Lezione n. 4 (16-10-25)

Matrice diagonale: si indica con la lettera D

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Matrice identità: si indica con la lettera I ed è una matrice diagonale che gode della seguente proprietà:

$a_{ij} = 1 \quad i=j$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$i=j$ si chiama "diagonale principale"

$$I_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

etc... $I_{m\times m}$

Si dimostra che data una matrice quadrata $m \times m$: $A \in K^{m,m}$ se la si moltiplica per $I_{m\times m}$ si ottiene A

$$A_{m\times m} \cdot I_{m\times m} = A_{m\times m} \qquad (I \cdot A = A)$$

$\Rightarrow$ la matrice identità è l'elemento neutro della moltiplicazione tra 2 matrici quadrate $m \times m$ ed I è detta "UNITÀ"

Quindi se andiamo a considerare $(\mathbb{K}^{n,n}, +, \cdot)$ che struttura è?

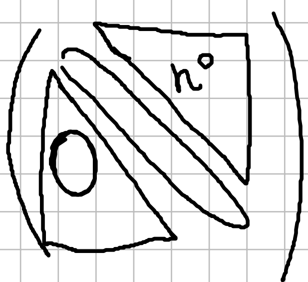
1) $(\mathbb{K}^{n,n}, +)$ vale $\boxed{3}+1 \Rightarrow$ gruppo abeliano
2) ASSOCIATIVA DEL PRODOTTO VALE
3) DISTRIBUTIVE VALGONO
~~4)~~ LA COMMUTATIVA DEL PRODOTTO NON VALE

$\Rightarrow$ ANELLO NON COMMUTATIVO

E SI DICE CHE É ANELLO NON COMMUTATIVO MA CON UNITÀ

Matrice triangolare superiore:
è una matrice quadrata che gode della seguente proprietà:

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$$



$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$i=j$ si chia "diagonale principale"

esempio $T_s = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

In modo analogo si definisce il triangolare inferiore

$$T_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$$

Matrice trasposta:
Data una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ si dice trasposta e si indica con A^t la matrice ottenuta da A scambiando le righe con le colonne, cioè:

1° riga di A diventa 1° colonna di A^t
2° " di A " 2° " " "
3° " " " 3° " " "
etc...

Esempio: Data una matrice $A \in \mathbb{K}^{3,5}$

$$\underset{3\times5}{A} = \begin{pmatrix} \boxed{1 & -1 & 0 & 0 & 3} \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcolare A^t

Risoluzione

$$\underset{5\times3}{A^t} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Matrice simmetrica: "è una matrice quadrata tale che $A = A^t$", cioè $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j$

Esempio:

$$\underset{3\times3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -4 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

1° riga = 1° colonna

Calcolo la trasposta $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -4 & 5 & 11 \end{pmatrix} \equiv A$

Quindi A si dice "Matrice simmetrica"

Matrice antisimmetrica: è una matrice quadrata tale che $A^t = -A$

Esempio

$$\underset{3\times3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 11 \end{pmatrix}$$

Proprietà matrice simmetrica

$$(A^t)^t = A$$

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

$$(A \cdot B)^t \neq A^t \cdot B^t \quad \text{ma} \quad \boxed{(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t}$$

ATTENZIONE ALL'ORDINE !!

Esercizi

Libri **esercizi**:
P. Bonacini, M.G. Cinquegrani, L. Marino, *Algebra Lineare: Esercizi svolti*, Ed. Cavallotto, Catania 2012
P. Bonacini, M.G. Cinquegrani, L. Marino, *Geometria Analitica: Esercizi svolti*, Ed. Cavallotto, Catania 2012

Determinante di una matrice è un numero che viene associato ad ogni matrice quadrata

Esempi

SIMBOLO

- $\underset{2\times 2}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2,2}$ $\qquad \det(A) = |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \det A = 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 = -2-3 = -5$$

(la diag. principale meno la diag. secondaria)

