

硕士学位论文

脉冲激光实现离子量子比特门

**IMPLEMENTATION OF ION-QUBIT GATE BY
PULSED LASER**

研 究 生：彭道杰

指 导 教 师：张君华副研究员

南方科技大学

二〇二四年三月

国内图书分类号: XXxxx.x

国际图书分类号: xx-x

学校代码: 14325

密级: 公开

工学硕士学位论文

脉冲激光实现离子量子比特门

学位申请人: 彭道杰

指导教师: 张君华副研究员

学科名称: 电子科学与技术

答辩日期: 2024 年 4 月

培养单位: 量子科学与工程研究院

学位授予单位: 南方科技大学

Classified Index: XXxxx.x

U.D.C: xx-x

Thesis for the degree of Master of Engineering

IMPLEMENTATION OF ION-QUBIT GATE BY PULSED LASER

Candidate:	PENG Daojie
Supervisor:	Assistant Researcher ZHANG Junhua
Discipline:	Electronic Science and Technology
Date of Defence:	April, 2024
Affiliation:	Institute of Quantum Science and Engineering
Degree-Confering- Institution:	Southern University of Science and Technology

学位论文公开评阅人和答辩委员会名单

公开评阅人名单

刘 XX	教授	南方科技大学
陈 XX	副教授	XXXX 大学
杨 XX	研究员	中国 XXXX 科学院 XXXXXXXX 研究所

答辩委员会名单

主席	赵 XX	教授	南方科技大学
委员	刘 XX	教授	南方科技大学
	杨 XX	研究员	中国 XXXX 科学院 XXXXXXX 研究所
	黄 XX	教授	XXXX 大学
秘书	周 XX	副教授	XXXX 大学
	吴 XX	助理研究员	南方科技大学

南方科技大学学位论文原创性声明和使用授权说明

南方科技大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所提交的学位论文是本人在导师指导下独立进行研究工作所取得的成果。除了特别加以标注和致谢的内容外，论文中不包含他人已发表或撰写过的研究成果。对本人的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中作了明确的说明。本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：

日期：

南方科技大学学位论文使用授权书

本人完全了解南方科技大学有关收集、保留、使用学位论文的规定，即：

1. 按学校规定提交学位论文的电子版本。
2. 学校有权保留并向国家有关部门或机构送交学位论文的电子版，允许论文被查阅。
3. 在以教学与科研服务为目的前提下，学校可以将学位论文的全部或部分内容存储在有关数据库提供检索，并可采用数字化、云存储或其他存储手段保存本学位论文。
 - (1) 在本论文提交当年，同意在校园网内提供查询及前十六页浏览服务。
 - (2) 在本论文提交 ☐ 当年/ ☐ 一年以后，同意向全社会公开论文全文的在线浏览和下载。
4. 保密的学位论文在解密后适用本授权书。

作者签名：

日期：

指导教师签名：

日期：

摘 要

量子计算因其潜在的应用前景而受到广泛关注强大的计算能力。在量子算法的配合下，量子计算机可以实现许多通过经典计算机难以实现的计算，如大素数分解、量子多体系统仿真等。

关键词：量子计算；离子阱；测控系统；电子学

Abstract

Quantum computing has attracted extensive attention due to its potentially powerful computing capabilities. With the cooperation of quantum algorithm, quantum computer can realize many calculations that are difficult to be realized by classical computers like factorization of large prime numbers, simulation of quantum many body systems.

Keywords: Quantum Computation; Ion Trap; Measurement and Control System; Electronics

目 录

摘 要.....	I
Abstract.....	II
插图和附表清单.....	VII
符号和缩略语说明.....	IX
第 1 章 简介.....	1
第 2 章 量子计算.....	3
2.1 量子计算基本原理介绍.....	3
2.1.1 经典逻辑门.....	3
2.1.2 量子逻辑门.....	9
2.1.3 量子算法.....	11
2.2 量子计算的不同实现平台.....	11
2.2.1 离子量子计算.....	12
2.2.2 超导量子计算.....	12
2.2.3 原子量子计算.....	12
2.2.4 硅基量子计算.....	12
2.2.5 光量子计算.....	12
2.2.6 拓扑量子计算.....	12
第 3 章 离子阱量子计算系统.....	13
3.1 离子阱的发展.....	13
3.2 离子在 RF 阱中的经典运动.....	13
3.2.1 经典运动方程.....	14
3.2.2 低阶近似.....	15
3.3 离子在 RF 阱中的量子力学运动.....	15
3.3.1 量子力学运动方程.....	16
3.3.2 量子低阶近似.....	19
3.4 阱中离子的一些特别的运动量子态.....	19
3.4.1 数算子和它的本征态.....	19
3.4.2 相干态.....	20
3.4.3 压缩真空态.....	21

3.4.4	热分布	22
3.5	囚禁离子的光场耦合	23
3.5.1	二能级近似	23
3.5.2	耦合的理论表述	24
3.5.3	总结说明	27
3.6	系统的组成——离子阱系统	27
3.6.1	囚禁电极	27
3.6.2	微波信号	27
3.6.3	真空系统	27
3.6.4	螺线管谐振腔	27
3.7	系统的组成——光学系统	27
3.7.1	冷却激光	27
3.7.2	操控激光	27
3.8	系统的组成——测控系统	27
3.8.1	测控系统的构架	27
第 4 章	铯离子量子计算	28
4.1	铯离子的能级结构和和比特编码方式	28
4.2	铯离子的电离和囚禁	29
4.3	铯离子的激光冷却	30
4.4	铯离子的态初始化	32
4.5	铯离子的态探测	33
4.6	铯离子的态操控	34
4.6.1	微波操控铯离子	35
4.6.2	连续激光操控铯离子	37
4.6.3	脉冲激光操控铯离子	40
4.7	Mølmer-Sørensen 门	43
第 5 章	基于 FPGA 的 RTMQ 测控系统	47
5.1	RTMQ 实时系统架构介绍	48
5.2	测控硬件组成	50
5.3	软件 API	50
5.4	基于 FPGA 的数字超前进位加法器	50
5.5	基于 FPGA 的数字 Booth 乘法器	51
5.6	基于 FPGA 的数字 PID	51

5.7 基于 FPGA 的通用数字滤波器.....	51
第 6 章 螺线管谐振腔.....	52
6.1 离子阱系统中的螺线管谐振腔.....	52
6.2 螺线管谐振腔的仿真.....	52
6.3 几何参数对频率和 Q 的影响.....	56
6.3.1 主线圈几何参数的影响.....	58
6.3.2 输出线参数的影响.....	60
6.3.3 屏蔽外壳参数的影响.....	63
6.3.4 耦合线圈参数的影响.....	64
6.4 螺线管谐振腔的数学建模.....	65
6.5 螺线管谐振腔的加工和制作.....	67
6.6 螺线管谐振腔的机械结构优化.....	67
第 7 章 脉冲激光拍频锁定.....	70
7.1 脉冲激光拍频锁定原理.....	70
7.2 脉冲激光拍频锁定系统搭建.....	70
7.3 脉冲激光拍频系统锁定结果.....	70
第 8 章 激光功率锁定.....	71
8.1 激光功率锁定原理.....	71
8.2 激光功率锁定系统搭建.....	71
8.3 激光功率锁定系统结果.....	71
第 9 章 离子阱频率锁定.....	72
9.1 离子阱频率锁定原理.....	72
9.2 离子阱频率锁定系统搭建.....	72
9.3 离子阱频率锁定系统结果.....	72
第 10 章 脉冲激光操控离子（量子门）实验.....	73
10.1 态初始化保真度.....	73
10.2 XXXX.....	73
10.3 XXXX.....	73
10.4 XXXX.....	73
10.5 XXXX.....	73
结 论.....	74
参考文献.....	75
附录 A 补充内容.....	82

目 录

致 谢	83
个人简历、在学期间完成的相关学术成果	84

插图和附表清单

图 2-1	集合操作	4
图 2-2	不可逻辑逆门	6
图 2-3	<i>NOT</i> 门图标	7
图 2-4	<i>CNOT</i> 门图标	8
图 2-5	<i>TOFFOLI</i> 门图标	9
图 4-1	镱离子的能级结构和比特编码方式	29
图 4-2	刀片阱示意图	30
图 4-3	激光施加到离子的多普勒效应示意图	31
图 4-4	多普勒冷却示意图	32
图 4-5	离子冷却跃迁回路示意图	33
图 4-6	离子态初始化示意图	34
图 4-7	离子态测量示意图	35
图 4-8	两步成像系统	36
图 4-9	不同失谐 μ 情况下的拉比振荡	37
图 4-10	镱离子受激拉曼跃迁示意图	38
图 4-11	载带跃迁、红边带跃迁和蓝边带跃迁示意图	40
图 4-12	脉冲激光操控镱离子	41
图 4-13	脉冲激光在频域中的梳齿	42
图 4-14	<i>XX</i> 门转换为 <i>CNOT</i> 门	46
图 5-1	<i>RTMQ</i> 系统架构示意图	48
图 5-2	<i>RTMQ</i> 系统架构节点示意图	49
图 5-3	<i>RTMQ</i> 系统架构节点内部模块示意图	50
图 6-1	谐振腔结构平面示意图	53
图 6-2	<i>HFSS</i> 中建立的 3D 模型图	54
图 6-3	实际实验的测量方式示意图	55
图 6-4	谐振腔仿真与实验散射参数结果对比	57
图 6-5	谐振腔仿真与实验频率和 <i>Q</i> 结果对比	57
图 6-6	固定线长下改变主线圈参数的频率 f_0 变化	58
图 6-7	螺线管谐振腔 f_0 、 <i>Q</i> 值等高图	59

图 6-8	谐振腔仿真与实验散射参数结果对比	61
图 6-9	输出线部分示意图	62
图 6-10	输出线部分影响	62
图 6-11	屏蔽外壳的影响	63
图 6-12	耦合线圈的影响	64
图 6-13	LCR 电路模型	65
图 6-14	HUST 模型结果	67
图 6-15	Sussex 模型结果	68
图 6-16	SUST 模型结果	69
表 2-1	De-Morgan 定律	5
表 2-2	不可逻辑逆门	6
表 2-3	NOT 门真值表	8
表 2-4	CNOT 门真值表	8
表 2-5	TOFFOLI 门真值表	9
表 6-1	仿真的谐振腔参数设置	56
表 6-2	谐振腔对主线圈直径和螺距参数的敏感性	60

符号和缩略语说明

RF	射频 (Radio Frequency)
PQS	量子叠加原理 (Principle of Quantum Superposition)
DCT	动态解耦技术 (Dynamic Decoupling Technology)
UQC	通用量子计算机 (Universal Quantum Computer)
BA	布尔代数 (Boolean Algebra)
RLG	可逆逻辑门 (Reversible Logic Gate)
ILG	不可逻辑逆门 (Irreversible Logic Gate)
ULG	通用逻辑门 (Universal Logic Gate)
QNG	量子非门 (Quantum Not Gate)
ME	马修方程 (Mathieu Equation)
LDP	Lamb-Dick 参数 (Lamb-Dick Parameter)
EMCCD	电子倍增电荷耦合器件 (Electron-multiplying charge-coupled device)
PMT	光电倍增管 (Photomultiplier Tube)
SRT	受激拉曼跃迁 (Stimulated Raman Transition)
FE	有限元 (Finite Element)
SP	散射参数 (Scattering Parameter)
CZ-Gate	Cirac-Zoller 门 (Cirac-Zoller Gate)
MS-Gate	Mølmer-Sørensen 门 (Mølmer-Sørensen Gate)

第 1 章 简介

量子计算因其潜在的应用前景而受到广泛关注强大的计算能力。在量子算法的配合下，量子计算机可以实现许多通过经典计算机难以实现的计算，如大素数分解^[1-2]、量子多体系统仿真^[3-4]、加速搜索过程^[5]等。

和经典计算机的实现方式类似，量子计算机也采用比特 (*Bit*) 作为计算单元来实现计算。与经典计算机使用的经典比特 (*Bit*) 不同的是量子计算的计算单元是量子比特 (*Qubit*)。在量子计算机中，这个最小的计算单元通常被表示为： $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 。经典比特可能处于的状态只有两个，一般来说 0（低电平）或 1（高电平），而量子比特不仅可能处于 $|0\rangle$ 态或 $|1\rangle$ 态，还可能处于两者的概率叠加状态。采用狄拉克符号 (*Dirac-Notation*) 的方式，一个量子比特可以被表示为概率叠加：

$$|\phi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle$$

其中 $a_0^2 + a_1^2 = 1$ 。对于多个量子比特共同存在的情况，整个系统 ($N - qubits$) 的状态可以被表示为：

$$|\phi\rangle = a_0 |0 \cdots 0\rangle + \cdots + a_{2^N-1} |1 \cdots 1\rangle$$

这就是所谓的量子叠加原理 (*Principle of Quantum Superposition, PQS*)^[6]。这也是量子计算机的量子并行性 (*Quantum Parallelism*) 这一强大特性的来源。

为了实现量子比特，量子计算机的最小计算单元，我们必须有某种定义明确的两级系统，并且对要编码的信息具有量子效应。David DiVincenzo 对量子计算机的实现要素进行了总结^[7]：

- (1) 一个定义明确的两级系统来编码量子比特；
- (2) 足够长的相干时间来执行量子操作；
- (3) 能够将量子比特近乎完美的初始化到确定性纯态；
- (4) 定义的量子比特能够组合实现通用量子门；
- (5) 接近完美的量子比特状态读出；

以上的这些原则被用于选择合适的物理平台来进行量子计算的实现，经过筛选后目前已经被证明有实现通用量子计算机潜力的物理系统平台有：离子阱系统、超导系统、线性光学系统、硅基量子点、原子系统、拓扑系统等。

迄今为止，作为 1995 年提出的量子计算的第一个候选者的激光冷却离子阱系统 (*Ion trap system*) 仍然是实现大规模量子计算机最有前途的平台之一。离子已经

很好地定义了具有极长相干时间^[8]的内部状态，它保证了出色的纠缠和初始化特性^[9]。储存在单个离子中的量子比特状态可以有长达几秒钟的寿命^[10]，在动态解耦技术 (*Dynamic Decoupling Technology, DCT*) 的帮助下这个寿命可以超过 10 分钟^[11]，这是在所有现有量子计算物理平台中保持最长的相干时间记录。关于纠缠态的制备，离子阱系统在 2011 年已经实现了 14 个纠缠态的制备^[12]，这个数字在 2018 年更新到了 20^[13]。同时，四量子比特多部纠缠态的存储时间达到 1.1 秒^[14]。此外，运动自由度可以用于实现不同量子位之间的通信，确保全量子位连接^[15]。离子的状态也可以用几乎完美的效率读出^[16]，在此基础上可以构建高保真量子逻辑门^[17]。DiVincenzo 的原始论文还为量子通信目的指定了两个额外的标准：能平稳地进行量子比特和所谓的“飞行”量子比特之间的相互转换 (这可能是光子，量子信息编码在偏振、频率或相位)，以及将这些飞行量子比特从一个位置高保真地传输到另一个位置的能力。如果目标不是构建一个平稳的大规模量子计算机，这些标准并不重要，但对于包括量子网络在内的其它一些应用来说是十分必要的。在这方面，一些方案采用捕获离子的中尺度模块之间的光子互连来实现量子处理器的互联^[18]。虽然离子本身不太可能作为长距离量子通信或量子网络的飞行量子比特，但离子和光子之间的高保真纠缠已被实现^[19]。总之，离子满足 QC 的五个主要 DiVincenzo 标准，也验证了将它们的量子信息转移到飞行量子比特的能力。事实上，早在 2004，所有这些标准在离子量子比特平台基本上都得到满足^[19-20]。

随后这里可以再补充一些量子测控方面的内容...

尽管到目前为止离子阱量子计算发展迅速，但在实现通用量子计算机之前仍有许多问题有待解决。最近，许多研究这致力于芯片离子阱^[21]、离子穿梭和规模化^[22-24]、光学集成^[25-26]、多离子的单独寻址^[27]和量子比特纠错^[28-29]等技术，以实现最终目标——通用量子计算机 (*Universal Quantum Computer, UQC*)。

简要阐述一下后续章节的主要内容...

