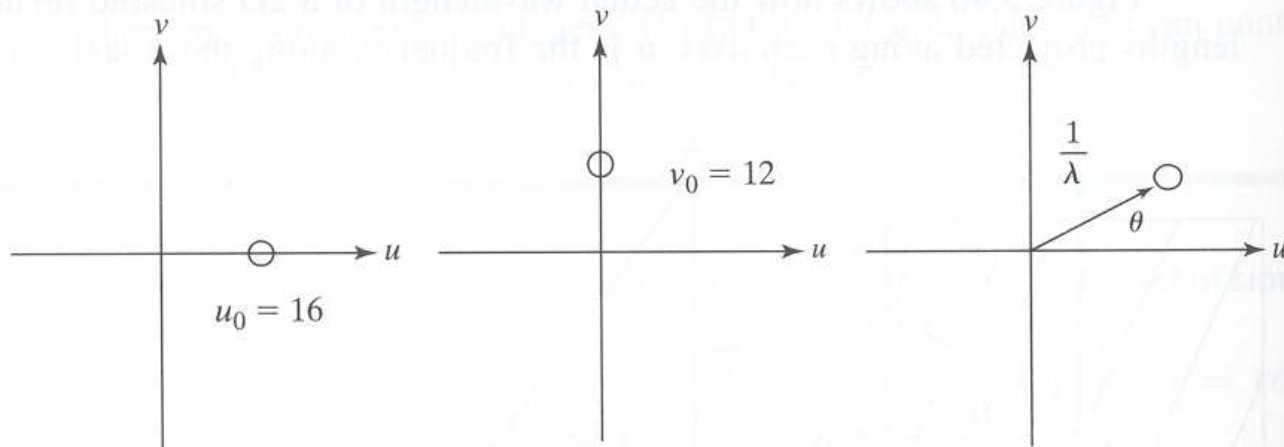
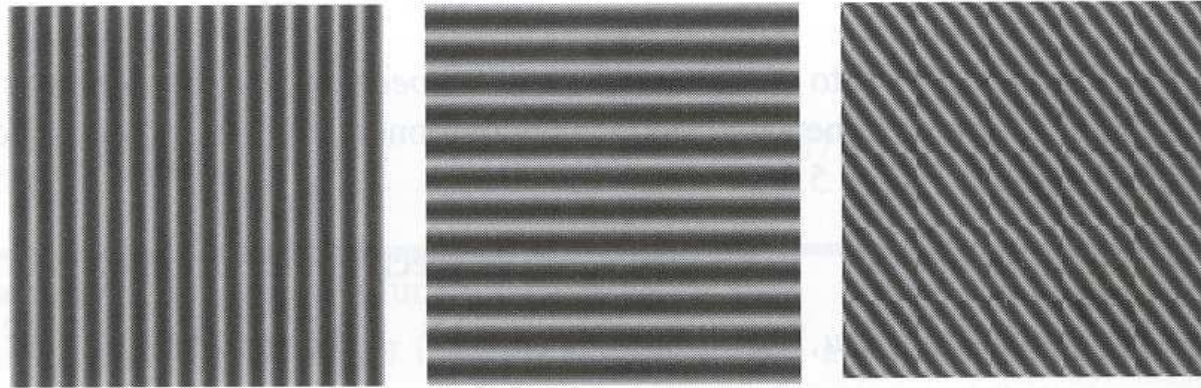
Ejemplos.



Transformada discreta de Fourier en 2D.

Sean las siguientes imágenes que representan funciones sinusoidales de diferentes frecuencias y orientaciones:



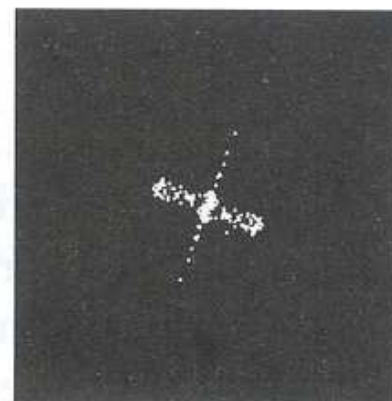
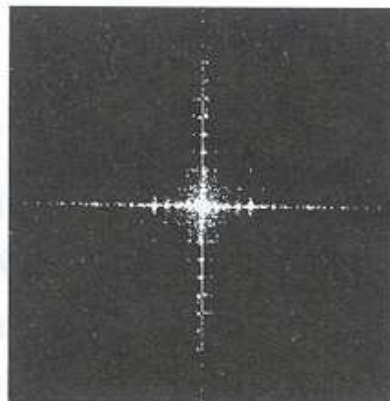
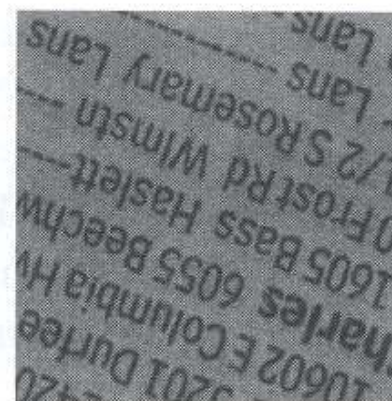


$$\lambda = \sqrt{(1/u)^2 + (1/v)^2} = (1/u)(1/v)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

Transformada discreta de Fourier en 2D.

