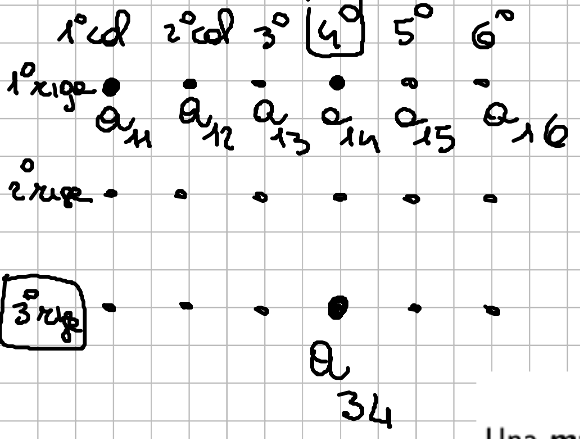
Lezione n.3 (14-10-25)

MATRICI PARTE N. 1

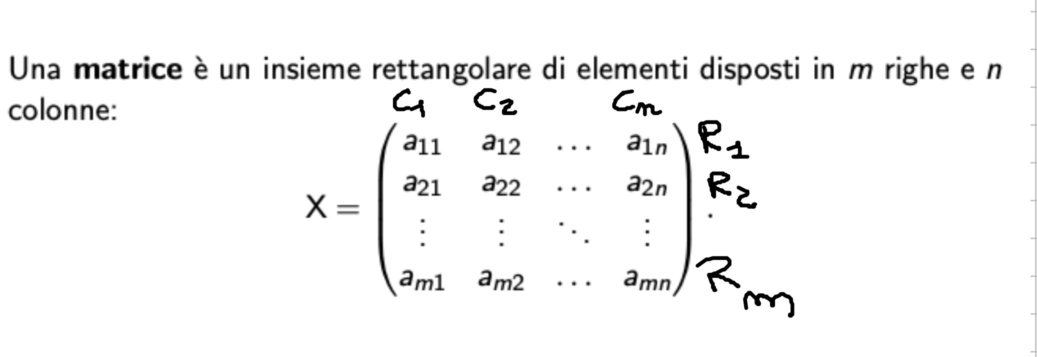
Cosa è una matrice

Una matrice è una tabella con m righe ⇒ $m=3$

n colonne ⇒ $n=6$



$$a_{\underset{\text{riga}}{i}\underset{\text{colonna}}{j}}$$



Una **matrice** è un insieme rettangolare di elementi disposti in *m* righe e *n* colonne:

$$X = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & & C_n \end{array} \\ & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{array} \end{array}$$

$a_{ij} \in K$ (K campo $= ((\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}), +, \cdot)$)

L'insieme di tutte le matrici $m \times n$ (cioè m righe, n colonne) viene indicato con $\boxed{K^{m,n}}$ $K^{3,4}$

$\mathbb{R}^{3,4}$ ⇒ matrice 3 righe, 4 colonne, con coeff. reali

- Se $m=n$ avremo matrici quadrate

2 × 2 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

3x3 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

4x4 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$

Operazioni tra matrici

Operazione n. 1 : SOMMA TRA DUE MATRICI $m \times n$

$A = (a_{ij})$ $B = (b_{ij})$ di tipo $m \times n$ su un campo K

3x4 3x4

$a_{ij} \in K$, $b_{ij} \in K$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \textcircled{1} & \boxed{\boxed{0}} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{0} & \textcircled{1} & \boxed{\boxed{0}} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 1+1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somma tra matrici : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$i = 1, \dots, m$ $j = 1, \dots, n$

Proprietà della somma :

1) Associativa : date tre matrici A, B, C si ha che

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

2) Esistenza elem. neutro $e_+ = 0 = \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & 0 \end{pmatrix}$

Matrice nulla è l'elem. neutro della +

3) Esistenza elem. inverso : $a_+^{-1} \Rightarrow$ OPPOSTO $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots \\ \dots & \end{pmatrix}$

Matrice opposta $-A = [-a_{ij}]$

4) Commutativa $A+B = B+A$

$\boxed{31}$ + 1 portavano al gruppo abeliano
quindi diremo $\boxed{(K^{m,n}, +) \text{ GRUPPO ABELIANO}}$

OPERAZIONE N°2

■ **Prodotto esterno** (per uno scalare)

$$h \in K \qquad \underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow h\cdot A = \begin{pmatrix} ha_{11} & ha_{12} & ha_{13} \\ ha_{21} & ha_{22} & ha_{23} \end{pmatrix}$$

Esempio => $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $h = 3$ allora

$$3\cdot A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 & 6 \\ 3 & -12 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

