Функция $v(x,t)$, очевидно, удовлетворяет однородному уравнению

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{77}$$

и однородным дополнительным условиям

$$\left.\begin{aligned} v(x,0) = 0, \quad v(0,t) = 0,\\ v_t(x,0) = 0; \quad v(l,t) = 0,\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

а также условию 1) теоремы.

Докажем, что функция $v(x,t)$ тождественно равна нулю.

Рассмотрим функцию

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left\{k(v_x)^2 + \rho(v_x)^2\right\} dx \tag{79}$$

и покажем, что она не зависит от t. Физический смысл функции $E(t)$ очевиден: это полная энергия струны в момент времени t. Продифференцируем $E(t)$ по t, выполняя при этом дифференцирование под знаком интеграла [1])

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int\limits_0^l (kv_x v_{xt} + \rho v_t v_{tt})\, dx.$$

Интегрируя по частям первое слагаемое правой части, будем иметь:

$$\int\limits_0^l kv_x v_{xt} dx = [kv_x v_t]_0^l - \int\limits_0^l v_t (kv_x)_x dx. \tag{80}$$

Подстановка обращается в нуль в силу граничных условий (из $v(0,t) = 0$ следует $v_t(0,t) = 0$ и аналогично для $x = l$). Отсюда следует, что

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int\limits_0^l \left[\rho v_t v_{tt} - v_t (kv_x)_x\right] dx = \int\limits_0^l v_t \left[\rho v_{tt} - (kv_x)_x\right] dx = 0,$$

т.е. $E(t) = const$. Учитывая начальные условия, получаем:

$$E(t) = const = E(0) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left[k(v_x)^2 + \rho(v_t)^2\right]_{t=0} dx = 0, \tag{81}$$

1

[1]) Для дифференцирования под знаком интеграла достаточно, чтобы получаемое при этом подынтегральное выражение было непрерывно на отрезке $0 \le x \le l$ при $t \ge 0$. Это требование в нашем случае выполнено, так как функция $v(x,t)$ удовлетворяет условию 1) теоремы, а $\rho(x)$ и $k(x)$ - условию 2).

так как

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0.$$

Пользуясь формулой (81) и положительностью k и ρ, заключаем, что

$$v_x(x, t) = 0, \quad v_t(x, t) = 0.$$

откуда и следует тождество

$$v(x, t) = const = C_0. \tag{82}$$

Пользуясь начальным условием, находим:

$$v(x, 0) = C_0 = 0;$$

тем самым доказано, что

$$v(x, t) = 0. \tag{83}$$

Следовательно, если существуют две функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, удовлетворяющие всем условиям теоремы, то $u_1(x, t) = u_2(x, t)$.

Для второй краевой задачи функция $v = u_1 - u_2$ удовлетворяет граничным условиям

$$v_x(0, t) = 0, \quad v_x(l, t) = 0, \tag{84}$$

и подстановка в формуле (80) также обращается в нуль.Дальнейшая часть доказательства теоремы остается без изменений. Для третьей краевой задачи доказательство требует некоторого видоизменения. Рассматривая попрежнему два решения u_1 и u_2, получаем для их разности $v(x, t) = u_1 - u_2$ уравнение (77) и граничные условия

$$\left.\begin{aligned} v_x(0, t) - h_1 v(0, t) = 0 \quad (h_1 \geq 0), \\ v_x(l, t) + h_2 v(l, t) = 0 \quad (h_2 \geq 0), \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Представим подстановку в (80) в виде

$$[k v_x v_t]_0^l = -\frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial t} [h_2 v^2(l, t) + h_1 v^2(0, t].$$

Интегрируя $\frac{dE}{dt}$ в пределах от нуля до t, получим:

$$\begin{aligned} E(t) - E(0) = \int\limits_0^t \int\limits_0^l v_t [p v_{tt} - (k v_x)_x] dx dt - \\ - \frac{k}{2} \left\{ h_2 [v^2(l, t) - v^2(l, 0)] + h_1 [v^2(0, t) - v^2(0, 0] \right\}, \end{aligned}$$

откуда в силу уравнения и начальных условий следует:

$$E(t) = -\frac{k}{2} [h_2 v^2(l, t) + h_1 v^2(0, t)] \leq 0. \tag{86}$$