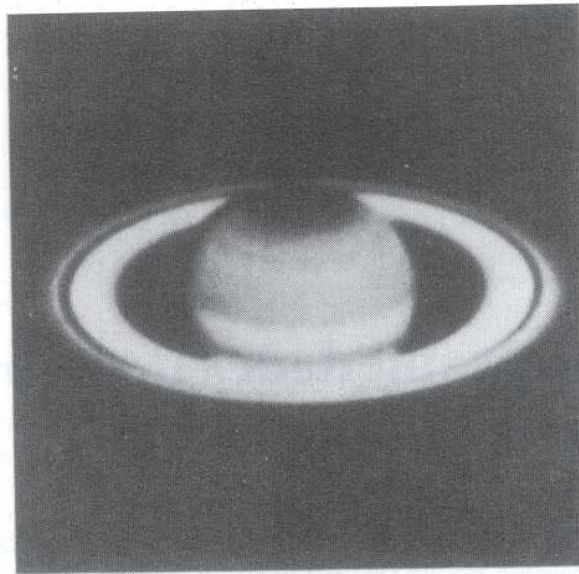
Sean las siguientes imágenes reales:



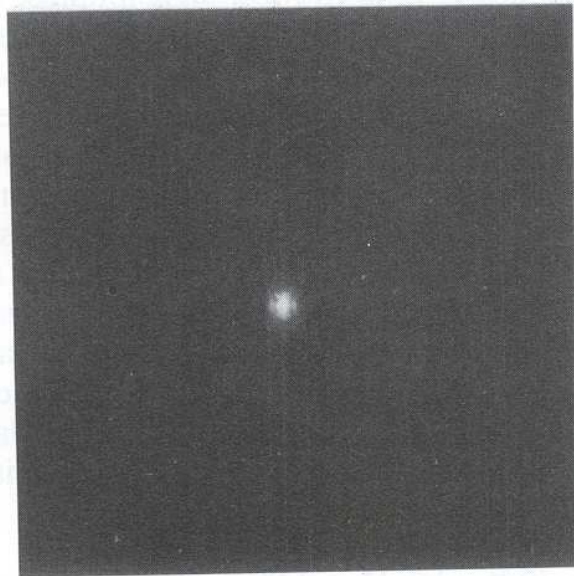
Transformada discreta de Fourier en 2D.

Es importante notar que el espectro de Fourier no debe interpretarse como una imagen, sino como el desplegado en 2D de la potencia (o amplitud) de la imagen original respecto a los parámetros de frecuencia u y v .

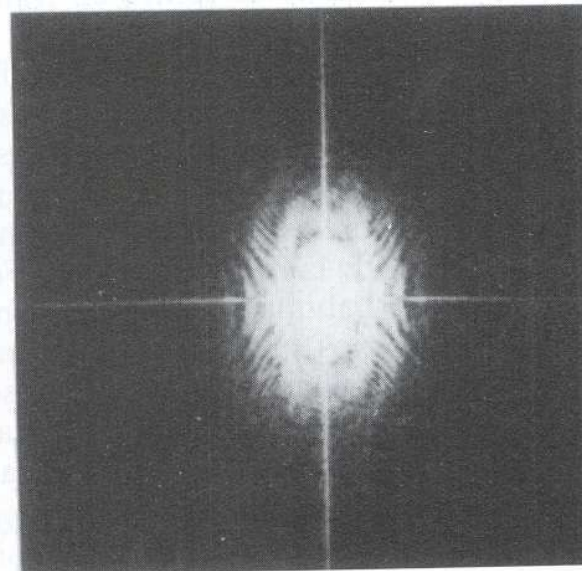
El rango dinamico de espectro de Fourier es generalmente muy alto para ser representado en una pantalla, por lo que generalmente se grafica la expresion: $\log[1 + |F(u, v)|]$



(a)



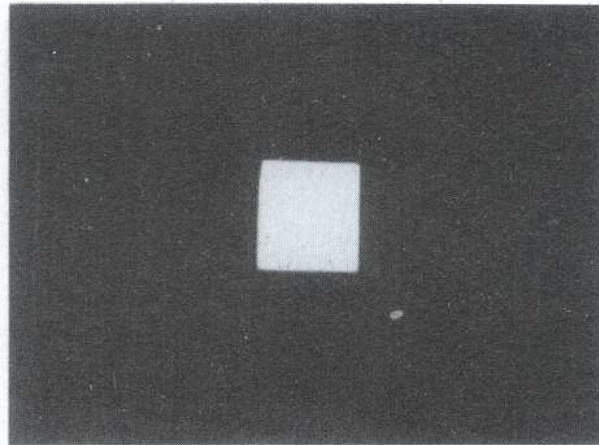
(b)



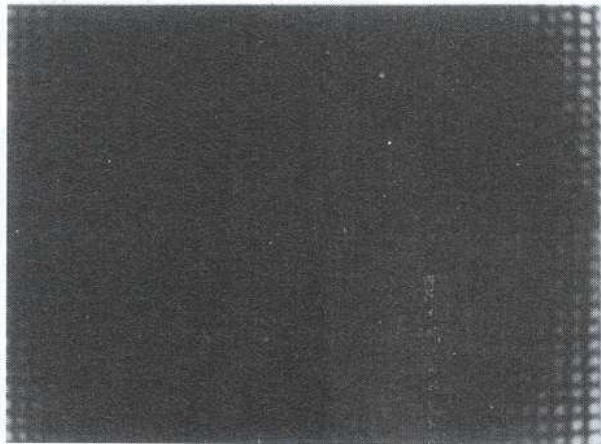
(c)

Transformada discreta de Fourier en 2D.

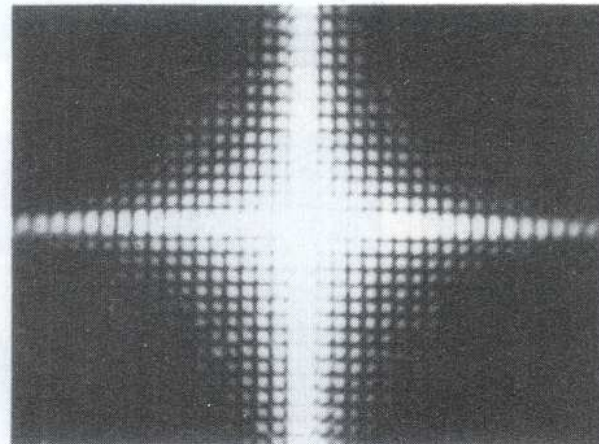
El espectro de Fourier además de ser una función compleja, es periódica y simétrica, por lo que a la hora de desplegarlo generalmente el origen se encuentra arriba a la izquierda con un rango de frecuencias de 2π . La representación gráfica se realiza por convención con el origen al centro, por lo que el rango de frecuencias queda representado de $[-\pi, \pi]$:



(a)



(b)



(c)

Transformada discreta de Fourier en 2D.

Cuando las imágenes se muestrean con una distribución cuadrada, $M = N$:

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)/N]$$

para $u, v = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, y

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy)/N]$$

para $x, y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

El espectro de Fourier, la fase y el espectro de potencia se calcula de manera análoga que en el caso continuo.