第2章 量子计算

2.1 量子计算基本原理介绍^[30]

目前，计算机的电路模型是计算过程最有用的抽象，广泛应用于计算机工业在实际计算硬件的设计和构建中。在电路模型中，计算机科学家将任何计算视为等同于由作用于某个二进制（比特串, *Bit String*）输入的少数不同类型的布尔逻辑门 (*Boolean Logic Gates*) 构建的电路的动作。每个逻辑门根据门的定义以某种确定性的方式将其输入位转换为一个或多个输出位。通过组合计算电路图中的门，使前一级门的输出作为一级门的输入，计算机科学家可以证明这可以完成任何可行的计算。

2.1.1 经典逻辑门

逻辑是数学的一个子领域，主要关注论点的有效性，即通过从起始假设（称为公理）进行推理过程来确定命题的真实性或虚假性，并通过对它们应用有效的推理规则。逻辑不关心确定现实世界中实际为真或假的内容，因为现实世界是但我们可能选择推理的无限多个可能世界之一。相反，逻辑提供了数学框架，我们可以从给定的开始假设中得出有效的结论。

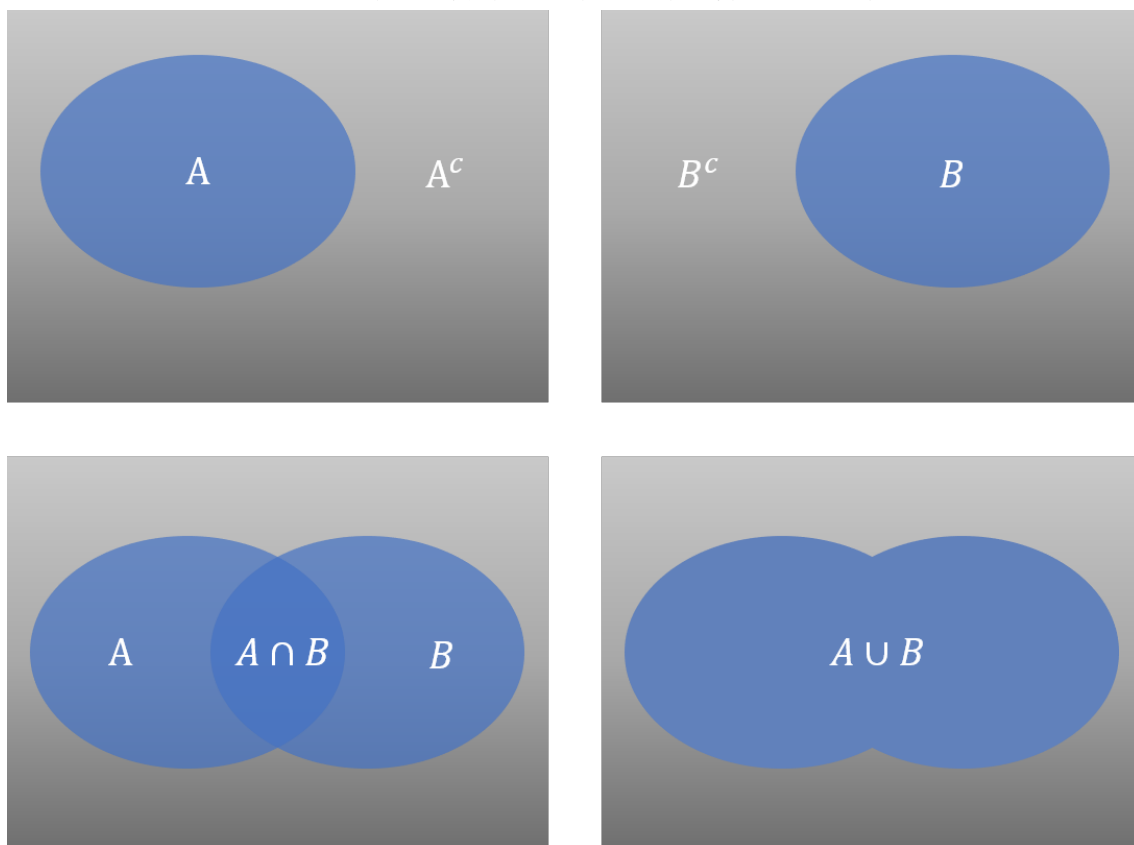
经典计算机的数学基础是布尔代数 (*Boolean Algebra, BA*)^[31]。BA 提供代数表达式的解释作为关于对象类的陈述。在 BA 中，所有对象的全体是一个集合 (*Set*)，而像 A 、 B 、 C 这样的符号 (*Symbols*) 表示集合当中的子集合 (*Subset*) 对象。然后集合上的一般操作，例如交集 $A \cap B$ 、并集 $A \cup B$ 和补集 A^c 可以表示为对这些子集对象的做出表述，如图2-1所示。

举个简单的例子，如果 A 表示会打乒乓球的人， B 表示会打篮球的人；则 $A \cap B$ 表示既会打乒乓球又 (AND) 会打篮球的人； $A \cup B$ 表示所有会打乒乓球或者 (OR) 会打篮球的人； A^c 表示所有所有不 (NOT) 会打乒乓球的人。

正如上面例中介绍到的，逻辑连接词 *AND*、*OR* 和 *NOT* 描述了由交集、并集和补集操作引起的集合的解释，表明集合操作 (*Set Operations*) 和逻辑操作 (*Logic Operations*) 之间存在密切的联系。

当我们能够将代数语句转化为逻辑语句后，我们就可以很容易地定义表示相同逻辑的不同代数。也就是用一个含有一系列用逻辑函数 (*AND, OR, NOT*) 联系起来的变量 (a, b, c, \dots) 的数学函数来表示一个或真或假的逻辑命题 (*Logical Proposi-*

图 2-1 集合的并集、交集和补集运算的图形说明



tion)。表2-1列出了部分所谓的 *De-Morgan* 定律 (*De-Morgan's Laws*)，它给出了基本逻辑命题的句法等效版本。通过使用这些定律，我们可以从 \wedge 的所有实例或 \vee 的所有实例的任何逻辑表达式中系统地消除。这意味着我们可以将非常复杂的逻辑命题简化为形成两种标准形式之一，即连词的分离（即析取范式，*Disjunctive Normal Form*）或析取连词（即连词范式，*Conjunctive Normal Form*）。

因此，如果我们可以创建一些非常简单的基本门的硬件实现，例如，*NOT*、*AND* 和 *OR*，我们原则上可以将这些操作组合成非常复杂的电路。在经典的数字电路研究中包括许多这样的模块，比如加法器^[32]、乘法器^[33]、滤波器^[34]等等，具体的相关内容将在后续章节进行介绍。

传统上，逻辑门 (*Logic Gate, LG*) 被认为是一种接受一个或多个布尔值 (即 *FALSE* 或 *TRUE*) 作为输入，并返回一个布尔值作为输出的物理设备。布尔值 (*FALSE* 和 *TRUE*) 通常分别与位值 0 和 1 同义使用。逻辑门是现代计算机的关键部件。任何经典计算都可以分解成一系列逻辑门，每次只作用于几个比特。因此，逻辑门是所有现代计算机的核心。整体上各类基本的门电路可以分为两类：可逆门 (*Reversible Gate*) 和不可逆门 (*Irreversible Gate*)。下面两小节将分别介绍他们。

表 2-1 逻辑上等价的命题。这里通过使用 *De-Morgan* 定律，任何命题都可以单独使用 *NOT* 和 *AND* 表示，或者单独使用 *NOT* 和 *OR*

逻辑等效形式	
$a \wedge 0 = 0$	0 与
$a \wedge 1 = a$	1 与
$a \vee 0 = a$	0 或
$a \vee 1 = 1$	1 或
$a \wedge a = a$	独立性
$a \vee a = a$	独立性
$a \wedge \neg a = 0$	矛盾定理
$a \vee \neg a = 1$	无谓重复
$\neg \neg a = a$	双重否定
$a \vee b = b \vee a$	与的交换律
$a \wedge b = b \wedge a$	或的交换律
$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	与的结合律
$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	或的结合律
$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	分配律
$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	分配律
$a \wedge (a \vee b) = a$	吸收律
$a \vee (a \wedge b) = a$	吸收律
$a \wedge (\neg a \vee b) = a \wedge b$	吸收律
$a \vee (\neg a \wedge b) = a \vee b$	吸收律
$\neg(a \wedge b) = (\neg a) \vee (\neg b)$	De-Morgan 定律
$\neg(a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b)$	De-Morgan 定律
$(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) = a$	
$a \Rightarrow b = \neg a \vee b$	
$a \Rightarrow b = \neg(a \vee \neg b)$	

2.1.1.1 不可逆门：AND、OR、XOR

图 2-2 不可逻辑逆门

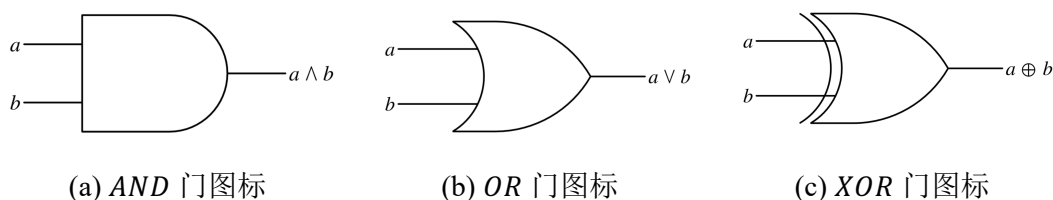


表 2-2 不可逻辑逆门

(a) AND 门真值表			(b) OR 门的真值表			(c) XOR 门的真值表		
AND			OR			XOR		
a	b	$a \wedge b$	a	b	$a \vee b$	a	b	$a \oplus b$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0

描述逻辑门动作的最好方法是用它的真值表 (*Truth Table*)。在真值表中，我们写下输入的所有可能的逻辑值及其相应的输出。例如，AND 门的真值表如表2-2(a)所示。AND 门在电路图中对应的图标如图2-2(a)所示。AND 门在逻辑上是不可逆的，属于不可逆逻辑门 (*Irreversible Logic Gate, ILG*)，这意味着我们无法为所有输出确定唯一的输入。具体来说，如果输出为 0(即 *FALSE*)，则无法判断输入值是 00、01 还是 10。换句话说，当 AND 门的输出为 0 时，它就会“擦除”一些信息。

同理，OR 门的真值表如表2-2(b)所示。OR 门对应的电路图标如图2-2(b)所示。OR 门在逻辑上也是不可逆的，因为当它的输出为 1(即 *TRUE*) 时，不可能说输入是 01、10 还是 11。也就是说，当输出为 1 时，OR 门再次擦除一些信息。

OR 门有一种很常见变体，称为异或门 (*Exclusive-OR Gate*)(通常写为 XOR 或 \oplus)，事实证明它非常有用（因为很容易用晶体管实现）。XOR 与 OR 相似，不同之处在于当两个输入都为 1(即 *TRUE*) 时，它返回 0(即 *FALSE*)。XOR 的真值表如表2-2(c)所示。相应的异或电路图标如图2-2(c)所示。

2.1.1.2 可逆逻辑门：NOT、SWAP、CNOT

上节介绍到的如 AND 门、OR 门、XOR 门等不可逆门在实践中应用十分广泛。随着数字芯片技术的不断发展，由于集成化的散热问题，不可逆门天然存在的限

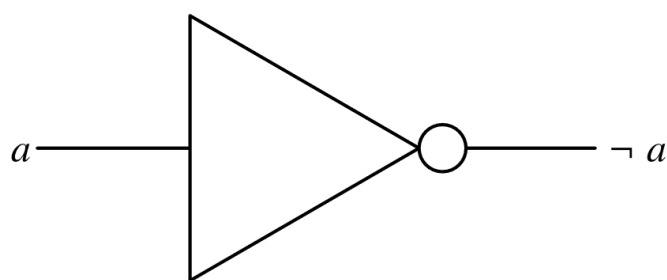
制逐渐被人们关注。基础物理理论告诉我们当信息被擦除时，一定伴随着能量的耗散^[35]。具体来说，每一比特信息的擦除会释放的能量为 $kT \ln 2$ ，其中 k 是玻尔兹曼常数 ($k = 1.3805 \times 10^{-23} JK^{-1}$) 而 T 是以凯尔文 (*Kelvin*) 为单位的绝对温度。因此，即使所有其它能量损失机制从电路中消除了，由于信息擦除时发生的不可避免的能量损失，电路在操作时仍然会耗散能量。尽管当今在逻辑电路中由于逻辑不可逆性而导致的这种能量耗散与其它机制导致的能量耗散相比还比较小。然而，随着其它机制导致的能量耗散不断被克服，这种不可避免的信息擦除能量耗散将成为重要贡献，这将会阻碍计算芯片的进一步小型化和集成化。

克服上述问题的其中一个解决方案是修改现有的逻辑门使其仅使用可逆逻辑门 (*Reversible Logic Gate, RLG*) 实现。在可逆逻辑门中，一个输入对应着一个确定的输出，反之亦然。因此，可逆门在起作用时永远不会删除任何信息，因此，可以向前运行基于可逆逻辑的计算以获得答案、复制的答案以及整个计算，然后再反向执行整个过程以恢复除用于复制中间点答案的小部分能量之外的所有能量。

可逆逻辑门的最简单例子是 *NOT* 门。*NOT* 是一个 *1-input/1-output* 门，它简单地反转它所处理的位值。*NOT* 门的真值表如表2-3所示。*NOT* 门的电路图标如图2-3所示。如果一个人知道输出位值，就可以明确地推断输入位值，反之亦然。

量子计算中非常重要的可逆门是受控非门 (*CNOT*)。*CNOT* 的真值表如表2-4所示。*CNOT* 门的电路图标如图 2.9 所示。*CNOT* 门的效果是当且仅当第一个位设置为 1 时翻转第二个位的位值。也就是说，否定或不否定第二个位的决定由第一个位的值控制。这也是叫它受控非门的原因。

图 2-3 *NOT* 门图标



注意 *CNOT* 门不仅是一种 RLG，还是一种通用逻辑门 (*Universal Logic Gate, ULG*)。也就是说以它为基础可以实现任何其它类型的门，比如 *AND*、*OR* 等等，进一步地可以只用 *CNOT* 搭建网络实现任何计算。ULG 除了 *CNOT* 门外，还有

表 2-3 NOT 门真值表

NOT	
a	$\neg a$
0	1
1	0

图 2-4 $CNOT$ 门图标

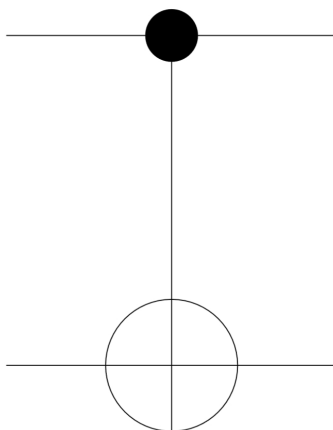


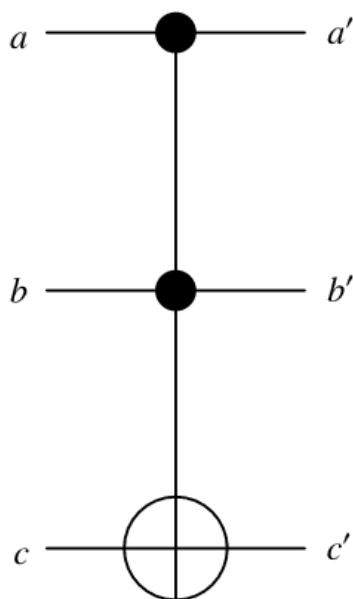
表 2-4 $CNOT$ 门

CNOT			
a	b	a'	b'
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

TOFFOLI 门^[36]、*FREDKIN* 门^[37]等等。*TOFFOLI* 门和 *FREDKIN* 门都属于 RLG，比如 *TOFFOLI* 门的真值表如表2-5所示，它的图标如图2-5所示。

表 2-5 *TOFFOLI* 门真值表

a	b	c	a'	b'	c'
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0

图 2-5 *TOFFOLI* 门图标

2.1.2 量子逻辑门

前面我们已经讨论过经典的不可逆和经典的可逆门，这使我们能够更好地理解量子门的优越性。就像任何经典计算都可以分解成一系列经典逻辑门，这些门一次只作用于几个经典比特，因此任何量子计算也可以分解成一系列量子逻辑门，这些门一次只作用于几个量子比特。主要区别在于，虽然经典逻辑门操纵经典位

值 0 或 1，但量子门可以操纵任意多量子态，包括计算基态的任意叠加，这些量子态也经常纠缠在一起。因此，量子计算的逻辑门比经典计算的逻辑门更加多样化。

通常我们使用泡利矩阵 (*Pauli Matrices*), $\mathbb{1}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$, 来描述单量子比特。单量子比特既是厄米特 (*Hermitian*) 的也是么正 (*Unitary*) 的，任何 1-量子比特哈密顿量总是可以写成泡利矩阵的加权和：

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2-1)$$

实际上泡利矩阵 \mathbf{X} 和经典逻辑门中的 *NOT* 门对应，有：

$$\mathbf{X} \equiv \text{NOT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2-2)$$

也就是说 \mathbf{X} 可以类似经典比特的 *NOT* 门用来翻转量子比特的状态，即：

$$\mathbf{X}|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle \quad (2-3)$$

$$\mathbf{X}|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \quad (2-4)$$

(2-5)

但是注意 \mathbf{X} 并不是一个真正意义上的量子非门 (*Quantum Not Gate, QNG*)，实际上并不存在一个通用的 QNG。

有一个很重要的量子门值得在这里被介绍，它就是 *Hadamard* 门 (*Hadamard Gate*)，它的定义如下^[38]：

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2-6)$$

它的最广泛的应用是用来制备量子叠加态，基本的过程示意如下：

$$\mathbf{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \quad (2-7)$$

$$\mathbf{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \quad (2-8)$$

(2-9)

这是一个看似简单的看门，但它有一个重要的性质。进一步地，它可以制备 n

个比特的叠加态，这些态将会均匀地分布在 $[0, 1, \dots, 2^n - 1]$ 的范围上：

$$H|0\rangle \otimes H|0\rangle \otimes \dots \otimes H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} |j\rangle \quad (2-10)$$

其中 $|j\rangle$ 是由二进制数索引的计算基态，该二进制数将对应于十进制符号中的数字 j 。比如对于 3 量子比特的寄存器来说， $|0\rangle$ 表示计算基态 $|000\rangle$ ； $|1\rangle$ 表示计算基态 $|001\rangle$ ； \dots ； $|7\rangle$ 表示计算基态 $|111\rangle$ 。

这些本征态意味着可以使用 n 比特同时写入的所有可能比特串组合。它实际上是量子计算最重要的技巧之一，因为它实现了仅使用多项式多次操作而将指数多的索引加载到量子计算机中。如果自然界没有种方法，我们则必须像我们在经典计算中所做的那样一个一个单独输入不同的位串，那么量子计算在计算复杂性方面取得突破的可能性要小得多。

在量子门的阐述中有一个门是绝对不能忽略的，那就是量子 *CNOT* 门。和经典 *CNOT* 门一样，它会根据一个比特的状态来决定是否翻转另一个比特的状态，比如：

$$|00\rangle \xrightarrow{CNOT} |00\rangle \quad (2-11)$$

$$|01\rangle \xrightarrow{CNOT} |01\rangle \quad (2-12)$$

$$|10\rangle \xrightarrow{CNOT} |11\rangle \quad (2-13)$$

$$|11\rangle \xrightarrow{CNOT} |10\rangle \quad (2-14)$$

$$(2-15)$$

其中第二个比特（靠右的）的状态受到第一个比特（靠左的）的状态控制。由于 *CNOT* 门是一个通用的门，因此只要一个量子物理体系能够实现 *CNOT* 门，那么这个体系就具备了实现通用量子计算机的前景^[39-40]。

2.1.3 量子算法

2.2 量子计算的不同实现平台

这部分需要分别找各个平台的文献进行整理，每个平台找一到两篇吧

2.2.1 离子量子计算

2.2.2 超导量子计算

2.2.3 原子量子计算

2.2.4 硅基量子计算

2.2.5 光量子计算

2.2.6 拓扑量子计算

第3章 离子阱量子计算系统

这部分简单讲一下离子阱量子计算的发展历史，重点介绍离子阱量子计算系统的基本组成，不针对特别具体的系统...

