Matrice

→ Cos'è → Una tabella di m righe n colonne

$$\begin{array}{c|cccccc} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \\ \hline R_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

→ una cella si indica con due coordinate i e j

→ SIMBOLO →

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \end{bmatrix}$$

→ $a \in K$ dove K è il campo $= ((\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}), +, \cdot)$

→ insieme di tutte le matrici m x n si definisce $K^{m,n}$

↓

→ Es: $\mathbb{R}^{3,4}$ → matrice di 3 righe e 4 colonne con coefficienti nei reali

→ se $m = n$ si parla di matrici quadrate

→ operazioni tra matrici

→ ① Somma

- Devono avere lo stesso numero di righe e colonne. Quindi $A(a_{ij})$ $B(b_{ij})$ di tipo $m \times n$ in un campo K con $a_{ij} \in K$ e $b_{ij} \in K$

ESEMPIO GRAFICO SOMMA

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi praticamente sommo la cella della matrice a con la cella della matrice b aventi le stesse coordinate i e j

Proprietà Sommabili:

1) Associativa date tre matrici A, B, C si ha che $(A+B)+C = A+(B+C)$

2) Esistenza elemento neutro

$$e_+ = 0 = \Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) Esiste e_+^{-1} (l'inverso). Quindi la matrice $-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & \dots & \\ \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \end{bmatrix}$ (matrice con tutti gli elementi ~~uno~~ opposti rispetto l'originale).

4) Commutativa $A+B = B+A$

Ricordiamo che le prime 3 proprietà portano a un gruppo e che la terza è lo F_2 definire Abelliano o commutativo. Quindi possiamo dire:

$(K^{m,n}, +)$ GRUPPO ABELLIANO

→ ② Prodotto ~~scalare~~ esterno
(per un valore scalare, quindi un solo valore h)

$h \in K \quad A_{2\cdot 3} \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \end{pmatrix}$

$A_{2\cdot 3} \cdot h \begin{pmatrix} ha_{11} & ha_{12} & ha_{13} \\ ha_{21} & ha_{22} & ha_{23} \end{pmatrix}$

moltiplico h per ogni elemento di A

→ ③ Prodotto tra matrice

$A \cdot B = C$

$m \cdot \cancel{n} = \cancel{n} \cdot p \quad m \cdot p$

ESEMPIO$_1$: $A \quad B = C$

$\underbrace{3 \cdot 4 \quad 3 \cdot 4}_{\neq}$ impossibile $\nexists$ prodotto

ESEMPIO$_2$: $A \quad B \quad C \quad \exists$

$3 \cdot \cancel{4} \quad \cancel{4} \cdot 5 \quad 3 \cdot 5$

Quindi per potere fare il prodotto il numero delle ~~righe~~ colonne della prima matrice deve coincidere con le ~~colonne~~ righe della seconda.

ANCHE CHIAMATO PRODOTTO SCALARE TRA QUATERNE ⇒

$(a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4) =$
$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$

Chemisti

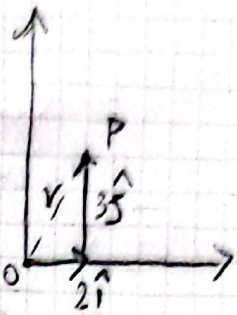
RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE

$v(2,3) = 2i + 3j$

$\uparrow v_x \quad \uparrow v_y$

$\hat{i}$ = vettore asse x, modulo 1

$\hat{j}$ = vettore asse y, modulo 1



$v(2,3) = \vec{OP} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$

Prodotto scalare tra 2 vettori ~~scomponibile~~

$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} \quad |\vec{v_1}||\vec{v_2}| \cdot \cos\theta$ teta ?

$\hat{i} \cdot \hat{i} = |\hat{i}| \, |\hat{i}| \cdot \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 = \boxed{1}$

$\hat{i} \cdot \hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}| \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = \boxed{0}$

↳ commutativo, vale anche per $\hat{j} \cdot \hat{i}$.

