



Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Дединов Данзан Мингиянович
608 группа
9 вариант

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ПУАССОНА В КРИВОЛИНЕЙНОЙ ОБЛАСТИ**

Москва
2023

1 Введение

Требуется приближенно решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в криволинейной области. Задание необходимо выполнить на ПВС Московского университета IBM Polus.

2 Математическая постановка задачи

В области $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченной контуром γ , рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f(x, y), \quad (1)$$

в котором оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

функция $f(x, y)$ считается известной. Для выделения единственного решения уравнение дополняется граничными условием Дирихле (см. [1]):

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \gamma. \quad (2)$$

Требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области D и краевому условию (2) на ее границе.

3 Метод фиктивных областей.

Для приближенного решения задачи (1),(2) предлагается воспользоваться методом фиктивных областей [2].

Пусть область D принадлежит прямоугольнику $\Pi = \{(x, y) : A_1 < x < B_1, A_2 < y < B_2\}$. Обозначим через \overline{D} , $\overline{\Pi}$ замыкание области D и прямоугольника Π соответственно, через Γ – границу прямоугольника. Разность множеств

$$\hat{D} = \Pi \setminus \overline{D}$$

называется фиктивной областью. Выберем и зафиксируем малое $\varepsilon > 0$.

В прямоугольнике Π рассматривается задача Дирихле

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, y) \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k(x, y) \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= F(x, y), \\ v(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

с кусочно-постоянным коэффициентом

$$k(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D, \\ 1/\varepsilon, & (x, y) \in \hat{D} \end{cases} \quad (4)$$

и правой частью

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \in \hat{D}. \end{cases} \quad (5)$$

Требуется найти непрерывную в $\bar{\Pi}$ функцию $v(x, y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению задачи (3) всюду в $\Pi \setminus \gamma$, равную нулю на границе Γ прямоугольника, и такую, чтобы вектор потока

$$W(x, y) = -k(x, y) \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

имел непрерывную нормальную компоненту на общей части криволинейной границы области D и прямоугольника Π . Последнее означает, что в каждой точке $(x_0, y_0) \in \gamma \cap \Pi$ должно выполняться равенство

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0), \\ (x,y) \in D}} (W(x, y), n(x_0, y_0)) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0), \\ (x,y) \in \hat{D}}} (W(x, y), n(x_0, y_0)), \quad (6)$$

где $n(x, y)$ – вектор единичной нормали к границе γ в точке (x, y) , определенный всюду или почти всюду на кривой.

Известно [2], что функция $v(x, y)$ равномерно приближает решение $u(x, y)$ задачи (1),(2) в области D , а именно,

$$\max_{P \in \bar{D}} |v(x, y) - u(x, y)| < C\varepsilon, \quad C > 0. \quad (7)$$

В частности, $|v(x, y)| < C\varepsilon$ во всех точках кривой γ . Этот результат позволяет получить искомую функцию $u(x, y)$ с любой наперед заданной точностью $\varepsilon > 0$, решая задачу (3),(6) вместо задачи (1),(2). Тем самым, задача Дирихле в криволинейной области приближенно заменяется задачей Дирихле в прямоугольнике с кусочно-постоянным коэффициентом $k(x, y)$.

4 Разностная схема решения задачи.

Краевые задачу (3),(6) предлагается решать численно методом конечных разностей [3]. В замыкании прямоугольника $\bar{\Pi}$ определяется равномерная прямоугольная сетка $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$, где

$$\bar{\omega}_1 = \{x_i = A_1 + ih_1, i = \overline{0, M}\}, \quad \bar{\omega}_2 = \{y_j = A_2 + jh_2, j = \overline{0, N}\}.$$

Здесь $h_1 = (B_1 - A_1)/M$, $h_2 = (B_2 - A_2)/N$. Через ω_h обозначим множество внутренних узлов сетки $\bar{\omega}_h$, т.е. множество узлов сетки прямоугольника, не лежащих на границе Γ .

