Lezione n°2 (9-10-25)

$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

coppia ordinata $(a, b) = a + ib$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

a: parte reale $\quad b$: parte immaginaria

$$\boxed{i^2 = -1}$$

dove $i \notin \mathbb{R}$ poiché i^2 è negativo!!

Operazioni con i numeri complessi

1) somma

$z_1 = a + ib$ $\qquad z_2 = c + id$ $\qquad$ Calcolare $z_1 + z_2$?

(esempio $z_1 = 2 + 3i$ $\quad z_2 = 4 - 2i$ $\quad z_1 + z_2 = 2 + 3i + 4 - 2i = 6 + i$)

$$\boxed{z_1 + z_2 = a + c + i(b + d)}$$

2) prodotto

$z_1 = a + ib$ $\qquad z_2 = c + id$ $\qquad$ Calcolare $z_1 \cdot z_2$?

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + \underbrace{i^2}_{=-1} bd =$$

$$= ac + i(ad + bc) - bd =$$

$$= (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$z_1 = 4 + i$ $\qquad z_2 = 3 - 2i$ $\qquad z_1 \cdot z_2 = (4 + i)(3 - 2i) =$

$$= 12 - 8i + 3i - 2\underbrace{i^2}_{-1} = 12 - 5i + 2 = 14 - 5i$$

Divisione non usa le regole canoniche di $\mathbb{R}$

$z = a + ib$

L'inverso z^{-1} non è $\cancel{\frac{1}{z}} = \cancel{\frac{1}{a + ib}}$

L'inverso (o reciproco) di un numero complesso $z = a + ib$ è quel numero complesso z^{-1}, che moltiplicato per z dà come risultato 1 $(1 + 0i)$. Per trovarlo, si può utilizzare la formula $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, dove $\bar{z} = a - ib$ è il complesso coniugato di z e $|z|^2 = a^2 + b^2$ è il quadrato del suo modulo.

$z \cdot z^{-1}$ = ELEMENTO NEUTRO DELLA MOLTIPLICAZIONE IN $\mathbb{C}$ È $(1+0i)$

$$z \cdot \underbrace{z^{-1}} = 1 + 0i$$

$$(a+ib) \cdot \underbrace{\frac{(a-ib)}{a^2+b^2}} \stackrel{?}{=} 1 + 0i$$

VERO O FALSO?

Se è vero vuol dire che $\boxed{z^{-1} = \frac{\boxed{a-ib}}{a^2+b^2}}$ CONIUGATO DI z $= \underbrace{\frac{a}{a^2+b^2}}_{\text{Re}\,z} - \underbrace{\frac{b}{a^2+b^2}}_{\text{Im}\,z} i$

Verifica

$$\frac{a^2 - i^2 b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2 - (-b^2)}{a^2+b^2} = 1 + 0i$$

$\boxed{\text{VERO CVD}}$

Esempio

Dato $z = 2+3i$ calcolare z^{-1} (che non è $\cancel{1/z}$)

$\cancel{\frac{1}{2+3i}}$

$$z^{-1} = \frac{2-3i}{\underbrace{4+9}_{=13}} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13} i$$

Verifica: $z \cdot z^{-1} = 1$

$$(2+3i)\left(\frac{2-3i}{13}\right) = \frac{4 - 9i^2}{13} = \frac{4+9}{13} = \frac{13}{13} = 1 \quad \text{CVD}$$

Dicesi "coniugato" $\overline{z}$ di un numero complesso $z = a + ib$ il seguente:

$$z = a + ib \qquad \overline{z} = a - ib$$

Conseguenze:

solo parte reale

$$z + \overline{z} = a + \cancel{ib} + a \cancel{- ib} = 2a + 0i = (2a, 0) = 2a \in \mathbb{R}$$

