Lezione 3

Matrice identità → simbolo I

→ matrice diagonale che gode della

→ PROPRIETÀ: $a_{ij} = 1 \quad i = j$

$$X \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonale principale

→ ~~DIMOSTRAZIONE:~~ SI DIMOSTRA:

- $m \times n$: $A \in K^{n,n}$
- Se si moltiplica $I_{n \cdot n}$ si ottiene A

⇓

$$A_{n \cdot n} \cdot I_{n \cdot n} = A_{nn}$$

- QUINDI I è l'elemento neutro della moltiplicazione tra matrici quadrate $n \cdot n$ è detta unità?

→ ANELLO $(K^{n,n}, +, \cdot)$ → ANELLO NON COMMUTATIVO MA CON UNITÀ

1. ASSOCIATIVA (vale)
2. distributiva (vale)

Matrice Triangolare

→ PROPRIETÀ TRIANGOLARE SUPERIORE $\Rightarrow a_{ij}=0 \ \forall i>j$

$\Downarrow$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

diagonale principale

esempio $\Leftarrow$

ES →
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

→ PROPRIETÀ TRIANGOLARE INFERIORE $\Rightarrow a_{ij}=0 \ \forall i<j$

$\Downarrow$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

ESEMPIO $\Rightarrow$ ES
$$\cancel{\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}$$

$\Downarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 11 & 0 \\ 8 & 9 & 15 & 12 \end{bmatrix}$$

Matrice Trasposta

→ simbolo ⟹ A^t

→ si ottiene ⟹ scambiando righe e colonne con A

→ ESEMPIO ⟹ $A^{3 \cdot 5}$ ⇓

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Può accadere?

→ $\boxed{A^t \equiv A}$ coincide → Si se A è:

- Simmetrica

ES: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

- Quadrata

Si → $A \equiv A^t$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

Matrice Antisimmetrica

→ $-A = A^t$

→ ESEMPIO $A_{3 \cdot 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 11 \end{bmatrix}$

Matrice Simmetrica

→ ~~$(A^t)^t = A$~~

→ PROPRIETÀ:

- $(A^t)^t = A$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(A \cdot B)^t \neq A^t \cdot B^t$ NON VALE LA COMMUTATIVA

$\boxed{(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t}$ ~~ATTENZIONE~~ ALL'ORDINE

Determinante di una matrice

→ DEFINIZIONE ⇒ numero associato a ogni radice quadrata.

→ simbolo ⇒ det(A) oppure |A|

→ ESEMPIO ⇒ $A_{2x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \leftarrow |A| = -2 - 3 = -5$

→ CALCOLO 2X2: ~~diago~~ prodotto elementi diagonale principale meno prodotto diagonale secondaria

→ REGOLA DI SAURUS (3X3) : ① Ricopiare le prime due colonne accanto la matrice.

⇓

② Tracciare diagonali di andata e ritorno

$$A_{3\cdot 3} = \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right) \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

③ Prodotto tra elementi di una diagonale

④ Somma ~~lo prodotto~~ della la somma del valore delle diagonali di andata e la differenza tra quelle di ritorno

→ ESEMPIO:

$$A\left(\begin{matrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix}\right) \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}$$

RITORNO $= -(0) - (1) - (0) = -1$

ANDATA $= 0 - 2 - 6 = -8$

$\det A =$ ANDATA + RITORNO $= -1 - 8 = -9$

→ ~~TEOREMA DI LAPLASS (4X4)~~ : ~~completamento~~

→ Completamento Algebrico A_{ij} ⇒ numero ricavato tagliando riga e colonne dove si trova a_{ij}

⇓

→ FORMULA $|A_{ij}| = (-1)^{i+j} \cdot \det M_{ij}$ (ottenuto tagliando la j-esima colonna e la i-esima riga)

→ ESEMPIO CON 3X3 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ trovare i complementi algebrici

$A: \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{-1} & 3 & 2 \\ \cancel{1} & 4 & -1 \end{bmatrix}$ $a_{11} = 2$ $A_{11} = (-1)^2 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ $= -3 - 8 = -11$

$A_{ij} = \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ -1 & \cancel{3} & 2 \\ 1 & \cancel{4} & -1 \end{bmatrix}$ $a_{12} = 0$ $A_{12} = (-1)^3 \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $= -1 \cdot (+1 - 2)$ $= 1$

$A_{ij} \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ -1 & 3 & \cancel{2} \\ 1 & 4 & \cancel{-1} \end{bmatrix}$ $a_{13} = 1$ $A_{13} = (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $= 1 \cdot (-4 - 3) = -7$