OPERAZIONE N°3

■ **Prodotto tra matrici**

$$\underset{m\times \cancel{n}}{A} \;\overset{}{=}\; \underset{\cancel{n}\times p}{B} = \underset{m\times p}{C}$$

$$\underbrace{\underset{3\times 4}{A} \cdot \underset{3\times 4}{B}}_{\neq} \quad \text{IMPOSSIBILE} \quad \nexists \text{ prodotto}$$

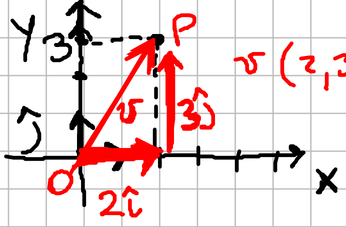
$$\underbrace{\underset{3\times \cancel{4}}{A} \cdot \underset{\cancel{4}\times 5}{B}}_{=} = \underset{3\times 5}{C} \quad \exists$$

Condizione per il prodotto: il n° di righe della 2° matrice deve essere uguale al n° di colonne della 1° matrice

$$\boxed{(a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4}$$

"si chiama prodotto scalare tra 2 quaterne"

$$v(\underset{\overset{\uparrow}{v_x}}{2},\underset{\overset{\uparrow}{v_y}}{3}) = 2i + 3j$$



$v(2,3) = \vec{OP} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$

$\hat\imath$ = versore asse x (modulo 1)

$\hat\jmath$ = versore ha modulo 1

Prodotto scalare tra 2 vettori, ripassiamolo.

$$\vec v_1 \cdot \vec v_2 = |\vec v_1|\,|\vec v_2| \cdot \cos\theta$$

teta

$$\hat\imath \cdot \hat\imath = |\hat\imath| \cdot |\hat\imath| \cdot \cos 0° = 1\cdot 1\cdot 1 = \boxed{1}$$

$$\hat\imath \cdot \hat\jmath = |\hat\imath|\,|\hat\jmath| \cos 90° = 1\cdot 1\cdot 0 = \boxed{0}$$

$\boxed{\hat\imath\cdot\hat\jmath = \hat\jmath\cdot\hat\imath}$ vale la commutativa

*
$$\boxed{\begin{array}{l}\hat\imath\cdot\hat\imath = 1\\ \hat\imath\cdot\hat\jmath = 0\\ \hat\jmath\cdot\hat\jmath = 1\end{array}}$$

Regola del prodotto scalare usando le componenti:

$$\vec v_1 = (a_1, a_2) \qquad \vec v_2 = (b_1, b_2)$$

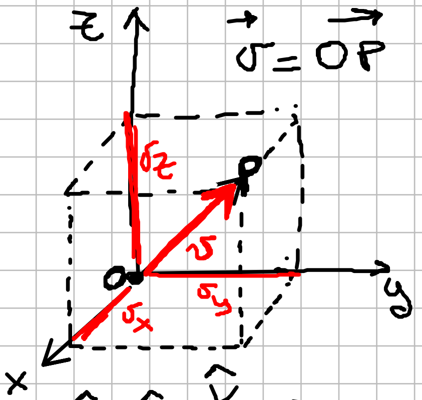
$$(a_1\hat\imath + a_2\hat\jmath) \cdot (b_1\hat\imath + b_2\hat\jmath) =$$

$$= a_1b_1 \underbrace{\hat\imath\cdot\hat\imath}_{1} + \cancel{a_1b_2\underbrace{\hat\imath\,\hat\jmath}_{0}} + \cancel{a_2b_1\underbrace{\hat\jmath\cdot\hat\imath}_{0}} + a_2b_2\underbrace{\hat\jmath\cdot\hat\jmath}_{1} = a_1b_1 + a_2b_2$$

$$\boxed{(\overset{1°}{a_1}, \overset{2°}{a_2}) \cdot (\overset{1°}{b_1}, \overset{2°}{b_2}) = a_1b_1 + a_2b_2}$$

1°·1° + 2°·2°

$\vec v = \vec{OP}$



si generalizza alle terne $\mathbb{R}^3$

$$\vec v_1 = (\underset{v_x}{a_1}, \underset{v_y}{a_2}, \underset{v_z}{a_3}) = a_1\hat\imath + a_2\hat\jmath + a_3\hat k$$

$\hat\imath, \hat\jmath, \hat k$ sono i 3 versori degli assi $\vec x, \vec y, \vec z$

$$\vec v_2 = (b_1, b_2, b_3) = b_1\hat\imath + b_2\hat\jmath + b_3\hat k$$

$$\vec v_1 \cdot \vec v_2 = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) =$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\boxed{\begin{array}{lll}\hat\imath\cdot\hat\imath = 1 & \hat\jmath\cdot\hat\jmath = 1 & \hat k\cdot\hat k = 1\\ \hat\imath\cdot\hat\jmath = 0 & \hat\imath\cdot\hat k = 0 & \\ \hat\jmath\cdot\hat k = 0 & & \end{array}}$$

