Numeri Complessi

$\mathbb{C} = \mathbb{R} \cdot \mathbb{R}$

→ coppia ordinata $(a,b) = a + ib$ a e $b \in \mathbb{R}$

a = parte reale, b = parte immaginaria

→ $i^2 = -1$

→ $i \notin \mathbb{R}$

→ OPERAZIONE CON NUMERI COMPLESSI

valgono le regole algebriche tranne per ~~...~~ $i^2 = -1$

① Somma algebrica $z_1 + z_2 =$

ES: $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 4-2i$ → $2+4+3i-2i = 8+i$

~~② sottrazione~~

② moltiplicazione

$z_1 \cdot z_2 =$

ES: $(2+3i)(4-2i) = 8-4i+12i+6 = 14+8i$

③ divisione

- no regole canoniche!!!

$z = a+ib$

$z^{-1} \neq \frac{1}{z}$

• perchè nei numeri ~~co~~ complessi l'elemento neutro è $1+0i$. (nei reali è invece 1)

• quindi

$z \cdot z^{-1} = 1 \cdot 0i$

poichè il reciproco di n è quel numero che moltiplicato per n mi da l'elemento neutro.

• $(a+ib)\cdot\frac{(a-ib)}{(a^2+b^2)} = 1 \cdot 0i$

$z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$

→ il coniugato di z

$z = a+ib \Rightarrow \bar{z} = a-ib$

si cambia il segno della parte immaginaria

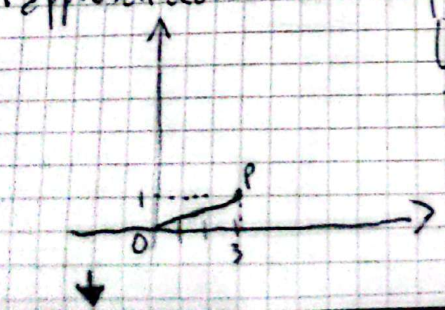
→ $z \cdot \bar{z}$ = somma • differenza

→ $z = \bar{z} \iff$ parte reale con parte immaginaria $= 0$

→ rappresentazione dei complessi

$(3,1) \in \mathbb{C} = 3+i$

$\vec{z} = \vec{OP} = \binom{3}{1}$



Usiamo il Teorema di pitagora per calcolare $\vec{OP} = \vec{z}$

$$|\vec{z}| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

↓ vettore nullo:

$$\vec{z} = 0 \iff z = 0$$

- Teoricamente non esiste è una forzatura matematica per i calcoli

↓ Somma tra vettori:

$$|\vec{z}+\vec{z_1}| \le |\vec{z}| + |\vec{z_1}|$$

- metodo punta coda:

- $\vec{z}\cdot\vec{z_1} = |\vec{z}|\cdot|\vec{z_1}|$

Verifica

- ES: $z = 2+3i$ $\quad z^{-1} = ?$

$$z^{-1} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2-3i}{13}$$

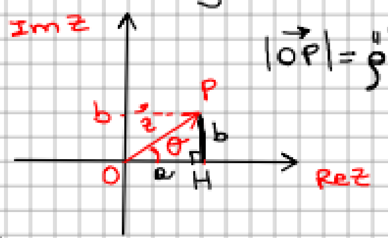
$$z\cdot z^{-1} = 1+0i$$

$$(2+3i)\cdot\left(\frac{2-3i}{13}\right) = 1+0i$$

$$\frac{4-\cancel{6i}+\cancel{6i}+9}{13} = 1+0i$$

$$\frac{\cancel{13}^{1}}{\cancel{13}_{1}} = 1+0i$$

Forma trigonometrica dei n° complessi



$|\vec{OP}| = \rho$ "RO"

θ = teta

Th1 "In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto stesso"

$\overset{\triangle}{OPH}$ = Triangolo rettangolo

$$\overline{PH} = |\vec{OP}|\cdot\sin\theta = \overbrace{\rho\sin\theta}^{b}$$

Th2 "In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente al cateto stesso" ($\neq 90°$)

BASE:

$$\overline{OH} = |\vec{OP}|\cdot\cos\theta = \overbrace{\rho\cos\theta}^{a}$$

$$\boxed{z = a+ib} = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \boxed{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

FORMULA DI DE MOIVRE

$$z^n = \left(\rho(\cos\theta + i\sin\theta)\right)^n = \rho^n(\cos n\theta + \sin n\theta)$$