Рассмотрим линейное пространство H функций, заданных на сетке ω_h . Обозначим через w_{ij} значение сеточной функции $w \in H$ в узле сетки $(x_i, y_j) \in \omega_h$. Будем считать, что в пространстве H задано скалярное произведение и евклидова норма

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} h_1 h_2 u_{ij} v_{ij}, \quad \|u\|_E = \sqrt{(u, u)}. \quad (8)$$

В методе конечных разностей дифференциальная задача математической физики заменяется конечно-разностной операторной задачей вида

$$Aw = B, \quad (9)$$

где $A : H \rightarrow H$ – оператор, действующий в пространстве сеточных функций, $B \in H$ – известная правая часть. Задача (9) называется разностной схемой. Решение этой задачи считается численным решением исходной дифференциальной задачи.

При построении разностной схемы следует аппроксимировать (приблизительно заменить) все уравнения краевой задачи их разностными аналогами – сеточными уравнениями, связывающими значения искомой сеточной функции в узлах сетки. Полученные таким образом уравнения должны быть функционально независимыми, а их общее количество – совпадать с числом неизвестных, т.е. с количеством узлов сетки.

Дифференциальное уравнение задачи (3) во всех внутренних точках сетки аппроксимируется разностным уравнением

$$-\frac{1}{h_1} \left(a_{i+1j} \frac{w_{i+1j} - w_{ij}}{h_1} - a_{ij} \frac{w_{ij} - w_{i-1j}}{h_1} \right) - \frac{1}{h_2} \left(b_{ij+1} \frac{w_{ij+1} - w_{ij}}{h_2} - b_{ij} \frac{w_{ij} - w_{ij-1}}{h_2} \right) = F_{ij},$$

$$i = \overline{1, M-1}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (10)$$

в котором коэффициенты

$$a_{ij} = \frac{1}{h_2} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} k(x_{i-1/2}, t) dt, \quad b_{ij} = \frac{1}{h_1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} k(t, y_{j-1/2}) dt \quad (11)$$

при всех $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, N}$. Здесь полуцелые узлы

$$x_{i\pm 1/2} = x_i \pm 0.5h_1, \quad y_{j\pm 1/2} = y_j \pm 0.5h_2.$$

Правая часть разностного уравнения

$$F_{ij} = \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{\Pi_{ij}} F(x, y) dx dy, \quad \Pi_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2}\} \quad (12)$$

при всех $i = \overline{1, M-1}$, $j = \overline{1, N-1}$.

Введем обозначения правой и левой разностных производных по переменным x , y соответственно:

$$w_{x,ij} = \frac{w_{i+1j} - w_{ij}}{h_1}, \quad w_{\bar{x},ij} = w_{x,i-1j} = \frac{w_{ij} - w_{i-1j}}{h_1},$$

$$w_{y,ij} = \frac{w_{ij+1} - w_{ij}}{h_2}, \quad w_{\bar{y},ij} = w_{y,ij-1} = \frac{w_{ij} - w_{ij-1}}{h_2}.$$

С учетом принятых обозначений разностное уравнение (10) можно представить в более компактном и удобном виде:

$$-(aw_{\bar{x}})_{x,ij} - (bw_{\bar{y}})_{y,ij} = F_{ij}, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad j = \overline{1, N-1} \quad (13)$$

Краевые условия Дирихле задачи (3),(6) аппроксимируются точно равенством

$$w_{ij} = w(x_i, y_j) = 0, \quad (x_i, y_j) \in \Gamma. \quad (14)$$

Переменные w_{ij} , заданные равенством (14), исключаются из системы уравнений (13). В результате остаются неизвестными значения w_{ij} при $i = \overline{1, M-1}$, $j = \overline{1, N-1}$ и их количество совпадает с числом уравнений. Система является линейной относительно неизвестных величин и может быть представлена в виде (9) с самосопряженным и положительно определенным оператором

$$Aw = -(aw_{\overline{x}})_x - (bw_{\overline{y}})_y$$

и правой частью F , определенной равенством (12). Таким образом, построенная разностная схема (13),(14) линейна и имеет единственное решение при любой правой части (см. [5]).

