Corso di Algebra Lineare e Geometria
Insiemi

Dott.ssa L. Marino

Università di Catania

http://www.dmi.unict.it/lmarino

Testi consigliati

Libri **esercizi**:
P. Bonacini, M.G. Cinquegrani, L. Marino, *Algebra Lineare: Esercizi svolti*, Ed. Cavallotto, Catania 2012
P. Bonacini, M.G. Cinquegrani, L. Marino, *Geometria Analitica: Esercizi svolti*, Ed. Cavallotto, Catania 2012

Insieme

Si ammette come primitivi il concetto di insieme e di elemento di un insieme.
Un insieme viene indicato con le lettere maiuscole dell'alfabeto (es. A, B, C,...)
e gli elementi con le lettere minuscole (es. a,b,c,..).

Si scrive $a \in A$ quando l'elemento a fa parte dell'insieme A
(letto correttamente: a appartiene all'insieme A)
mentre $a \notin A$ significa che l'elemento a non appartiene all'insieme A.

I tre modi per rappresentare un insieme. Modo n.1

Un insieme può essere rappresentato
1) **Per elencazione**:

$$A = \{a, b, c\}$$

L'insieme A è composto dagli elementi a, b, c.
Notiamo che però ad esempio per l'insieme dei numeri naturali $N = \{1, 2, 3, \cdots\}$ questo modo non va bene poichè esso ha infiniti elementi.

Modo n.2

2) **Per caratteristica**:

$$A = \{a \mid a \text{ "}\textit{possiede la propr. P}\text{"}\}$$

Esempio:
Dato D l'insieme che contiene tutti i numeri dispari (D = 1, 3, 5, ...).
Non è necessario (nè realmente possibile) elencare uno alla volta ognuno dei membri che lo costituiscono
quindi ci limiteremo quindi ad enunciarne la proprietà caratteristica che li accomuna, ossia essere dispari:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ "}\textit{dispari}\text{"}\}$$

Modo n.3

3) Per **rappresentazionо grafica**:
E' anche possibile descrivere un insieme di elementi finiti raffigurandolo come una curva chiusa,
i cui elementi sono rappresentati all'interno come dei punti.
Questo metodo di rappresentazione degli insiemi
come spazi chiusi contenenti gli elementi rappresentati come punti, è detto **diagrammi di Eulero- Venn**.

Insiemi noti

Insiemi molto importanti per la nostra materia sono gli insiemi numerici $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ contenenti rispettivamente:
$\mathbb{N}$ i numeri naturali ,
$\mathbb{Z}$ i numeri relativi,
$\mathbb{Q}$ i numeri razionali,
$\mathbb{R}$ i numeri reali
$\mathbb{C}$ i numeri complessi.
Questi insiemi descrivono la totalità dei numeri, e verranno ampiamente usati,
Un insieme particolare è l'insieme vuoto che si indica con il simbolo $\varnothing$:
esso indica un insieme privo di alcun elemento,
e come tale è sottoinsieme di tutti gli insiemi.

Inclusioni tra gli insiemi

Tra gli insiemi numerici valgono le seguenti inclusioni:

$$\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Il simbolo

$$A \subseteq B$$

indica che tutti gli elementi di A sono inclusi nell'insieme B e si dice che A è un sottoinsieme di B oppure che A è incluso in B.

Simbolo di inclusione

Per esempio gli insiemi
$A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{5, 10, 15\}$ sono entrambi sottoinsiemi di $\mathbb{N}$.
Il simbolo

$$\subseteq$$

ammette che i due insiemi siano uguali, (es $A = \{1, 2, 3\} \ \subseteq B = \{3, 1, 2\}$
mentre il simbolo

$$\subset$$

detto anche "sottoinsieme stretto" non ammette che i due insiemi siano uguali. A volte per sottolineare la negazione dell'uguaglianza viene usato anche il simbolo $\subsetneq$.

Cardinalità

Se A è un insieme che ha un numero finito di elementi, allora si utilizzerà il simbolo $|A|$.
Per indicare il numero degli elementi che contiene si usa il fattore detto **cardinalità**.
La cardinalità di un insieme è il numero di elementi in esso contenuti. Ad esempio nell'insieme$A = \{0, 1, 2\}$ la cardinalità è 3 (letto correttamente: l'insieme A ha cardinalità 3).

Operazioni tra insiemi

1) Unione:

$$A \cup B = \{x |\ x \in A\ o\ x \in B\}$$

2) Intersezione:

$$A \cap B = \{x |\ x \in A\ e\ x \in B\}$$

3) Differenza:

$$B \setminus A = \{x |\ x \in B\ e\ x \notin A\}$$

4) Prodotto cartesiano:

$$AXB = \{(a, b) |\ a \in Ae\ b \in B\}$$

tutte le possibili coppie ordinate

Proprietà degli insiemi

Per gli insiemi valgono:
Proprietà commutativa dell'unione e dell'intersezione:
$A \cap B = B \cap A$
$A \cup B = B \cup A$
Proprietà associativa dell'unione e dell'intersezione:
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Proprietà riflessiva dell'unione e dell'intersezione:
$A \cap A = A$
$A \cup A = A$
Proprietà distributiva:
$A \cap (B \cup C) = (A \cap C) \cup (A \cap B)$.
Si noti che la differenza è anti-commutativa.

Particolarità

L'insieme vuoto è l'elemento neutro dell'unione:
$A \cup \varnothing = A$
Intersecando un insieme con l'insieme vuoto, si ottiene un altro insieme vuoto:
$A \cap \varnothing = \varnothing$