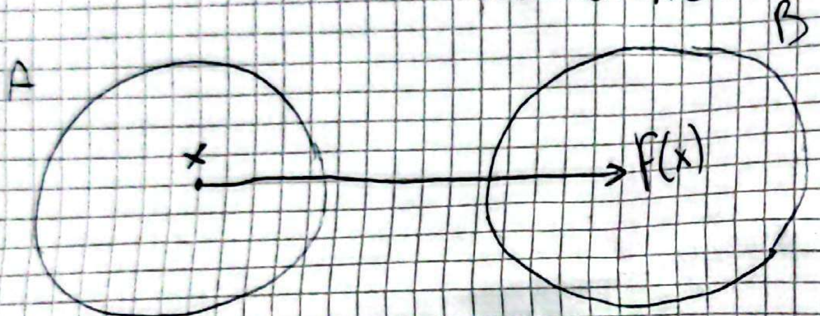
Equazione

$$x^m - z = 0 \qquad x = \sqrt[m]{z} =$$

Radice m-esima di un n° complesso z :

$$= \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{m} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{m}\right)$$

Funzione



Ad ogni elemento del dominio viene associato un solo elemento del codominio

insieme partenza = dominio

insieme arrivo = Codominio

→ $\text{Im } f$ = Immagine $= \{ b \in B : \exists\, a \in A \;\; f(a) = b \}$

→ Operazioni considerate come funzioni

↓

~~Operazioni binarie~~

Operazioni binarie → definite in un insieme A

→ somma ϕ = phi $\qquad \phi : A * A \to A$

$(2,5) \longrightarrow 7$

↓

nota bene

con $A * A \to A$ non intendo
una moltiplicazione. Infatti ho
fatto la somma. Si intende
che $A + A$ il risultato
cade sempre dentro A.
Infatti si dice operazione
binaria interna!

↓

differenza

→ ~~moltiplicazione~~ → non interna!

$-\quad N * N \to N$ No!

$(2,5) \Rightarrow -3 \notin N$

→ Prodotto scalare → non interna!

$W = \vec{F} \cdot \vec{S} = K \in R$

$V * V \to R$

$(F, S) \to K \in R$

?

→ Proprietà operazioni → $\forall a, b, c \in R$

① ASSOCIATIVA $c*(a*b) = \cancel{c(a+a)} \; a*(c*b)$

② COMMUTATIVA $a*b = b*a$

3) Elemento neutro:

è quell'elemento che di solito si indica con $e \in G$ tale che

$$a * e = a \qquad (e * a = a)$$

(nel caso che $* = +$ in questo $e = 0$
 " " " $* = \cdot$ " $e = 1$)

4) Se G ammette l'elemento neutro $(e \in G)$ allora definiamo elemento inverso di a, e si indica con a^{-1}, il seguente: $a * a^{-1} = e$
$(a^{-1} * a = e)$

G GRUPPO {∃ = esiste}

Un insieme G su cui è definita un'operazione $*$ e si indica $(G, *)$ si chiama $\boxed{\text{GRUPPO}}$

se per l'operazione $*$ valgono 3 proprietà
1) ASSOCIATIVA
2) $\exists\, e \in G$
3) $\exists\, a^{-1} \in G$

Se vale la commutativa allora il gruppo si dice ABELIANO o COMMUTATIVO (3+1)

Esempio $\quad G = \mathbb{N}$

$(\mathbb{N}, +)$

$* = +$

1) Associativa vale? si
2) $e_+ = 0 \in \mathbb{N}$? si
3) a^{-1}: $a^{-1} + a = \underset{0}{e_+}$ $\quad a^{-1} = -a$

3 elem. inverso è $-3 \notin \mathbb{N}$ $\quad \nexists\, a^{-1}$ dentro $\mathbb{N}$

NON VALE LA PROPRIETÀ N°3 $\Rightarrow (\mathbb{N}, +)$ NON È GRUPPO

$(\mathbb{Z}, +)$
1) ✓
2) ✓
3) ✓
4) ✓

→ GRUPPO ABELIANO

$(\mathbb{Q}, +)$ $\quad (\mathbb{R}, +)$ $\quad$ // $\quad$ //

Anello A

Dato l'insieme A e due operazioni $\boxed{+, *}$ tale insieme si chiama Anello se valgono (3+1) risp. alla 1° operazione $+$ e

5) $*$ ASSOC.
6) DISTRIBUT
$a*(b+c) = a*b + a*c$
$(a+b)*c = a*c + b*c$

(rispetto alla 2° operazione $*$)

SI INDICA CON $(A, +, *)$

7) $*$ COMMUTATIVA

Se vale la commutativa allora L'ANELLO si di COMMUTATIVO (6+1)

Esempi :

$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 3+1 risp. alla + → NON É GRUPPO

→ NON É NEANCHE ANELLO

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 3+1 risp alla + $\boxed{\text{VERO}}$

5) ASS. risp. • vale in $\mathbb{Z}$

6) Distributive valgono in $\mathbb{Z}$ → $\mathbb{Z}$ é ANELLO $(+, \cdot)$ COMMUTAT

7) Commutativa • vale in $\mathbb{Z}$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sono anelli commutativi

CAMPO K

"Dicesi campo un anello commutativo che ha questa proprietà: ogni elemento diverso da zero é invertibile" (risp 2° oper.) ■

(7 + 1)

Esempi di campi:

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é un campo? 7+1? 7 SI vedo l'ultima?