3.1 离子阱的发展

这部分主要参考文献^[41]p2

3.2 离子在 RF 阱中的经典运动

离子阱采用射频阱对离子进行动态囚禁，最具代表性的一类是四极阱，它及它的一些变型也是目前在离子阱量子计算研究中应用最广泛的一类离子阱。四极阱的电势描述如下：

$$\Phi(x, y, z, t) = U \frac{1}{2} (\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) \quad (3-1)$$

$$+ \tilde{U} \cos(\omega_{rf} t) \frac{1}{2} (\alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' z^2) \quad (3-2)$$

其中 $\Phi(x, y, z, t)$ 是四极阱的电势，公式(3-1)是不依赖时间的项，公式(3-2)是随时间变化的项。整个电势的表达式每时每刻都要满足拉普拉斯方程 (Laplace equation) $\Delta\Phi = 0$ 的约束条件，从中可以导出整个四极阱的几何参数约束：

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad (3-3)$$

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 0 \quad (3-4)$$

其中各参数的定义在公式(3-1)和公式(3-2)定义。从这些限制可以明显看出，在自由空间中电势不可能稳定地产生局部三维最小值，因此电势只可能以动态方式来对离子进行囚禁。幸运的是，通过对四极阱几何参数的选择，再结合适当的驱动微波的频率和驱动电压我们可以做到这一点。其中一种几何参数选择如下：

$$-(\alpha + \beta) = \gamma > 0, \quad (3-5)$$

$$\alpha' = -\beta' \quad (3-6)$$

这种几何参数的设置会使离子在 x, y 平面上动态地被囚禁，在 z 方向上静态地被囚禁。在这种设置的离子阱中，多个离子会沿着 z 轴形成线性的离子链，这便是人们所知的线性离子阱 (Linear Trap)，也被称为 Paul Trap^[42]。在接下来的两小节

里我将介绍囚禁离子的经典运动方程及其解析解（第3.2.1节），并给出这些解的低阶近似（第3.2.2节）。

3.2.1 经典运动方程

一个质量为 m 电荷量为 $Z|e|$ 的粒子在如公式(3-1)所描述的电场中的经典运动方程由 Paul 等人^{[43]p415}给出。粒子的运动在空间坐标方向上中是解耦的。下面只讨论 x 方向上的运动；其他方向可以类似地处理。运动方程如下：

$$\ddot{x} = -\frac{Z|e|}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{Z|e|}{m} [U\alpha + \tilde{U} \cos(\omega_{rf}t)\alpha']x \quad (3-7)$$

经过下面的参数代换,这个方程可以转化为标准的马修方程 (Mathieu Equation, ME) 形式：

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + [a_x - 2q_x \cos(2\xi)]x = 0 \quad (3-8)$$

相应的参数代换为：

$$\xi = \frac{\omega_{rf}t}{2}, \quad a_x = \frac{4Z|e|U\alpha}{m\omega_{rf}^2}, \quad q_x = \frac{2Z|e|\tilde{U}\alpha'}{m\omega_{rf}^2} \quad (3-9)$$

ME 方程属于一般的周期系数微分方程。它的稳定解的一般形式可以由弗洛奎定理 (Floquet Theorem) 导出^[44-45]：

$$x(\xi) = Ae^{i\beta_x\xi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n}e^{i2n\xi} \quad (3-10)$$

$$+ Be^{-i\beta_x\xi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n}e^{-i2n\xi} \quad (3-11)$$

其中实值特征指数 β_x 和系数 C_{2n} 仅是 a_x 和 q_x 的函数，不依赖于初始条件。 A 和 B 是任意常数,可用于满足边界条件或规格化特解。将公式(3-11)代入公式(3-8)可以得到一个递归关系：

$$C_{2n+2} - D_{2n}C_{2n} + C_{2n-2} = 0, \quad (3-12)$$

$$D_{2n} = [a_x - (2n + \beta_x)^2]/q_x \quad (3-13)$$

这一递归关系将实值特征指数 β_x 、系数 C_{2n} 与 a_x 、 q_x 联系起来。通过进一步地整理也可以得到 C_{2n} 的表达式：

$$C_{2n+2} = \frac{C_{2n}}{D_{2n} - \frac{1}{D_{2n+2} - \frac{1}{\dots}}} \quad (3-14)$$

$$C_{2n} = \frac{C_{2n-2}}{D_{2n} - \frac{1}{D_{2n-2} - \frac{1}{\dots}}} \quad (3-15)$$

利用结合上述公式 β_x 也可以计算：

$$\beta_x^2 = a_x - q_x \left(\frac{1}{D_0 - \frac{1}{D_2 - \frac{1}{\dots}}} + \frac{1}{D_0 - \frac{1}{D_{-2} - \frac{1}{\dots}}} \right) \quad (3-16)$$

可以根据所需的精度，选择截断公式(3-15)和公式(3-16)中的连分式来获取相应的结果。实际上，对于实验中常用到的典型 a_x 和 q_x 值，连分式中高阶项的贡献会迅速下降。

这里的 a_x, q_x 具体的含义后面有时间了可以再看看。

3.2.2 低阶近似

实际实验系统中采用的在公式(3-9)中定义参数往往是满足 $(|a_x|, q_x^2) \ll 1$ 的。在此条件下，假设 $C_{\pm 4} \simeq 0$ ，则可以得到 $x(t)$ 轨迹的低阶近似 (Lowest-order Approximation)。再同时设置初始条件 $A = B$ ，公式3-13可以得到：

$$\beta_x \approx \sqrt{a_x + q_x^2/2}, \quad (3-17)$$

$$x(t) \approx 2AC_0 \cos\left(\beta_x \frac{\omega_{rf}}{2} t\right) \left[1 - \frac{q_x}{2} \cos(\omega_{rf} t)\right] \quad (3-18)$$

囚禁离子在 x 方向上的轨迹 $x(t)$ 的由频率为 $\nu = \beta_x \omega_{rf}/2 \ll \omega_{rf}$ 的谐波振荡叠加频率为 ω_{rf} 的 RF 频率造成的驱动位移组成，分别称为长期运动 (Secular-motion) 和微运动 (Micro-motion) 两者相位相差 180° ；离子在离子阱中的微运动的频率为 $\omega_{rf} \ll \nu$ ，且其振幅为长期运动振幅的 $q_x/2 \ll 1$ ，这也是它被称为微运动的原因。如果忽略微运动，则长期运动可以近似为频率为 ν 的谐振子的运动。在大多数情况下，如果离子处于相当低的动能，即使我们用量子力学的方法来处理离子的质心运动，这个处理也是合理的。

3.3 离子在 RF 阱中的量子力学运动

如第3.2节中已经讨论过的，经典中的运动分析似乎已经可以很好地描述离子在离子阱中的运动了。但是，由于四极阱产生的囚禁势场不是静态的而是与时间相关的，因此不能理所当然地认为在有效时间平均势中量子运动已经为我们提供了囚禁离子足够的图景。实际上，在离子阱的实验中，即使是对离子陷阱中的冷却过程的简单解释，以及对非经典状态的描述，也都依赖于运动的量子力学图景的。

在接下来的两小节里，我将根据文献^[46]中的方法导出囚禁离子在射频场中的量子力学表述。同时在这里讨论，在实验中使用的捕获参数范围内，囚禁离子的量子化运动可以用静态谐振子来近似。

3.3.1 量子力学运动方程

对于囚禁离子运动的量子力学处理，我们假设与时间相关的势在囚禁离子质心的三个笛卡尔坐标中的每一个中都是二次的（一维谐振子势^[47]）。然后，与经典运动一样，问题可分为三个一维问题。在一维中，用各自的算子 \hat{x} 替换坐标 x ，于是可以将与时间相关的势 $V(T)$ 写为：

$$V(t) = \frac{m}{2} W(t) \hat{x}^2 \quad (3-19)$$

其中，

$$W(t) = \frac{\omega_{rf}^2}{4} [a_x + 2q_x \cos(\omega_{rf}t)] \quad (3-20)$$

可以被认为是一个时变弹簧常数，它的作用类似于在静态势谐振子中 ω^2 的作用。在以上的定义下，囚禁离子运动的哈密顿量 $H^{(m)}$ 的形式和我们在量子力学中处理的静态谐振子的哈密顿量很相似：

$$\hat{H}^{(m)} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} W(t) \hat{x}^2 \quad (3-21)$$

于是我们可以很轻松地写出这些运动算子在海森堡图景 (*Heisenberg Picture*) 下的方程：

$$\dot{\hat{x}} = \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{x}, \hat{H}^{(m)} \right] = \frac{\hat{p}}{m}, \quad (3-22)$$

$$\dot{\hat{p}} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{p}, \hat{H}^{(m)}] = -mW(t)\hat{x} \quad (3-23)$$

他们的一个更紧凑的方程形式如下：

$$\ddot{\hat{x}} + W(t)\hat{x} = 0 \quad (3-24)$$

如果用函数 $u(t)$ 替换算子 \hat{x} ，我们可以很容易验证这个公式(3-24)与马修方程(3-8)是等价的。这就是我们能够借助前面所叙述的马修方程的解来寻找公式(3-24)的解。添加边界条件：

$$u(0) = 1, \hat{u}(0) = iv \quad (3-25)$$

这对应于公式(3-11)中的 $A = 1, B = 0$ ，可以得到：

$$u(t) = e^{i\beta_x \omega_{rf} t/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} e^{in\omega_{rf} t} \equiv e^{i\beta_x \omega_{rf} t/2} \Phi(t) \quad (3-26)$$

其中 $\Phi(t)$ 是一个周期为 $T = 2\pi/\omega_{rf}$ 的周期函数。于是公式(3-25)变为：

$$u(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} = 1, v = \omega_{rf} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} (\beta_x/2 + n) \quad (3-27)$$

这个解及其复共轭是线性独立的; 因此, 它们服从 *Wronskian* 恒等式:

$$u^*(t)\dot{u}(t) - u(t)\dot{u}^*(t) = u^*(0)\dot{u}(0) - u(0)\dot{u}^*(0) = 2i\mu \quad (3-28)$$

未知坐标 $\hat{x}(t)$ 和 $u(t)$ 满足相同的微分方程, 因此复杂的线性组合:

$$\hat{C}(t) = \sqrt{\frac{m}{2\hbar\nu}} i \{u(t)\dot{\hat{x}}(t) - \dot{u}(t)\hat{x}(t)\} \quad (3-29)$$

与其如下的 *Wronskian* 恒等式成正比, 并且在时间上也是恒定的:

$$\hat{C}(t) = \hat{C}(0) = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\nu}} [m\nu\hat{x}(0) + i\hat{p}(0)] \quad (3-30)$$

此外, 等式右边恰好是质量 m 和频率 ν 的在静态谐振子势场中的湮灭算符:

$$\hat{C}(t) = \hat{C}(0) = \hat{a} \quad (3-31)$$

也就是说有如下式:

$$[\hat{C}, \hat{C}^\dagger] = [\hat{a}, \hat{a}^\dagger = 1] \quad (3-32)$$

这个静态势场中的谐振子在后续将被称为参考谐振子 (*Reference Oscillator*)。

海森堡算符 $\hat{x}(t)$ 和 $\hat{p}(t)$ 可以用 $u(t)$ 和参考振荡器的算符用公式(3-29)重新表示:

$$\hat{x}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}} \{\hat{a}u^*(t) + \hat{a}^\dagger u(t)\}, \quad (3-33)$$

$$\hat{p}(t) = \sqrt{\frac{\hbar m}{2\nu}} \{\hat{a}\dot{u}^*(t) + \hat{a}^\dagger \dot{u}(t)\} \quad (3-34)$$

所以囚禁离子的整个时间依赖性由特殊解 $u(t)$ 及其复共轭给出。这样一来, 对于接下来的计算, 在海森堡图景中表述一些列的时间依赖波函数就很方便了。同样, 上面使用的参考振荡子也将非常有帮助。与静态势的情况类似, 我们将考虑一系列的基态 $|n, t\rangle$, 其中 $n = 1, 2, \dots, \infty$ 。这些状态被称为谐波振荡器数态 (*Fock States*) 的动态对应物。参考振荡子 $|n = 0\rangle_\nu$ 的基态满足条件:

$$\hat{a} |n = 0\rangle_\nu = \hat{C}(t) |n = 0\rangle_\nu = 0 \quad (3-35)$$

由于海森堡算子 \hat{C} 是通过 $\hat{C}(t) = \hat{U}^\dagger(t)\hat{C}_S\hat{U}(t)$ 与 \hat{C}_S 联系起来的, 我们可以很快得到 (其中 $\hat{U}(t) = \exp[-(i/\hbar)\hat{H}^{(m)}]$):

$$\hat{C}_S(t)\hat{U}(t) |n = 0\rangle_\nu = \hat{C}_S(t) |n = 0, t\rangle = 0 \quad (3-36)$$

只需要通过将公式(3-35)左侧与 $\hat{U}(t)$ 相乘, 并注意到 $\hat{U}(t) |n = 0\rangle_\nu$ 是从静态潜在参考振荡子的基态演变而来的时间相关振荡器的薛定谔态。由于薛定谔算子

$C_S(t)$ 的时间依赖完全取决于 $u(t)$ 的时间演化，于是公式(3-36)等价于：

$$[u(t)\hat{p} - m\dot{u}\hat{x}] |n = 0, t\rangle = 0 \quad (3-37)$$

在坐标空间表述为：

$$\left\{ u(t) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x'} \right\} \langle x' | n = 0, t \rangle = 0 \quad (3-38)$$

归一化后的解为：

$$\langle x' | n = 0, t \rangle = \left(\frac{mv}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\{u(t)\}^{1/2}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar} \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} x'^2 \right] \quad (3-39)$$

与静态势谐振子完全类似，可以通过创建算子 $\hat{C}_S^\dagger(t)$ 对基态重复操作来创建完全正交基的所有其它状态：

$$|n, t\rangle = \frac{[\hat{C}_S^\dagger(t)]^n}{\sqrt{n!}} |n = 0, t\rangle \quad (3-40)$$

将 $u(t)$ 如公式(3-26)重写后，在坐标空间表述为：

$$\langle x' | n, t \rangle = \exp \left[-i \left(n + \frac{1}{2} \right) \nu t \right] \chi_n(t) \quad (3-41)$$

其中， H_n 是 n 阶厄米多项式， $\chi_n(t)$ 表达式如下：

$$\chi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{mv}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{\exp\{-in \arg[\Phi(t)]\}}{\{\Phi(t)\}^{1/2}} \quad (3-42)$$

$$\times H_n \left\{ \left[\frac{mv}{\hbar|\Phi|^2} \right]^{1/2} x' \right\} \quad (3-43)$$

$$\times \exp \left\{ \frac{mv}{2\hbar} \left[1 - \frac{i\Phi(t)}{\nu\Phi(t)} \right] x'^2 \right\} \quad (3-44)$$

经典的微运动作为射频驱动场周期的脉动出现在波函数中。对于静态势谐振子，能量本征态的演化只将波函数乘以相位因子（这就是为什么它们被称为静止态）。在此处研究的时间相关电势场中，同样如此，不同之处仅在于这里时间只能取得 RF 周期 $T = 2\pi/\omega_{rf}$ 的整数倍。公式3-41给出的状态并不是能量本征态（它们周期性地与驱动场交换能量，类似于经典的微运动），但它们是时间相关势中可能的平稳状态的很好的近似。因此，它们通常被称为准平稳状态 (*Quasistationary States*)。

紧接着的小结节中将介绍与第3.2.2节中提出的经典伪势解类似的量子力学中的运动解的低阶近似，找到对静态势谐振子图像的最低阶修正。

3.3.2 量子低阶近似

量子力学中的低阶近似从导出 $u(t)$ 的近似表达开始。与经典的情况类似，低阶近似需要满足条件： $|a_x|, q_x^2 \ll 1$ 、 $C_{\pm 4} = 0$ 。结合公式(3-25)中的初始条件可以得到：

$$\beta_x \approx \sqrt{a_x + q_x^2/2}, \nu \approx \beta_x \omega_{rf}/2, \quad (3-45)$$

$$u(t) \approx \exp i\nu t \frac{1 + (q_x/2) \cos(\omega_{rf}t)}{1 + q_x/2} \quad (3-46)$$