Замечание. Интегралы (11) от кусочно-постоянной функции $k(x, y)$ следует вычислять аналитически. Нетрудно видеть, что если отрезок, соединяющий точки $P_{ij} = (x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$ и $P_{ij+1} = (x_{i-1/2}, y_{j+1/2})$, целиком расположен в области D , то $a_{ij} = 1$. Если же указанный отрезок находится в фиктивной области \hat{D} , то $a_{ij} = 1/\varepsilon$. В противном случае

$$a_{ij} = h_2^{-1}l_{ij} + (1 - h_2^{-1}l_{ij})/\varepsilon,$$

где l_{ij} – длина той части отрезка $[P_{ij}, P_{ij+1}]$, которая принадлежит области D . Аналогичным образом вычисляются коэффициенты b_{ij} .

Очевидно, правая часть схемы F_{ij} равна нулю при всех $(i, j) : \Pi_{ij} \subset \hat{D}$. Если $\Pi_{ij} \subset D$, то правую часть предлагается приближенно заменить значением $f(x_i, y_j)$. В противном случае, когда прямоугольник Π_{ij} содержит точки оригинальной области D и фиктивной области \hat{D} , величина F_{ij} может быть вычислена приближенно как произведение

$$(h_1 h_2)^{-1} S_{ij} f(x_i^*, y_j^*),$$

где (x_i^*, y_j^*) – любая точка пересечения $\Pi_{ij} \cap D$, $S_{ij} = \text{mes}(\Pi_{ij} \cap D)$ – площадь пересечения областей.

5 Метод решения системы линейных алгебраических уравнений.

Приближенное решение разностной схемы (10),(14) может быть получено итерационным методом наименьших невязок [4]. Этот метод позволяет получить последовательность сеточных функций $w^{(k)} \in H$, $k = 1, 2, \dots$, сходящуюся по норме пространства H к решению разностной схемы, т.е.

$$\|w - w^{(k)}\|_E \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Начальное приближение $w^{(0)}$ можно выбрать любым способом, например, равным нулю во всех точках расчетной сетки.

Метод является одношаговым. Итерация $w^{(k+1)}$ вычисляется по итерации $w^{(k)}$ согласно равенствам:

$$w_{ij}^{(k+1)} = w_{ij}^{(k)} - \tau_{k+1} r_{ij}^{(k)}, \quad (15)$$

где невязка $r^{(k)} = Aw^{(k)} - B$, итерационный параметр

$$\tau_{k+1} = \frac{(Ar^{(k)}, r^{(k)})}{\|Ar^{(k)}\|_E^2}.$$

В качестве условия остановки итерационного процесса следует использовать неравенство

$$\|w^{(k+1)} - w^{(k)}\|_E < \delta,$$

где δ – положительное число, определяющее точность итерационного метода. Оценку точности приближенного решения можно проводить в других нормах пространства сеточных функций, например, в максимум норме

$$\|w\|_C = \max_{x \in \overline{\omega}_h} |w(x)|. \quad (16)$$

Константу δ для данной задачи предлагается взять равной 10^{-6} .

Замечание. По согласованию с преподавателем, принимающим задание, метод наименьших невязок может быть заменен любым другим методом, пригодным для решения систем линейных алгебраических уравнений с симметричной положительно определенной матрицей, таких как метод скорейшего спуска, метод сопряженных градиентов, метод Рундсона с чебышевским набором итерационных параметров [4].

6 Задание практикума.

Требуется приближенно найти решение задачи (1),(2) для случая, когда $f(x, y) = 1$ при всех $(x, y) \in D$. Конкретное задание определяется геометрией области D .

Предлагается выполнить следующий вариант задания:

9. внутренность эллипса $\{(x, y) : x^2 + 4y^2 < 1\}$;

7 Краткое описание проделанной работы по созданию OpenMP программы

Задачу можно разделить на несколько частей:

- Заполнение матрицы коэффициентов
- Умножение матрицы на вектор
- Сложение вектора с вектором
- Скалярное произведение вектора

Каждая из этих подзадач была распараллелена по циклам средствами OpenMP.

