$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n > 0) \text{ — ряд с полож. членами}$$

(I) Признаки сравнения

Признак сходимости

Если каждый член данного ряда с полож. чл., начиная с некот. номера $n = N$, не превосх. соотв. член сходящегося ряда с полож. членами, то данный ряд сходится

П:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \quad v_n$$

Ср. с геом. пр. $q = \frac{1}{2}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{u_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots$$

$N = 2$

$$\left.\begin{array}{l} n \geq 2: v_n > u_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ — сх} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ — сх.}$$

Если ~~в~~ каждый член данного ряда с полож. членами, начиная с $n = N$, не меньше соотв. члена расход. ряда с пол. членами, то данный ряд расходится

П:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overbrace{\frac{n+1}{n\sqrt{n}}}^{u_n} = 2 + \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{4}{3\sqrt{3}} + \ldots$$

Ср. $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{v_n}$ — расх

$$\frac{n+1}{n\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Отв. расх.

Предельная форма признака сравнения

Дано: 1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ $(u_n > 0, v_n > 0)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} \underset{\neq\infty}{\overset{\neq 0}{=}} M$

Пр д-ть:

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сход. или расх

(II) Даламбер

Пред. форма призн. Даламбера

Дано:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$

2. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = б$

Пр. д-ть: 1. $\exists$ $б < 1 \Rightarrow$ сходится

2. $\exists$ $б > 1 \Rightarrow$ расх

Замечание; При $б = 1$, признак не даёт ответа (ряд может как сходиться, так и расх)

(III) Коши

III. пред. форма признака Коши

Дано:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$

2. $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$

Пр. д-ть: $k < 1$ – сход.

$k > 1$ – расх. (∞ включается сюда)

Замечание 1: $k = 1$ ответа не даёт

Замечание 2: Возникают случаи, когда пр. Даламбера не даёт ответ, а Коши даёт

(IV) Интеграл. признак Коши (без д-ва)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$

Ряд, членов которого не возрастают, при возрастании n, сходятся или расх., в зависимости от того, сходит. или расх. несобств. интеграл, где $f(x)$ непрерыв. полож. невозр. ф-я, для которой $f(n) = u_n$

Замечание 1: идея этого признака, это замена ряда несобств. интегр. и исследование его сходимости

Замечание 2: $\int_1^{+\infty} f(x)dx \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$, $a > 1$

П.

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\quad, p>0$$

(ряд Дирихле)

1) применим пр. Даламбера

$$\left.\begin{aligned} u_n&=\frac{1}{n^p}\\ u_{n+1}&=\frac{1}{(n+1)^p}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{(n+1)^p}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=$$

$= \underline{1}$ $\Rightarrow$ не даёт ответа

2) применим пред. пр. Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^p \underset{[0^0]}{=}$$

$$= 1^p = \underline{1}$$

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}},\ \underline{\ln A}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{n}}{n}\ \underset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{\overset{Л}{=}}$$

$$\overset{Л}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\frac{1}{n}\right)'}{1}=\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n}=0\Rightarrow A=\underline{1}$$

Следоват. пр. пр. Коши не даёт ответа

3) применим инт. пр.

$$u_n=\frac{1}{n^p}$$

$$f(x)=\frac{1}{x^p}$$

$$\int_1^{+\infty} \underbrace{f(x)}_{\frac{1}{x^p}}dx=\begin{cases}p>1, & сх\\ p<1, & расх\end{cases} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}-\begin{cases}сх, & p>1\\ расх, & p\leq 1\end{cases}}$$

Част. случай:

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}$

Гармонич. ряд

ряд Дирихле при $p=1$ => расходится

Знакочеред. ряды

признак Лейбница

$\pm(u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots)=\pm\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$, где $u_n>0$

наз-ся <u>знакочередующийся</u>

Достат. признак знакоч. рядом форм-ся в т. Лейбница

Т. Лейбница

Если в знакочеред. ряде $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$, $u_n>0$

1.) абсол. величины членов ряда монот. убывают
$u_1>u_2>u_3>\ldots$

2) общий член ряда стремится к 0 $\left(\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0\right)$

Если обе пункта выполнены, то ряд сходится

Следствие: абсол. погрешность, получающаяся от замены суммы сходящегося по т. Лейбница знакач. ряда его част. суммой, не превосходит абс. величины первого и заброшен. члена.