这实质上就是前面第3.2.2节在公式(3-18)中找到的经典解。仍然必须强调的是，只有在这种低阶近似中，参考谐振子的频率 ν 才等于特征指数 $\beta_x \omega_{rf}/2$ 。现在很明显地可以看出 $\chi_n(t)$ 以周期 T_{rf} 进行周期性呼吸。具体可以从基态波函数的近似表达式 $\chi_0(t)$ 中看到：

$$\chi_0(t) = \left(\frac{m\nu}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{1 + q_x/2}{1 + (q_x/2) \cos(\omega_{rf}t)}} \times \exp\left(\left\{i \frac{m\omega_{rf} \sin(\omega_{rf}t)}{2\hbar [1/q_x + \cos(\omega_{rf}t)]} - \frac{m\nu}{2\hbar}\right\} x'^2\right) \quad (3-47)$$

而公式(3-41)中的相位因子由基态伪能量 $\hbar\nu/2$ 控制。如果设置 $\omega_{rf} = 0$ ，则这个表达式与静态谐波势基态波函数相同。

3.4 阱中离子的一些特别的运动量子态

主要参考文献[48]chap2-C

接着会讨论一些类似于静态势谐振子的数量和离子阱中一些特殊类别的运动态。这其中有些是非经典的但却让人不禁联想到经典的运动。这部分介绍的运动态都已经被实验观测和验证过了，因此也将介绍如何创建这些运动态。

3.4.1 数算子和它的本征态

为了更好地探索离子阱中的囚禁离子和静态势阱中的谐振子的联系，把运动态表述为以参考谐振子的本征态为基矢的形式将很有帮助。我们首先在海森堡途径中讨论。因为 $\hat{C}(t)$ 是时间独立的，因此这个 \hat{N} 算子也是时间独立的：

$$\hat{N} = \hat{C}^\dagger(t) \hat{C}(t) = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (3-48)$$

它的本征态也是时间独立的，也就是我们在静态势阱中所熟知的数态或 *Fock* 态，它拥有一套相应的升降算符：

$$\hat{a}|n\rangle_v = \sqrt{n}|n-1\rangle_v, \hat{a}^\dagger|n\rangle_v = \sqrt{n+1}|n+1\rangle_v, \hat{N}|n\rangle_v = n|n\rangle_v \quad (3-49)$$

转换到薛定谔图景后可以得到：

$$\hat{U}^\dagger(t)\hat{N}\hat{U}(t) = \hat{U}^\dagger(t)\hat{C}^\dagger(t)\hat{U}(t)\hat{U}^\dagger(t)\hat{C}(t)\hat{U}(t) = \hat{C}_S^\dagger(t)\hat{C}_S(t) \quad (3-50)$$

这个算子的本质态和本征值可以用上节中的公式(3-40)得到：

$$\hat{C}_S(t)|n, t\rangle = \sqrt{n}|n-1, t\rangle, \quad (3-51)$$

$$\hat{C}_S^\dagger(t)|n, t\rangle = \sqrt{n+1}|n+1, t\rangle \quad (3-52)$$

如果使：

$$\hat{N}_S(t)|n, t\rangle = n|n, t\rangle \quad (3-53)$$

那么这些薛定谔图景下的本征态就可以像静势场谐振子那样使用了，并且静势场中升降算符的所有代数性质都可以对应到 $\hat{C}_S(t)$ 和 $\hat{C}_S^\dagger(t)$ 。唯一的区别就是这里计算得到的并不是整个系统能量的本征态，因为微运动会周期地改变离子的动能。

任何运动态都可以表示为这些数态的叠加态：

$$\Psi = \sum_0^\infty c_n |n, t\rangle \quad (3-54)$$

这样的态表述会在后续章节的叙述中用到，简单起见，除了专门研究时间相关问题外后面通常会将 $|n, t\rangle$ 简写成 $|n\rangle$ 。

3.4.2 相干态

在静势场谐振子中，离子的运动 $|\alpha\rangle$ 的相干态对应于位置表示中的高斯最小不确定性波包，其中心在谐波中经典地振荡并保持其形状。波包的形状与基态波函数相同。Glauber 表明，在动态囚禁电势中从初始相干状态演变的状态也是如公式(3-41)描述的高斯基态的位移形式^[46]。位移的高斯与基态具有相同的呼吸，但不扩散，其重心遵循陷阱中离子的经典轨迹（现在长期运动和微运动）。这种情况最先由薛定谔在试图构造反映谐振子经典运动的波包时提出^[49]。这里的 breathing 应该怎么翻译？

“相干态”的称呼最早是由 Glauber 提出的^[50-51]，与光场的量子态有关。定义相干态的方式有很多种（详见文献^[52]）。比如，它们是湮灭算子的本征态，相应的

本征值为复数 α :

$$\hat{C}_S(t) |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (3-55)$$

这个态很容易用公式(3-54)中的形式表示:

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp(-|\alpha|^2/2) \quad (3-56)$$

这便是这个算子的本征态, 它的数态概率密度分布是泊松分布 (*Poissonian Distribution*):

$$P_n = |c_n|^2 = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = (\bar{n}^n e^{-\bar{n}})/n!, \bar{n} = |\alpha|^2 \quad (3-57)$$

另一个流行的方式是将相干态表述为位移算符的动作:

$$\hat{D}(\alpha) = \exp[\alpha \hat{C}_S^\dagger(t) - \alpha^* \hat{C}_S(t)] \quad (3-58)$$

在真空态中,

$$\hat{D}(\alpha) |0\rangle = |\alpha\rangle \quad (3-59)$$

连续应用一系列的位移算子的作用结果在相因子上也是相加的:

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta) = \hat{D}(\alpha + \beta)e^{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta} \quad (3-60)$$

因此这些位移构成了一个自然单元为 $\hat{D}(0) = \hat{I}$ 的群。注意由于等式右边的额外相位, 使得位移算子通常是不对易的。

3.4.3 压缩真空态

海森堡不确定性关系 (*Heisenberg Uncertainty Relation*) 表明在任何量子态中位置和动量的方差的乘积的下界为 $\hbar^2/4$ 。静势场中谐振子与所有其它相干态的基态是最小不确定度状态, 其中位置的方差为 $(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 1/(mv)\hbar/2$; 动量的方差为 $(\Delta p)^2 = (mv)\hbar/2$ 。

如果现在我们“挤压”位置方差, 那么动量方差必须变宽以满足海森堡不确定性关系。在时间演化过程中, 压缩位置波包不会保持其形状, 但在全周期后收缩回原始宽度之前, 振荡周期的一半将变得更加宽。动量波包相应地收缩或扩展, 以便在任何时候不确定性最小^[53-54]。

压缩真空态 (*Squeezed vacuum state*) 用公式(3-54)的形式表述如下:

$$c_n = \begin{cases} \left(\frac{2\sqrt{\beta_s}}{\beta_s+1}\right)^{1/2} \left(\frac{\beta_s-1}{\beta_s+1}\right)^{n/2} (-1/2)^{n/2} \frac{\sqrt{n!}}{(n/2)!} e^{in\phi}, & n \text{ even} \\ 0, & n \text{ odd} \end{cases} \quad (3-61)$$

参数 β_s 描述了状态压缩程度，压缩状态的位置方差在一定时间内减少：

$$\Delta x_s = \Delta x_0 / \beta_s \quad (3-62)$$

这里的 **variance** 应该是指的飘动范围还是方差？可称为：**方差或者不确定度**

其中 Δx_0 是基态的方差。基态时 $\beta_s = 1$ （因此名称为“压缩真空态”）。对于 $\beta_s > 1$ 的情况位置波函数比相干态情况时要窄，而对于 $0 < \beta_s < 1$ 的情况动量波函数比相干态情况时要窄。角度 ϕ 描述了压缩状态相对于位置和动量方向的对齐，这可以在相空间中最好地可视化。压缩状态的 *Wigner* 函数具有椭圆等轮廓线^[55]。如果这些椭圆的主轴之一与位置坐标轴对齐， ϕ 等于零。压缩真空态 *Wigner* 函数的质心与相空间的原点重合。

压缩真空态的概率分布 P_n 是独立的，这里局限于偶数状态：

$$P_n = \frac{2\sqrt{\beta_s}}{\beta_s + 1} \left(\frac{\beta_s - 1}{\beta_s + 1} \right)^n (2)^{-n} \frac{n!}{[(n/2)!]^2}, \quad n \text{ even} \quad (3-63)$$

对于强压缩，这个分布有一个持续到非常大 n 的拖尾；例如，对于 $\beta_s = 40$ ，压缩真空的统计状态中有 16% 处于 $n = 20$ 以上的状态。

挤压真空状态，如相干状态，具有非常紧凑的算子表示。它们是由操作员从基态生成的：

$$\hat{S}(\epsilon) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \epsilon^* \hat{C}_s(t)^2 - \frac{1}{2} \epsilon [\hat{C}_s^\dagger(t)]^2 \right\} \quad (3-64)$$

其中 $\epsilon = r e^{i\phi}$ ， r 是和 β_s 相关的，关系为 $\beta_s = e^{2r}$ 。

3.4.4 热分布

如果离子在高温 T 下与外部储层处于热平衡状态，则激发态 $|n\rangle$ 的平均权重将与玻尔兹曼因子 $\exp[-n\hbar\nu/(k_B T)]$ 成正比，其中 k_B 是玻尔兹曼常数。当然，讨论单个离子的温度是没有意义的。然而，如果离子与储存器耦合，则多次测量数算子 \hat{N} (确保每次测量后离子再平衡)，可以根据许多不同的实现集合从平均结果 \bar{n} 中提取温度：

$$T = \frac{\hbar\nu}{k_B \ln \left(\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}} \right)} \quad (3-65)$$

在考虑系综时，可以用密度矩阵来表征这个状态。此外，本着选择具有最大**无知**（因此最大熵）的密度矩阵的精神，非对角元素必须为零。这使得无法以如公式(3-54)的形式写出热分布，使它相对应的密度矩阵在 $T > 0$ 时具有非零非对角元素。因此，即使文献中经常使用术语“热状态”，“热分布”似乎是对系综这种性质

更合适的称呼。

经过一些简单的代数来归一化由玻尔兹曼因子加权的状态的轨迹后，密度矩阵可以写成：

$$\rho_{th} = \frac{1}{\bar{n} + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} \right)^n |n\rangle \langle n| \quad (3-66)$$

总体概率水平为：

$$P_n = \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n} + 1)^{n+1}} \quad (3-67)$$

3.5 囚禁离子的光场耦合

在合适的电磁场的帮助下，囚禁离子的内部能级可以相互相干耦合，并且与离子的外部运动自由度耦合。强力囚禁和耦合良好的离子可以等价于 *Jaynes-Cummings* 哈密顿量 (*Jaynes-Cummings Hamiltonian*)^[56] 因此，许多致力于囚禁离子相干相互作用的工作都受到这种耦合在量子光学中所起的重要作用的启发。除了这种特殊情况之外，剩下的许多可能性会到多个运动量子之间的相互交换，类似于量子光学中的多光子跃迁。此外，产生耦合的光场可以作为的能量来源，因此原子-光子耦合中隐含的能量守恒不必局限在囚禁离子的内部态和运动态之间的转换，也可以实现囚禁离子内部态的相互转换，比如吸收能量跃迁到更高的能级上。最后，如果考虑了运动的全量子力学图，包括微运动引起的修正，则可能存在另一类跃迁，涉及在离子阱的 RF 电势中运动态整数倍数的相互转换或驱动场整数倍数的组合和长期运动 (微运动边带)。

3.5.1 二能级近似

在常规的离子阱研究中，会把囚禁离子的电子能级结构近似为二能级系统 (*Two-level System*)，这为研究提供了很大的方便。这个二能级系统表示为 $|g\rangle$ 和 $|e\rangle$ ，他们之间有着 $\hbar\omega = \hbar(\omega_e - \omega_g)$ 的能量差。这对于实际的囚禁离子不总是适用的，仅在广场与离子两能级近似共振耦合且耦合的拉比频率远强于衰减到其它态的强度时才成立。不过这个条件对当今研究的多数实验系统中的离子（如镱离子、钡离子、钙离子等等）来说都是成立的。相应的二能级哈密顿量 $\hat{H}^{(e)}$ 的表述如下：

$$\hat{H}^{(e)} = \hbar(\omega_g |g\rangle \langle g| + \omega_e |e\rangle \langle e|) \quad (3-68)$$

$$= \hbar \frac{\omega_e + \omega_g}{2} (|g\rangle \langle g| + |e\rangle \langle e|) \quad (3-69)$$

$$+\hbar\frac{\omega}{2}(|g\rangle\langle g| - |e\rangle\langle e|) \quad (3-70)$$

任何二能级系统有关的算子都可以被映射到 $1/2$ 自旋算子基矢上，因此上述的 $\hat{H}^{(e)}$ 及其相关的算子也可以被表示为公式(2-1)中描述的泡利矩阵的形式，它们之间的映射关系如下：

$$|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e| \mapsto \hat{I}, |g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g| \mapsto \hat{\sigma}_x, \quad (3-71)$$

$$i(|g\rangle\langle e| - |e\rangle\langle g|) \mapsto \hat{\sigma}_y, |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| \mapsto \hat{\sigma}_z \quad (3-72)$$

在这种映射情况下， $\hat{H}^{(e)}$ 可以被表述为：

$$\hat{H}^{(e)} = \hbar\frac{\omega}{2}\sigma_z \quad (3-73)$$

相应的能量以 $-\hbar(\omega_e + \omega_g)/2$ 重新缩放，以抑制公式(3-70)中与状态无关的能量贡献。

3.5.2 耦合的理论表述

为了以一种简单而充分的方式描述囚禁离子与光场的相互作用，如前一节所述，我们假设囚禁离子的运动在所有三个维度上都是谐波的。下面的描述将包括囚禁电势的显式时间依赖，但在许多情况下，将离子的运动建模为三维静态势谐振子是足够的。因为如果无量纲 Paul 阱参数 α_x 和 q_x^2 的模量相对于与静态势和射频势 (见第3.2节) 远小于 1，则一般理论只会引入非常微小的变化。这对于实验中常用的离子阱是成立的。内部状态和运动耦合的广义描述遵循文献^[57-58]中的方法。

另外还假定，在光场的多极展开中处理最低阶展开就足够了，在所讨论的近共振电子状态之间产生一个不退化的矩阵元。电子波函数的扩展远小于耦合场的波长这一事实证明了这一假设是合理的。对于偶极允许跃迁，将用偶极近似来处理场，而对于偶极禁止跃迁，只考虑场的四极分量。对于拉曼跃迁，近共振的中间能级将绝热消除，使这些跃迁在形式上等同于其它类型的跃迁。

3.5.2.1 总哈密顿量和相互作用哈密顿量

系统的总哈密顿量可以写作如下形式：

$$\hat{H} = \hat{H}^{(m)} + \hat{H}^{(e)} + \hat{H}^{(i)} \quad (3-74)$$

其中 $\hat{H}^{(m)}$ 是沿着离子阱轴向的运动哈密顿量，如在第3.3节公式(3-21)中讨论过的； $\hat{H}^{(e)}$ 代表如第3.5.1节中所述的离子的内部电子能级结构； $\hat{H}^{(i)}$ 代表本部分将要讨论施加的光场与离子之间的耦合。

电偶极跃迁、电四极跃迁和激发拉曼跃迁可以在一个统一的框架中描述，该

框架将某个共振拉比频率 Ω 、有效光频率 ω 和有效的波矢量 \mathbf{k} 与这些跃迁类型中的每一种相关联。电偶极跃迁和电四级跃迁的耦合光场的频率和波矢量是相同的，但两者驱动受激拉曼跃迁的光场频率差 $\omega = \omega_1 - \omega_2$ ，波矢量差 $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ 。

对于行波光场，所有三种跃迁类型都可以用以下形式的耦合哈密顿量来描述：

$$\hat{H}^{(i)} = (\hbar/2)\Omega(|g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g|) \quad (3-75)$$

$$\times [e^{i(k\hat{x}_S - \omega t + \phi)} + e^{-i(k\hat{x}_S - \omega t + \phi)}] \quad (3-76)$$

在 $1/2$ 自旋代数中我们可以将其重新表述为：

$$|e\rangle\langle g| \mapsto \hat{\sigma}_+ = 1/2(\hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y), \quad (3-77)$$

$$|g\rangle\langle e| \mapsto \hat{\sigma}_- = 1/2(\hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y) \quad (3-78)$$

为了便于说明和理解，我们以一个维度的阐述为例。有效波矢量 \mathbf{k} 选为沿着离子阱中的 x 轴方向。转换到相互作用表象，可以得到自由哈密顿量 $\hat{H}_0 = \hat{H}_{(m)} + \hat{H}_{(e)}$ 与相互作用哈密顿量 $\hat{V} = \hat{H}^{(i)}$ 的最简单的一个动力学图景。记 $\hat{U}_0 = \exp[-(i/\hbar)\hat{H}_0 t]$ ，转换后的相互作用哈密顿量为：

$$\hat{H}_{int} = \hat{U}_0^\dagger \hat{H}^{(i)} \hat{U}_0 \quad (3-79)$$

$$= (\hbar/2)\omega e^{(i/\hbar)\hat{H}^{(e)}t}(\sigma_+ + \sigma_-) \quad (3-80)$$

$$\times e^{-(i/\hbar)\hat{H}^{(e)}t} e^{(i/\hbar)\hat{H}^{(m)}t} [e^{i(k\hat{x} - \omega t + \phi)} + e^{-i(k\hat{x} - \omega t + \phi)}] e^{-(i/\hbar)\hat{H}^{(m)}t} \quad (3-81)$$

$$= (\hbar/2)\Omega(\sigma_+ e^{i\omega_0 t} + \sigma_- e^{-i\omega_0 t}) e^{(i/\hbar)\hat{H}^{(m)}t} \quad (3-82)$$

$$[e^{i(k\hat{x} - \omega t + \phi)} + e^{-i(k\hat{x} - \omega t + \phi)}] e^{-(i/\hbar)\hat{H}^{(m)}t} \quad (3-83)$$