8 Исследование масштабируемости программы на системе Polus

Таблица 1: Таблица с результатами расчетов на ПВС IBM Polus (OpenMP)

Число нитей	OpenMP	Число точек сетки $M \times N$	Время решения (с)	Ускорение
1		80×80	38.726	1
2		80×80	22.424	1.726
4		80×80	14.212	2.724
8		80×80	9.433	4.105
16		80×80	8.125	4.766
1		160×160	143.24	1
2		160×160	75.45	1.898
4		160×160	41.18	3.478
8		160×160	24.036	5.959
16		160×160	16.274	8.801

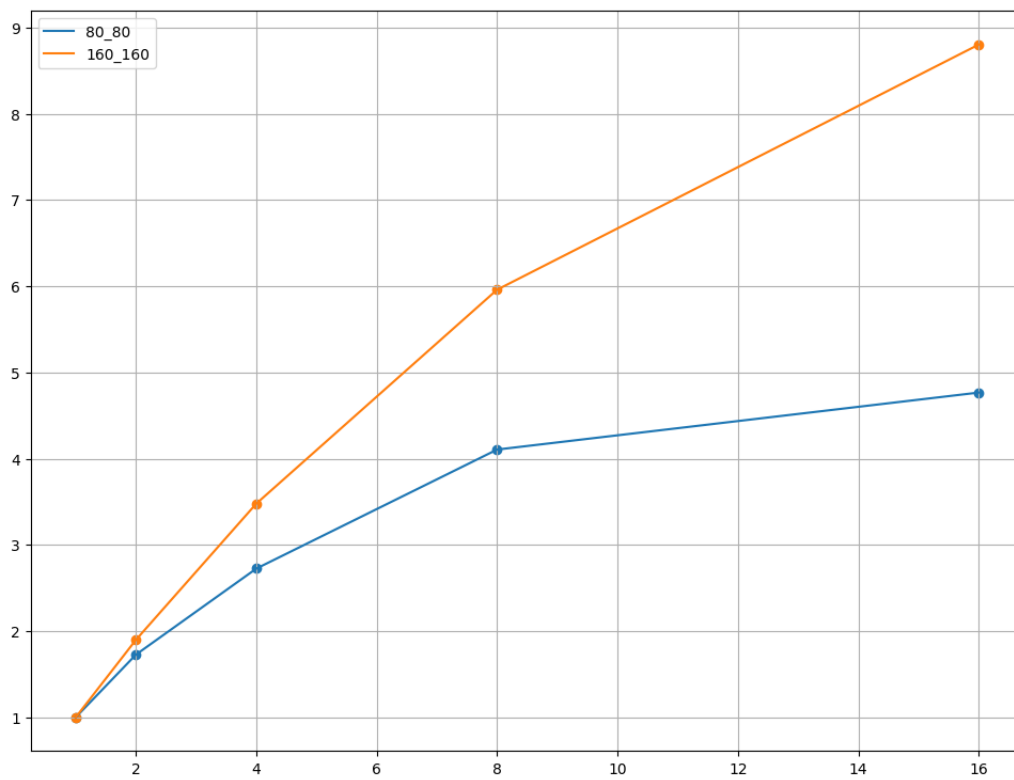


Рис. 1: График зависимости ускорения программы от числа используемых OpenMP-нитей