Ряды с произвольными членами
(знакопеременные ряды)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

1. сход. абсол. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ - сход.}\right)$

2. сход. условно $\left(\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ - расх} \\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ - сход.}\end{cases}\right)$

3. расходится $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ - расх.}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с произв. распр. знаков у его членов наз-ся рядом знакопеременным

Признак абс. сходимости без док-ва

Если ряд, составленный из абс. величин членов ряда, ~~рас~~ сходится, то знакопеременный ряд ~~расход~~ (дост. признак)

Если данный ряд сходится, а ряд из абс. величин расходится, то данный ряд наз-ся условно сходящ

Свойства абс. и усл. сходящихся рядов

1 т. „переместит. св. абс. сход."

абсол. сходящ. ряд остаётся абс. сходящимся и сохр. величину суммы при любой перестановке его членов

2 т. Римана

Изменяя порядок членов в услов. сход. ряде можно сделать его сумму равной любому наперёд задан. числу или даже сделать ряд расход.

П: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = S$

переставим его члены так, чтобы после каждого пол. чл. было два отриц.

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \ldots$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n} = \frac{S}{2}$$

Основные понятия и определения

$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Опр. 1

$u_1(x) + u_2(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ наз-ся функц. ряд

$u_1(x), u_2(x), u_3(x)$ – члены функционального ряда

$x = x_1$ при котором числ. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_1)$ сходится, называется точкой сходимости ~~числ.~~ функцион. ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

Совокупность точек сходимости наз-ся областью сходимости функц. ряда

В области сходимости функц. ряд опред-т некоторую ф-ю $S(x)$, которую назыв-т суммой этого ряда

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \text{ — } n\text{-я частичная сумма}$$

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

П:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \text{ — ряд Дирихле, который сх. при } x > 1$$

$(1, +\infty)$ — область сходимости ряда

Степенные ряды, теор. Абеля, интервал сход. свойства степен. рядов

Степенным рядом наз-т функц. ряд вида

$$C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$$

$C_0, C_1, C_{\ldots}$ — коэф. степенного ряда

Част. сл. $a = 0$

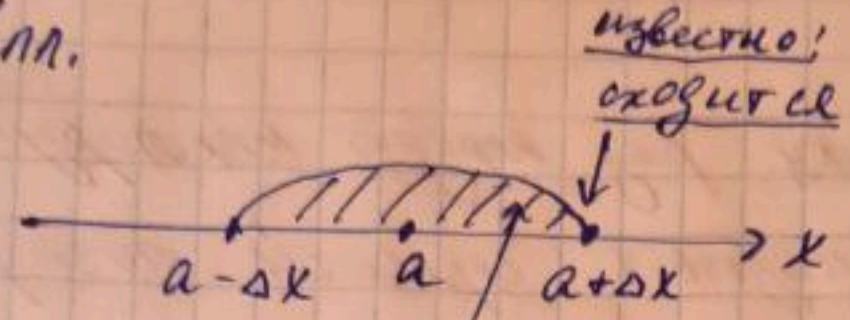
$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

т. Абеля

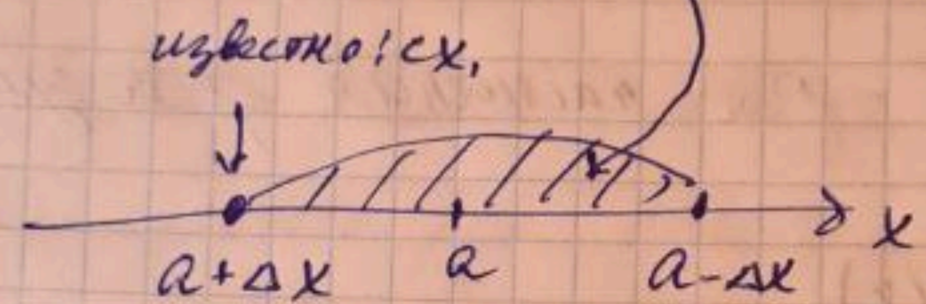
Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n(x-a)^n$ сход. в (·) $x_0 = a + \Delta x$, где $\Delta x \neq 0$, то он абс. сходится при всех x, удовл-х нерав.

