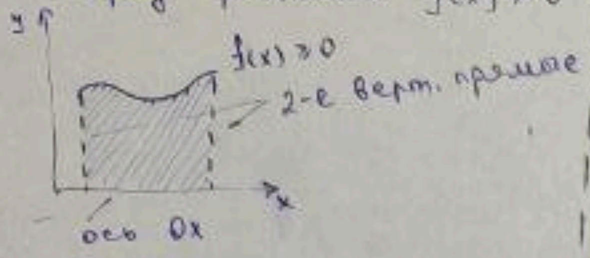
Опред-й интеграл как предел интегральной суммы.

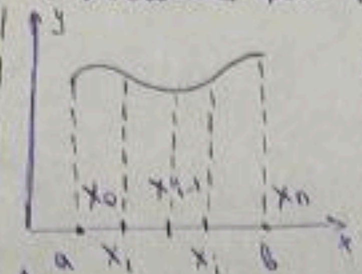
Теорема сущ-я, прилож-я:

Криволинейной трапецией называется фигура, огранич-я внизу осью Ox, сверху графиком $f(x) \geq 0$ и двумя верт. прямыми.

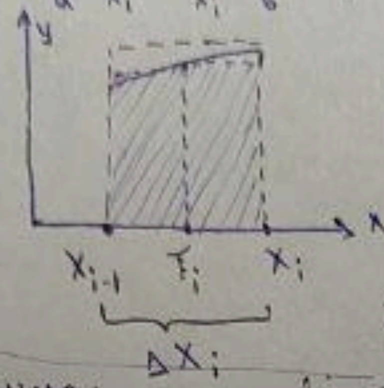


ξ – „кси"

Для вычисления S криволинейной трапеции, разделим основание на n частей.



$a = x_0 < x_1 < x_{i-1} < x_i < \dots < b = x_n$



ξ_i – произвольная точка $\in [x_{i-1}, x_i]$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$S_i \approx f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$

$S = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$

1) Увелич. число эл-ов участков $n \to \infty$

2) Уменьш. длина каждого из них $\Delta x_i \to 0$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$

• **Определение:**

Наиб. из длин элемент. этих участков (λ) – наз-я рангом дробления интервала $[a, b]$

$\boxed{\lambda_n \stackrel{def}{=} \sup\{|\Delta x_i|\}}$ – ранг дробления инт. на $[a, b]$

• **Определение:**

Сумма S_n – произв. эл-т уч-ов Δx_i на знач-я ф-й выдел. уч-ов $f(\xi_i)$ – наз-я <u>интегральной суммой</u> для $f(x)$ на $[a, b]$

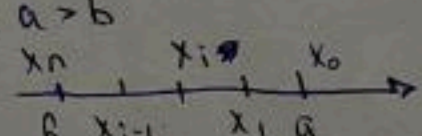
$\boxed{S_n \stackrel{def}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i}$

Св-ва:

1) S_n зависит от:

- способа разделение $[a, b]$ на элементарные участки.
- От выбора точек ξ в каждой из них

2) $a > b$



$a = x_0 > x_1 > x_i > x_{i-1} > x_n = b$

3) Предел инт. суммы $f(x)$ на $[a, b]$, при условии, что число элем. уч-ов неогранич-о увелич-я, а длина наиб. из них $\to 0$, не зависящие ни от способа разбиения $[a, b]$ на элемент. уч-и Δx_i, ни от выбора ξ_i в каждой из них – называется опред. интегралом

$$\boxed{\lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda_n \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \stackrel{def}{=} \int_a^b f(x)\,dx}$$

4) Ф-я $f(x)$ для которой сущ-ет интеграл - интегрируемая на $[a, b]$.

5) $\forall$ сущ-я неопред интеграла:

① Если $f(x)$ - непр. на $[a, b] \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)dx$

② Если $f(x)$ - огранич. на $[a, b]$

③ Имеет конечное число точек разрыва $\Rightarrow \exists \int_a^b f(x)dx$

Прилож-е опред-го интеграла:

1) $S = \int_a^b f(x)dx$

2) $A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$

Работа

3) $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$

Основные св-ва опред. интеграла, выраж-е рав-ом:

1) Свойство о независимости определенного интеграла от обозначения переменной интегрирования:

Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(\sigma)d\sigma$$

2) Св-во о вынесении пост. множителя:

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

3) Интеграл Σ:

$$\int_a^b (f_1(x) + \dots + f_n(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f_1(x)dx + \dots + \int_a^b f_n(x)dx$$

4) При перестановке верхн. и нижн. пределов интеграл меняет знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Док-во: $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ x_n \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\underbrace{\Delta x_i}$ ↑ изменит знак

Следствие:

Опред. интеграл с одинаковыми пределами $=0$:

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

$$0=\int_a^a f(x)dx=-\int_a^a f(x)dx=I$$

$$I=-I$$

$$\Rightarrow I=0$$

5) О разбиении интервала интегрирования (аддитивность)

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$$

a, b, c - любые

Док-во:

① $a<b<c$

Т.к. предел интегрир. Σ не зависит от способа разбиения $[a, c]$ на элемент. будем разбивать его так, чтобы b - точка деления.

$$\sum_a^c f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_a^b f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_b^c f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\begin{cases} n\to\infty \\ x_n\to 0\end{cases}$$

② $a<c<b$

по пункту 1 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx-\int_c^b f(x)dx$$

или

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$$

Основные св-ва опред. интеграла, выраж-е нер-вом:

$\rbrack f(x)$ - интегрируемая

T о знаке опред. интеграла

$$\left.\begin{matrix} ① f(x)\geqslant 0 \\ ② a<b \end{matrix}\right\}\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\geqslant 0$$

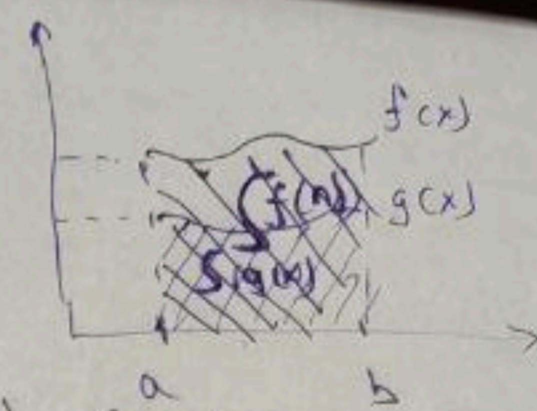
Док-во: $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ x_n\to 0}}\sum_{i=1}^n \underbrace{f(\xi_i)}_{\geqslant 0 \text{ из 1 пункта}}\underbrace{\Delta x_i}_{>0 \text{ из п. 2}}$

Т Об интегрировании нер-ва:

① $f(x) \geq g(x)$ на $[a, b]$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$ - понятно

② $a < b$



\\\ - $S f(x)$

/// - $S g(x)$

$S f(x) \geq S g(x)$

Св-во о модуле интеграла:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$a < b$

Док-во:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

$$-\int |f(x)|\,dx \leq \int f(x)\,dx \leq \int |f(x)|\,dx$$

$$\Rightarrow \left| \int f(x)\,dx \right| \leq \int |f(x)|\,dx$$

Св-во об оценке опред. интеграла:

Дано:

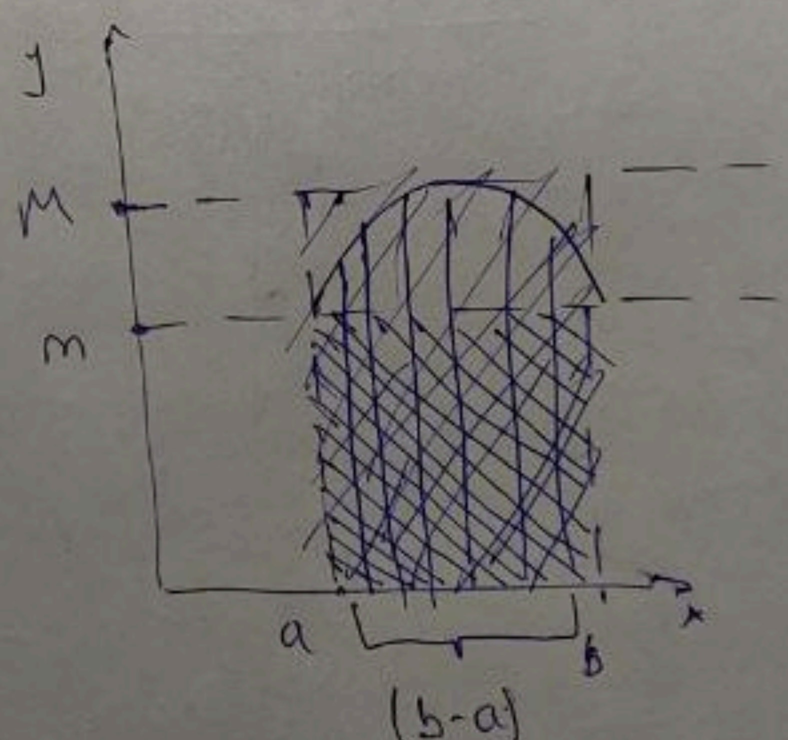
1) $m \leq f(x) \leq M$ на $[a, b]$

2) $a < b$

Тр. док-ть:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

(S\\\) (S|||) (S///)



Док-во:

$$m \leq f(x) \leq M$$

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

Определен. интеграл от непрерывной ф-ии = произв-ю знач-я этой ф-ии в некоторой точке интервала интегрирования на разность верхнего и нижнего пределов.