Transformada discreta de Fourier en 2D.

Cuando las imágenes se muestrean con una distribución no cuadrada, $M \neq N$:

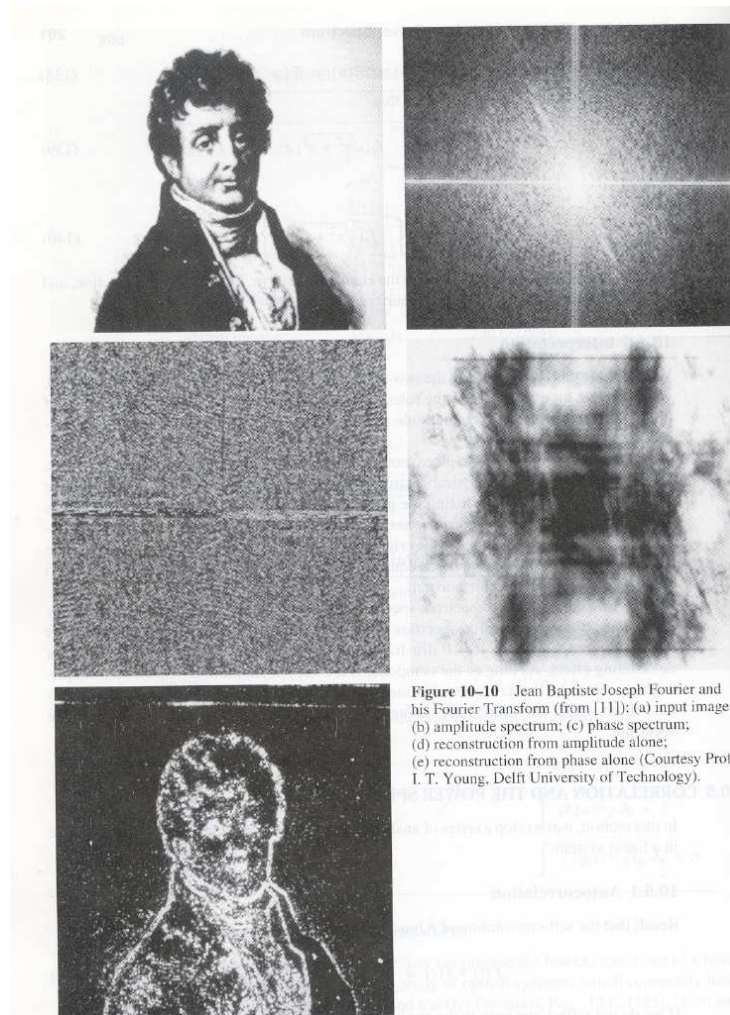
$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux/M + vy/N)]$$

para $u = 0, 1, 2, \dots, M - 1$, $v = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, y

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp[j2\pi(ux/M + vy/N)]$$

para $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$, $y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

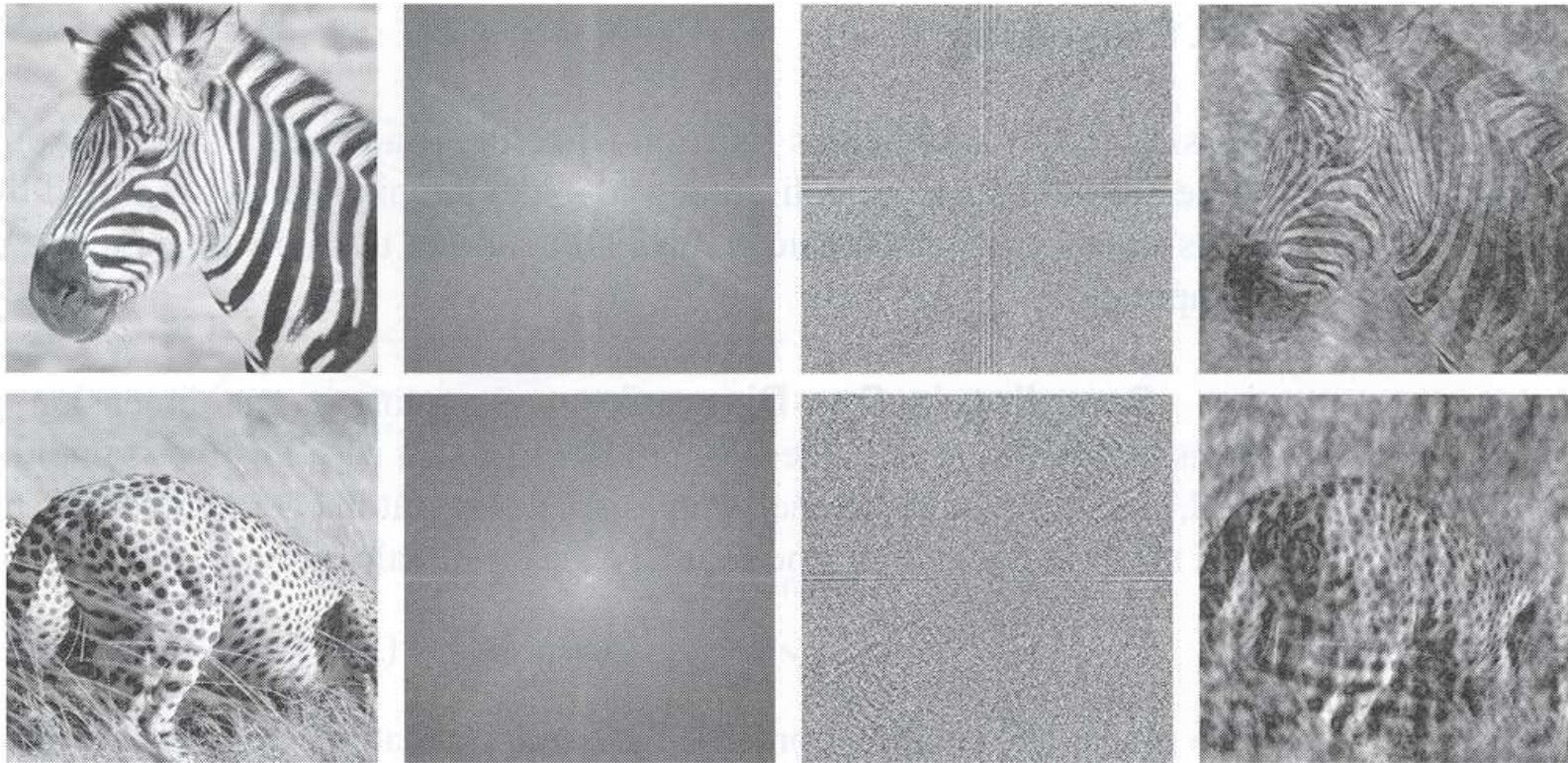
Interpretación.



