1 Calcolo differenziale in più dimensioni

1.1 Derivate parziali

Derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = f_{x_i}(\vec{x}) = D_{x_i} f(\vec{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,...,x_i+h,...,x_n)-f(\vec{x})}{h}$
Gradiente $\nabla f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\right)$
Derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\vec{x}) = D_v f(\vec{x}) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}+h\hat{v})-f(\vec{x})}{h} =< \nabla f(\vec{x}), \hat{v} >$
Jacobiana $J_{\vec{f}}(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{i=1,...,m;\ j=1,...n} = \begin{pmatrix} \nabla f_i(\vec{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{x_1} f_1(\vec{x}) & \cdots & D_{x_n} f_1(\vec{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{x_1} f_m(\vec{x}) & \cdots & D_{x_n} f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$

$$J_{f^{-1}}(y) = J_f^{-1}(f^{-1}(y)) \qquad\qquad J_{f\circ g}(x) = J_f(g(x))J_g(x)$$

$$g : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^n; f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}; D_x(f\circ g)(x) = D_x f(g(x)) =< \nabla f(g(x)), D_x g(x) >= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial g_i}(g_i(x))\frac{dg_i}{dx}(x)$$

1.2 Derivate parziali seconde

Derivata parziale seconda $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) = f_{x_i x_j}(\vec{x}) = D_{x_i x_j} f(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$
Lemma di Schwarz: $f_{x_i x_j}(\vec{x})$ e $f_{x_j x_i}(\vec{x})$ continue $\Rightarrow f_{x_i x_j}(\vec{x}) = f_{x_j x_i}(\vec{x})$
Hessiana $H_f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x})\right)_{i,j=1,...,n} = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\vec{x}) & \cdots & f_{x_n x_1}(\vec{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_1 x_m}(\vec{x}) & \cdots & f_{x_n x_m}(\vec{x}) \end{pmatrix}$

2 Polinomio di Taylor in più dimensioni

Piano tangente a $f(\vec{x})$ in $\vec{x}_0$: $y = f(\vec{x}_0) + < \nabla f(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 >$
Taylor al primo ordine: $f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + < \nabla f(\vec{x}_0), \vec{h} > + o(||\vec{h}||)$ per $||\vec{h}|| \to 0$
Taylor al secondo ordine: $f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + < \nabla f(\vec{x}_0), \vec{h} > + \frac{1}{2} < \vec{h}\nabla f(\vec{x}_0), \vec{h} > + o(||\vec{h}||^2)$ per $||\vec{h}|| \to 0$

3 Varietà

Varietà n-k dimensionale: $\Gamma = \{\vec{x} \in \mathcal{R}^n : g_1(\vec{x}) = 0, \ldots, g_k(\vec{x}) = 0\}$
Spazio normale $N_{\vec{x}}\Gamma = \{\vec{h} \in \mathcal{R}^n : \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k : \vec{h} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(\vec{x})\} = span(\{\nabla g_i(\vec{x})\}_{i=1,...,k})$
Spazio tangente $T_{\vec{x}}\Gamma = \{\vec{h} \in \mathcal{R}^n :< \nabla g_1(\vec{x}), \vec{h} >= 0, \ldots, < \nabla g_k(\vec{x}), \vec{h} >= 0\}$
Caso n=3, k=2: $T_x\Gamma = span(\nabla g_1(\vec{x}) \wedge \nabla g_2(\vec{x}))$