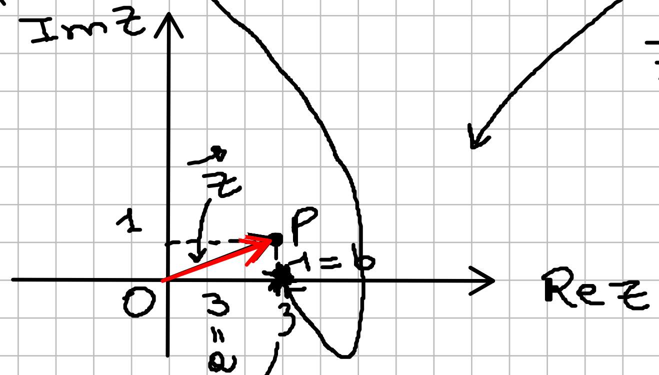
$$z \cdot \overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2$$

$z = \overline{z} \iff$ É N° REALE (CON PARTE IMMAG. ZERO)

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ con parte immaginaria zero

$(3,0) = 3 + i \cdot 0 \in \mathbb{R}$ $\boxed{(3, 1) \in \mathbb{C} = 3 + i}$

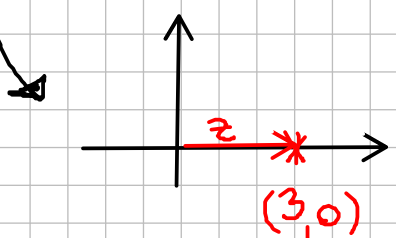
Rappresentazione dei n° complessi mediante vettori



$$\vec{z} = \overrightarrow{OP} = (\underset{z_x}{3}, \underset{z_y}{1})$$

Applico il teorema di Pitagora per trovare il modulo del vettore $\vec{z}$

$$|\vec{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$



$\underset{\text{modulo}}{|\vec{z}|}$ = valore assoluto di $3 = |3|$

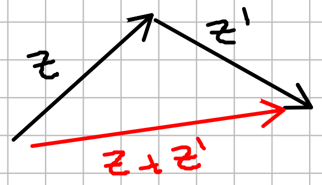
$$= \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{3^2} = |3|$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Proprietà sui moduli:

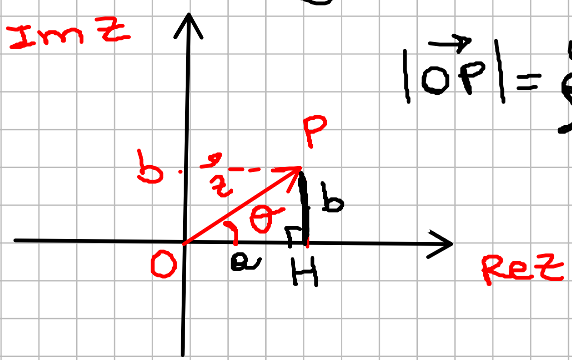
1) $|\vec{z}| \geq 0$ 2) $|\vec{z}| = 0 \iff z = 0$

2) $|\vec{z}+\vec{z}'| \le |\vec{z}| + |\vec{z}'|$



3) $|\vec{z}\cdot\vec{z}'| = |\vec{z}|\cdot|\vec{z}'|$

Forma trigonometrica dei n° complessi



$|\vec{OP}| = \underset{\text{RO}}{\rho}$

θ = teta

Th1 "In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto stesso"

$\triangle OPH$ = Triangolo rettangolo

$\overline{PH} = |\vec{OP}|\cdot \operatorname{sen}\theta = \overbrace{\rho \operatorname{sen}\theta}^{b}$

Th2 "In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente al cateto stesso" ($\ne 90°$)

BASE:

$\overline{OH} = |\vec{OP}|\cdot\cos\theta = \overbrace{\rho\cos\theta}^{a}$

$$\boxed{z = a + ib} = \rho\cos\theta + i\,\rho\operatorname{sen}\theta = \boxed{\rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}$$

FORMULA DI DE MOIVRE

$$z^n = \left(\rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\right)^n = \rho^n(\cos n\theta + \operatorname{sen} n\theta)$$