Espectro de Fourier (amplitud)= cuánto de cada componente sinusoidal está presente en la imagen.

Fase= dónde reside cada componente sinusoidal en la imagen.

Interpretación.



Mientras los componentes se mantengan en posición (fase), su amplitud parece ser menos crítica para la integridad de la imagen. Por esta razón, en la práctica, la mayoría de los filtros afectan sólo la amplitud, no así a la información del espectro.

Propiedad de Separabilidad.

La transformada discreta puede representarse de la forma separable siguiente:

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(x, v) \exp[-j2\pi ux/N]$$

donde

$$F(x, v) = N \left[\sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi vy/N] \right]$$

La funcion bidimensional $F(x, v)$ se obtiene tomando una transformada a lo largo de *cada fila* de $f(x, y)$ y multiplicando el resultado por N . El resultado final, $F(u, v)$, se obtiene entonces aplicando una transformada a lo largo de *cada columna* de $F(x, v)$.

Traslación.

Para el par the transformadas tenemos:

$$f(x, y) \exp[j2\pi(u_0x + v_0y)/N] \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0]$$

y

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) \exp[-j2\pi(ux_0, vy_0)/N]$$

donde:

$$\exp[j2\pi(u_0x + v_0y)/N] = e^{j\pi(x+y)} = (-1)^{x+y}$$

por lo tanto:

$$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - N/2, v - N/2)$$

Periodicidad y simetría conjugada.

La transformada discreta de Fourier y su inversa son funciones *periodicas* de periodo N :

$$F(u, v) = F(u + N, v) = F(u, v + N) = F(u + N, v + N)$$

] Si $f(x, y)$ es real, la transformada de Fourier presenta tambien simetria conjugada:

$$F(u, v) = F^*(-u, -v)$$

o bien,

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)|$$

donde $F^*(u, v)$ es el complejo conjugado de $F(u, v)$.

Rotación.

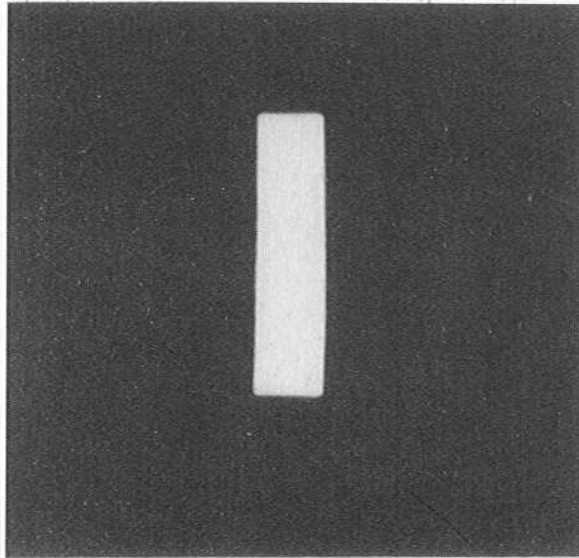
Si introducimos coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad u = \omega \cos \phi, \quad v = \omega \sin \phi$$

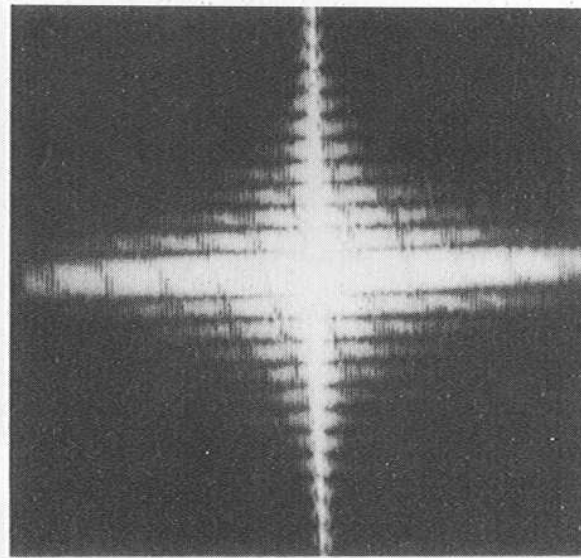
entonces $f(x, y)$ y $F(u, v)$ se escriben como $f(r, \theta)$ y $F(\omega, \phi)$.

La sustitucion directa nos da:

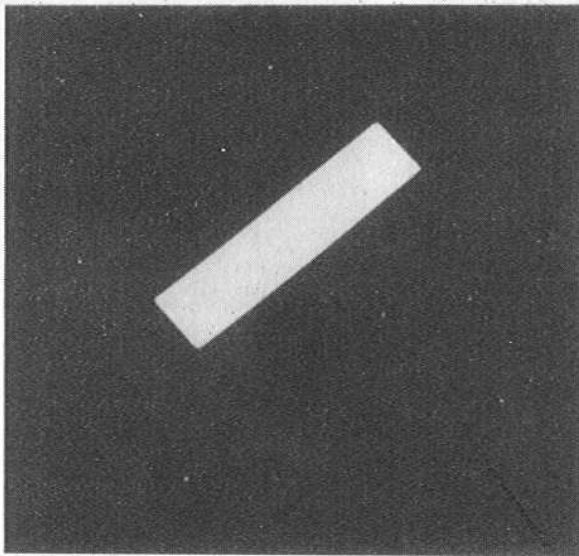
$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \phi + \theta_0)$$