4 Estremanti

4.1 Richiamo a matrici definite positive o negative

Forma quadratica $F_A : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}:\ F_A(\lambda) =< \lambda, A\lambda >= \lambda^T A\lambda$

$$A \text{ definita positiva} \Leftrightarrow F_A(\lambda) > 0\ \forall \lambda \in \mathcal{R}^n \Leftrightarrow \text{Tutti gli autovalori sono positivi}$$

$$A \text{ semidefinita positiva} \Leftrightarrow F_A(\lambda) \geq 0\ \forall \lambda \in \mathcal{R}^n \Leftrightarrow \text{Tutti gli autovalori sono positivi o nulli}$$

$$A \text{ definita negativa} \Leftrightarrow F_A(\lambda) < 0\ \forall \lambda \in \mathcal{R}^n \Leftrightarrow \text{Tutti gli autovalori sono negativi}$$

$$A \text{ semidefinita negativa} \Leftrightarrow F_A(\lambda) \leq 0\ \forall \lambda \in \mathcal{R}^n \Leftrightarrow \text{Tutti gli autovalori sono negativi o nulli}$$

A matrice reale simmetrica n x n $\Rightarrow \begin{cases} A \text{ definita positiva} \Leftrightarrow \det A_k > 0\ \forall k = 1, ..., n \\ A \text{ definita negativa} \Leftrightarrow (-1)^k \det A_k > 0\ \forall k = 1, ..., n \end{cases}$

4.2 Estremanti relativi

Teorema di Fermat: $A \in \mathcal{R}^n$ aperto; $f : A \to \mathcal{R}$; $\vec{x}_0 \in A$ estremante relativo per $f \Rightarrow \nabla f(\vec{x}_0) = 0$

$$\nabla f(\vec{x}_0) = 0, \begin{cases} H_f(\vec{x}_0) \text{ definita positiva } \Rightarrow \vec{x}_0 \text{ minimo relativo} \\ H_f(\vec{x}_0) \text{ semidefinita positiva } \Rightarrow \vec{x}_0 \text{ minimo relativo o punto di sella} \\ H_f(\vec{x}_0) \text{ indefinita } \Rightarrow \vec{x}_0 \text{ punto di sella} \\ H_f(\vec{x}_0) \text{ semidefinita negativa } \Rightarrow \vec{x}_0 \text{ massimo relativo o punto di sella} \\ H_f(\vec{x}_0) \text{ definita negativa } \Rightarrow \vec{x}_0 \text{ massimo relativo} \end{cases}$$

4.3 Estremanti vincolati (ottimizzazione)

$A \in \mathcal{R}^n$; $f : A \to \mathcal{R}$; $\Gamma \in A$ varietà n-k dim.; $\vec{\lambda} \in \mathcal{R}^k$; Lagrangiana $F(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) - \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(\vec{x})$
$\vec{x}_0 \in A$ estremante relativo per f su $\Gamma \Rightarrow F(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) = 0$

5 Cambio di coordinate

$$T : \mathcal{R}^n_{\vec{u}} \to \mathcal{R}^n_{\vec{x}} \qquad \int_{T(A)} f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_A f(T(\vec{u}))\, |\det J_T(\vec{u})|\, d\vec{u}$$

5.1 Coordinate polari

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arg\{y, x\} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\varphi) \end{pmatrix} \qquad \det J_T(\rho, \varphi) = \rho$$

5.1.1 Cerchio

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \le r^2\} = \{(\rho, \varphi) : 0 \le \rho \le r;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

5.1.2 Semicerchio

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \le r^2;\ x \ge 0\} = \{(x, y) : 0 \le x \le \sqrt{r^2 - y^2}\} = \{(\rho, \varphi) : 0 \le \rho \le r;\ 0 \le \varphi \le \pi\}$$

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \le r^2;\ y \ge x\} = \left\{(\rho, \varphi) : 0 \le \rho \le r;\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5}{4}\pi\right\}$$

5.1.3 Corona circolare

$$\{(x, y) : a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2\} = \{(\rho, \varphi) : a \le \rho \le b;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

5.1.4 Ellisse

$$\left\{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\} = \{(\rho, \varphi) : 0 \le \rho \le 1;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\} \qquad \begin{cases} x = a\rho\cos(\varphi) \\ y = b\rho\sin(\varphi) \end{cases} \qquad \det J_T(\rho, \varphi) = ab\rho$$

