



Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Дединов Данзан Мингиянович
608 группа
9 вариант

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ПУАССОНА В КРИВОЛИНЕЙНОЙ ОБЛАСТИ**

Москва
2023

1 Введение

Требуется приближенно решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в криволинейной области. Задание необходимо выполнить на ПВС Московского университета IBM Polus.

2 Математическая постановка задачи

В области $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченной контуром γ , рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f(x, y), \quad (1)$$

в котором оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

функция $f(x, y)$ считается известной. Для выделения единственного решения уравнение дополняется граничными условием Дирихле (см. [1]):

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \gamma. \quad (2)$$

Требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области D и краевому условию (2) на ее границе.

3 Метод фиктивных областей.

Для приближенного решения задачи (1),(2) предлагается воспользоваться методом фиктивных областей [2].

Пусть область D принадлежит прямоугольнику $\Pi = \{(x, y) : A_1 < x < B_1, A_2 < y < B_2\}$. Обозначим через \overline{D} , $\overline{\Pi}$ замыкание области D и прямоугольника Π соответственно, через Γ – границу прямоугольника. Разность множеств

$$\hat{D} = \Pi \setminus \overline{D}$$

называется фиктивной областью. Выберем и зафиксируем малое $\varepsilon > 0$.

В прямоугольнике Π рассматривается задача Дирихле

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, y) \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k(x, y) \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= F(x, y), \\ v(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

с кусочно-постоянным коэффициентом

$$k(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D, \\ 1/\varepsilon, & (x, y) \in \hat{D} \end{cases} \quad (4)$$

и правой частью

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \in \hat{D}. \end{cases} \quad (5)$$

Требуется найти непрерывную в $\bar{\Pi}$ функцию $v(x, y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению задачи (3) всюду в $\Pi \setminus \gamma$, равную нулю на границе Γ прямоугольника, и такую, чтобы вектор потока

$$W(x, y) = -k(x, y) \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

имел непрерывную нормальную компоненту на общей части криволинейной границы области D и прямоугольника Π . Последнее означает, что в каждой точке $(x_0, y_0) \in \gamma \cap \Pi$ должно выполняться равенство

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0), \\ (x,y) \in D}} (W(x, y), n(x_0, y_0)) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0), \\ (x,y) \in \hat{D}}} (W(x, y), n(x_0, y_0)), \quad (6)$$

где $n(x, y)$ – вектор единичной нормали к границе γ в точке (x, y) , определенный всюду или почти всюду на кривой.

Известно [2], что функция $v(x, y)$ равномерно приближает решение $u(x, y)$ задачи (1),(2) в области D , а именно,

$$\max_{P \in \bar{D}} |v(x, y) - u(x, y)| < C\varepsilon, \quad C > 0. \quad (7)$$

В частности, $|v(x, y)| < C\varepsilon$ во всех точках кривой γ . Этот результат позволяет получить искомую функцию $u(x, y)$ с любой наперед заданной точностью $\varepsilon > 0$, решая задачу (3),(6) вместо задачи (1),(2). Тем самым, задача Дирихле в криволинейной области приближенно заменяется задачей Дирихле в прямоугольнике с кусочно-постоянным коэффициентом $k(x, y)$.

4 Разностная схема решения задачи.

Краевые задачу (3),(6) предлагается решать численно методом конечных разностей [3]. В замыкании прямоугольника $\bar{\Pi}$ определяется равномерная прямоугольная сетка $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$, где

$$\bar{\omega}_1 = \{x_i = A_1 + ih_1, i = \overline{0, M}\}, \quad \bar{\omega}_2 = \{y_j = A_2 + jh_2, j = \overline{0, N}\}.$$

Здесь $h_1 = (B_1 - A_1)/M$, $h_2 = (B_2 - A_2)/N$. Через ω_h обозначим множество внутренних узлов сетки $\bar{\omega}_h$, т.е. множество узлов сетки прямоугольника, не лежащих на границе Γ .