$|x-a| < |\Delta x|$

Илл.



Т. Абеля ! сх. абсол.



Сходимость в точке ведёт к сходимости во всех точках, более близких к a.

$x_0 = a + \Delta x$ – (·) сходим. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n \Delta x^n$ – сх. $\underset{\substack{\text{необх.}\\ \text{призн.}\\ \text{сходим.}}}{\Rightarrow}$ $\lim\limits_{n\to\infty} C_n \Delta x^n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow C_n \Delta x^n \leq M$

всякая послед., имеющая предел, ограничена

Иссл. абс. сход. ст. ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|C_n(x-a)^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\Delta x^n C_n\cdot\left|\frac{x-a}{\Delta x}\right|^n \le \sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x-a}{\Delta x}\right|^n$$

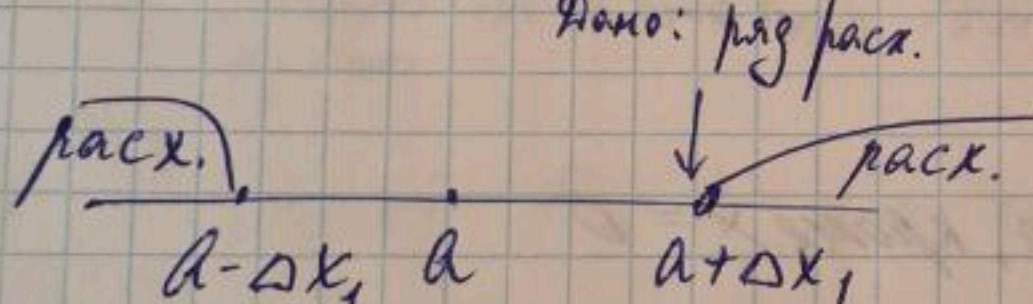
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x-a}{\Delta x}\right|^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \qquad q = \frac{x-a}{\Delta x} < 1$$

Если степ. ряд расх. в некоторой точке

$x_1 = a + \Delta x$, $\Delta x_1 \neq 0$

то он расх. при всех x, удовл. неравенству

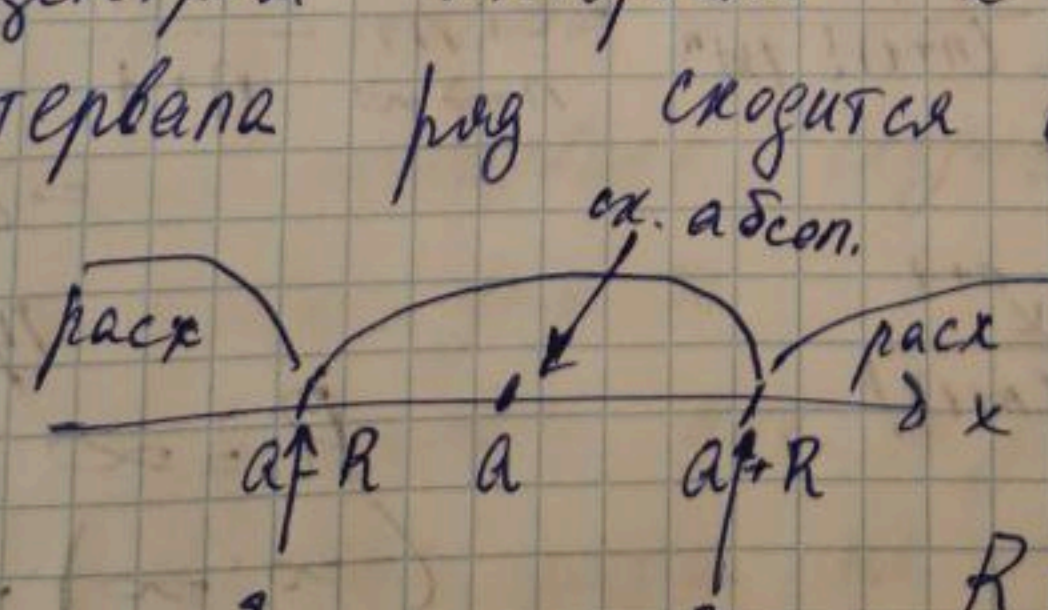
$$|x-a| > |\Delta x_1|$$



Док-во от обратного

Следствие 2

Областью сход. ст. ряда является интервал оси Ox с центром интервала $x = a$, внутри этого интервала ряд сходится абсол.



