МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет
Кафедра теории вероятностей

Модель Крамера-Лундберга. Вероятность разорения и условие на предотвращение разорения с вероятностью 1.

Cramer-Lundberg model. Ruin probability and condition to avoid ruin with probability 1.

Курсовая работа
Студента 3 курса 309 группы
Королькова Даниила Александровича

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор
Булинская Екатерина Вадимовна

Москва, 2022г.

Содержание

1 Введение

В данной работе вводится общая модель процесса рискового резерва. Определены вероятности разорения страховой компании на конечном и бесконечном промежутке времени. Рассмотрено условие разорения компании с вероятностью 1. Приведена модель разорения Крамера-Лундберга.

Вопрос разорения рассматривал ещё сам Лундберг в начале XX века. В 1903 году шведский актуарий ввёл модель Крамера-Лундберга (классический рисковый процесс или пуассоновский рисковый процесс). Позже в 30х годах XX века Крамер, описывая вероятности разорения как меру риска на конечном и бесконечном временном промежутке, переиздал работы Лундберга. Стоит сказать, что подобные модели удобно ложатся на бизнесс страховых компний, но, безусловно, применимы и в других областях.

2 Модель

2.1 Общие сведения

Случайный процесс $U = \{U(\omega, t), t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$ - это семейство индексированных случайных величин, определённых на одном вероятностном пространстве (Ω, $\mathcal{F}$, P). Множество T чаще всего интерпретируется как время. Говорят, что время дискретно, если T не более чем счётно.

Определение

При фиксированном времени $t = t_0$ имеем случайную величину $U(\omega, t_0)$, называемую *сечением*.

Если же зафиксировать исход $\omega = \omega_0$, то имеем функцию времени $U(\omega_0, t)$, называемую *траекторией* или *реализацией*.

Определение (*Процесс рискового резерва*)

$$U(t) = u + p(t) - S(t), t \geq 0.$$

- $U(t)$ – капитал страховой компании в момент времени t,
- $u = U(0)$ – начальный капитал, некая неотрицательная константа,
- $p(t) = ct$ – премиальный доход, где c – (постоянный) премиальный доход за единицу времени,
- $S(t) = X_1 + ... + X_{N(t)}$ – суммарные выплаты:
  - X_i – величина i-ой выплаты (неотрицательная);
  - $N(t)$ – число страховых выплат до момента выплаты t;