Рассмотрим линейное пространство H функций, заданных на сетке ω_h . Обозначим через w_{ij} значение сеточной функции $w \in H$ в узле сетки $(x_i, y_j) \in \omega_h$. Будем считать, что в пространстве H задано скалярное произведение и евклидова норма

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} h_1 h_2 u_{ij} v_{ij}, \quad \|u\|_E = \sqrt{(u, u)}. \quad (8)$$

В методе конечных разностей дифференциальная задача математической физики заменяется конечно-разностной операторной задачей вида

$$Aw = B, \quad (9)$$

где $A : H \rightarrow H$ – оператор, действующий в пространстве сеточных функций, $B \in H$ – известная правая часть. Задача (9) называется разностной схемой. Решение этой задачи считается численным решением исходной дифференциальной задачи.

При построении разностной схемы следует аппроксимировать (приблизительно заменить) все уравнения краевой задачи их разностными аналогами – сеточными уравнениями, связывающими значения искомой сеточной функции в узлах сетки. Полученные таким образом уравнения должны быть функционально независимыми, а их общее количество – совпадать с числом неизвестных, т.е. с количеством узлов сетки.

Дифференциальное уравнение задачи (3) во всех внутренних точках сетки аппроксимируется разностным уравнением

$$-\frac{1}{h_1} \left(a_{i+1j} \frac{w_{i+1j} - w_{ij}}{h_1} - a_{ij} \frac{w_{ij} - w_{i-1j}}{h_1} \right) - \frac{1}{h_2} \left(b_{ij+1} \frac{w_{ij+1} - w_{ij}}{h_2} - b_{ij} \frac{w_{ij} - w_{ij-1}}{h_2} \right) = F_{ij},$$

$$i = \overline{1, M-1}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (10)$$

в котором коэффициенты

$$a_{ij} = \frac{1}{h_2} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} k(x_{i-1/2}, t) dt, \quad b_{ij} = \frac{1}{h_1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} k(t, y_{j-1/2}) dt \quad (11)$$

при всех $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, N}$. Здесь полуцелые узлы

$$x_{i\pm 1/2} = x_i \pm 0.5h_1, \quad y_{j\pm 1/2} = y_j \pm 0.5h_2.$$

Правая часть разностного уравнения

$$F_{ij} = \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{\Pi_{ij}} F(x, y) dx dy, \quad \Pi_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2}\} \quad (12)$$

при всех $i = \overline{1, M-1}$, $j = \overline{1, N-1}$.

Введем обозначения правой и левой разностных производных по переменным x , y соответственно:

$$w_{x,ij} = \frac{w_{i+1j} - w_{ij}}{h_1}, \quad w_{\bar{x},ij} = w_{x,i-1j} = \frac{w_{ij} - w_{i-1j}}{h_1},$$

$$w_{y,ij} = \frac{w_{ij+1} - w_{ij}}{h_2}, \quad w_{\bar{y},ij} = w_{y,ij-1} = \frac{w_{ij} - w_{ij-1}}{h_2}.$$

С учетом принятых обозначений разностное уравнение (10) можно представить в более компактном и удобном виде:

$$-(aw_{\bar{x}})_{x,ij} - (bw_{\bar{y}})_{y,ij} = F_{ij}, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad j = \overline{1, N-1} \quad (13)$$

Краевые условия Дирихле задачи (3),(6) аппроксимируются точно равенством

$$w_{ij} = w(x_i, y_j) = 0, \quad (x_i, y_j) \in \Gamma. \quad (14)$$

Переменные w_{ij} , заданные равенством (14), исключаются из системы уравнений (13). В результате остаются неизвестными значения w_{ij} при $i = \overline{1, M-1}$, $j = \overline{1, N-1}$ и их количество совпадает с числом уравнений. Система является линейной относительно неизвестных величин и может быть представлена в виде (9) с самосопряженным и положительно определенным оператором

$$Aw = -(aw_{\overline{x}})_x - (bw_{\overline{y}})_y$$

и правой частью F , определенной равенством (12). Таким образом, построенная разностная схема (13),(14) линейна и имеет единственное решение при любой правой части (см. [5]).