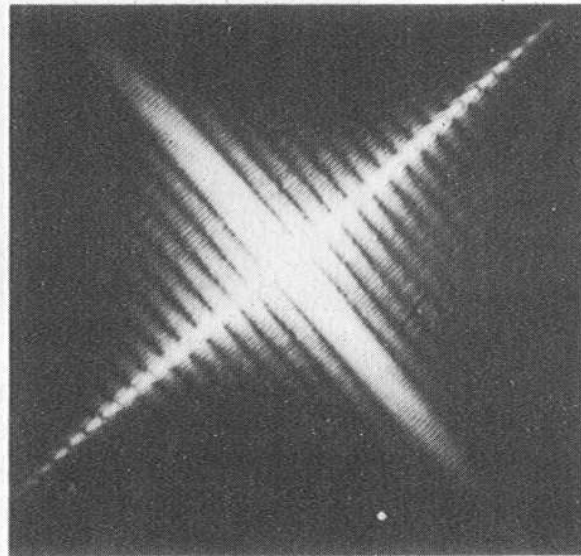
(a)



(b)



(c)



(d)

Distributividad y cambio de escala.

Para el par de transformadas tenemos:

$$F f_1(x, y) + f_2(x, y) = F f_1(x, y) + F f_2(x, y)$$

y en general,

$$F f_1(x, y) \cdot f_2(x, y) \neq F f_1(x, y) \cdot F f_2(x, y)$$

Para dos escalares a y b :

$$a f(x, y) \Leftrightarrow a F(u, v)$$

y

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F(u/a, v/b)$$

Valor Medio.

El valor medio de una función bidimensional es:

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

sustituyendo $v = u = 0$ en la ecuación de transformada discreta:

$$F(0, 0) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

por consiguiente la relación esta dada por:

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N} F(0, 0)$$

Laplaciano.

El laplaciano bidimensional se define como:

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

De la definición de transformada de Fourier tenemos:

$$F \nabla^2 f(x, y) \Leftrightarrow -(2\pi)^2 (u^2 + v^2) F(u, v)$$

Convolución y correlación.

Convolución:

$$f(x, y) \otimes g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)G(u, v)$$

y

$$f(x, y)g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \otimes G(u, v)$$

Correlación:

$$f(x, y) \odot g(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v)G(u, v)$$

y

$$f^*(x, y)g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \odot G(u, v)$$

Transformada Rápida de Fourier (FFT).

El número de multiplicaciones complejas y sumas que se necesitan para implementar la transformada discreta de Fourier es proporcional a N^2 . La descomposición apropiada de esta expresión puede hacer que el número de multiplicaciones y sumas sea proporcional a $N \log_2 N$. El algoritmo que realiza esta operación se conoce como *FFT*.

TAREA. Implementar el algoritmo de FFT directa, así como FFT inversa, y generar el ejemplo visto en clase en la diapositiva que tiene la imagen del señor Fourier.

Filtrado paso bajo.

Los bordes y otras transiciones bruscas (como el ruido) en los niveles de gris de una imagen contribuyen significativamente al contenido en altas frecuencias. Por lo tanto el difuminado (o suavizado) se consigue, en el dominio de la frecuencia, atenuando un rango específico de componentes de alta frecuencia en la transformada de una imagen.

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

donde $F(u, v)$ es la transformada de Fourier de la imagen y $H(u, v)$ es la función de transferencia del filtro.

Filtrado paso bajo ideal.

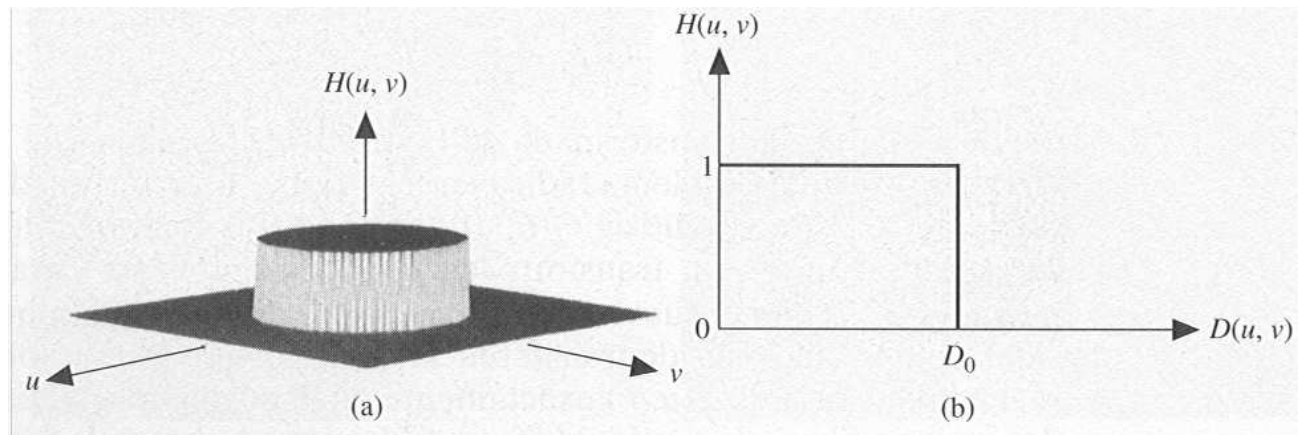
Un filtro paso bajo bidimensional ideal es aquel cuya función de transferencia verifica la relación:

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & D(u, v) \leq D_0 \\ 0, & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

donde D_0 es una cantidad especificada no negativa (llamada frecuencia de corte), y $D(u, v)$ es la distancia desde el punto (u, v) al origen de coordenadas del plano de frecuencias:

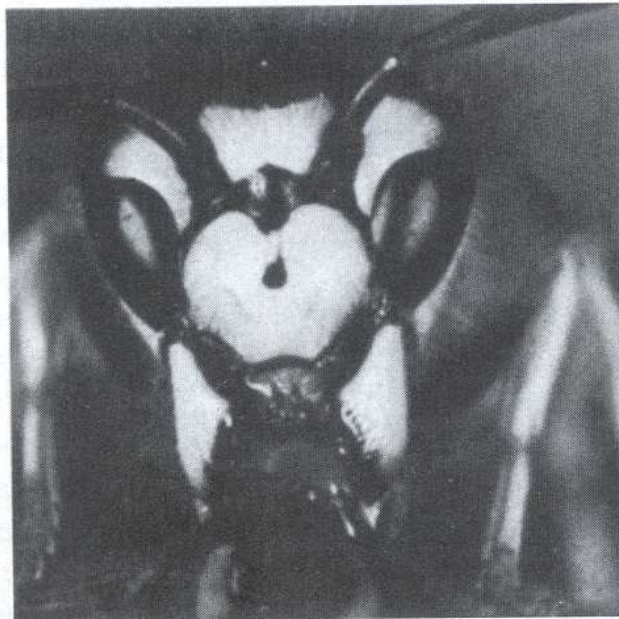
$$D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Filtrado paso bajo ideal.

