1 лекция пропущена см. в тг

$$\underbrace{\bar{f}(p)}_{\text{изображ.}} = \int_0^{+\infty} \underbrace{f(t)}_{\text{оригинал}} e^{-pt}\,dt$$

$$\bar{f}(p) \doteqdot f(t)$$

$$(*)\begin{cases} 1.\ f(t) = 0,\ t < 0 \\ 2.\ \text{кон. разр.} \\ 3.\ |f(t)| \le Me^{bt} \end{cases}$$

$$\sigma_1(t) \doteqdot \frac{1}{p}$$

$$e^{\alpha t} \doteqdot \frac{1}{p-\alpha}$$

Дано:

1. $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k f_k(t)$

2. $f_k(t) \doteqdot \bar{f}_k(p)$

Пр. д-ть:

$$\bar{f}(p) = \sum_{k=1}^{n} A_k \bar{f}_k(p), \text{ где } \bar{f}(p) \doteqdot f(t)$$

Док-во:

$$\bar{f}(p) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} A_k f_k(t)\right)}_{f(t)} e^{-pt}\,dt = \sum_{k=1}^{n} A_k \underbrace{\int_0^{+\infty} f_k(t) e^{-pt}\,dt}_{\bar{f}_k(p)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k \bar{f}_k(p)$$

П:

$$\sigma_1(t) \doteqdot \frac{1}{p} \Rightarrow \boxed{C \doteqdot \frac{C}{p}} \quad (3)$$

Ч. сл.

1) $A_k = 1$, $k = 1, \ldots, n$ $\quad \boxed{\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(t) \doteqdot \sum\limits_{k=1}^{n} \bar{f}_k(p)}$

2) $n = 1$, $A_1 = C$ $\quad \boxed{Cf(t) \doteqdot C\bar{f}(p)}$

2. $\sin \omega t = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) =$

$= \frac{1}{2i}\left(\frac{p+i\omega-(p-i\omega)}{p^2+\omega^2}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

3. $\cos \omega t = \frac{e^{i\omega} + e^{i\omega}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right) =$

$= \frac{1}{2}\,\frac{2p}{p^2+\omega^2} = \frac{p}{p^2+\omega^2}$

Диффиренцирование изображений

Т. без д-ва

Если $f(t)$ оригинал, удовл-щее $(*)$, то интеграл Лапласа можно диф-ть по параметру p под знаком интеграла

$$\frac{d}{dp}\bar{f}(p) = \frac{d}{dp}\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right) =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial p}\left(f(t)e^{-pt}\right)dt$$

Следствие: применим эту теорему к ... исчислению

$$\bar{f}'(p) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}\left(f(t)e^{-pt}\right)dt = \int_0^{+\infty} f(t)\underbrace{\frac{\partial}{\partial p}e^{-pt}}_{e^{-pt}(-t)}dt =$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(-t f(t)\right)e^{-pt}dt \risingdotseq \left(-t f(t)\right)$$

Теорема о смещениях

Умножение оригинала на $e^{\alpha t}$ соответствует смещению аргумента изобр-я на величину α

Дано: $f(t) \doteqdot \bar{f}(p)$

Пр. д-ть: $\boxed{f(t) e^{\alpha t} \doteqdot \bar{f}(p-\alpha), \ \alpha \in \mathbb{C}}$

Док-во:

$f_1(t) = f(t) e^{\alpha t}$

$\bar{f}_1(p) \doteqdot f_1(t)$

$$\bar{f}_1(p) = \int_0^{+\infty} f_1(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{\alpha t} e^{-pt} dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-\alpha)t} dt = \bar{f}(p-\alpha)$$

П:

$$t^n \doteqdot \frac{n!}{p^{n+1}} \Rightarrow \boxed{e^{\alpha t} t^n \doteqdot \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}} \quad (9)$$

2. $$\sin \omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \Rightarrow \boxed{e^{\alpha t} \sin \omega t \doteqdot \frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}} \quad (10)$$

3. $$\cos \omega t \doteqdot \frac{p}{p^2+\omega^2} \Rightarrow \boxed{e^{\alpha t} \cos \omega t \doteqdot \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}} \quad (11)$$

Дифференцирование изобр-я соотв-т умножению оригинала на $(-t)$

Повторяя операцию n раз имеем:

$$\boxed{\bar{f}^{(n)}(p) \doteqdot (-1)^n t^n f(t)}$$

П:

1) $\delta_1(t) \doteqdot \frac{1}{p}$

Диф-м по p

$-t \doteqdot -\frac{1}{p^2} \Rightarrow t \doteqdot \frac{1}{p^2}$

Еще раз

$-t^2 \doteqdot -\frac{2}{p^3} \Rightarrow t^2 \doteqdot \frac{2}{p^3}$

Еще еще еще...