上面公式表述中与时间相关的振动项提取出来后就就是 $\exp[\pm i(\omega \pm \omega_0)t]$ 。这两项一项振动频率为 $\delta_f = \omega + \omega_0$ ，是快速振荡项；另一项振动为 $\delta = \omega - \omega_0 \ll \omega_0$ ，是慢速振荡项。在研究中我们一般会忽略快速振荡项的贡献，也就是所谓的旋波近似 (*Rotating-wave Approximation*)。

引入 *Lamb-Dick* 参数 (*Lamb-Dick Parameter, LDP*) $\eta = kx_0$ ，其中 $x_0 = \sqrt{\hbar/(2mv)}$ 是参考振荡子基态波函数的 x 轴方向的扩展，海森堡图景下的 $\hat{x}(t)$ 表述为：

$$k\hat{x}(t) = \eta \{ \hat{a}u^*(t) + \hat{a}^\dagger u(t) \} \quad (3-84)$$

旋转变近似中的相互作用哈密顿量取其最终形式为：

$$\hat{H}_{int}(t) = (\hbar/2)\Omega\hat{\sigma}_+ \exp(i\{\phi + \eta[\hat{a}u^*(t) + \hat{a}^\dagger u(t)] - \delta t\}) + H.c. \quad (3-85)$$

指数项中的时间依赖性由频率差 δ 和 $u(t)$ 控制。考虑公式(3-26)中的解形式及 Lamb-Dicke 参数下的拓展有:

$$\exp(i\{\phi + \eta[\hat{a}u^*(t) + \hat{a}^\dagger u(t)] - \delta t\}) \quad (3-86)$$

$$= e^{i(\phi - \delta t)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\eta)^m}{m!} \left\{ \hat{a} e^{-i\beta_x \omega_{rf} t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n}^* \times e^{-in\omega_{rf} t + H.c.} \right\}^m \quad (3-87)$$

很容易验证任何时刻的衰减满足下式:

$$(l' + l\beta_x)\omega_{rf} = \delta \quad (3-88)$$

其中 l 和 l' 为整数且 $l \neq l'$, if $l' \neq 0$, 它们是哈密顿量中的两项慢速变化, 贡献了含时变化的主要部分 (其余部分可以忽略)。如果其中一个调制边带与静止离子的跃迁频率 ω_0 重合, 则该边带可以诱导离子内部状态跃迁。实际上, 由于实验中 $(|a_x|, q_x^2) \ll 1$, 因此公式(3-46)中的 $\beta_x \omega_{rf} \approx \nu$ 且 $C_0 \approx (1 + q_x/2)^{-1}$ 。于是相互作用哈密顿量就可以简化成如下形式:

$$\hat{H}_{int}(t) = (\hbar/2)\Omega_0 \sigma_+ \exp\{i\eta(\hat{a}e^{-i\nu t} + \hat{a}^\dagger e^{i\nu t})\} e^{i(\phi - \delta t)} + H.c. \quad (3-89)$$

其中缩放的相互作用强度为 $\Omega_0 = \Omega/(1 + q_x/2)$, 这个缩放反映了射频驱动频率下波包呼吸引起的耦合减少。

这里的波包 ‘breathing’ 应该怎么翻译?

3.5.2.2 拉比频率

依赖失谐变量 δ , 公式(3-89)中的哈密顿量会耦合一定的内态和运动态。如果公式(3-89)在 η 范围内, 这会产生一个包含 σ_\pm 的组合项, 它有 l 个 \hat{a} 算符和 m 个 \hat{a}^\dagger 算符并以频率 $(l - m)\nu = s\nu$ 转动。如果 $\delta \approx s\nu$ 的话, 这些组合将是共振的, 并将多态 $|g\rangle|n\rangle$ 和 $|e\rangle|n + s\rangle$ 耦合起来。对于 $s > 0$ ($s < 0$) 的情况, 耦合强度通常称为 $|s|$ 级蓝 (红) 边带拉比频率, 表达为^[59-60]:

$$\Omega_{n,n+s} = \Omega_{n+s,n} = \Omega_0 |\langle n + s | e^{i\eta(a + a^\dagger)} | n \rangle| \quad (3-90)$$

$$= \Omega_0 e^{-\eta^2/2} \eta^{|s|} \sqrt{\frac{n_{<}!}{n_{>}!}} L_{n_{<}}^{|s|}(\eta^2) \quad (3-91)$$

其中 $n_{<}$ 是比 $n + s$ 和 n 小, $n_{>}$ 是比 $n + s$ 和 n 大, $L_n^\alpha(X)$ 是广义拉盖尔多项式:

$$L_n^\alpha(X) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n + \alpha}{n - m} \frac{X^m}{m!} \quad (3-92)$$

3.5.3 总结说明

上述的两部分（第3.5.2.1和3.5.2.2节）介绍了光与离子耦合的主要基础。实际上关于光与离子的耦合还有许多内容可以介绍，这些耦合特性也在离子量子计算中被使用到了，不过我并不打算在这里就将其一一说明。作为替代，我将在后续结合离子量子计算的相关操作来对这些特性做出相应的介绍，比如离子量子比特的冷却（第4.3节）、初始化（第4.4节）、探测（第4.5节）、操作（第4.6节）等。

这章剩下的离子本身部分考虑暂时不写，留到讲离子量子比特的时候写吧。

3.6 系统的组成——离子阱系统

这部分尽量结合实验室的仪器设备展开叙述

3.6.1 囚禁电极

3.6.2 微波信号

3.6.3 真空系统

3.6.4 螺线管谐振腔

3.7 系统的组成——光学系统

这部分尽量结合实验室的仪器设备展开叙述

3.7.1 冷却激光

3.7.2 操控激光

3.8 系统的组成——测控系统

这部分尽量结合实验室的仪器设备展开叙述

3.8.1 测控系统的构架

第4章 镱离子量子计算

目前所有实现的用于离子量子计算的离子都属于类氢离子 (*Hydrogen-like ions*), 比如 Be^+ (NIST^[61-62]), Mg^+ (NIST^[63-64]), Ca^+ (University of Innsbruck^[65-66], University of Oxford^[17,67]), Ba^+ (Washington University^[68-69], UCLA^[70]), Yb^+ (University of Maryland^[15,71], University of Sussex^[72])。类氢离子具有最简单的能量结构, 处理起来相对其它类型的离子要简单很多。它们具有的内态 $S_{1/2}$ 到 $P_{1/2}$ 之间的闭环光学跃迁, 能方便地实现激光冷却、高保真初始化和内态读出操作^[73], 这对于量子计算的实现至关重要。要挑选出合适的类氢离子, 还有一些其它的参数需要考虑, 如离子的质量、循环跃迁的波长、核自旋的值和 2D 能级的亚稳态的寿命等^[41]。

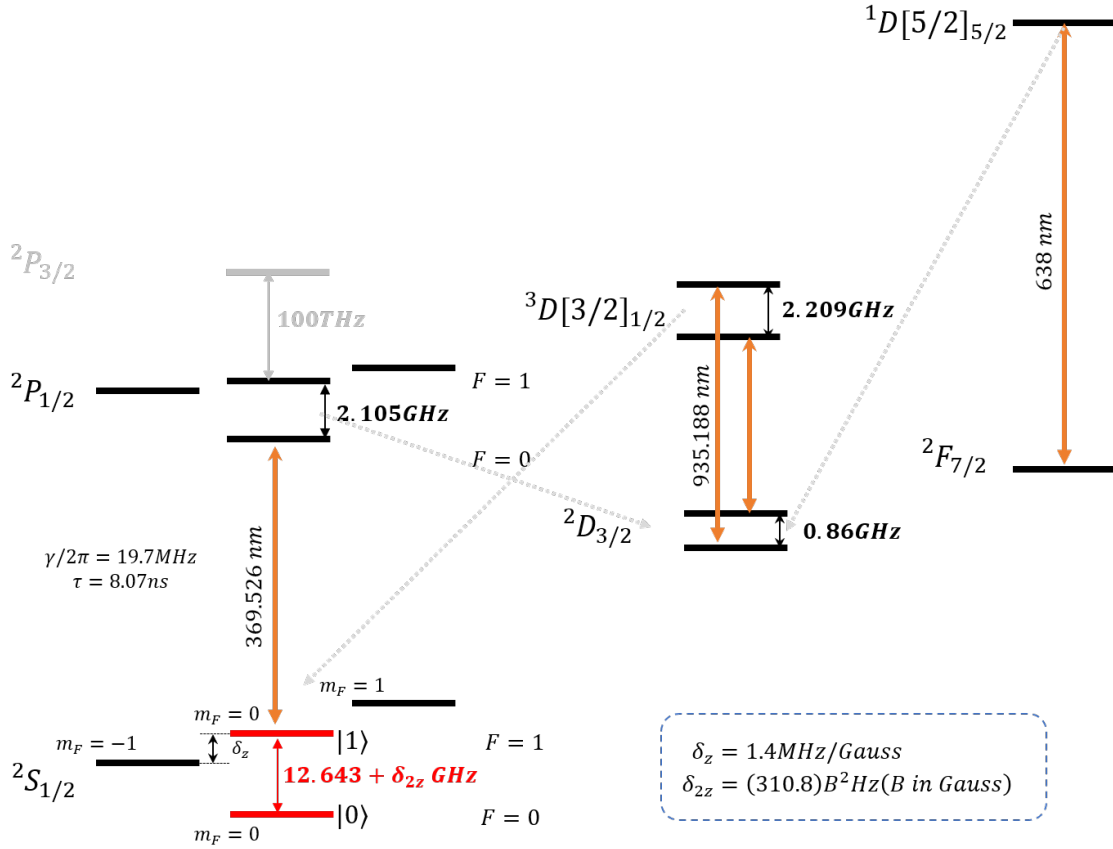
出于历史和现实的原因, 我们实验室选择 Yb^+ 离子作为实现量子计算的物理平台。在接下来的几节中, 我将阐述用镱离子实现量子计算的一些重要的概念, 如镱离子的能级结构和比特编码方式、镱离子的态初始化、镱离子的探测、镱离子的操控等。

4.1 镱离子的能级结构和和比特编码方式

在第1章介绍中我们介绍过实现量子计算对物理平台的要求, 最基本的要求是要能找到合适的量子系统来编码量子比特, 即 $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$ 。离子的内态是十分稳定并且易于操控的, 因此一般选择离子的两个内部状态来编码量子信息并执行计算。对于我们现在系统中采用的 $^{171}Yb^+$ 离子来说, 用来编码量子比特的是有着 $1/2$ 自旋的处于 $S_{1/2}$ 基态的超精细能级^[71]。如图4-1所示, $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 分别被编码到了基态的相应状态, 具体来说分别是 $|0\rangle = |F=0, m_F=0\rangle$ 和 $|1\rangle = |F=1, m_F=0\rangle$, 当 $B=0$ 两个能级的能量差为 12.64GHz。

通过在阱外向阱中离子施加的约 6 高斯的静磁场会使离子产生约 11Hz 的二阶 *Zeeman* 能级劈裂。从 $|1\rangle$ 态向 $^2P_{1/2}$ 能级跃迁回路的驱动波长在 369.526nm 附近, 这个波段的激光有成熟的商业激光系统供应, 同时对光纤传输也很友好。略有遗憾的是这个 $|1\rangle ^2P_{1/2}$ 跃迁回路并不是完全闭合的, 因为存在从 $^2P_{1/2}$ 到 $^2D_{3/2}$ 的微弱态泄露, 分支比约为 0.5%^[71]。不过这个可以通过使用一个带 3.07GHz 边带的 935nm 波长的激光来将泄露的态再回泵浦到整个回路中。另外, 背景撞击可能导致离子跑到 $^2F_{7/2}$ 使离子“熄灭”, 这个可以通过一个 638nm 波长的激光器来

图 4-1 镱离子的能级结构和比特编码方式



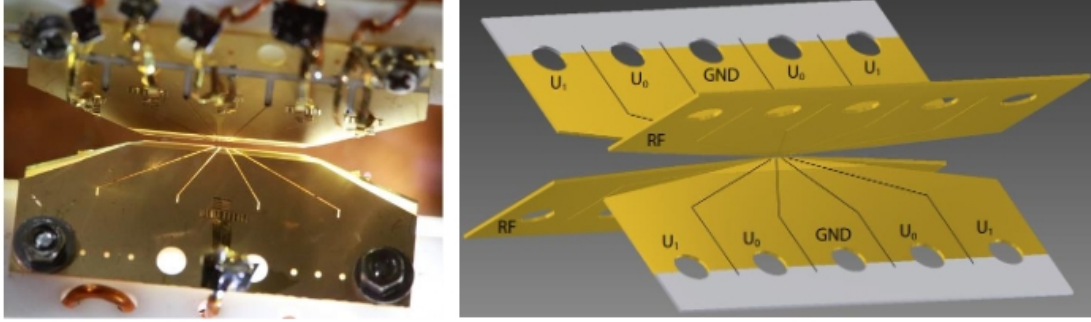
克服，重新将离子“点亮”。值得注意的是，这个任务除了 638nm 波长的激光器可以完成外，760nm^[74]、355nm^[75]。另外，由于从 $2F_{7/2}$ 到 $3F[1/2]_{3/2}$ 的跃迁大部分共振在 375.856nm 波长上，因此 375nm 波长的激光也可以完成。

4.2 镱离子的电离和囚禁

为了能够研究离子的特性我们首先需要将离子电离并稳定地囚禁住。离子的囚禁采用的是如第3.2节中介绍的动态囚禁的方式，离子的电离一般是通过激光电离的方式实现的。对于 Yb^+ 离子来说，电离的方式采用的是两步电离法 (two-step ionization)^[71]，这种方法可以避免紫外激光的使用。首先，我们使用 398.991nm 波长的激光将镱原子重 $1S_0$ 能级激发到 $1P_1$ 能级；然后再使用一个低于 394.088nm 波长的激光将最外层电子激发到连续态区域中去，比如通常采用的 369.526nm 波长激光，或者 355nm 波长、375nm 波长。在实践中，镱原子一般填充在原子炉中并被放置在真空室中。需要激发时就通过施加恒定电流加热原子，使原子从烤箱中热喷射出来的，其中会有一小部分穿过离子阱的中心。398.911nm 和 369.525nm 波长的激光束在离子阱中心与原子炉中喷射出的原子重叠。于是，该区域的原子

就可以被电离，并在高效冷却后被离子阱动态囚禁。由于同位素位移，我们可以通过微调 398.911nm 激光的波长来选择性地电离离子不同的同位素。为了抑制多普勒频移的影响，激光器的路径最好垂直于原子流。

图 4-2 刀片阱示意图



如第3.2节中给介绍的，由 *Earnshaw's theorem*^[76] 我们知道离子没有办法被静态地囚禁在三维空间中，好在我们仍然可以动态地将离子囚禁。实际实验中囚禁离子的离子阱如4-2图所示，这中类型的离子阱一般被称为刀片阱。它会产生如下形式的赝势 Φ_p ：

$$\Phi_p = \frac{eV^2}{4MR^4\Omega_{rf}^2} \sum_m \alpha_m^2 r_m^2 \quad (4-1)$$

其中 V , R , M 分别是 RF 电压、电极到阱中心的距离和离子的质量。 Ω_{rf} 是 RF 的频率， α_m 是 r_m 方向的系数。这个电势的结果是在所有方向上都有正的系数 ($\alpha_m^2 > 0$)，直观地揭示了囚禁带电离子的能力。同时还可以从中得到有效的阱频率 $\nu_m = eV\alpha_m/\sqrt{2}MR^2\Omega_{rf}$ 。

4.3 离子的激光冷却

从原子炉中喷出的原子是十分“热”的（标准大气压下原子的平均融化温度高达 824°C），由麦克斯韦运动分布可知它们的速度能达到超过一百米每秒。如此热的电子很容易从离子阱的囚禁电势中逃脱，很难被囚禁更不用说惊醒什么别的操作了。因此，我们需要某种冷却手段来给离子“降温”。

离子可以使用红色失谐的反向传播激光束进行激光冷却，这被称为多普勒冷却^[77]。如图4-3所示，当离子与激光反向运动时，吸收一个光子离子将减少 $\hbar\vec{k}$ 的动量；当离子与光同向运动时，吸收一个光子离子将增加 $\hbar\vec{k}$ 的动量。随后离子将通过受激辐射的形式随机散射 $\hbar\vec{k}$ 的动量，这个随机散射过程的平均结果是动量变化为 0。