$a \in \mathbb{Z}$ $a \neq 0$ Il suo inverso rispetto alla seconda operazione

$3 \cdot \boxed{\frac{1}{3}} = \overset{e_*}{1}$ sta dentro $\mathbb{Z}$? NO → NON VALE LA PROPR. ■

$\Rightarrow (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ NON É CAMPO

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ campo? 7+1?

7 ok

Vediamo se vale ■: $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0 \rightarrow \frac{1}{a} \in \mathbb{Q}$?

SI

VALE LA PROPR. ■ $\Rightarrow (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ é campo

VERA

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ campo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ campo

Noi parleremo sempre di campo dei n° reali $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ o campo dei numeri complessi $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

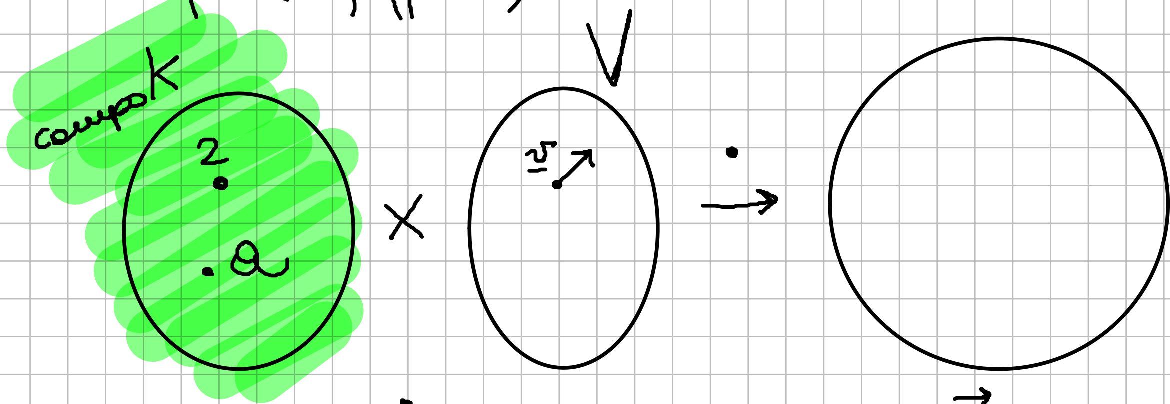
Operazione esterna

Definiamo Operazione esterna f:

$$f: K \times V \to V$$

V = insieme di vettori.

con K = campo ($\mathbb{R}$, opp $\mathbb{C}$)

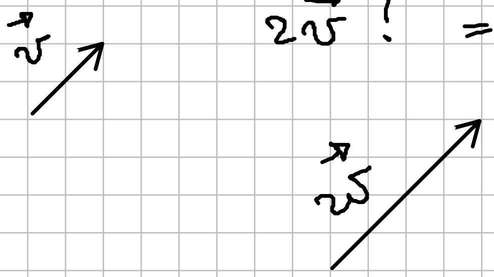


$(2, \vec{v})$ $\qquad$ $2 \cdot \vec{v}$

$(a, \vec{v}) \mapsto a \cdot \vec{v}$ si chiama «prodotto esterno» inteso tra un numero del campo K e un vettore $\vec{v}$

$2\vec{v}$? $=: \vec{w}$ vettore

modulo $2|\vec{v}|$
direzione quella di $\vec{v}$
verso stesso di $\vec{v}$ (se $a>0$)
oppure opposto a quello di $\vec{v}$ se $a<0$



Dato un insieme V

$(V, +, \cdot)$ con 2 operazione dove la prima è la somma e la seconda è il prodotto esterno (vedi sopra) allora se valgono determinate proprietà con queste due operazione si può parlare di SPAZIO VETTORIALE

* NOTA Per avere la 2° operaz. "prod. esterno" ho la necessità di fissare un campo K

ecco perché si parla sempre
di spazi vettoriali sul campo K
oppure si dice "Dato V un K-spazio vettoriale ...."