Замечание. Интегралы (11) от кусочно-постоянной функции $k(x, y)$ следует вычислять аналитически. Нетрудно видеть, что если отрезок, соединяющий точки $P_{ij} = (x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$ и $P_{ij+1} = (x_{i-1/2}, y_{j+1/2})$, целиком расположен в области D , то $a_{ij} = 1$. Если же указанный отрезок находится в фиктивной области \hat{D} , то $a_{ij} = 1/\varepsilon$. В противном случае

$$a_{ij} = h_2^{-1}l_{ij} + (1 - h_2^{-1}l_{ij})/\varepsilon,$$

где l_{ij} – длина той части отрезка $[P_{ij}, P_{ij+1}]$, которая принадлежит области D . Аналогичным образом вычисляются коэффициенты b_{ij} .

Очевидно, правая часть схемы F_{ij} равна нулю при всех $(i, j) : \Pi_{ij} \subset \hat{D}$. Если $\Pi_{ij} \subset D$, то правую часть предлагается приближенно заменить значением $f(x_i, y_j)$. В противном случае, когда прямоугольник Π_{ij} содержит точки оригинальной области D и фиктивной области \hat{D} , величина F_{ij} может быть вычислена приближенно как произведение

$$(h_1 h_2)^{-1} S_{ij} f(x_i^*, y_j^*),$$

где (x_i^*, y_j^*) – любая точка пересечения $\Pi_{ij} \cap D$, $S_{ij} = \text{mes}(\Pi_{ij} \cap D)$ – площадь пересечения областей.

5 Метод решения системы линейных алгебраических уравнений

Был выбран метод сопряженных градиентов. Математическое описание метода, можно найти в [1].

$$\begin{aligned} r_0 &= b - Mx_0, \quad p_0 = r_0; \quad i = 0, 1, \dots : \\ \alpha_i &= \frac{r_i^T r_i}{p_i^T M p_i}, \quad x_{i+1} = x_i + p_i \alpha_i, \quad r_{i+1} = r_i - M p_i \alpha_i, \\ \beta_i &= \frac{r_{i+1}^T r_{i+1}}{r_i^T r_i}, \quad p_{i+1} = r_{i+1} + p_i \beta_i. \end{aligned}$$

Рис. 1: Метод сопряженных градиентов

6 Задание практикума.

Требуется приближенно найти решение задачи (1),(2) для случая, когда $f(x, y) = 1$ при всех $(x, y) \in D$. Конкретное задание определяется геометрией области D .

Предлагается выполнить следующий вариант задания:

9. внутренность эллипса $\{(x, y) : x^2 + 4y^2 < 1\}$;

7 Краткое описание проделанной работы по созданию OpenMP программы

Задачу можно разделить на несколько частей:

- Заполнение матрицы коэффициентов
- Умножение матрицы на вектор
- Сложение вектора с вектором
- Скалярное произведение вектора

Каждая из этих подзадач была распараллелена по циклам средствами OpenMP и MPI.

8 Исследование масштабируемости программы на системе Polus

Таблица 1: Таблица с результатами расчетов на ПВС IBM Polus (OpenMP)

Число нитей	OpenMP	Число точек сетки $M \times N$	Время решения (с)	Ускорение
1		80×80	5.865	1
2		80×80	2.9983	1.956
4		80×80	2.1488	2.729
8		80×80	1.3639	4.3
16		80×80	1.0456	5.609
1		160×160	19.9229	1
2		160×160	10.0809	1.976
4		160×160	6.4452	3.091
8		160×160	4.1421	4.809
16		160×160	3.0948	6.437

Таблица 2: Таблица с результатами расчетов на ПВС IBM Polus (OpenMP + MPI)