图 4-3 激光施加到离子的多普勒效应示意图

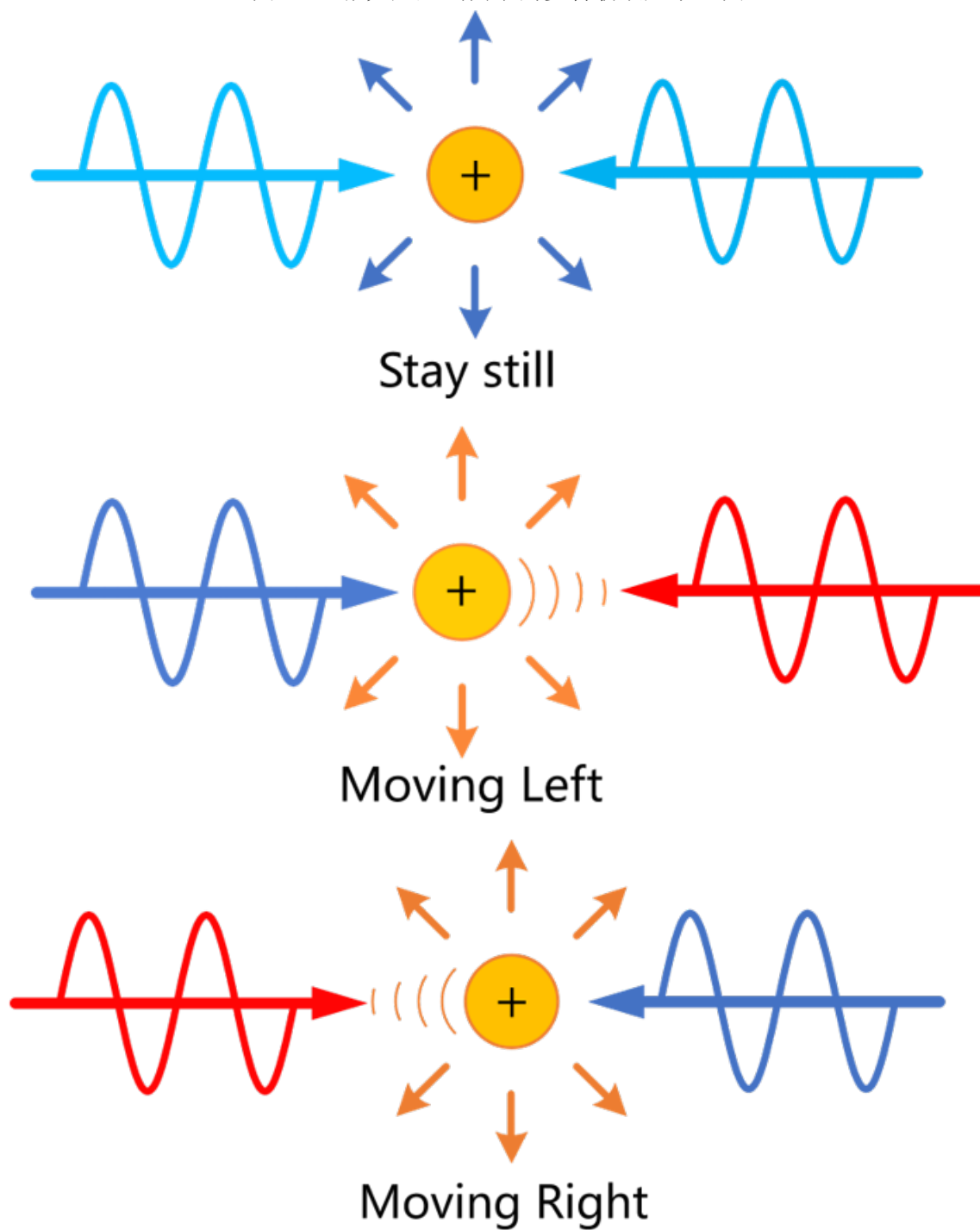
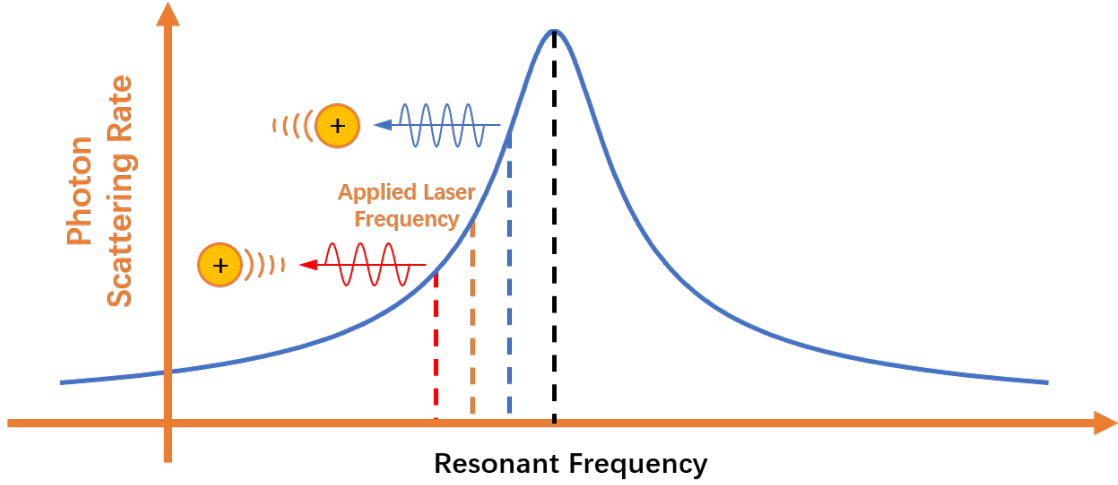


图 4-4 多普勒冷却示意图



如图4-4所示，由于多普勒效应，在离子局部坐标系下看入射激光的波长会产生 $-\vec{k} \cdot \vec{v}$ 的频移。因此如果施加红是失谐的激光，那么与激光方向相反的离子将比与激光方向相同的离子吸收更多的光子；另一方面，对打的激光会抵消激光本身对离子的加速效应，最终离子会失去较多的动量，被激光“冷却”下来。

对 Yb^+ 离子来说，在这个过程中跃迁 $^2S_{1/2} |F=1\rangle \rightarrow ^2P_{1/2} |F=0\rangle$ 和 $^2S_{1/2} |F=0\rangle \rightarrow ^2P_{1/2} |F=1\rangle$ 同时被驱动以覆盖离子的所有超精细能级，避免离子陷入暗态（变黑）。

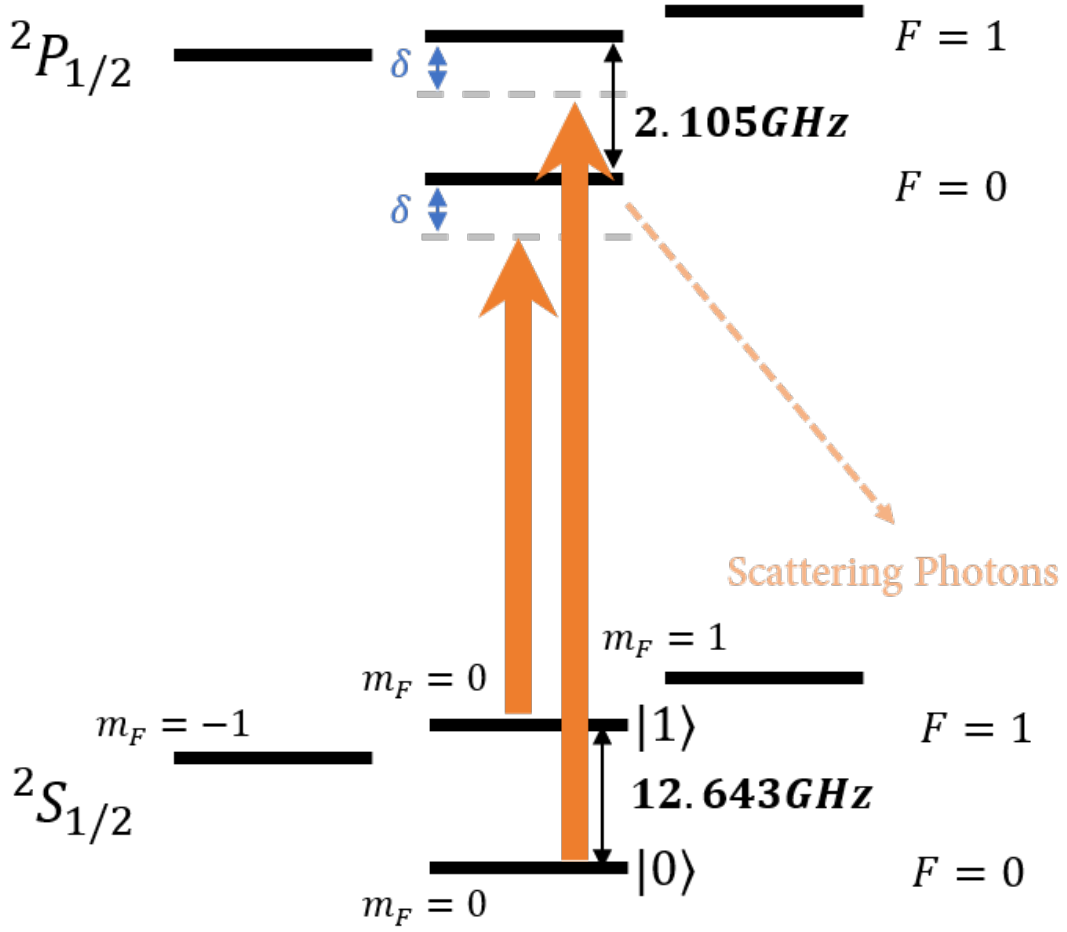
此外，冷却激光的所有偏振都施加上去来提高冷却效率，相关跃迁回路和离子散射图如图4-5所示。

4.4 镱离子的态初始化

几乎任何量子计算或模拟任务都以确定性的纯状态开始。获得这个起点的过程称为态初始化 (*State Initialization*)，这是通过囚禁离子平台中的光泵浦过程实现的。

如图4-6所示，在初始化过程中从 $^2S_{1/2} |F=1\rangle$ 到 $^2P_{1/2} |F=1\rangle$ 的跃迁被驱动。离子的状态很有可能衰减到 $|0\rangle$ 状态，因此由于 12.6GHz 的失谐，处于 $|0\rangle$ 态的离子不会参与进一步的激发。对于单个离子，这一过程在 5 μ s 内就可以以非常高的初始化保真度完成。这篇^[73]文献展示了状态初始化的误差小于可以 10^{-4}

图 4-5 离子冷却跃迁回路示意图



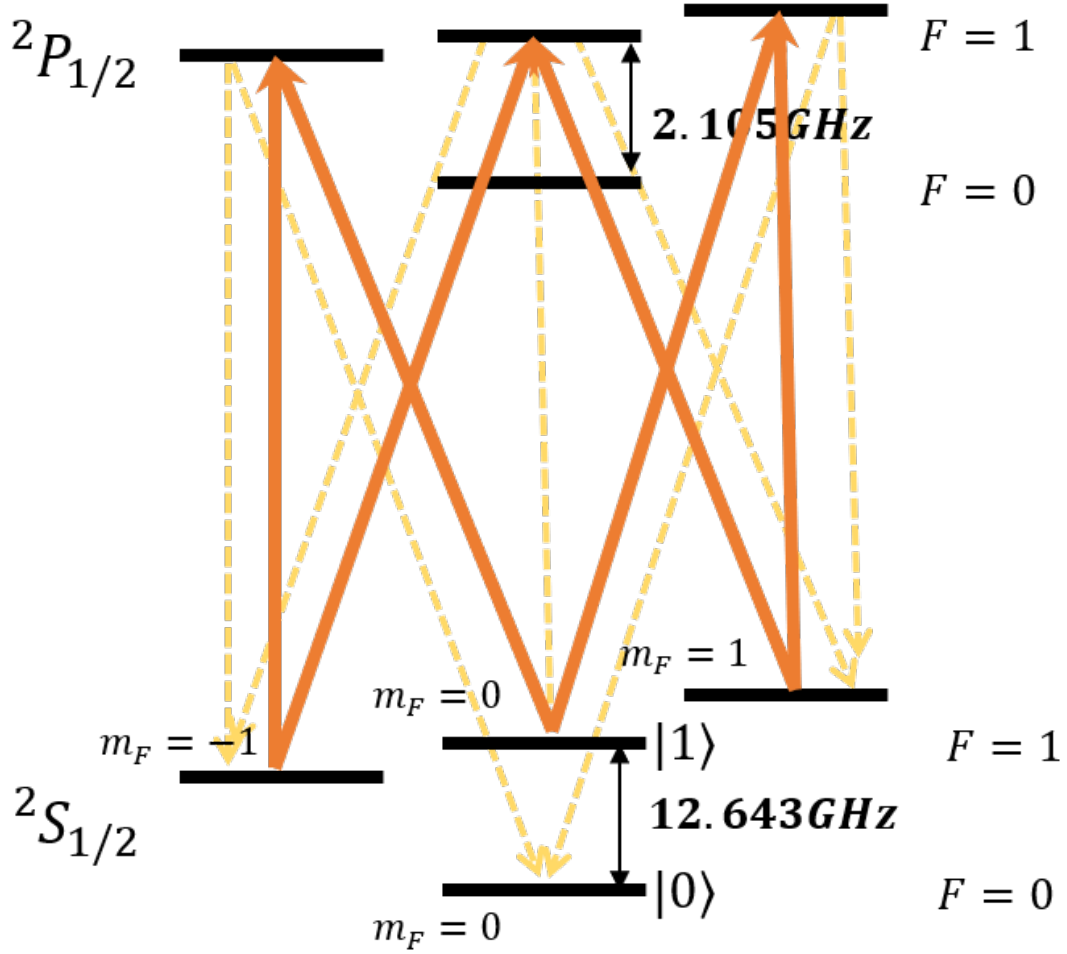
4.5 镱离子的态探测

在经过各种中间操控后，量子计算的结果需要被读出，这一过程通过离子的态测量实现。如图4-7所示，通常采用状态相关的荧光检测技术进行高保真读出^[78]。在这个过程中使用的是 $^2S_{1/2} |F=0\rangle$ 到 $^2P_{1/2} |F=1\rangle$ 之间的跃迁（ $^2S_{1/2} |F=0\rangle$ 到 $^2P_{1/2} |F=0\rangle$ 之间的跃迁是偶极禁止跃迁的）。因此，我们可以通过数收集散射光子的数量的多少来区分投影状态。

态测量过程得到的离子影像可以用电子倍增电荷耦合器件 (*Electron-multiplying charge-coupled device, EMCCD*) 或者光电倍增管 (*Photomultiplier Tube, PMT*) 通过两步成像来显示，如图4-8所示。对于单个离子，为了量化量子比特状态检测的保真度，我们可以将量子比特准备为 $|0\rangle$ 状态或 $|1\rangle$ 状态，然后应用持续 $40\mu\text{s}$ 的探测激光束同时计数收集到的光子。每个状态的序列通常重复2000次以获得统计分布。

以我们目前系统为例，入射光子数量的统计数据几乎遵循泊松分布， $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 状态的平均光子分别为0.05和9.58。分离良好的分布使我们能够将投影状态与固

图 4-6 离子态初始化示意图

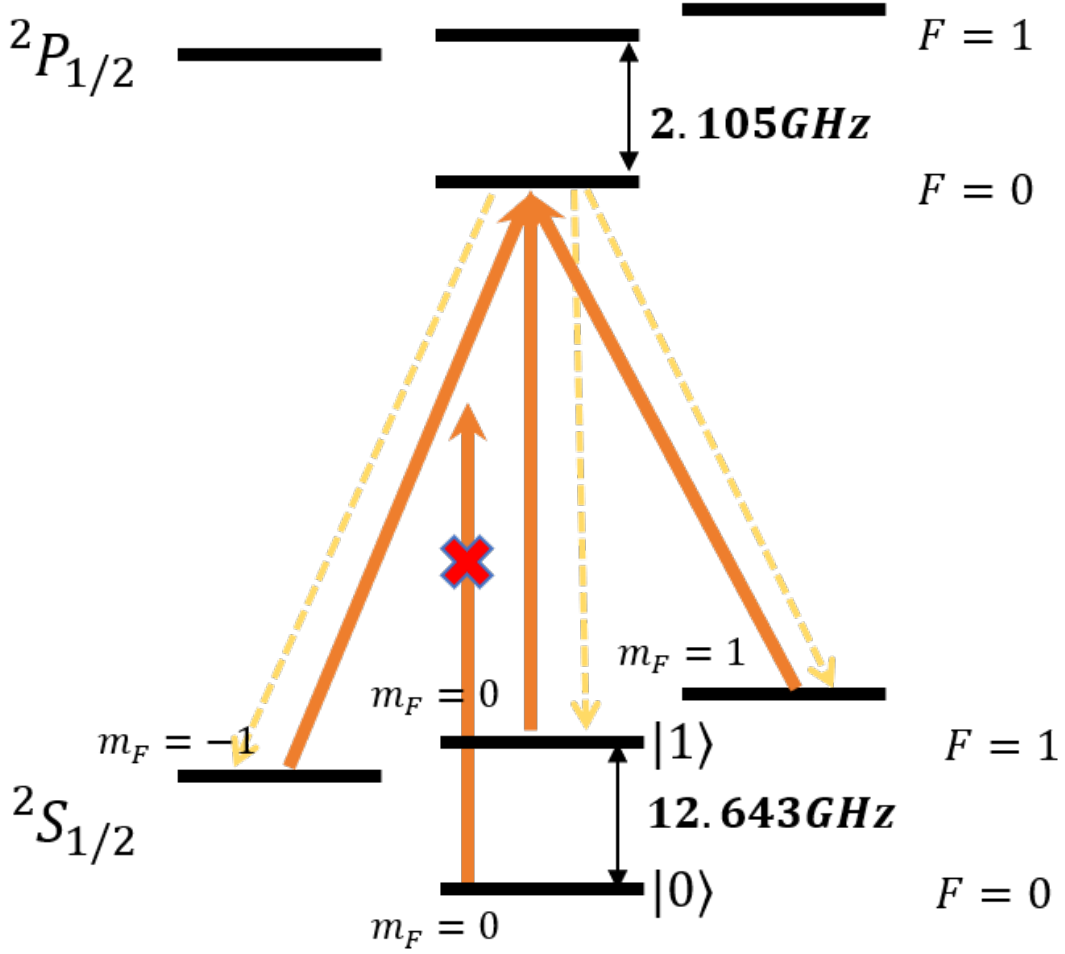


定阈值区分开来。对于单次检测，如果收集到的光子数大于 1，则我们将投影状态分类为 $|1\rangle$ 状态，否则投影状态被视为 $|0\rangle$ 状态。