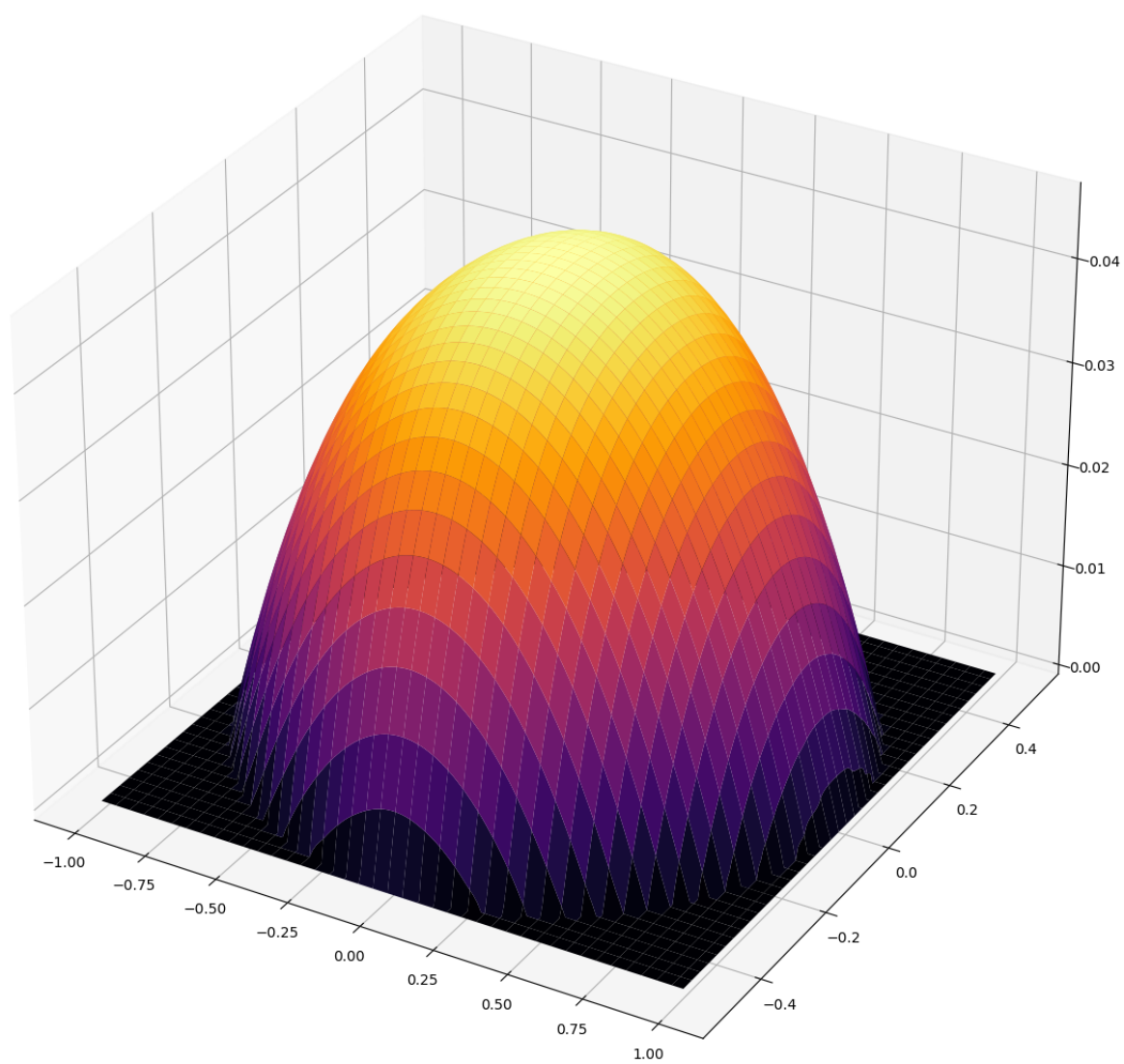


Рис. 2: Рисунок приближенного решения, полученного на сетке с наибольшим количеством узлов

```

in domain: 19856
out domain: 5744
M: 159
N: 159
eps: 0.000158222
dx: 0.0125786
dy: 0.00628931
num threads: 1
0: eps: 0.000000005679428
1000: eps: 0.000000003504127
2000: eps: 0.000000003500374
3000: eps: 0.000000003496976
4000: eps: 0.000000003493872
5000: eps: 0.000000003491007
6000: eps: 0.000000003488338
7000: eps: 0.000000003485833
8000: eps: 0.000000003483466
9000: eps: 0.000000003481219
10000: eps: 0.000000003479075
11000: eps: 0.000000003477000