- $\underset{3\times 3}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$

E RITORNO

Regola di Sarrus

Si ricopiano le prime 2 colonne accanto alla matrice

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}$$

TORNO

Regola di Sarrus

$\rightarrow$ 3 diagonali di andata e li sommo

$\leftarrow$ 3 diagonali di ritorno con il meno davanti

$$\det A = 0 + 2(1)(-1) + (-2)(3)(1) - \cancel{2 \cdot 3 \cdot 0} - 1 - \cancel{(-2)(0)(-1)}$$

$$= -2 - 6 - 1 = -9$$

$$A_{4\times 4} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Teorema di Laplace I

Prima di tutto capiamo cosa è il complemento algebrico di un elemento a_{ij} $\longrightarrow$ A_{ij}

Il complemento algebrico si indica con A_{ij} è quel numero ricavato da a_{ij} tagliando la riga e la colonna dove si trova a_{ij}. In particolare si ha la seguente formula del complemento algebrico:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij} \left(\begin{array}{c}\text{ottenuta} \\ \text{tagliando i-esima riga} \\ \text{e la j-esima colonna}\end{array}\right)} \quad *$$

$\pm$ $+$ somma pari; $-$ // dispari

Esempio:

Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ trovare i complementi algebrici di ogni elemento

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & \boxed{0} & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \end{array}$$

31

$a_{11} = 2 \rightsquigarrow A_{11} = \underbrace{(-1)^2}_{=1} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} =$

$= -3 - 8 = -11$

$a_{12} = 0 \longrightarrow A_{12} = (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$

$= -(1-2) = 1$

$a_{13} = 1 \rightsquigarrow A_{13} = \cancel{(-1)^4} \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -4-3$

$a_{21} = -1$

$A_{21} = (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} =$

$= -(-4) = 4$

$$\boxed{\left(A_{ij}\right)} = \begin{pmatrix} -11 & 1 & -7 \\ 4 & -3 & -8 \\ -3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Si chiama "MATRICE DEI COMPLEMENTI ALGEBRICI"

$a_{22} = 3 \quad A_{22} = (-1)^4 \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -3$

$a_{23} = 2 \quad A_{23} = (-1)^5 \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -8$

Teorema di Laplace I

Sia A una matrice quadrata $m \times m$. [VALE PER TUTTE LE MATRICI QUADRATE (2x2, 3x3, 4x4, 5x5, ...)]

Il determinante si ottiene scegliendo una riga i-esima (fisso i) (o una colonna) e moltiplicando gli elem. della riga scelta (o colonna) per i propri complementi algebrici

$$\boxed{\det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{im} A_{im}}$$

Esempio calcolare il det usando Laplace I

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 0 \quad 1} \\ -1 \quad 3 \quad 2 \\ 1 \quad 4 \quad -1 \end{pmatrix}$$

calcoli vd ↑ sopra

$\det A = 2 \cdot A_{11} + \cancel{0 \cdot A_{12}} + 1 A_{13} =$

$= 2 \cdot (-11) + (-7) = -22 - 7 = -29$

Scegliamo la 2° riga: vedo se risulta lo stesso

$$A = \begin{pmatrix} 2 \quad 0 \quad 1 \\ \boxed{-1 \quad 3 \quad 2} \\ 1 \quad 4 \quad -1 \end{pmatrix}$$

$\det A = -1 \cdot \overset{4}{A_{21}} + 3 \overset{-3}{A_{22}} + 2 \overset{-8}{A_{23}} =$

$= -1 \cdot (4) + 3(-3) + 2(-8) =$

$= -4 - 9 - 16 = -29$ cvd

"consiglio": scegliere la riga (o la colonna) che ha più zeri.