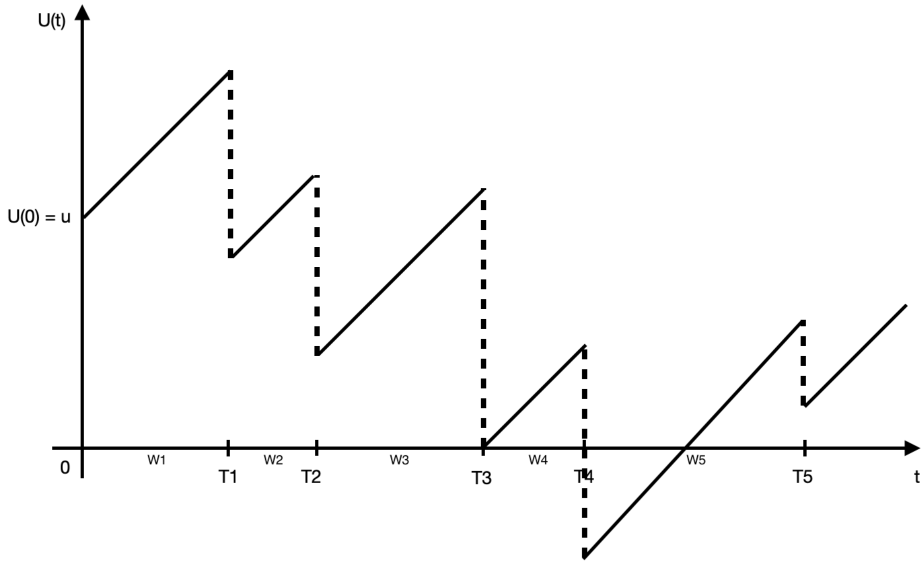

Рис. 1: Реализация процесса рискового резерва $U(t)$

На рис. 1 представлена траектория процесса рискового резерва. Случайные величины $T_1, T_2, ...$ – моменты наступления страховых случаев. Наклон процесса (при отсутствии выплат) равен c, а в моменты времени $t = T_j$ капитал уменьшается скачком на величину X_j – размер j-ой выплаты. На рис. 1 в момент времени T_4 суммарный размер выплат $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ превышает начальный капитал u плюс полученная премия cT_4, поэтому размер оставшегося капитала $U(T_4) < 0$. Это событие называется *разорением*, а момент времени, в который оно наступает впервые, обозначается через T.

Определение

$$\textit{Разорение} = \bigcup_{t\geq 0}\{U(t) < 0\} = \{\inf_{t\geq 0} U(t) < 0\} = \{T < \infty\},$$
$$T = min\{t \mid t \geq 0, U(t) < 0\},$$
$$T = \infty, \text{ если } U(t) \geq 0 \ \forall t.$$

Введём $\{W_i\}_{i\geq 1}$ – положительные независимые одинаково распределённые (н.о.р.) случайные величины – промежутки между требованиями. Получим представление времён требований в виде процесса восстановления:

$$T_0 = 0, \qquad T_n = W_1 + ... + W_n, \qquad n \geq 1.$$

Тогда количество требований – считающий процесс:

$$N(t) = \#\{n \geq 1 : T_n \leq t\}, t \geq 1.$$

Определение

Вероятность разорения на бесконечном промежутке времени при начальном капитале u:

$$\psi(u) = P(\bigcup_{t\geq 0}\{U(t) < 0\} \mid U(0) = u) = P(\inf_{t>0}(U(t) < 0) \mid U(0) = u) = \\ = P(T < \infty \mid U(0) = u).$$

Определение

Вероятность разорения на конечном промежутке времени при начальном капитале u:

$$\psi(u, q) = P(T \leq q \mid U(0) = u).$$

Для следующих шагов нам понадобится очевидное утверждение:

$$N(T_n) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq T_n\} = n \quad \text{п.н.}$$

Не стоит забывать, что разорение может произойти только в моменты времени $t = T_n$, ведь на промежутке $[T_n, T_{n+1})$ $U(t)$ возрастает. Тогда привычное понятие разорения переписывается следующим образом:

$$\textit{Разорение} = \{\inf_{t\geq 0} U(t) < 0\} = \{\inf_{n\geq 1} U(T_n) < 0)\} = \{\inf_{n\geq 1}(u + p(T_n) - S(T_n)) < 0\} = \\ \{\inf_{n\geq 1}(u + cT_n - \textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i) < 0\}.$$

Вспомним, что $\forall j \geq 1$ $W_j > 0$ п.н. – промежутки между страховыми выплатами. Тогда записав величину прибыли, взятой со знаком минус, следующим образом:

$$Z_n = X_n - cW_n, \quad S_n = Z_1 + ... + Z_n, \qquad n \geq 1, \quad S_0 = 0,$$

получим альтернативное представление $\psi(u)$ с начальным капиталом u:

$$\psi(u) = P(\inf_{n\geq 1}(-S_n) < -u) = P(\sup_{n\geq 1}(S_n) > u).$$

Несложно заметить, что в таком случае:

$$\psi(u) \geq P((S_n) > u) \quad \forall n \geq 1.$$

Так как последовательности W_i и X_i состоят из н.о.р случайных величин и независимы, то вероятность разорения $\psi(u)$ ни что иное, как хвост супремума случайного блуждания S_n.