....

$$\boxed{t^n \doteqdot \frac{n!}{p^{n+1}}} \quad (6)$$

П: $\sin\omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \Rightarrow t\sin\omega t \doteqdot \frac{d}{dp}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right) =$

диф-м по p

$= \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$

$$\boxed{t\sin\omega t \doteqdot \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}} \quad (7)$$

$\cos\omega t \doteqdot \frac{p}{p^2+\omega^2} \Rightarrow t\cos\omega t \doteqdot -\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right) =$

$= -\frac{p^2+\omega^2-2p^2}{(p^2+\omega^2)^2} = \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$

$$\boxed{t\cos\omega t \doteqdot \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}} \quad (8)$$

Дифференцирование оригинала

Теорема:

Дано: $f(t) \doteqdot \bar{f}(p)$, $f(t)$ и $f'(p)$ удовл-т 3 усл-м (*)

Пр. д-ть: $f'(t) \doteqdot p\bar{f}(p) - \underbrace{f(0)}_{\text{начальное усл-е для оригинала}}$ нуль

Док-во: $\bar{f}(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$

Пусть $f_1 = f'(t) \doteqdot \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt =$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-pt} d(f(t)) = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)\, d\underbrace{e^{-pt}}_{e^{-pt}(-p)dt} =$$

$$= \underbrace{\lim_{t\to+\infty} e^{-pt} f(t)}_{\to 0 \text{ т.к. вып-но усл-е (*)}} - f(0) + p \underbrace{\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt}_{\bar{f}(p)} =$$

$$= p\bar{f}(p) - f(0)$$

Следствия

1) $\exists\ f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ удовл-т (*)

$$f'(t) \doteqdot p\bar{f}(p) - f(0)$$

$$f''(t) = (f'(t))' \doteqdot p\left(p f(p) - f(0)\right) - f'(0) =$$

$$= p^2 \bar{f}(p) - p f(0) - f'(0)$$

$$\boxed{f^{(n)}(t) \doteqdot p^n \bar{f}(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) = - f^{(n-1)}(0)}$$

Следствие 2

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

$$\boxed{f^{(n)}(t) \doteqdot p^n \bar{f}(p)}$$

n кратному диф-ю ориг-ла, при нулевых нач. усл-х, соотв-т умножение изобр-я на p^n

Эта теорема и её следствие лежат в основе применения операционного исч-я к решению линейных диф-х уравнений с постоянными ~~переменными~~ коэф-ми и решения систем таких ур-й операц. методом

П: $y'' - 2y' + y = 2\sin t$

$$y|_{t=0} = 1 \quad , \quad y'|_{t=0} = 0$$

Переходим от ур-я в оригиналах к ур-ю в изобр-х

$$y(t) \doteqdot \bar{y}(p)$$

$$y'(t) \doteqdot p\bar{y}(p) - y(0) = p\bar{y}(p) - 1$$

$$y''(t) \doteqdot p^2\bar{y}(p) - y'(0) = p^2\bar{y}(p) - p$$

$$2\sin t \doteqdot 2\frac{1}{p^2+1}$$

Решаем ур-е в изобр-ии

$$(p^2\bar{y}(p) - p) - 2(p\bar{y}(p) - 1) + \bar{y}(p) = \frac{2}{p^2+1}$$

$$\bar{y}(p)(p^2 - 2p + 1) = \frac{2}{p^2+1} + p - 2$$

$$\bar{y}(p)(p^2 - 2p + 1) = \frac{\cancel{2} + p(p^2+1) - 2(p^2+\cancel{1})}{p^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{y}(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

Переходим от изобр-я к оригиналу

Пр.
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 1 - x \end{cases} \qquad x\big|_{t=0} = 0 \qquad y\big|_{t=0} = 1$$

$$x(t) \doteqdot \bar{x}(p)$$

$$y(t) \doteqdot \bar{y}(p)$$

$$x'(t) = p\,\bar{x}(p)$$

$$y'(t) = p\,\bar{y}(p) - 1$$

$$1 \doteqdot \frac{1}{p} \qquad (!)$$

2)
$$\begin{cases} p\,\bar{x}(p) = \bar{y}(p) \\ p\,\bar{y}(p-1) = \frac{1}{p} - \bar{x}(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p\,\bar{x}(p) - \bar{y}(p) = 0 \\ \bar{x}(p) + p\,\bar{y}(p) = \frac{1}{p} + 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & -1 \\ 1 & p \end{vmatrix} = p^2 + 1$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1+p}{p} & p \end{vmatrix} = \frac{1+p}{p} \Rightarrow \bar{x}(p) = \frac{1+p}{p(p^2+1)}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} p & 0 \\ 1 & \frac{1+p}{p} \end{vmatrix} = 1+p \Rightarrow \bar{y}(p) = \frac{1+p}{p^2+1}$$

3.
$$\bar{x}(p) = \frac{1+p}{p(p^2+1)} = \frac{(p^2+1) + p - p^2}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+1}$$

$$x(t) = 1 + \sin t - \cos t$$