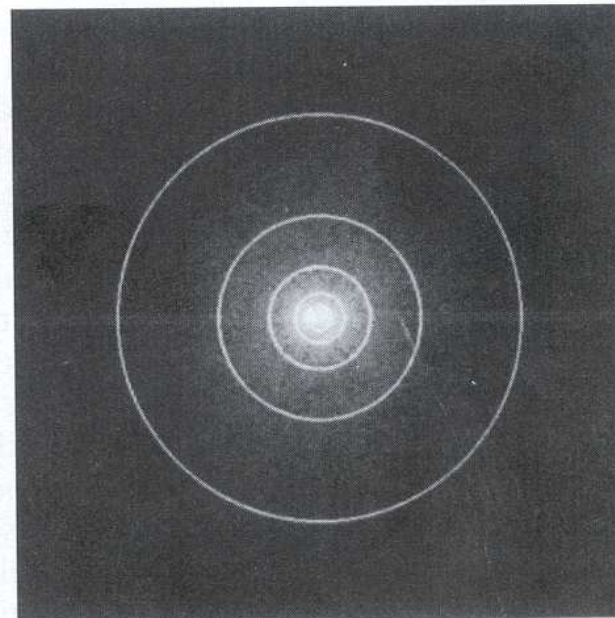


El nombre de filtro *ideal* indica que *todas* las frecuencias dentro de un círculo de radio D_0 pasan sin atenuación, mientras que *todas* las frecuencias fuera de ese círculo quedan atenuadas completamente (filtros con simetría radial alrededor del origen).

Filtrado paso bajo, Ejemplo.



(a)



(b)

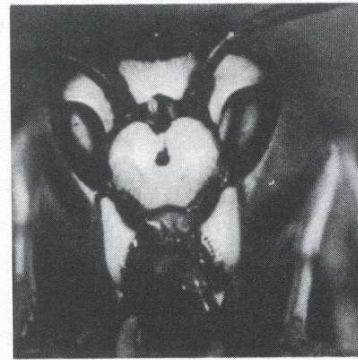
$$P_T = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} P(u, v)$$

$$\beta = 100 * \left[\sum_u \sum_v P(u, v) / P_T \right]$$

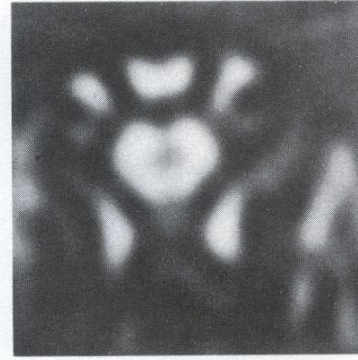
Radios= 8, 18, 43, 78 y 152;

$\beta = 90, 93, 95, 99$ y 99.5

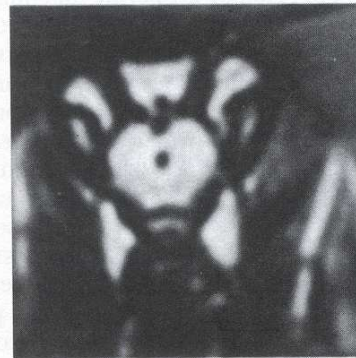
Filtrado paso bajo, Ejemplo.



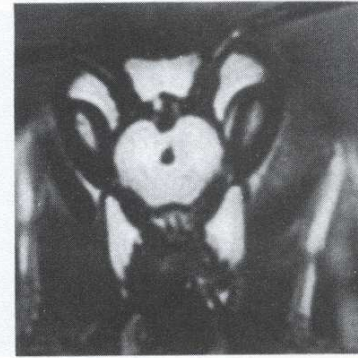
(a)



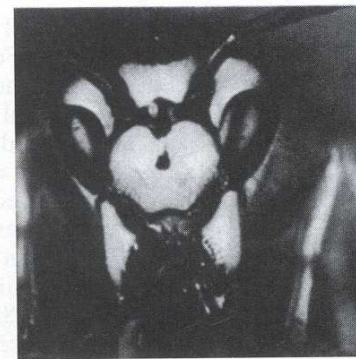
(b)



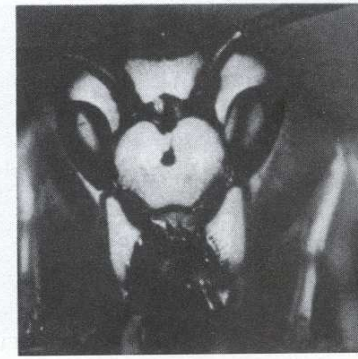
(c)



(d)



(e)