Предположим, что $E(X_1)$ и $E(W_1)$ конечны. На практике такие условия встречаются часто. Тогда коль скоро $Z_n = X_n - cW_n$, верно, что и $E(Z_1) = E(X_1) - cE(W_1)$ тоже конечно. Тогда к S_n применим усиленный закон больших чисел:

$$\frac{S_n}{n} \to E(Z_1) \text{ п.н.} \quad n \to \infty,$$

который показывает, что $S_n \to +\infty$ или $-\infty$ – всё зависит от знака $E(Z_1)$. Следовательно, если $E(Z_1) > 0$, то разорение неизбежно, ведь S_n отображает прибыль, взятую со знаком минус.

Если же $E(Z_1) = 0$, то $\psi(u) = 1$. Детальное доказательство этого факта описано в изучении поведения случайного блуждания в [1]. Основаня идея заключается в выделении из T двух подпоследовательностей $\{n_k\}_{k \geq 0}$, $\{m_k\}_{k \geq 0}$ таких, что $S_{n_k(\omega)} \to -\infty$ и $S_{m_k(\omega)} \to \infty$.

В любом случае верна:

Лемма (*Разорение п.н.*)

Если $E(W_1)$ и $E(X_1)$ конечны и выполняется условие:

$$E(Z_1) = E(X_1) - cE(W_1) \geq 0.$$

то для любого фиксированного u разорение произойдёт с вероятностью 1.

Таким образом страховой компании следует выбрать такую ставку c, чтобы $E(Z_1) < 0$. Только в таком случа компания сможет избежать разорения с вероятностью 1.

Определение (*NPC*)

Будем говорить, что модель восстановления удовлетворяет NPC (net profit condition $\sim$ состояние чистой прибыли), если верно

$$E(Z_1) = E(X_1) - cE(W_1) < 0.$$

Это условие интуитивно понятно. Оно сообщает, что ожидаемый размер требований должен быть меньше размера премии.

2.2 Модель разорения Крамера-Лундберга

Мы ввели общие понятия, теперь же, описав характер известных нам величин, перейдём к модели Крамера-Лундберга.

$$U(t) = u + p(t) - S(t), t \geq 0.$$

- $U(t)$ – капитал страховой компании в момент времени t,
- $u = U(0)$ – начальный капитал, некая неотрицательная константа,
- $p(t) = ct$ – премиальный доход, где c – (постоянный) премиальный доход за единицу времени,

- $\{W_i\}_{i\geq 1}$ – промежутки между T_{i-1} и T_i выплатами – н.о.р. $\sim Exp(\lambda), \lambda > 0$,
- $S(t) = X_1 + ... + X_{N(t)}$ – суммарные выплаты:
  - X_i – величина i-ой выплаты (неотрицательная);
  - $N(t)$ – число страховых выплат до момента выплаты t.
    $N(t) = \sup_n(S(n) \geq t), t \geq 0$ представляет собой процесс восстановления и является пуассоновским процессом с той же интенсивностью $\lambda > 0$;

Такая модель очень удобна, ведь случайные величины $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ с "отсутствующей памятью" т.е. $P(W_i > t + s \mid W_i \geq s) = P(W_i > t)$, а $N(t)$ безгранично делимо.

Определение (*Пуассоновский процесс*)

Процесс $N(t)$ называется пуассоновским, если:

1) $N(0) = 0$ п.н.

2) Процесс имеет независимые приращения, то есть $\forall n \in \mathbb{N}$ и $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$ случайные величины $N(t_0), N(t_1) - N(t_0), ..., N(t_n) - N(t_{n-1})$ независимы в совокупности.

3)Для локальной конечной меры μ приращения $N(t)-N(s)$, где $0 \leq s < t < \infty$ будут иметь распределение пуассона с параметром $\mu([s,t])$.

Если положить $\mu(t) = \lambda t$, то пуассоновский процесс будет называться *однородным* с *интенсивностью* λ и *неоднородным* в ином случае.