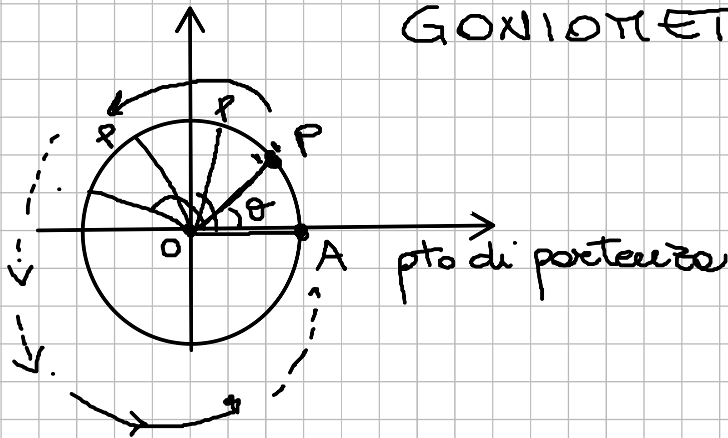
Equazione

$x^n - z = 0 \qquad x = \sqrt[n]{z} =$

Radice n-esima di un n° complesso z:

$$= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

GONIOMETRIA

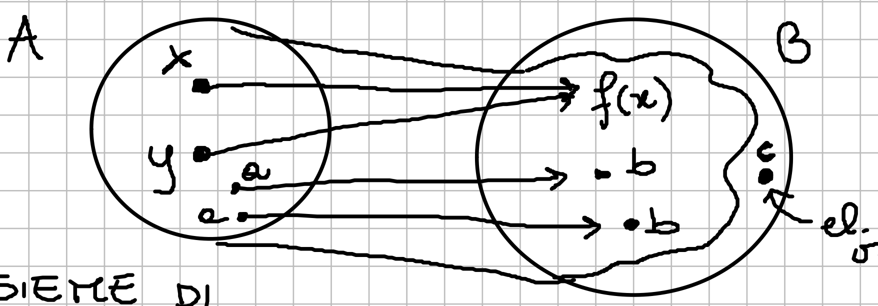


$380 = 1 \text{ giro} + 20°$

$740° = 360 + 360 + 20°$
$= 2 \text{ giri} + 20°$

$20° + 2k\pi =$
$= 20° + k(\overset{360}{2\pi})$

Concetto di funzione



ad ogni elemento di A associamo <u>uno</u> e <u>un solo</u> elemento di B

INSIEME DI PARTENZA

DOMINIO

B INSIEME DI ARRIVO

CODOMINIO

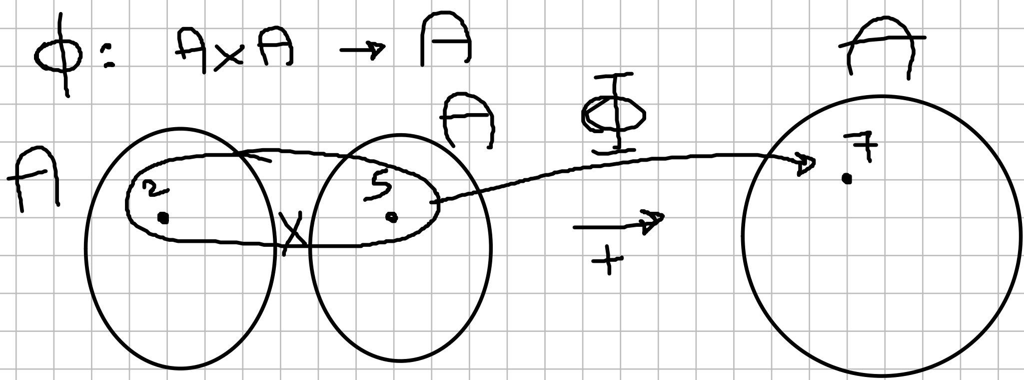
$c \notin \mathrm{Im} f$

$\mathrm{Im} f = \text{Immagine} = \{ b \in B : \exists a \in A \ f(a) = b \}$

Operazione binaria definita su un insieme A

$\phi = \text{phi}$

$\phi : A \times A \to A$



$(2, 5) \longmapsto 7$

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (a,b) \mapsto a+b$

Operazione binaria interna se il risultato dell'operazione è interno ad A

$- : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ non va bene

$$(2,5) \longrightarrow 2-5=-3 \notin \mathbb{N}$$

$+_{\text{vettori}} : V \times V \to V$

Prodotto scalare tra 2 vettori:
concetto di lavoro $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = k \in \mathbb{R}$ [joule]

$$V \times V \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R}$$
$$(\vec{F}, \vec{s}) \longrightarrow k \in \mathbb{R}$$