5.2 Coordinate cilindriche

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arg\{y, x\} \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \qquad \det J_T(\rho, \varphi, z) = \rho$$

5.2.1 Cilindro a sezioni circolari

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le r^2;\ a \le z \le b\} = \{(\rho, \varphi, z) : 0 \le \rho \le r;\ 0 \le \varphi \le 2\pi;\ a \le z \le b\}$$

5.3 Coordinate sferiche

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arg\{y,x\} \\ \arg\{\sqrt{x^2+y^2}, z\} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \rho\cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \det J_T(\rho,\varphi,\theta) = \rho^2\sin(\theta)$$

5.3.1 Sfera

$$\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq r^2\} = \{(\rho,\varphi,\theta) : 0 \leq \rho \leq r;\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi;\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

5.3.2 Semisfera

$$\{(x,y,z) : 0 \leq z \leq \sqrt{r^2-x^2-y^2}\} = \left\{(\rho,\varphi,\theta) : 0 \leq \rho \leq r;\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi;\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

5.3.3 Elissoide

$$\left\{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\} = \{(\rho,\varphi,\theta) : 0 \leq \rho \leq 1;\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi;\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ b\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ c\rho\cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \det J_T(\rho,\varphi,\theta) = abc\rho^2\sin(\theta)$$

6 Funzioni iperboliche

$$\cosh^2(x)-\sinh^2(x) = 1 \qquad \sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b)+\cosh(a)\cosh(b) \qquad \cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b)+\sinh(a)\sinh(b)$$

$$\int \cosh(x)dx = \sinh(x)+c \qquad \int \sinh(x)dx = \cosh(x)+c \qquad \int \tanh(h)dx = \tan(\cosh(x))+c$$

7 Serie

Serie telescopica $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}-a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}-a_1$

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ convergente $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \begin{cases} \text{Oscillante} & x \leq -1 \\ \frac{1}{1-x} & |x| < 1 \\ \text{Divergente positivamente} & x \geq 1 \end{cases}$

Serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge solo se $p > 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ convergente $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ assolutamente convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ convergente

7.1 Criteri di convergenza

Criterio del confronto: $0 \leq a_n \leq b_n\ \forall n, \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ convergente } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergente },\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge positivamente } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge positivamente} \end{cases}$

Criterio del rapporto: $a_n \geq 0\ \forall n, \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergente} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergente} \end{cases}$

Criterio della radice: $a_n \geq 0 \ \forall n, \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergente} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergente} \end{cases}$

Criterio integrale: $f : [1, +\infty[\to \mathcal{R} \searrow 0, \begin{cases} \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx < +\infty \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ convergente} \\ \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = +\infty \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ divergente} \end{cases}$

Criterio di Leibniz: $\{a_n\}_{n\in\mathcal{N}} \searrow 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ convergente

Criterio di Drichelet: $\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n \text{ a somme parziali limitate} \\ \{b_n\}_{n\in\mathcal{N}} \text{ decrescente e infinitesima } (b_n \searrow 0) \end{cases} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z_n$ convergente

Criterio di Abel: $\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n \text{ convergente} \\ \{b_n\}_{n\in\mathcal{N}} \text{ monotona e limitata} \end{cases} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z_n$ convergente

7.2 Serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n \text{ convergente } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ assolutamente convergetne per } |x| < |x_0|$$

Raggio di convergenza $R = \sup \left\{ |x| : \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ converge assolutamente } \right\}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ se esiste} \qquad \lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \text{ se esiste; } R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \lambda > 0 \\ +\infty & \lambda = 0 \end{cases}$$

7.3 Serie di Taylor

$$\exists M > 0 : |f^{(n)}(x)| \leq M^n \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow \ f(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}, \ x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

7.4 Serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x)dx \qquad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx$$

$$f(x) \text{ pari } \Rightarrow \ b_n = 0, \ \ a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx$$

$$f(x) \text{ dispari } \Rightarrow \ a_n = 0, \ \ b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx$$