$R > 0$

Радиусом сход. ряда наз-ся такое число R, что для всех $x-a<R$ ряд сход. абс., а для всех $x-a>R$ ряд расход.

3. опред.

$(-R+a,\ R+a)$ – интервал абсол. сход. степ. ряда

1) найти радиус интервал сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n = 1 + x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + \ldots$$

Проверим ряд на абс. сходимость по Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n|x|^n} = \lim_{n\to\infty} n|x| \to \infty \quad \forall x \neq 0$$

Ответ: ряд расх. везде, кроме $x=0$

2) найти радиус и интервал сход. ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

по пр. Даламб.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$$

$$u_n = \frac{x^n}{n!}$$

$$u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\Rightarrow$ сходится при $\forall x$

$R = \infty$

$(-\infty;\infty)$ – инт. сход.

Найти радиус и интервал сход. ряда

3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

Применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|x|^n} = |x| < 1$$

$R = 1$

$(-1, 1)$ - сход. абс.

$x = 1$:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - гармонич.

$x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ - сх. условно

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ пр. Лейбница

Ответ: $R = 1$, инт. сх. $[-1, 1)$

Свойство степ. рядов (без док-ва)

1) внутри интервала сход-ти сумма ст. ряда явл-ся непрер. ф-й

2) внутри интервала сход. степенной ряд можно интегр. почленно

3) внутри интервала сходим-ти степ. ряд можно почленно диф-ть

4) при почленном инт. и диф-ти ряда, интервал сход-ти ст. ряда не изменяется

Разложение ф-ии в степенные ряды

ряды Тейлора и Маклорена, понятие об аналит. ...

Опр. 1

Разложить ф-ю $f(x)$ в степ. ряд — значит построить степенной ряд, сумма которого в интервале сходимости ряда равна данной ф-ии

Виды разложения ф-ии

1. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n \quad |x-a| < R$

(·) $x = a$

2. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n, \quad |x| < R$

т. „О разложении ф-ии в ст. ряд"

Если ф-я разлогается в ст. ряд в окрестности точки $x = a$, то это разложение единственно и имеет вид

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ср. $f(x)=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{T_n(x)}+R_n(x)$

Опр-е 2

Рядом Тейлора для $f(x)$ наз-ся ст. ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

а его коэф-ты – коэф-ми Тейлора в ф-ии $f(x)$ в точке $x=a$

Опр-е 3

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad \ldots$$

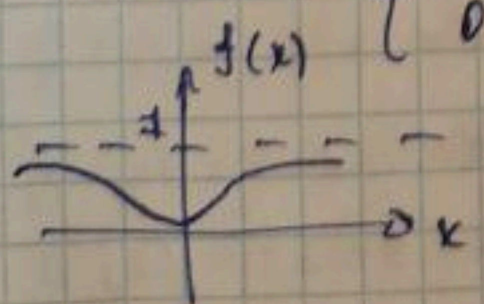
Опр-е 4

ф-я, которая в окрестности некоторой точки может быть разложена в ряд Тейлора, наз-ся <u>аналитической</u> в этой точке

теорема

Для того, чтобы $f(x)$ была <u>аналитической</u> в точке $x=a$, <u>необход. и достат.</u>, чтобы
1. она была бесконечно диф-ой в (·) $x=a$
2. чтобы остат. член её ряда Тейлора в окр-ти (·) $x=a$ стремился к 0 при $n\to\infty$

П: $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$



$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\cancel{x}+\Delta x)-\overset{0}{f(x)}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{\Delta x^2}}}{\Delta x}\underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{\Delta x}}{e^{\frac{1}{\Delta x^2}}}\overset{\Lambda}{=}\ldots=0$$