NON È OP. BINARIA «INTERNA»

Proprietà di cui può godere un'operazione: $*$ ($+$) opp ($\cdot$)
DATO UN INSIEME G

1) associativa $(a*b)*c = a*(b*c) \quad \forall a,b,c \in G$

2) commutativa $a*b = b*a \quad \forall a,b \in G$

3) Elemento neutro:
è quell'elemento che di solito si indica con $e \in G$
tale che
$$a * e = a \qquad (e * a = a)$$

(nel caso che $* = +$ in questo $e = 0$
" " " $* = \cdot$ " $e = 1$)

4) Se G ammette l'elemento neutro ($e \in G$) allora definiamo elemento inverso di a, e si indica con a^{-1}, il seguente: $a * a^{-1} = e$
$(a^{-1} * a = e)$

G GRUPPO {$\exists$ = esiste}

Un insieme G su cui è definita un'operazione $*$ e si indica $(G, *)$ si chiama $\boxed{\text{GRUPPO}}$

se per l'operazione $*$ valgono 3 proprietà
1) ASSOCIATIVA
2) $\exists\, e \in G$
3) $\exists\, a^{-1} \in G$

Se vale la commutativa allora il gruppo si dice ABELIANO o COMMUTATIVO (3+1)

Esempio

$G = \mathbb{N}$

$(\mathbb{N}, +)$

$* = +$

1) Associativa vale? si
2) $e_+ = 0 \in \mathbb{N}$? si
3) a^{-1}: $a^{-1} + a = e_+ = 0$ $\quad a^{-1} = -a$

3 elem. inverso è $-3 \notin \mathbb{N}$ $\quad \nexists\, a^{-1}$ dentro $\mathbb{N}$

NON VALE LA PROPRIETÀ N° 3 $\Rightarrow (\mathbb{N}, +)$ NON È GRUPPO

$(\mathbb{Z}, +)$
1) ✓
2) ✓
3) ✓
4) ✓

$\rightarrow$ GRUPPO ABELIANO

$(\mathbb{Q}, +)$ $\quad (\mathbb{R}, +)$ $\quad$ // $\quad$ //

Anello A

Dato l'insieme A e due operazioni $\boxed{+, *}$ tale insieme si chiama Anello se valgono (3+1) risp. alla 1° operazione $+$ e

5) $*$ ASSOC.
6) DISTRIBUT.
$a*(b+c) = a*b + a*c$
$(a+b)*c = a*c + b*c$

rispetto alla 2° operazione $*$

SI INDICA CON $(A, +, *)$

7) $*$ COMMUTATIVA

Se vale la commutativa allora L'ANELLO si di COMMUTATIVO (6+1)

Esempi :

$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 3+1 risp. alla + → NON É GRUPPO

→ NON É NEANCHE ANELLO

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 3+1 risp alla + $\boxed{\text{VERO}}$

5) ASS. risp. • vale in $\mathbb{Z}$

6) Distribut.ve valgono in $\mathbb{Z}$

7) Commutativa • vale in $\mathbb{Z}$

→ $\mathbb{Z}$ é ANELLO $(+, \cdot)$ COMMUTAT

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sono anelli commutativi

CAMPO K

"Dicesi campo un anello commutativo che ha questa proprietá: ogni elemento diverso da zero é invertibile" (risp 2° oper.) ■

(7 + 1)

Esempi di campi:

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é un campo? 7+1? 7 SI vedo l'ultima?