Число процессов MPI	Количество нитей OpenMP	Число точек сетки $M \times N$	Время решения (с)	Ускорение
2	1	160×160	8.317	1.614
2	2	160×160	7.606	1.765
2	4	160×160	4.606	2.915
2	8	160×160	2.963	4.531
4	1	160×160	4.592	2.924
4	2	160×160	4.022	3.338
4	4	160×160	2.575	5.214
4	8	160×160	1.741	7.712

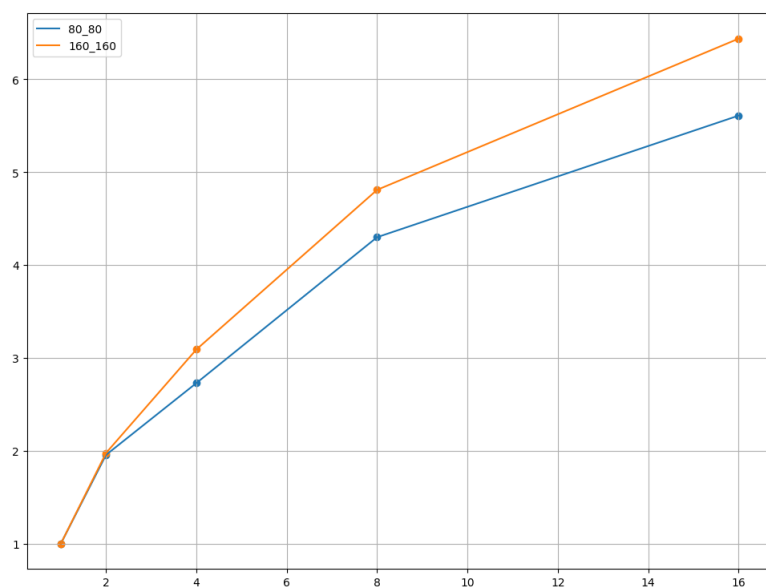


Рис. 2: График зависимости ускорения программы от числа используемых OpenMP-нитей