Si generalizza a m-uple

$$\boxed{(x_1, x_2, \dots, x_m)\cdot(y_1, y_2, \dots, y_m) = x_1y_1 + \dots + x_my_m}$$

$$(2, 1, 0, 1)\cdot(1, 0, 0, -3) = 2\cdot 1 \cancel{+1\cdot 0} \cancel{+0\cdot 0} + 1(-3) = \boxed{-1}$$

$$A \cdot B = C \quad \exists$$

$$\underbrace{3\times\cancel{4} = \cancel{4}}\times 5 \qquad 3\times 5$$

$$\begin{array}{cc} R_1 & \\ R_2 & \\ R_3 & \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & c_2' & c_3' & c_4' & c_5' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} \boxed{R_1C_1'} & \boxed{R_1C_2'} & \boxed{R_1C_3'} & \boxed{R_1C_4'} & \boxed{R_1C_5'} \\ R_2C_1' & R_2C_2' & R_2C_3' & R_2C_4' & R_2C_5' \\ R_3C_1' & & \dots & & \end{pmatrix}$$

$$\underset{3\times 4}{A} \qquad \underset{4\times 5}{B}$$

$$\overset{R_1}{(1,0,0,-2)}\overset{C_1'}{(1,2,0,-1)} = 1+2 = 3$$

- $(1,0,0,-2)\cdot(0,1,0,0) = 0$
-

$$= \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{2} \\ \boxed{9} & \boxed{4} & \boxed{8} & \boxed{4} & \boxed{8} \\ \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{9} \end{pmatrix}$$

"Prodotto riga per colonna"

Proprietà del prodotto tra matrici :

1) ASSOCIATIVA $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$

2) DISTRIBUTIVE

$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C \qquad A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$

3) COMMUTATIVA STAVOLTA NON VALE PIU'

$$A\cdot B \neq B\cdot A$$

4) La Legge di annullamento del prodotto non vale più

$A \cdot B = \Omega$

$$\left(\quad\right)\left(\quad\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \not\Rightarrow \begin{array}{l} A = \Omega \\ \text{opp} \\ B = \Omega \end{array}$$

(invece per i numeri $a \cdot b = 0 \rightarrow a = 0$ opp $b = 0$)

INSIEME DELLE MATRICI QUADRATE :

$$(K^{m,m}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somma}}}{+}, \underset{\uparrow}{\cdot})$$ prodotto tra matrici

$(K^{m,m}, +)$ gruppo abeliano

- $\cdot$ tra matrici associativa vera
  distributive vera

] É Anello non commutativo (in generale)

MATRICE DIAGONALE : é

Una matrice quadrata che ha solo la diagonale principale e tutti gli altri zero

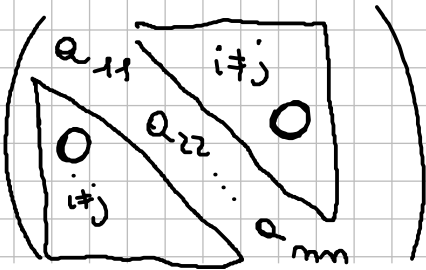
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

si chiama diagonale secondaria

si chiama diagonale principale

DEFINIZIONE MATEMATICA :

$D = (a_{ij})$ $m \times m$ dove $a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$



se $i = j$ diag. principale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$$

Esegui, quando è possibile, le addizioni fra le seguenti matrici.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$ $\quad \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\right]$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$ $\quad \left[\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\right]$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$ $\quad \left[\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right]$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$ [non si può eseguire l'addizione]

Calcola, quando è possibile, le differenze A - B fra le seguenti matrici.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$ $\quad \left[\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}\right]$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$ [non si può eseguire la sottrazione]

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$ $\quad \left[\begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right]$

Calcola i seguenti prodotti fra matrici e numeri reali.

$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \left[\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -6 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}\right]$

$-5 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \left[\begin{bmatrix} 0 & -15 & 20 \\ 15 & -10 & -10 \\ 25 & -5 & 5 \end{bmatrix}\right]$

Calcola, quando è possibile, il prodotto delle seguenti coppie di matrici.