```

Рис. 3: Промежуточные результаты, полученного на сетке 160×160 , с 1 нитью

```

in domain: 19856
out domain: 5744
M: 159
N: 159
eps: 0.000158222
dx: 0.0125786
dy: 0.00628931
num threads: 2
0: eps: 0.000000005680125
1000: eps: 0.000000003503992
2000: eps: 0.000000003500239
3000: eps: 0.000000003496841
4000: eps: 0.000000003493737
5000: eps: 0.000000003490872
6000: eps: 0.000000003488203
7000: eps: 0.000000003485698
8000: eps: 0.000000003483332
9000: eps: 0.000000003481084
10000: eps: 0.000000003478940

```

Рис. 4: Промежуточные результаты, полученного на сетке 160×160 , с 2 нитями

```
in domain: 19856
out domain: 5744
M: 159
N: 159
eps: 0.000158222
dx: 0.0125786
dy: 0.00628931
num threads: 4
0: eps: 0.000000005678526
1000: eps: 0.000000003503924
2000: eps: 0.000000003500171
3000: eps: 0.000000003496774
4000: eps: 0.000000003493670
5000: eps: 0.000000003490805
6000: eps: 0.000000003488137
7000: eps: 0.000000003485631
8000: eps: 0.000000003483265
9000: eps: 0.000000003481017
10000: eps: 0.000000003478874
```

Рис. 5: Промежуточные результаты, полученного на сетке 160×160 , с 4 нитями

```
in domain: 19856
out domain: 5744
M: 159
N: 159
eps: 0.000158222
dx: 0.0125786
dy: 0.00628931
num threads: 8
0: eps: 0.000000005679690
1000: eps: 0.000000003503973
2000: eps: 0.000000003500220
3000: eps: 0.000000003496822
4000: eps: 0.000000003493718
5000: eps: 0.000000003490854
6000: eps: 0.000000003488185
7000: eps: 0.000000003485679
8000: eps: 0.000000003483313
9000: eps: 0.000000003481065
10000: eps: 0.000000003478922
```

Рис. 6: Промежуточные результаты, полученного на сетке 160×160 , с 8 нитями

```

in domain: 19856
out domain: 5744
M: 159
N: 159
eps: 0.000158222
dx: 0.0125786
dy: 0.00628931
num threads: 16
0: eps: 0.000000005679415
1000: eps: 0.000000003504028
2000: eps: 0.000000003500275
3000: eps: 0.000000003496877
4000: eps: 0.000000003493774
5000: eps: 0.000000003490909
6000: eps: 0.000000003488240
7000: eps: 0.000000003485734
8000: eps: 0.000000003483368
9000: eps: 0.000000003481120
10000: eps: 0.000000003478976