Regola del prodotto scalare usando le componenti:

$\vec{v_1} = (a_1, a_2) \qquad \vec{v_2} = (b_1, b_2)$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$(a_1\hat{i}, a_2\hat{j}) \cdot (b_1\hat{i}, b_2\hat{j}) =$

$= a_1 b_1 \underbrace{\hat{i}\hat{i}}_{1} + a_1 b_2 \underbrace{\hat{i}\hat{j}}_{0} + a_2 b_1 \underbrace{\hat{j}\hat{i}}_{0} + a_2 b_2 \underbrace{\hat{j}\hat{j}}_{1}$

$= a_1 b_1 + a_2 b_2$

~~Diagonalizza~~

Ricordiamo $\hat{i} \cdot \hat{j} \rightarrow 1$ vs $\hat{i} \cdot \hat{i}$ oppure $\hat{j}\hat{j} = 0$

Si generalizzano alle terne

$$V_1 = (\overset{v_x}{a_1}, \overset{v_y}{a_2}, \overset{v_z}{a_3}) = a_1\hat{i}, a_2\hat{j}, a_3\hat{k}$$

$$V_2 = (b_1, b_2, b_3) = b_1\hat{i}, b_2\hat{j}, b_3\hat{k}$$

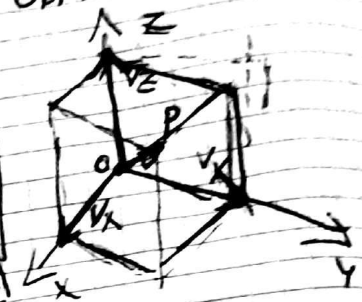
$$V_1 \cdot V_2 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

↳ perché la regola non cambia:

$i \cdot i = 1 \quad j \cdot j = 1 \quad k \cdot k = 1$

$j \cdot i = 0 \quad i \cdot k = 0 \quad j \cdot k = 0$

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA:



$$\boxed{(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}$$

ESEMPIO

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \overset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3 & R_1C_4 & R_1C_5 \\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3 & R_2C_4 & R_2C_5 \\ R_3C_1 & R_3C_2 & R_3C_3 & R_3C_4 & R_3C_5 \end{pmatrix}$$

RIGA	COLONNA
① 1,0,0,-1	① 1,2,0,-1 = 1+2 = 3
	② 0,1,0,0 = 0
	③ 0,2,0,-1 = 2
	④ 0,1,0,0 = 0
	⑤ 0,2,3,-1 = 2
② 1,4,0,0	① 1,2,0,-1 = 9
	② 0,1,0,0 = 4

... to be continued...

Si moltiplica riga per colonna cella A_{ij} con B_{ij} ovvero $A_{ji} \cdot B_{ji}$

A·B è quindi uguale a

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 9 & 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

⊛ Proprietà ~~[illegible]~~ prodotto tra matrici

1) Associativa $(A \cdot B) \cdot C = (A \cdot C) \cdot B$

2) DISTRIBUTIVA $(A+B) \cdot C = (A \cdot C + B \cdot C$

3) COMMUTATIVA $\boxed{\text{No! non vale.}}$

$A \cdot B \neq B \cdot A$

---

4) La legge del ~~[illegible]~~ annullamento del prodotto **non vale** più $A \cdot B = \Omega$

$$(\quad) \cdot (\quad) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \not\Rightarrow A = \Omega \text{ oppure } B = \Omega$$

Non vale più?

(per i numeri invece $a \cdot b = 0$ se $a = 0$ o $b = 0$)

INSIEME DELLE MATRICI QUADRATE

- $(K^{n,n}, +, \cdot) \rightarrow$ è un anello?

ricordiamo:

- $(K^{n,n}, +)$ gruppo abelliano
  - $\cdot$ tra matrici – associative vera – distributiva vera } è ~~quindi anello non commutativo~~
- $(K^{n,n}, +)$ va bene, per $(K^{n,n}, \cdot)$ guardiamo ⊛

quindi $\boxed{\text{si}}$ $(K^{n,n}, +, \cdot)$ è un anello **non** commutativo/abeliano

~~DIAGONALE DI UNA MATRICE~~

MATRICE DIAGONALE:

è una matrice quadrata che ha solo la diagonale principale e tutti gli altri a zero.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

diagonale principale

Quindi se NON $i = j$ il valore della cella deve essere 0

DEFINIZIONE MATEMATICA

$D = (a_{ij})$ $n \cdot n$ deve $a_{ij} = 0$ $\forall j \neq i$