Лемма (*Связь однородного и неоднородного пуассоновского процесса*)

Пусть $N(t)$ - пуассоновский процесс с функцией среднего $\mu(t)$. Тогда определённый следующим образом процесс $\hat{N}(t) = N(\mu(t)), t \geq 0$ является пуассоновским, совпадающий по распределению с $N(t)$.

Доказательство Для начала проверим выполнение всех трёх свойств пуассновского процесса.

1) $\hat{N}(0) = N(\mu(0)) = N(0) = 0$ п.н.

2) Процесс $\hat{N}(t)$ будет так же иметь независимые приращения, как и процесс $N(t)$ в силу неотрицательной определённости непрерывной функции $\mu(t)$.

3)Разность $\hat{N}(t) - \hat{N}(s)$ так же будет иметь пуассоновское распределение с интенсивностью $\mu(t) - \mu(s)$.

Чтобы доказать вторую часть леммы распишем функцию среднего:

$$\hat{\mu}(u) = E(\hat{N}(t)) = E(N(\mu(t))) = \mu(t)$$

Так как пуассоновский процесс $\hat{N}(t)$ определяется своей функцией среднего, то на конечных множествах оба процесса совпадают по распределению и не разлчимы с точки зрения вероятностных характеристик, т.е. $\hat{N}(t) \stackrel{d}{=} N(t)$. ч.т.д.

Рассмотрим следующую задачу:

Пусть мы имеем $S(t) = \sum\limits_{i=1}^{\hat{N}(t)} X_i$, где $\hat{N}(t)$ - пуассоновский процесс с положительной и непрерывной функцией интенсивности λ, а требования X_i - н.о.р. Имеем функцию разорения:

$$\hat{\psi}(u) = P(\inf_{t\geq 0}\{u + p(t) - S(t)\} < 0), \text{ с начальным капиталом u.}$$

Нетрудно заметить, что заданная таким образом функция вероятности разорения совпадает с функцией вероятности разорения для модели Крамера-Лундберга с пуассоновским процессом с интенсивностью 1. Действительно, первые два слагаемых в выражении капитала детерминированы и не влияют на распределение процесса рискового резерва. Последние же слагаемые (суммы выплат) будут иметь одинаковое распределение (согласно лемме) $\hat{N}(t) \stackrel{d}{=} N(t)$. Таким образом, доказана:

Теорема

В рамках описанной выше модели функция вероятности $\hat{\psi}(u)$ совпадает с функцией вероятности $\psi(u)$ для модели Крамера-Лундберга.

Теорема

Чтобы избежать разорения п.н. в модели Крамера-Лундберга необходимо выбрать положительную нагрузку ρ.

Доказательство

Рассмотрим, какие необходимые условия для того, чтобы разорение модели Крамера-Лундберга не произошло с вероятностью 1. Для этого посмотрим на краевой случай условия NPC. $E(Z_1) = E(X_1) - cE(W_1) = E(X_1) - \frac{c}{\lambda} = 0$, т.е. если страховщик выбирает премиальный доход $c = \lambda E(X_1)$, то разорение неизбежно. К слову, в таком случае $E(S(t)) = E(N(t))E(X_1) = \lambda t E(X_1)$ и $p(t) = ct = \lambda E(X_1)t = E(S(t))$. Поэтому, чтобы избежать разорения п.н. следует выбрать *нагрузку* $\rho > 0$ такую, чтобы $p(t) = (1+\rho)ES(t) = (1+\rho)\lambda E(X_1)t$ и соответственно $c = (1+\rho)\lambda E(X_1)$. При таком выборе $E(Z_1) < 0$ и мы удовлетворяем условиям NPC.

3 Список литературы

[1] Spitzer, F. (1976) Principles of Random Walk. 2nd edition. Springer, Berlin.
[2] Thomas Mikosch. Non-Life Insurance Mathematics. Corrected 2nd Printing 2006. Springer, Berlin.