$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right]$

$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [-1 \ 2 \ 1]$ $\left[\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right]$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 13 & 6 \end{bmatrix}\right]$

$\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 3 & -1 \\ -2 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & -4 \\ -1 & 10 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

[non si può calcolare il prodotto]

$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 9 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 6 & 11 & 3 \\ -7 & 3 & 1 \\ -10 & -6 & 0 \end{bmatrix}\right]$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} -2 \\ 11 \end{bmatrix}\right]$

$[1 \ 10 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -6 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ $[[-7 \ -3 \ 27]]$

$\begin{bmatrix} 0 & x & x \\ 1 & -x & 0 \\ -x & 0 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2x & -x \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} x & -x \\ 2x & 0 \\ x-2x^2 & x^2 \end{bmatrix}\right]$

Date le seguenti matrici A e B, determina i prodotti $A \cdot B$ e $B \cdot A$ verificando che la moltiplicazione fra matrici non gode della proprietà commutativa.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$ $\left[A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 76 & 0 & -1 \\ 23 & 0 & -23 \end{bmatrix}; \ B \cdot A = \begin{bmatrix} -18 & 45 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\right]$

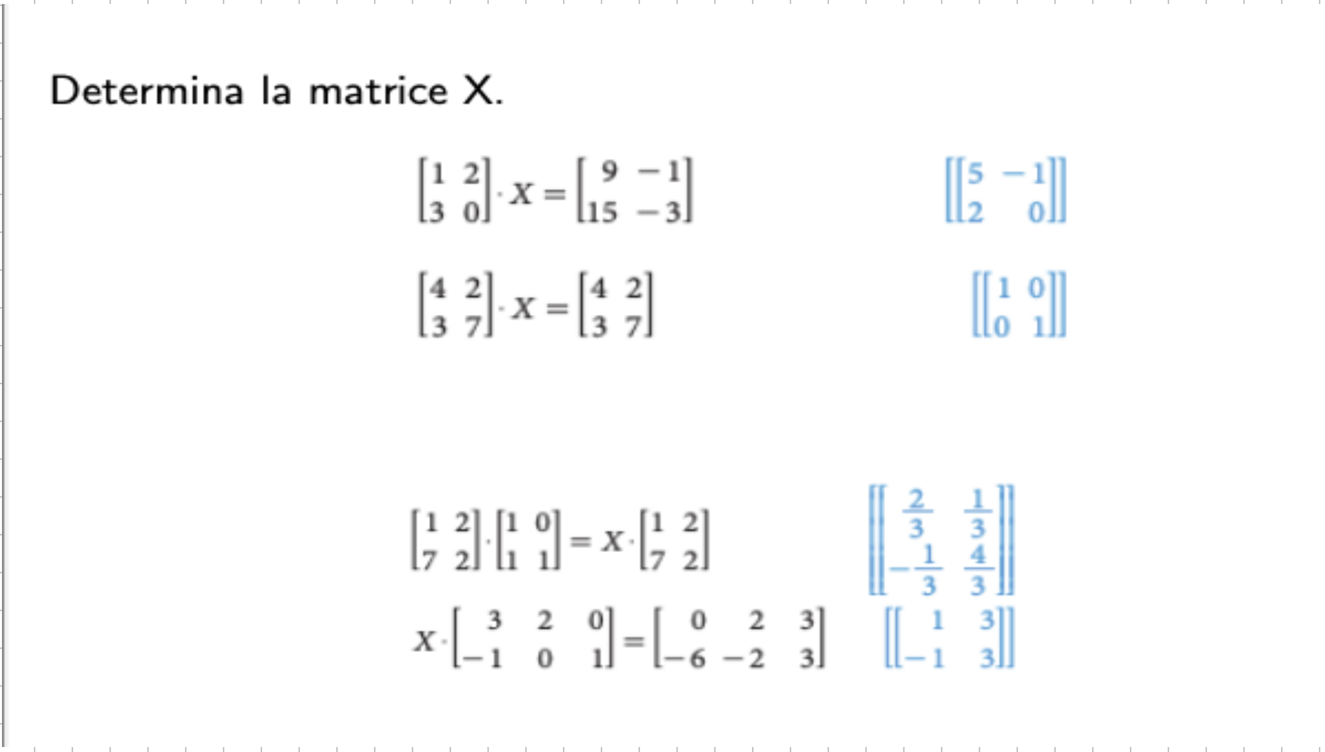
$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$ $\left[A \cdot B = \begin{bmatrix} 17 & 0 \\ 20 & 13 \end{bmatrix}; \ B \cdot A = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 12 & 17 \end{bmatrix}\right]$

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcola A^2 e A^3. $\left[\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 8 & -21 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$

Trova a in modo che sia: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$ $[a = 1]$

Determina x in modo che: $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ x & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$ $[x = -9]$

Verifica che: $\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -36 & 6 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$



Determina la matrice X.

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}9 & -1\\ 15 & -3\end{bmatrix} \qquad \left[\begin{bmatrix}5 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\right]$$

$$\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & 7\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & 7\end{bmatrix} \qquad \left[\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right]$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 7 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=X\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 7 & 2\end{bmatrix} \qquad \left[\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\end{bmatrix}\right]$$

$$X\cdot\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ -6 & -2 & 3\end{bmatrix} \qquad \left[\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 3\end{bmatrix}\right]$$