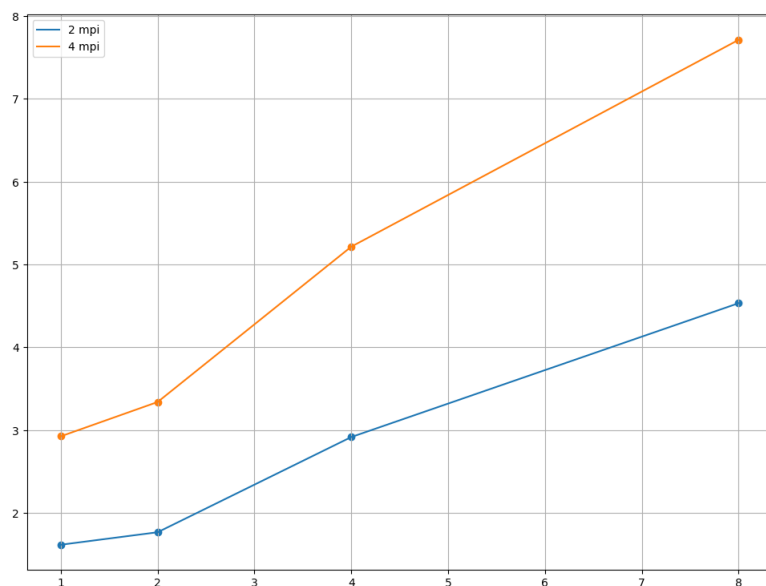


Рис. 3: График зависимости ускорения программы MPI+OpenMP

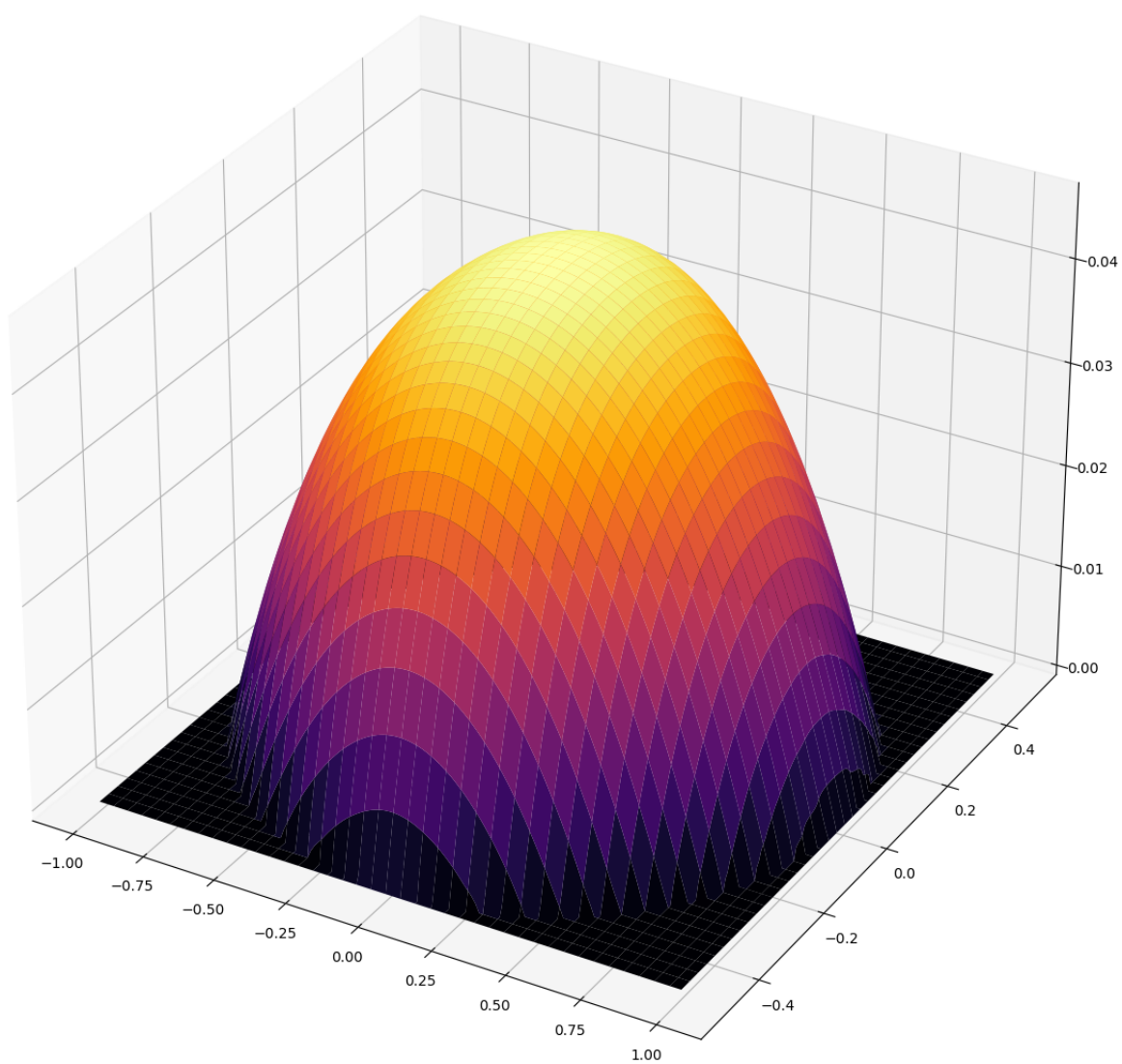


Рис. 4: Рисунок приближенного решения, полученного на сетке с наибольшим количеством узлов