4.6 镱离子的态操控

量子门可以通过微波^[71]或脉冲激光^[79]实现。微波对离子的态操控实现简单，但是由于所用微波的长波太长，使用微波技术方案往往仅限于单比特门；激光操控离子有诸多优点，尤其是在大规模的集成和寻址方面。接下来的小节将具体介绍这两类离子比特门操控方式。

图 4-7 离子态测量示意图



4.6.1 微波操控离子

在本小节中，我将简要介绍微波操控的离子量子门，以帮助建立离子态操控的一般方式。在微波场下的离子哈密顿量为（保持 $\hbar = 1$ ）：

$$\hat{H} = \frac{\omega_q}{2} \hat{\sigma}_z + \Omega \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \hat{\sigma}_x \quad (4-2)$$

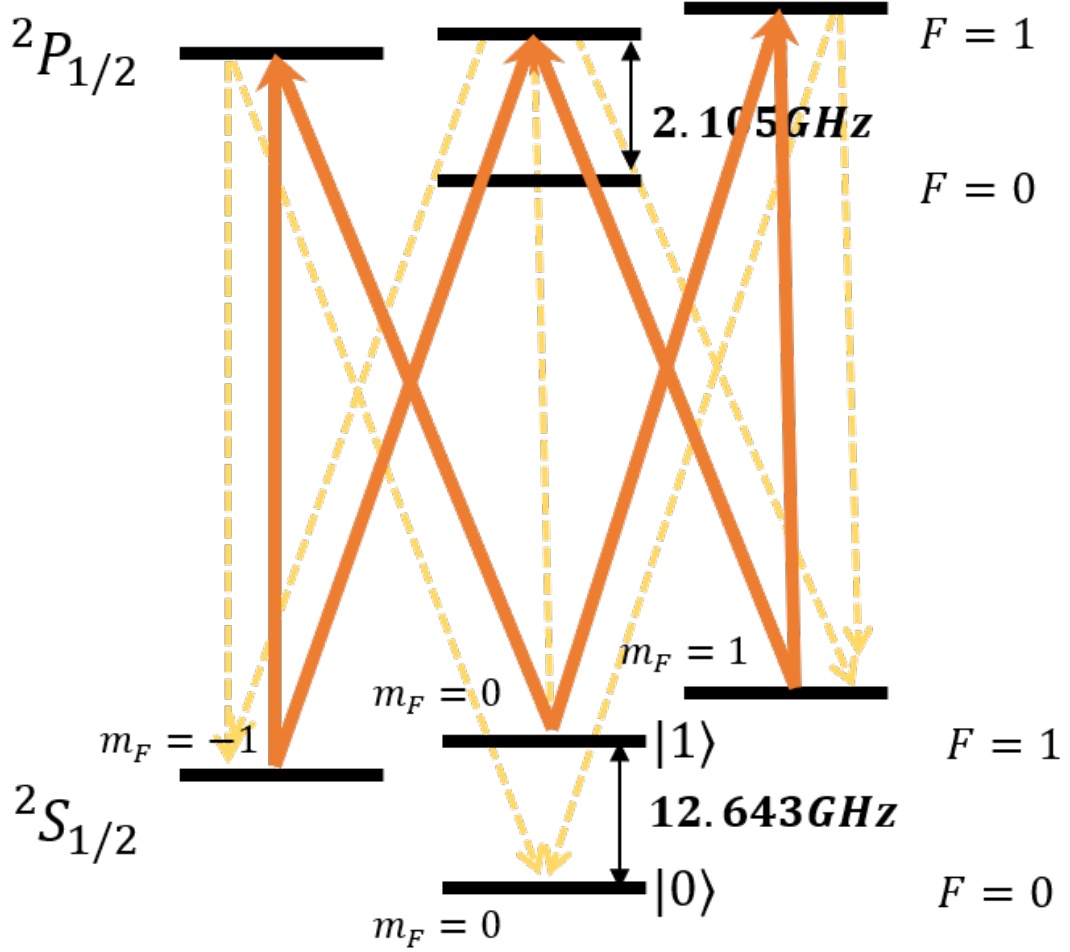
第一项是简化的离子比特二能级系统的希尔伯特空间，二能级系统的能量差为 ω_q ；第二项是磁偶极跃迁的导出项，其中磁场的振动频率为 ω ，初始相位为 ϕ ； Ω 是代表耦合强度的拉比频率；当 $\omega \approx 12.6\text{GHz}$ 时有 $\vec{k} \approx 3 \times 10^{-4} \text{um}^{-1}$ ，所以空间项 $\vec{k} \cdot \vec{r}$ 相对比较小，可以被忽略。通过一个重映射变换 $\hat{H}_I = e^{iH_0 t} (\hat{H} - \hat{H}_0) e^{-iH_0 t}$ ，其中 $\hat{H}_0 = \omega \hat{\sigma}_z / 2$ ，可以将自由空间哈密顿量转化到相互作用表象(dressed-state)下：

$$\hat{H}_I = e^{iH_0 t} (\hat{H} - \hat{H}_0) e^{-iH_0 t} \quad (4-3)$$

$$= -\frac{\mu}{2} \hat{\sigma}_z + \frac{\Omega}{2} (\hat{\sigma}_+ e^{i\omega t} + \hat{\sigma}_- e^{-i\omega t}) (e^{i(\omega t - \phi)} + e^{-i(\omega t - \phi)}) \quad (4-4)$$

$$\approx -\frac{\mu}{2} \hat{\sigma}_z + \Omega (\hat{\sigma}_+ e^{i\phi} + \hat{\sigma}_- e^{-i\phi}) \quad (4-5)$$

图 4-8 两步成像系统



$$= -\frac{\mu}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{\Omega \cos \phi}{2}\hat{\sigma}_x + \frac{\Omega \sin \phi}{2}\hat{\sigma}_y \quad (4-6)$$

其中 $\mu = \omega = \omega_q$ 是量子比特和单微波光子之间的能量差。在 \approx 这步，我们采用了在第3.5.2.1节中介绍过的旋波近似，将含 2ω 的快速振动项忽略掉了。相互作用表象(dressed-state)的优点在于最终的哈密顿量是不含时的，这样各个泡利矩阵的成分的概率幅就完全由施加的微波场决定了。

对于一个给定的状态 $|\Psi(0)\rangle = c_0(0)|0\rangle + c_1(0)|1\rangle$ ，其中 $|c_0(0)|^2 + |c_1(0)|^2 = 1$ ，它的时间演化由演化算符 $U(t)$ 决定：

$$|\Psi(t)\rangle = U(t)|\Psi(0)\rangle = \exp(-iH_I t)|\Psi(0)\rangle \quad (4-7)$$

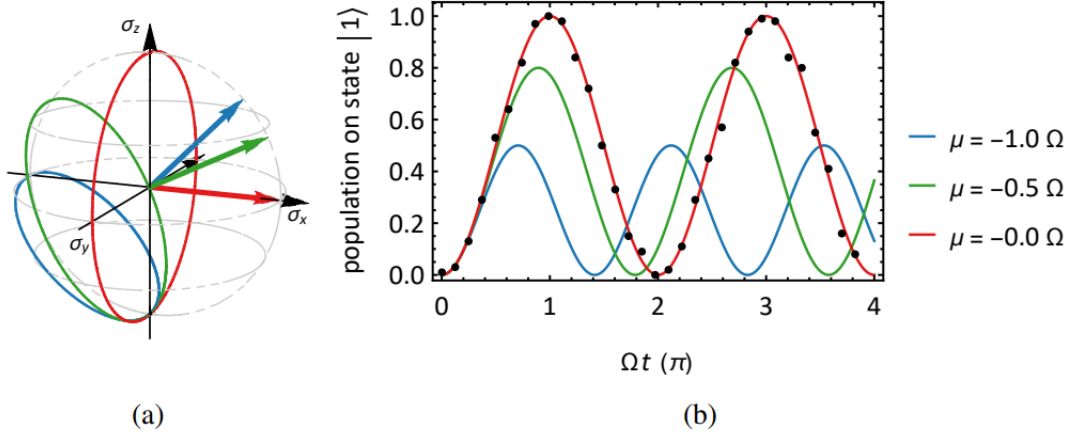
如果给定 $|\Psi(0)\rangle = |0\rangle$ ，那么可以解析地写出这个态的演化后的概率幅：

$$c_1(t) = -i \frac{\Omega}{\Omega_{eff}} e^{i\phi} \sin \frac{\Omega_{eff} t}{2}, \quad (4-8)$$

$$c_0(t) = \cos \frac{\Omega_{eff} t}{2} - i \frac{\mu}{\Omega_{eff}} \sin \frac{\Omega_{eff} t}{2} \quad (4-9)$$

其中 $\Omega_{eff} = \sqrt{\Omega^2 + \mu^2}$ 是有效拉比频率^[80]。 $|1\rangle$ 态的概率 $p_1(t) = |c_1(t)|^2$ 在时间 $t = \pi/\Omega_{eff}$ 时取得最大值，最大值为 $\Omega^2/(\Omega^2 + \mu^2)$ 。不同失谐 μ 情况下的拉比振荡如图所示。

图 4-9 不同失谐 μ 情况下的拉比振荡^[81]



在量子计算的实现中，我们总是使 $\mu \approx 0$ 以实现任意单比特的旋转操控：

$$R_\phi(\theta) = U\left(\frac{\theta}{\Omega}, P\phi\right) = \exp[-i\frac{\theta}{2}\sigma_\phi] \quad (4-10)$$

其中 $\sigma_\phi = \sigma_x \cos \phi + \sigma_y \sin \phi$ 。对于初始状态，在 $\theta = \pi$ 或者说是 $t = \pi/\Omega$ 时，初始态的概率可以完全转移到二能级系统的另一个态上。这种 $R_\phi(\theta)$ 旋转操作被称为沿着 ϕ 轴的态旋转操控， $R_\phi(\pi)$ 被称为 π 翻转，它的作用类似之前在第2.1.1.2节中介绍过的经典的 NOT 门。除此之外，还有一种重要的旋转操作 $R_\phi(\pi/2)$ ，它常被称为 $\pi/2$ 翻转，可以用来制备十分有用的叠加态 $(|0\rangle + e^{-i\phi} |1\rangle)/\sqrt{2}$ 。

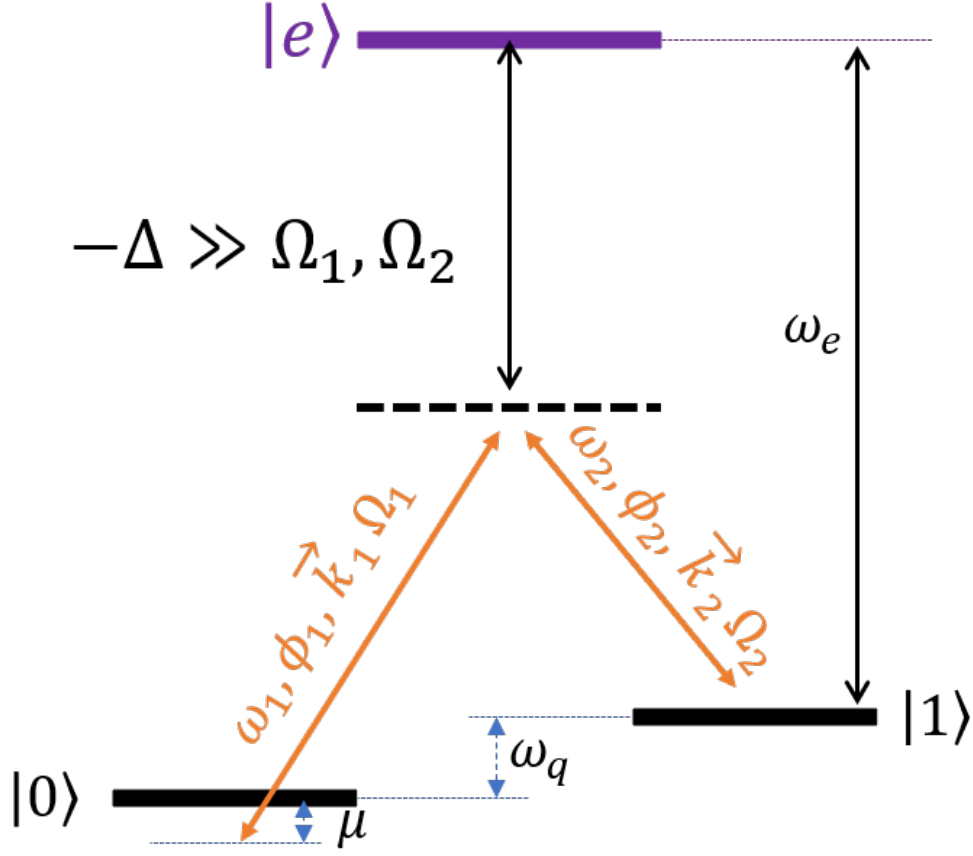
4.6.2 连续激光操控镱离子

离子的内态也可以用激光通过称为受激拉曼跃迁 (*Stimulated Raman Transition, SRT*) 的过程来操控。与微波场操控的方式相比，光学激光器的波长更短，提供了强大量子比特寻址的优势，这对于多量子比特情况下的单个量子比特操作至关重要，接下来的部分介绍了这种方法。

信息储存在镱离子的超精细能级上， $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 能级之间有着 12.6GHz 的能量差。尽管激光的能量远大于这个能级间隔以至于无法用激光直接操控 $|0\rangle$ 态和 $|1\rangle$ 态之间的跃迁，我们仍然可以通过两光子的受激拉曼跃迁来实现对离子内态的操控，如图4-10所示。

通过同时激发从 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 到一个中间激发态 $|e\rangle$ 的电偶极跃迁，整个系统的

图 4-10 铯离子受激拉曼跃迁示意图



自由空间哈密顿量可以写为:

$$\hat{H} = \frac{\omega_q}{2} \hat{\sigma}_z + \left(\omega_e + \frac{\omega_q}{2} \right) |e\rangle \langle e| \quad (4-11)$$

$$+ \frac{\Omega_1}{2} (|e\rangle \langle 0| + |e\rangle \langle 1| + H.c.) \left(e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t + \phi_1)} + H.c. \right) \quad (4-12)$$

$$+ \frac{\Omega_2}{2} (|e\rangle \langle 0| + |e\rangle \langle 1| + H.c.) \left(e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t + \phi_2)} + H.c. \right) \quad (4-13)$$

其中 $\Omega_i, \vec{k}_i, \phi_i$ 分别为第 i 个拉曼激光的电偶极跃迁强度、波矢和光相位。H.c. 表示厄米共轭。如果在旋转坐标系 $\hat{H}_0 = \frac{\omega_1 \hat{\sigma}_z}{2} + \left(\omega_e + \frac{\omega_q}{2} \right) |e\rangle \langle e|$ 下看, 相互作用的哈密顿量变为了:

$$\hat{H} = \left(\frac{\Omega_1}{2} e^{i(-\Delta - \mu)t} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \phi_1)} + \frac{\Omega_2}{2} e^{i(-\Delta + \omega_q)t} e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \phi_2)} \right) |e\rangle \langle 0| \quad (4-14)$$

$$+ \left(\frac{\Omega_1}{2} e^{i(-\Delta - \mu - \omega_q)t} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \phi_1)} + \frac{\Omega_2}{2} e^{i(-\Delta)t} e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \phi_2)} \right) |e\rangle \langle 1| + H.c. \quad (4-15)$$

其中失谐 $-\Delta$ 如图4-10所示. 考虑 $\Delta \gg \Omega_1, \Omega_2$ 且 $|\Delta| \gg \omega_q \gg \mu$ 的情况, 这时中间激发态 $|e\rangle$ 可以绝热消除, 最终离子比特系统中有效的哈密顿量如下:

$$\hat{H}_{eff} = \frac{\delta_{diff}}{2} \hat{\sigma}_z + \frac{\Omega}{2} \left(\hat{\sigma}_+ e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \mu t + \phi)} + \hat{\sigma}_- e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \mu t + \phi)} \right) \quad (4-16)$$

其中 $\Omega = \frac{\Omega_1 \Omega_2}{2\Delta}$, $\vec{k} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$, $\phi = \phi_1 - \phi_2$ 分别是有效拉比频率、有效波矢和激光的相对相位。 δ_{diff} 有如下形式^[82]:

$$\delta_{diff} = - \left(\frac{\Omega_1^2}{4(-\Delta - \mu - \omega_q) + \frac{\Omega_2^2}{4(-\Delta)}} \right) + \left(\frac{\Omega_1^2}{4(-\Delta + \mu) + \frac{\Omega_2^2}{4(-\Delta + \omega_q)}} \right) \quad (4-17)$$

$$\approx - \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{4\Delta} \frac{\omega_q}{\Delta} \quad (4-18)$$

这个是量子比特能级的差分光位移, 由于在一般的实验设置中 $\omega_a/|\Delta| \sim 10^{-3} \ll 1$, δ_{diff} 的值非常小。这项可以通过将原来的旋转坐标 ω_q 重新选择为 $(\omega_q + \delta_{diff})$ 来吸收掉。