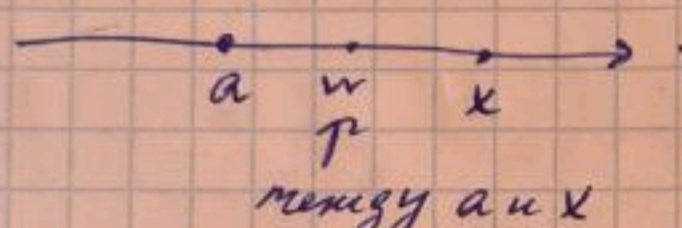
$$f''(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(\Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{\Delta x^2}} \cdot \frac{2}{\Delta x^3}}{\Delta x} \underset{\Pi}{=} \ldots =$$

$$= 0$$

$$f^{(n)}(0) = 0$$

Остат. член ряда Тейлора в форме Лагранжа

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$



Оценим $|R_n(x)| = |f^{(n+1)}(\xi)| \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq M \cdot \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$

$\lim\limits_{n \to \infty}$; $\lim\limits_{n \to \infty} |R_n(x)| \leq M \cdot \underbrace{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}}_{0} = M \cdot 0 = 0$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ - сх. $\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

(было!)

Если $f^{(n+1)}(\xi)$ огр-на внутри инт-ла сход-ти,

то $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$

Разложение ф-ии в ряд Тейлора и Маклорена

I ряд Маклорена для $f(x)=e^x$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$$

Ряд Макл.:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Найдём его интервал сходимости

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд сходится для $\forall x$

Докажем, что сумма ряда равна ~~e~~ e^x

$$f^{(n+1)}(\xi) = e^{\xi} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\xi}$$, т.е. ограничена

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad -\infty < x < +\infty}$$

II Ряд Маклорена для $\sin x$, $\cos x$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sin x \Rightarrow f(0) = 0 \\ f'(x) &= \cos x \Rightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) &= -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0 \\ f'''(x) &= -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1 \\ f^{IV}(x) &= \sin x \Rightarrow f^{IV}(0) = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$= \underbrace{0}_{n=0} + \underbrace{x}_{n=1} + \underbrace{0}_{n=2} \underbrace{- \frac{x^3}{3!}}_{n=3} + \underbrace{0}_{n=4} + \ldots =$$

$$= \underbrace{x}_{n=0} - \underbrace{\frac{x^3}{3!}}_{n=1} + \underbrace{\frac{x^5}{5!}}_{n=2} - \underbrace{\frac{x^7}{7!}}_{n=3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+}}{(2n+}$$

перенумеруем члены

Ищем интервал сходимости

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\frac{(2n+1)!}{|x|^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} =$$

$$= 0 < 1 \Rightarrow R = \infty$$

$$(-\infty, +\infty)$$

$$\left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \le 1$$

т.е. огр. $\Rightarrow R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad -\infty < x < +\infty}$$

Пользуясь свойством о почленном дифф-ии ст. ряда и о том, что радиус сход. степ. ряда не меняется

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}$$

$$\boxed{\left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{x^{2n}}{2n!} \quad -\infty < x < +\infty}$$

III Биномиальный ряд

Разложим ряд Маклорена в ф-ю

$f(x) = (1+x)^m$

m – произвольное пост. число

Част. случай:

$m > 0$ / m – целое => это бином Ньютона

1. Бином Ньютона

$n \in N$

2. $m = \frac{1}{2}$; $f(x) = \sqrt{1+x}$

3. $m = -1$; $f(x) = \frac{1}{1+x}$

$f(x) = (1+x)^m$, $f(0) = 1$

$f'(x) = m(1+x)^{m-1}$, $f'(0) = m$

$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$, $f''(0) = m(m-1)$

$\dots$

$f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-(n-1))(1+x)^{m-n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = m(m-1)\dots(m-(n-1))$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \underbrace{1}_{n=0} + \underbrace{mx}_{n=1} + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots +$$

$$+ \underbrace{\frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))}{n!}}_{n} x^n + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n$$

При произв. m, получаем биномиал. ряд

При натур. m, получаем ~~бином Ньютона~~ известное конечное разл-е бинома Ньютона

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)|\,|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|m(m-1)\ldots(m-n+1)|\,|x|^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|x|\,|m-n|}{n+1} = |x| < 1 \Rightarrow R = 1$$