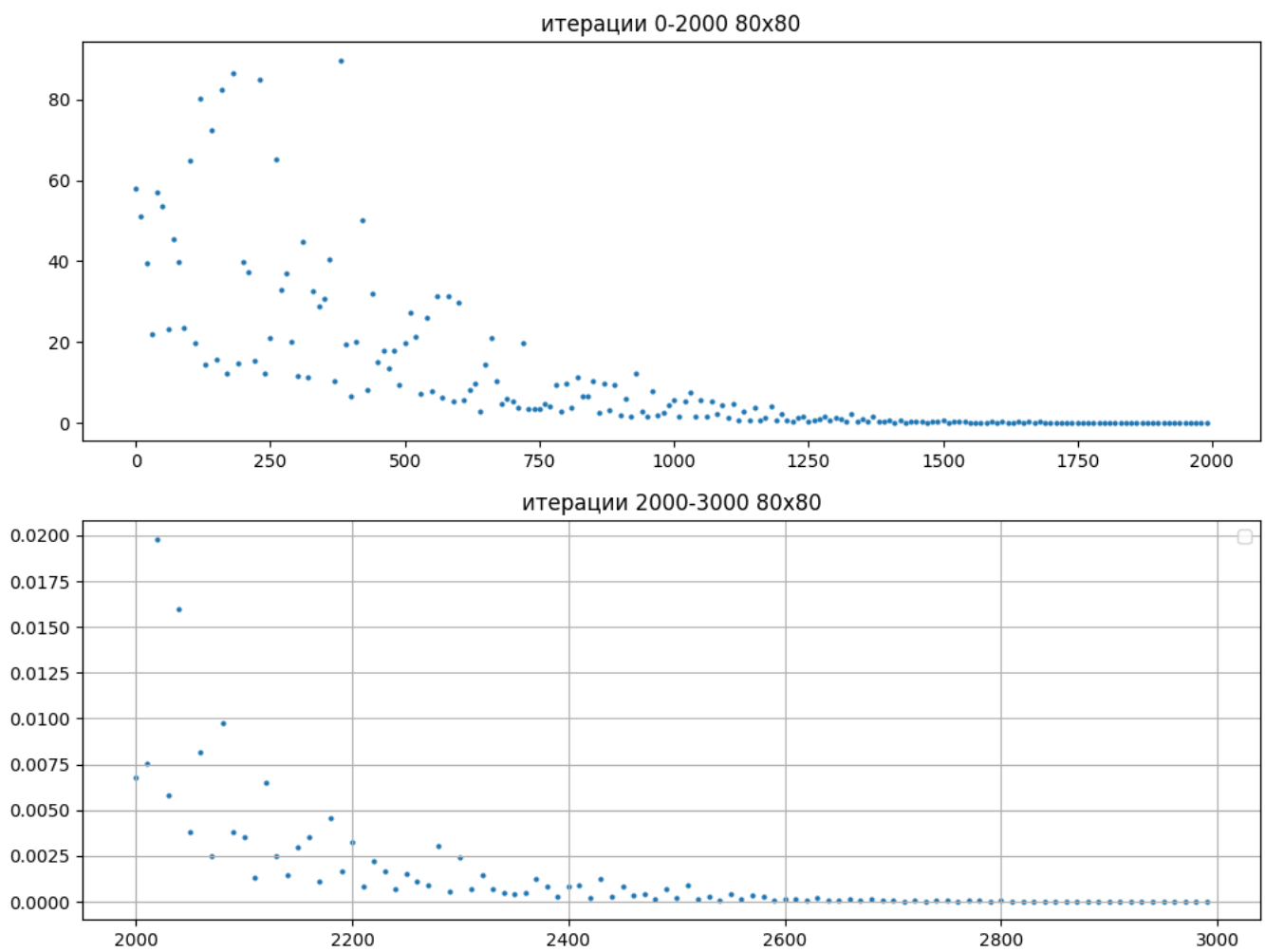


Рис. 5: График невязки для сетки 80 на 80

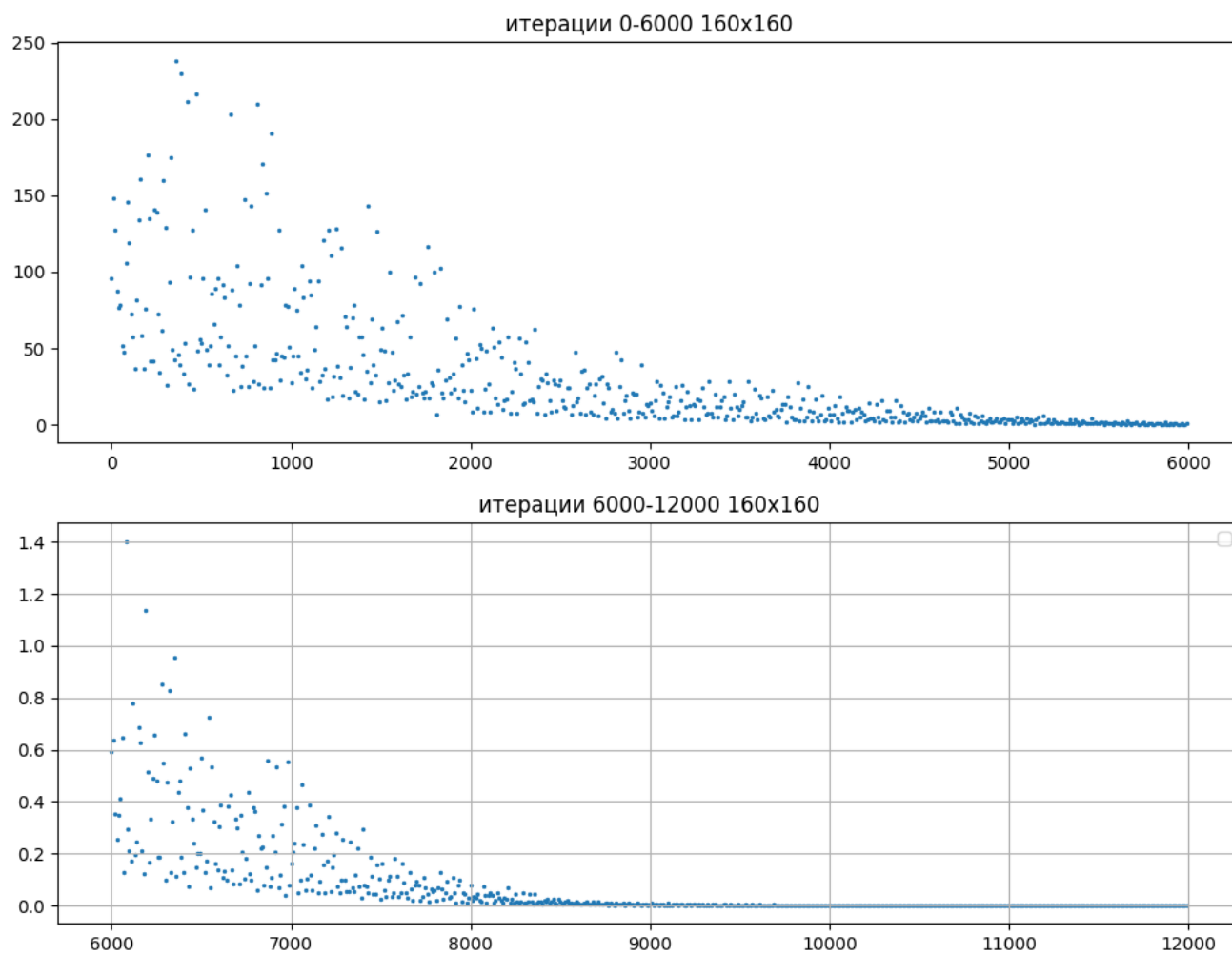


Рис. 6: График невязки для сетки 160 на 160

9 Список литературы

[1] - Предобусловливание итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений (Капорин И.Е)