→ Sostituendo ad a_{ij} il suo corrispettivo completamento algebrico si ottiene

$\boxed{\text{LA MATRICE DEI COMPLETAMENTI ALGEBRICI}}$

$$\begin{array}{ccc} \text{MATRICE} & & \text{MATRICE COMPLEMENTI ALGEBRICI} \\ A \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \begin{bmatrix} -11 & 1 & -7 \\ 4 & -3 & -8 \\ -3 & -5 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

→ TEOREMA DI LAPLACE : Sia $A_{n \times n}$
(4x4)
⇓
vale per tutte le quadrate
ma per 2x2 non conviene

si ottiene il determinante moltiplicando gli elementi di una riga o colonna scelta per i propri complementi algebrici
⇓

→ FORMULA:

$$\boxed{\det A = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n}}$$

→ ESEMPIO (3x3) ⇒ $A \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$; det A

$$\det A = 2 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 1 \, A_{13}$$
$$= 2(-11) + 0(1) + 1(-7)$$
$$= -22 - 7 = -29$$

proviamo con la seconda riga:

$A \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

$$\det A = -1 \, A_{21} + 3 A_{22} + 2 A_{23}$$
$$= -4 - 9 - 6 = -29$$

→ CONSIGLI: Scegliere riga o colonna con più zeri

→ ESEMPIO (4x4) ⇒ $A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ \boxed{0 \quad 2 \quad 0 \quad -2} \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ Consideriamo la seconda riga

↓

dove si usa sempre LAPLACE

$\cancel{\det A = 0 A_{21} + 2 A_{22} + 0 A_{23} \; 2 A_{24}}$

$\cancel{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}}$ $\cancel{A_{21}}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det A = \cancel{0 \cdot A_{21}} + 2A_{22} + \cancel{0 A_{23}} + 2A_{24}$$

ricordiamo: $A = (-1)^{i+j} \cdot \det M_{ij}$ (ottenuta tagliando i-esima riga e j-esima colonna)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{-2} \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$a_{22} = 2 \quad A_{22} = (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{matrix}$

$A_{22} =$ ANDATA + RITORNO $= 2 - 4 = -2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$a_{24} =$

$$0 \quad -(2) \quad -(-2)$$

$$A_{24} = (-1)^6 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

$$0 \quad 0 \quad 2$$

$A_{24} =$ ANDATA + RITORNO $= 2$

$$\det A = 2A_{21} - 2A_{24} = -4 - 4 = -8$$

Teorema di Laplace II

→ DEF: Data una matrice quadrata $n \times n$ se moltiplico gli elementi di una riga per i complementi di un'altra farà sempre 0.

– ES: (con la matrice dei complementi algebrici precedenti)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -11 & 1 & -7 \\ 4 & -3 & -8 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

① Prima scegliamo la prima riga

② moltiplichiamo:

$2 \cdot 4 + 0 \cdot (-3) + 2(-8) = 0$

Propietà dei determinanti

① Scambio di righe o colonne

se B si ottiene da A scambiando due righe (o colonne) si ha $\boxed{\det B = -\det A}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \det A = -29$$

Scambiamo $R_1 \to R_2$: $A' \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{matrix}$

$0 \quad (-4) \quad -16$

$0 \quad 3 \quad 16$

$\det A' = 19 + 10 = 29$

② Righe e/o colonne uguali o nulle

- Se ho due righe uguali il det A = 0
- Se ho una riga nulla det A = 0

tutti zero

Es $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 13 \\ 4 & 40 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 3 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 0$

③ Linearità di una riga $R_2 = R_2' + R_2''$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

④ Una riga ha un multiplo comune (scalare)

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Esco fuori } 2 \Rightarrow 2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

⑤ Det Trasposta

$$\det A = \det A^T$$

⑥ Det della matrice triangolare superiore

$T_s \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\det T_s = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$

in generale: $\boxed{\det T_s = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}}$

(2) Trasformazioni elementari

Al posto di R_i (Riga i-esima Trasformata)

mettiamo la riga R_i (se stessa) + $\lambda \cdot R_j$ (riga j-esima)

(lambda)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \det A = 15+4+2-24 = -3$$

Al posto della terza rig R_3 mett. $(R_3 + 3 R_1)$ e ottengo la matrice A' detta trasformata

$3 = \lambda$

~~ESEMPIO~~

ESEMPIO $A' \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} \Leftarrow A \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$R_3 = R_3 + \underset{\lambda}{3} R_1 = (0,-1,3) + 3(1,2,-1)$$
$$= (0,-1,3) + (3,6,-3)$$
$$= (3,5,0)$$

Quindi:

$$A' \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \det A' = 12-20+15-10 = -3$$

$$\boxed{\det A = \det A'}$$

Le matrici trasformate mediante trasformazione elementare "$R_i \to R_i + \lambda R_j$" hanno lo stesso determinante di quello di partenza.