```

Рис. 7: Промежуточные результаты, полученного на сетке 160×160 , с 16 нитями

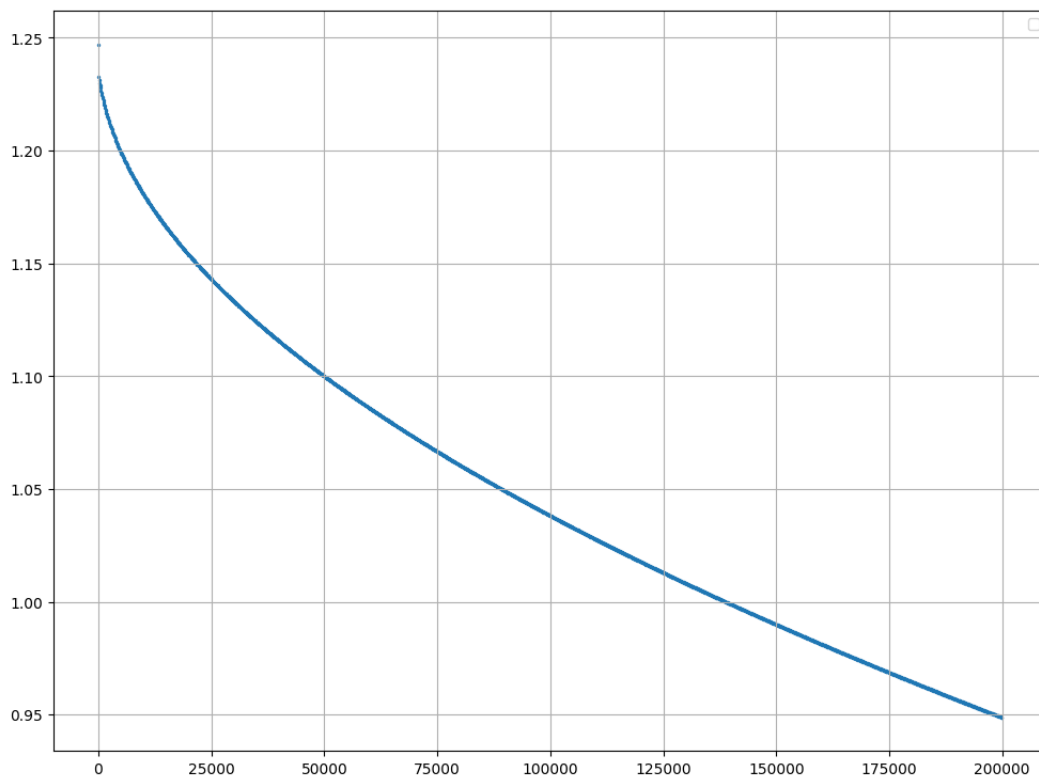


Рис. 8: График невязки для сетки 80×80

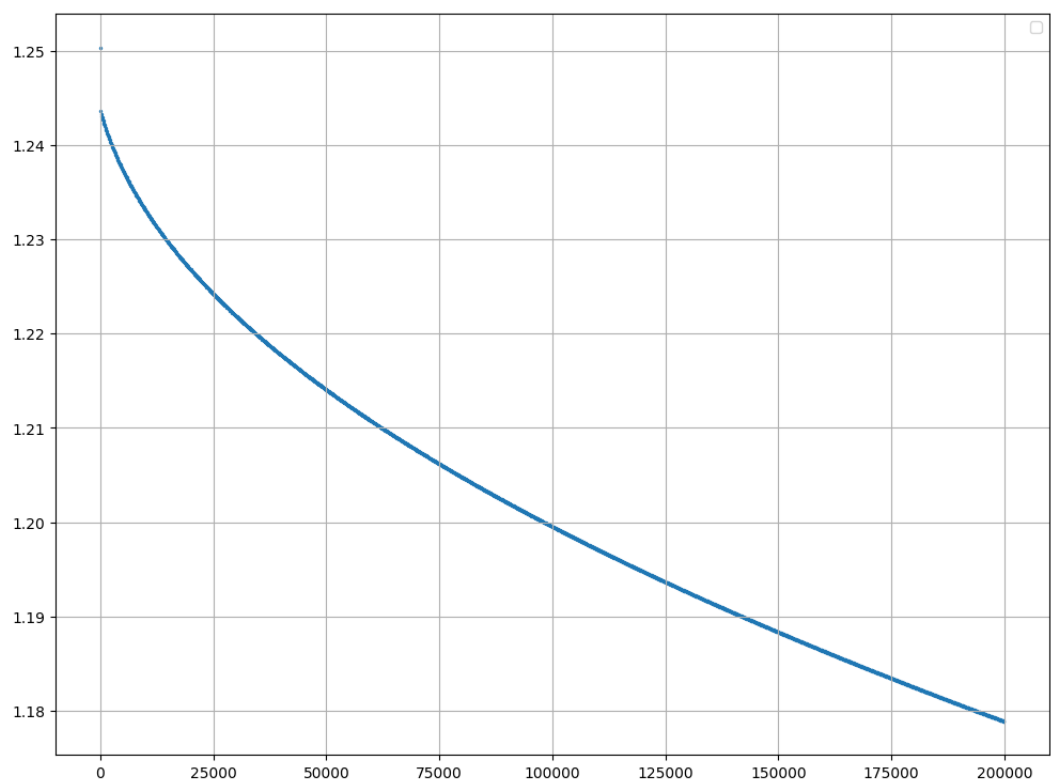


Рис. 9: График невязки для сетки 160 на 160