Esempio 4x4 calcolare il determinando usando il teorema di Laplace I (scelta forzata)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Scegliamo 2° riga, fissiamo $i = 2$ (oppure scegliamo 1° colonna $j = 1$)

$$\det A = 2\cdot A_{22} - 2\cdot A_{24} = 2\,(\cancel{-1})^4 \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix} - 2\,(\cancel{-1})^6 \cdot \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

TORNO

$$= 2\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1\end{array}\right) - 2\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2\end{array}\right) =$$

$$= 2\cdot\left(\cancel{3} + 0 - 1 - \cancel{3} - 1\right) - 2\left(2 + \cancel{2} - \cancel{2}\right) = 2\,(-2) - 2(2) = -8$$

$$\boxed{\det A = -8}$$

2° metodo: scegliamo 1° colonna

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

$j=1$ $\quad \det A = 1\cdot A_{11} + 1\, A_{31} =$

$$= (\cancel{-1})^2 \cdot \det\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix} + (\cancel{-1})^4 \cdot \det\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -2\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix} =$$

$$\Rightarrow \left(2\cdot 1\cdot 3 + \cancel{0(-1)(2)} + \cancel{(-2)(0)(-1)} - (-2)(1)(2) - (-1)(-1)(2) - \cancel{3(0)(0)}\right)$$

$$\det A = (6 + 4 - 2) + (0 - 4 - 2 - 0 - 4 - 6) =$$

$$= 8 - 16 = -8$$

Teorema di Laplace II

Data una matrice quadrata $n \times n$

Se moltiplico gli elementi di una riga per i complementi algebrici di un'altra riga ottengo sempre zero

Verifichiamo Laplace II

Scegliamo 1° riga

$$2\cdot 4 + 0\cdot(-3) + 1\cdot(-8) = 0$$

$$\begin{array}{cccc} & + & - & + \\ A = & \left(\begin{array}{ccc} \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{array} \right) \\ & + & - & + \end{array}$$

$$\left(A_{ij}\right) = \begin{pmatrix} -11 & 1 & -7 \\ 4 & -3 & -8 \\ -3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Si chiama "MATRICE DEI COMPLEMENTI ALGEBRICI"

Proprietà dei determinanti

1) Scambio di righe o colonne

Se B si ottiene da A scambiando due righe (idem x colonne) si ha $\boxed{\det B = -\det A}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \det A = \boxed{-29}$$

Scambio $R_1 \to R_2$: $A' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{matrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det A' = 3 + 16 + 6 + 4 = \boxed{29}$$

2) Righe uguali o nulle (idem per le colonne)

Se ho due righe uguali il $\det A = 0$

Se ho una riga nulla (tutta fatta da zero) $\Rightarrow \det A = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 13 \\ 4 & 40 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 3 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 0$$

3) Linearità di una riga $R_2 = R'_2 + R''_2$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4) Una riga ha un multiplo comune (scalare)

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \text{Esco fuori il 2} \Rightarrow 2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

5) Determinante della trasposta

$$\det A = \det A^t$$

6) Determinante della matrice triangolare superiore:

$$T_s = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det T_s = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} = 1\cdot 2\cdot 1 = 2$$

$$\boxed{\text{In generale} \quad \det T_s = a_{11}\cdot \ldots \cdot a_{mm}}$$

7) Trasformazioni elementari

AL POSTO DI R_i (riga i-esima) METTIAMO LA RIGA R_i (se stesso) + λ (lambda) $\cdot$ R_j (riga j-esima)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det A = 15+4+2-24 = -3$$

Al posto della terza riga R_3 METTO $(R_3 + \overset{\lambda}{\overset{\|}{3}} R_1)$

e ottengo la matrice A' detta "trasformata"

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

$(0,-1,3) + 3(1,2,-1) =$
$= (0,-1,3) + (3,6,-3) =$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$= (3, 5, 0)$ Riga 3 trasform.

$\det A' = 12 - 20 + 15 - 10 =$
$= -3$

Il $\boxed{\det A = \det A'}$

Le matrici trasformate con una trasformazione elementare " $R_i \to R_i + \lambda R_j$ " hanno lo stesso determinante di quello di partenza!