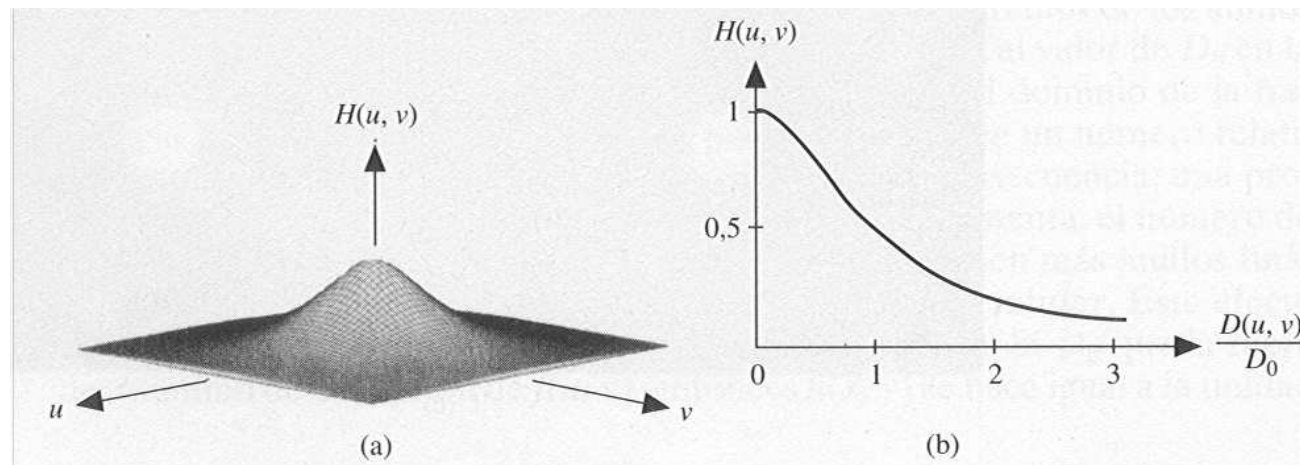


(f)

Filtro de Butterworth.

La función de transferencia del filtro Butterworth paso bajo de orden n , y con frecuencia de corte D_0 , está definido como:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$



Filtro de Butterworth.

La función de transferencia anterior corresponde para $H(u, v) = 0.5$ del valor máximo. Otro valor comunmente utilizado es $\frac{1}{\sqrt{2}}$ que corresponde aprox. 0.7071 del valor máximo:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [\sqrt{2} - 1][D(u, v)/D_0]^{2n}} = \frac{1}{1 + 0,414[D(u, v)/D_0]^{2n}}$$



(a)



(b)



(c)



(d)

Filtrado paso alto.

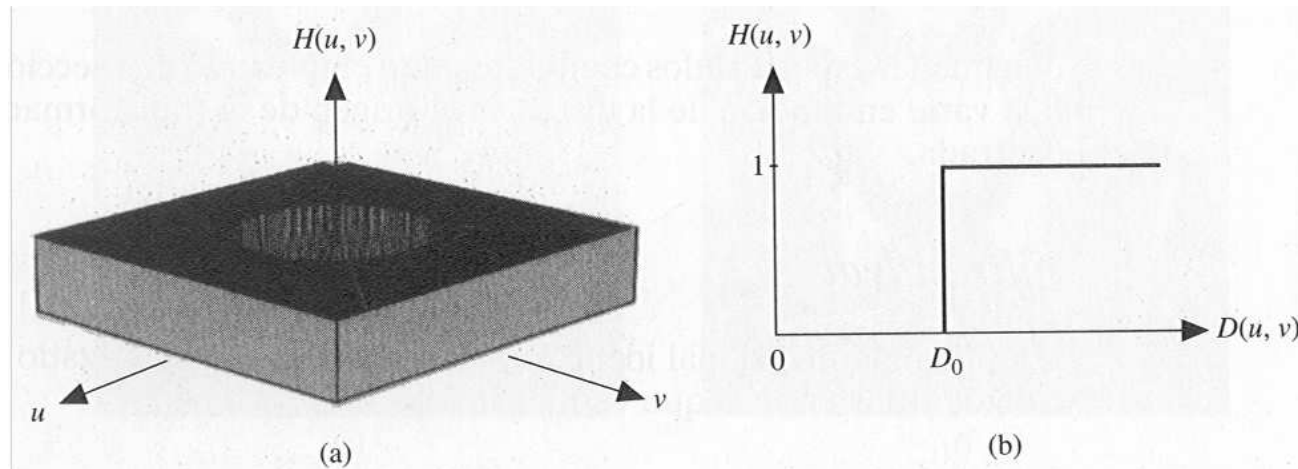
Como operación contraria al difuminado, el realce consiste en dejar pasar las frecuencias altas de la imagen que corresponden generalmente a los cambios bruscos de los niveles de gris como son los bordes. Por lo cual debemos atenuar o eliminar los componentes de bajas frecuencias. Una vez más consideraremos filtros de cambio de fase nulo que tengan simetría radial y que puedan quedar especificados completamente empleando una sección transversal que varíe en función de la distancia del origen de la TF centrada.

Filtrado paso alto ideal.

Un filtro bidimensional ideal de paso alto viene caracterizado por una función de transferencia que verifica la relación:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & D(u, v) \leq D_0 \\ 1, & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

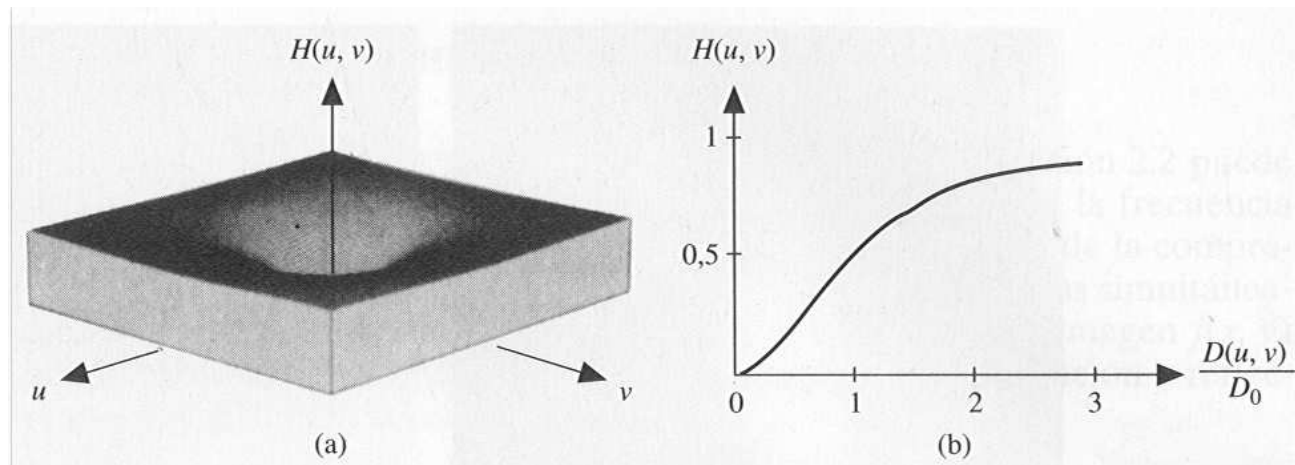
donde D_0 es la frecuencia de corte, y $D(u, v)$ es la distancia desde el punto (u, v) al origen de coordenadas del plano de frecuencias.