$a \in \mathbb{Z}$ $a \neq 0$ Il suo inverso rispetto alla seconda operazione

$3 \cdot \boxed{\frac{1}{3}} = \overset{e_*}{1}$

sta dentro $\mathbb{Z}$? NO → NON VALE LA PROPR. ■

$\Rightarrow (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ NON É CAMPO

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ campo? 7+1?

7 ok

Vediamo se vale ■: $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0 \rightarrow \frac{1}{a} \in \mathbb{Q}$?

SI

VALE LA PROPR. ■ $\Rightarrow (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ é campo VERA

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ campo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ campo

Noi parleremo sempre di campo dei n° reali $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ o campo dei numeri complessi $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

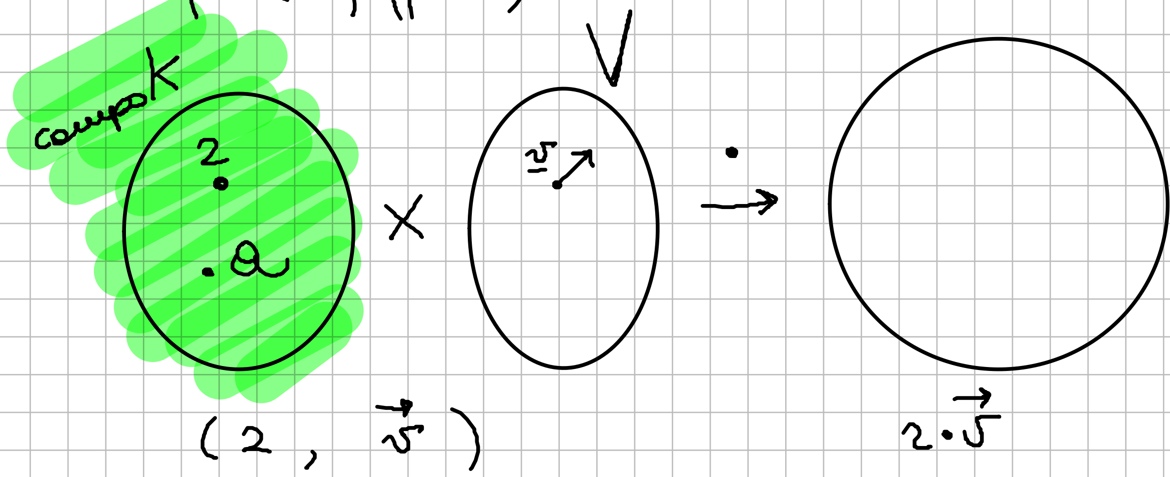
Operazione esterna

Definiamo Operazione esterna f:

$$f: \ K \times V \longrightarrow V$$

V = insieme di vettori

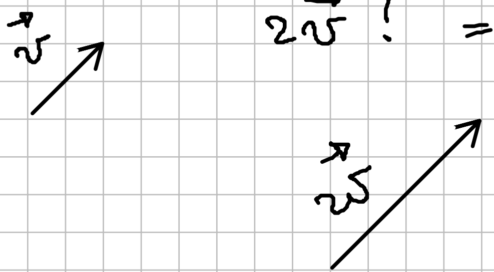
con K = campo ($\mathbb{R}$, opp $\mathbb{C}$)



$$(a, \vec{v}) \longmapsto a\cdot\vec{v}$$ si chiama

«prodotto esterno»

inteso tra un numero del campo K
e un vettore $\underline{v}$



$2\vec{v}$? $=: \vec{w}$ vettore

modulo $2|\vec{v}|$
direzione quella di $\vec{v}$
verso stesso di $\vec{v}$
(se $a>0$)
oppure opposto a quello
di $\vec{v}$ se $a<0$

Dato un insieme V
$(V, +, \cdot)$ con 2 operazione dove la prima
è la somma e la seconda è il
prodotto esterno (vedi sopra)
allora se valgono determinate proprietà
con queste due operazione si può parlare di
SPAZIO VETTORIALE

* NOTA Per avere la 2° operaz. "prod. esterno" ho la necessità di fissare un campo K

ecco perché si parla sempre di spazi vettoriali sul campo K
oppure si dice "Dato V un K-spazio vettoriale ...."