Filtro de Butterworth.

La función de transferencia del filtro Butterworth paso alto de orden n y con frecuencia de corte situada a distancia D_0 del origen está definido como:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$$

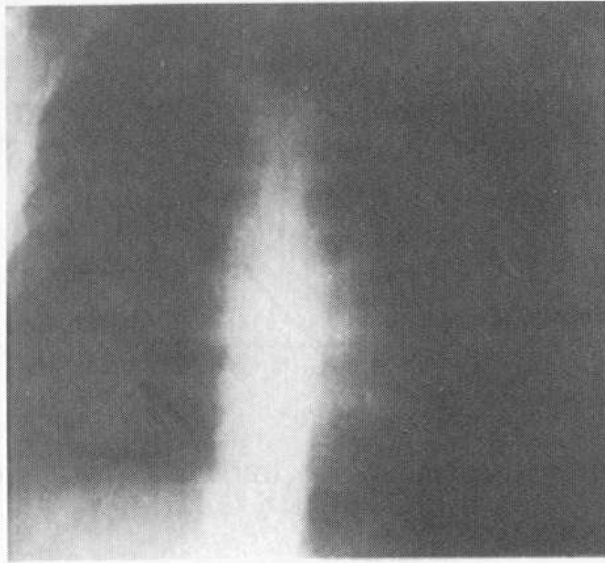


Filtro de Butterworth.

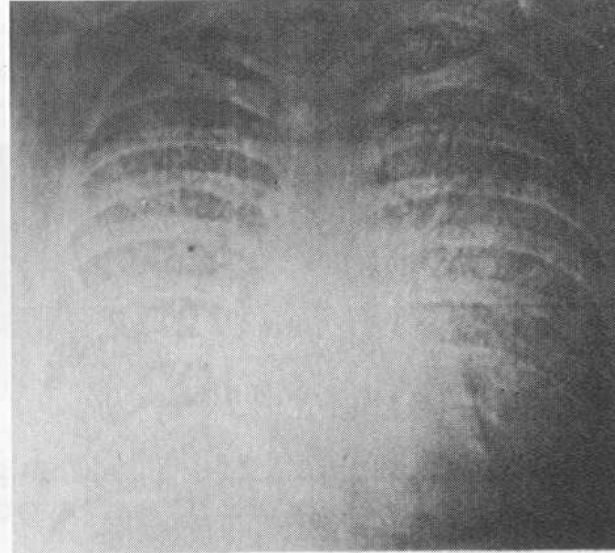
Cuando $D(u, v) = D_0$, $H(u, v)$ está a la mitad de su valor máximo. De manera análoga a el filtro paso bajo, en la práctica se selecciona la ubicación de las frecuencias de corte en los puntos en los que $H(u, v)$ está por debajo de $1/\sqrt{2}$ (0.7071) de su valor máximo:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [\sqrt{2} - 1][D_0/D(u, v)]^{2n}} = \frac{1}{1 + 0,414[D_0/D(u, v)]^{2n}}$$

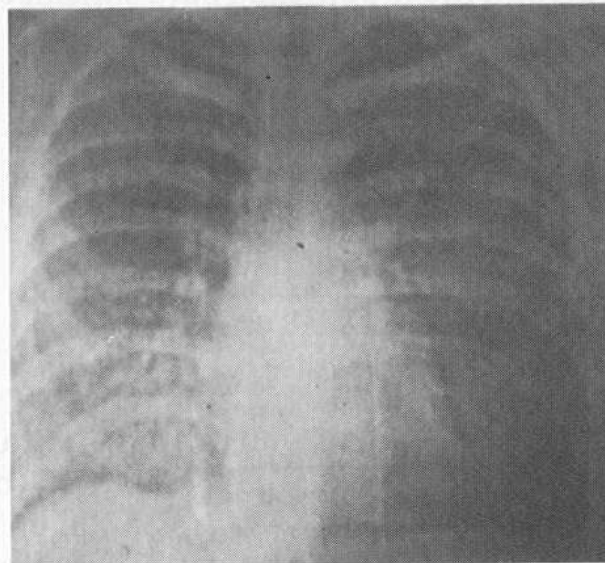
Filtrado paso alto, Ejemplo.



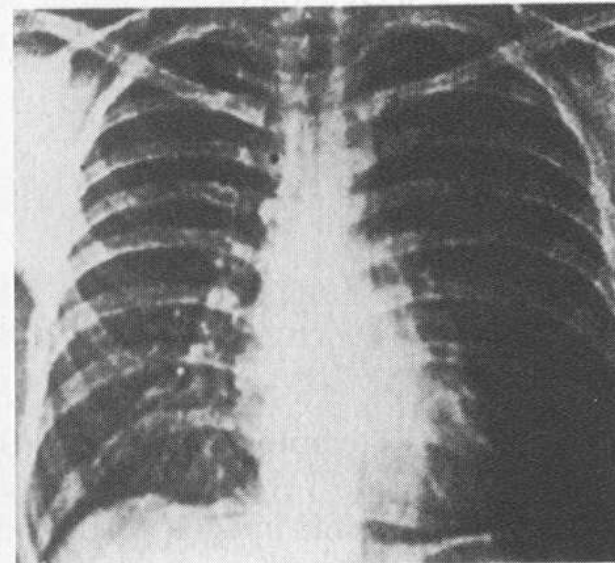
(a)



(b)



(c)



(d)

Referencias

- Gonzalez, RC y Woods, RE *Digital Image Processing*. Addison-Wesley, USA, 1992.
- Forsyth y Ponce. *Computer Vision: A modern approach*. Prentice-Hall, New Jersey, 2003.
- Press, W. et. al. *Numerical Recipes in C*". Second Edition. Cambridge Press. 1995.
- Castleman, K.R. *Digital Image Processing* Prentice-Hall, New Jersey, 1996.

FIN

Por hoy...