另外注意, 这里的有效哈密顿量与公式(4-6)的共振情况相同, 后者是用微波进行的操控。因此如果我们让 $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$ 且 $\mu = \delta_{diff} \approx 0$, 那么这两种离子比特的操控方式从结果上看没有什么不同。不过实际上, 两者还有所不同。除了上面提高过的受激发的拉曼跃迁方法有单比特寻址的能力外, 它还通过改变传播拉曼光束的角度 $\vec{k} \in [0, 4\pi/\lambda]$ (激光方向从同向到反向传播) 来提供波矢 \vec{k} 的操控自由度。因为波长 λ 是在光学波段, 最大的波矢模 $|\vec{k}|$ 能达到 $10\mu\text{m}^{-1}$, 这为离子的运动耦合提供了可能性。离子也可以看作是一个以频率 ν 振动的量化的谐振子 (第3.2节), 这时公式(4-16)中的哈密顿量为:

$$H_{eff} = \nu a^\dagger a + \frac{\Omega}{2} (\sigma_+ e^{i(\eta(a^\dagger a) - \mu t + \phi)} + H.c.) \quad (4-19)$$

其中 a, a^\dagger 分别是产生和湮灭算子。这里我们通过研究一个维度的情况来具体说明, 比如 x 方向。此时 $\vec{k} \cdot \vec{r} \rightarrow k \cdot x$ 等价于 $k\Delta x(a + a^\dagger) = \eta(a + a^\dagger)$, 其中 $\Delta x = \sqrt{\hbar/2M\nu}$ 是基态波函数的拓展, $\eta = k\Delta x$ 是在第3.5.2.1节介绍过的 LDP。将公式(4-19)转换到 $H_0 = \nu a^\dagger a$ 的表象下并将 $\exp i\vec{k} \cdot \vec{r}$ 进行一阶展开, 可以得到近似的相互作用哈密顿量:

$$H_I \approx \frac{\Omega}{2} [\sigma_+ (1 + i\eta a e^{-i\nu t} + i\eta a^\dagger e^{i\nu t}) e^{-i\mu t + i\phi} + H.c.] \quad (4-20)$$

这个近似形式仅在 $\eta\sqrt{\langle (a + a^\dagger)^2 \rangle} \ll 1$ 时成立, 这也被称为 *Lamb-Dick* 近似 (*Lamb-Dick Approximation*), 其中 $\langle \cdot \rangle$ 表示量子态平均。在实验中这个条件是成立的, 不然就会产生高阶的跃迁。通过调节 μ 等于 $0, -\nu, \nu$, 我们可以得到三种类型的跃迁:

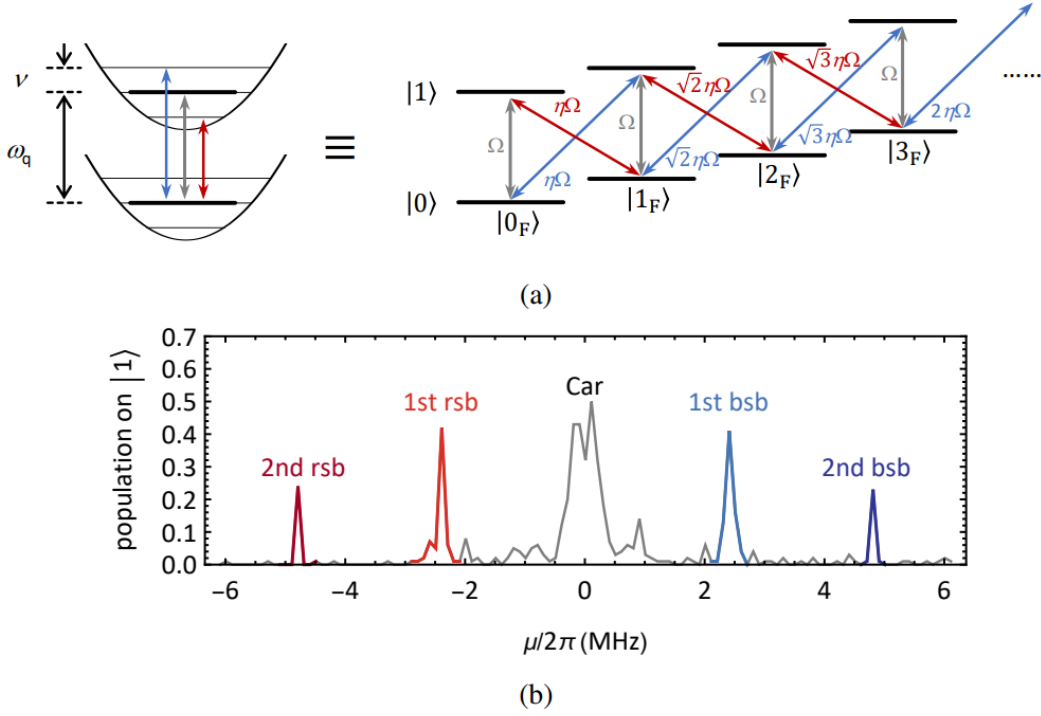
$$H_{car} = \frac{\Omega}{2} (\sigma_+ e^{i\phi} + H.c.) \quad (4-21)$$

$$H_{rsb} = \frac{i\eta\Omega}{2} (\sigma_+ a e^{i\phi} + H.c.) \quad (4-22)$$

$$H_{bsb} = \frac{i\eta\Omega}{2}(\sigma_+ a^\dagger e^{i\phi} + H.c.) \quad (4-23)$$

H_{car} , H_{rsb} , H_{bsb} 分别被称为载带跃迁、红边带跃迁和蓝边带跃迁, 如图4-11所示。

图 4-11 载带跃迁、红边带跃迁和蓝边带跃迁示意图。



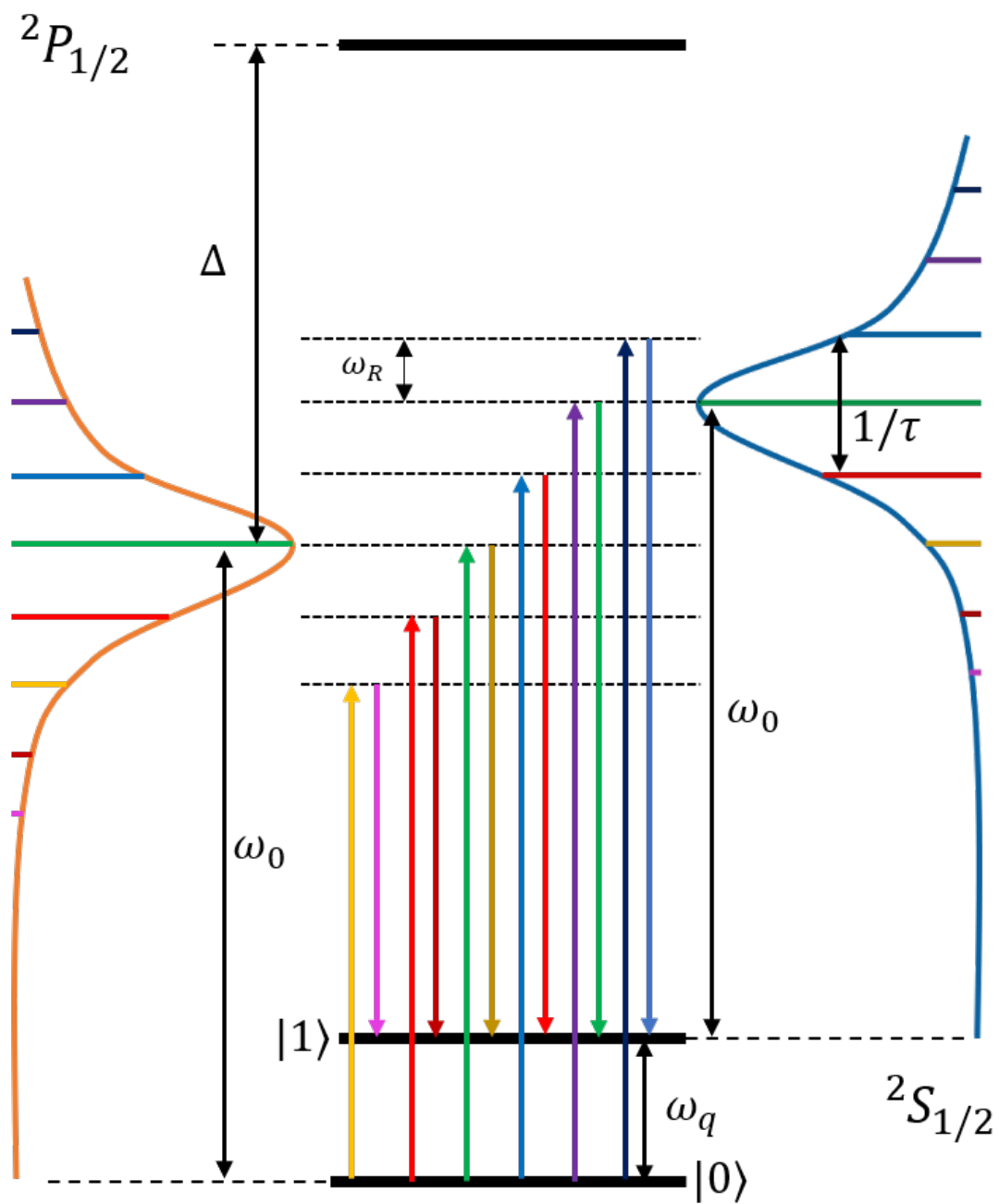
载带跃迁可以用来实现如微波操控一样（第4.6.1节）的单比特门翻转 $R_\phi(\theta)$ 。红边带跃迁和蓝边带跃迁的哈密顿量分别称为 *Jaynes-Cummings* 或 *anti-Jaynes-Cummings* 模型^[83]。这类跃迁可以将量子比特与其外部量化运动耦合, 这对于实现多个离子量子比特纠缠至关重要。

4.6.3 脉冲激光操控镱离子

如上一节所述的在用激光操控离子的技术方案下, $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 态耦合的主要方式是通过受激拉曼跃迁。脉冲激光控制离子的原理本质上与连续激光的情况没有不同。主要区别在于连续激光是通过驱动拉曼跃迁来控制的, 而脉冲激光是通过同时驱动一系列小间隔的拉曼跃迁来控制的。原理图如图4-12所示。

在空间中的固定点上, 理想化的激光脉冲束有一个时间独立的电场, 可以表

图 4-12 脉冲激光操控镱离子



述为:

$$E(t) = \sum_{n=1}^N f(t - nT)e^{i\omega_0 t} \quad (4-24)$$

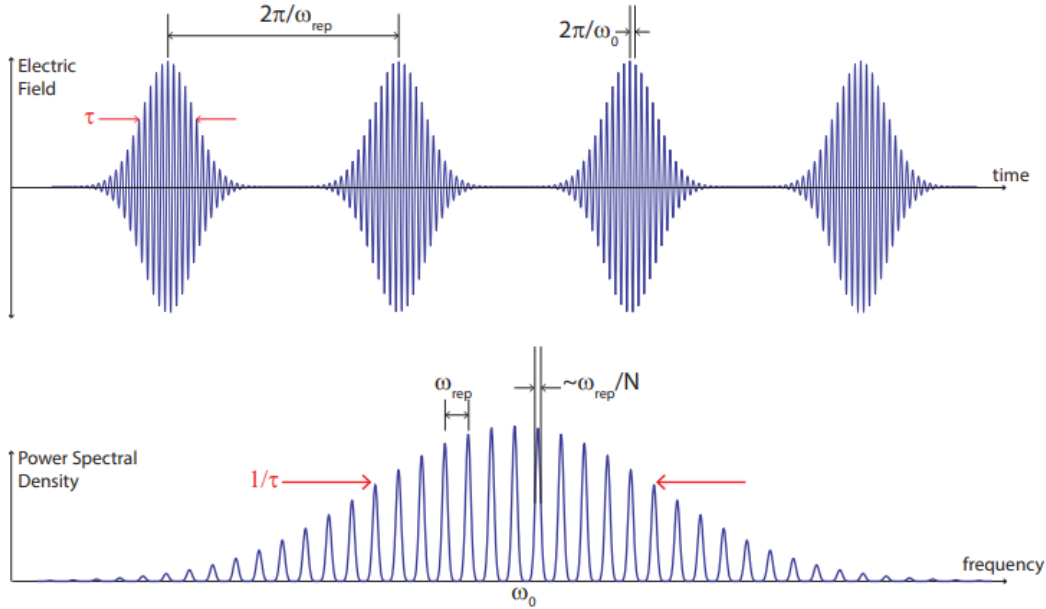
其中 $f(t)$ 是脉冲激光的包络, T 是激光脉冲的重复周期, N 是整数激光包含的脉冲数, ω_0 是脉冲激光的波长。脉冲激光在频域中可以表示为:

$$E(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}(\omega)(\omega_0 \pm n\omega_R) \quad (4-25)$$

其中 $\tilde{f}(\omega) = \mathcal{F}(f(t))$ 表示 $f(t)$ 傅里叶变换的结果, $\omega_R = 2\pi\nu_R$ 是脉冲激光的重复频率。如图4-13所示, 脉冲激光在频域上是一些列频率梳齿, 离子比特态之间拉曼跃迁的共振拉比频率由梳齿的所有谱分量的总和给出, 如图4-12所示。在绝热近似消除激发态 $^2P_{1/2}$ 并执行旋转波近似后, 脉冲激光的受激拉曼跃迁拉比频率有以下形式^[84]:

$$\Omega = \frac{|\mu|^2 \sum_l E_l E_{l-q}}{\Delta} \approx \Omega_0 \left(\frac{\omega_q \tau}{e^{\frac{\omega_q \tau}{2}} - e^{-\frac{\omega_q \tau}{2}}} \right) \quad (4-26)$$

图 4-13 脉冲激光在频域中的梳齿



其中 μ 是地面之间的偶极子矩阵元素, $\tau \approx 1\text{psec}$ 是每个脉冲的持续时间, $E_k \equiv \nu_R \tilde{f}(2\pi k\nu_R)$ 是激发态电子态, $q \equiv \omega_q/\omega_R$ 是整数。在上述的近似表述中, 求和被表述为积分, 每个脉冲表示为 $f(t) = \sqrt{\pi/2}E_0 \text{sech}(\pi t/\tau)$ ($\tau \ll T$)。 $\Omega_0 = \nu_R \tau |vE_0|^2/\Delta = s\gamma^2/2\Delta$ 脉冲束的时间平均谐振拉比频率, $\gamma/2\pi = 20\text{MHz}$ 是 $^2P_{1/2}$

态的辐射线宽, $s = \bar{I}/T_{sat}$ 是 $^2S_{1/2} \leftrightarrow ^2P_{1/2}$ 的饱和强度。在假设单脉冲带宽与我们的实验系统中满足的超精细频率 ($\omega_q \tau \ll 1$) 相比较大的情况下, 可以得到 $\Omega \approx \Omega_0$ 。

4.7 Mølmer-Sørensen 门

两量子比特纠缠门可以通过利用不同离子之间共享的集体运动实现。该策略利用了囚禁离子链的一个非常有利的特性, 称为完全连通性 (*Full Connectivity*), 这意味着整个离子链的离子都有相互作用。

Ignacio Cirac 和 Peter Zoller 最早在 1995 年中提出了双量子比特纠缠门的第一个方案^[85], 称为 *Cirac-Zoller 门* (*Cirac-Zoller Gate, CZ-Gate*), 并在 2003 年在实验中实现^[86]。然而, 如果离子不冷却到它们的运动基态, CZ-Gate 的性能会急剧下降。这种苛刻的要求限制了 CZ-Gate 的扩展。Klaus Mølmer 和 Anders Sørensen 在 1999 年提出了另一种运动状态不敏感门的技术方案^[87], 被称为 *Mølmer-Sørensen 门* (*Mølmer-Sørensen Gate, MS-Gate*)。由于 MS-Gate 的更鲁棒的特征, 它广泛用于囚禁离子量子计算中。在本节中, 我们将详细介绍 MS 型双量子比特纠缠门的实现。

如果我们对离子施加二色场 $\mu_b = m\omega, \mu_r = -\mu$, 就可以得到状态相关力, 相应的哈密顿量可以表述为:

$$H_{SDF} = \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^2 \frac{\eta_{j,m}\Omega}{2} \left(a_m^\dagger e^{i\delta_m t} e^{-i\phi_p} + a_m e^{-i\delta_m t} e^{i\phi_p} \right) \hat{\sigma}_{\phi_s}^j \quad (4-27)$$

其中 $\eta_{j,m}$ 是缩放的 Lamb-Dicke 参数 (其中包括来自正常模式变换矩阵的因子)^[88], $\hat{\sigma}_j$ 是第 j 个离子比特的泡利矩阵。 a_m 和 a_m^\dagger 是第 m 个模式的湮灭和产生算子, 相应的模态频率表示为 ν_m 。 $\delta_m = \nu_m - \mu$ 是相对于第 m 个模式的失谐, 它对于红蓝两个相应的跃迁的拉比频率相等为 $\Omega_r = \Omega_b = \Omega$ 。光学相位 ϕ_b 和 ϕ_r 可以分解为运动和量子比特两部分, 其形式分别为 $\phi_p = (\phi_r - \phi_b)/2$, $\phi_s = (\phi_r + \phi_b + \pi)/2$ 。我们可以定义形式为 $f_{j,m} = \eta_{j,m}\Omega e^{i\phi_p}/2$ 的一个复合力。不失一般性, 我们可以设定 $\phi_p = \phi_s = 0$, 从而得到一个由 $\hat{\sigma}_x$ 决定的力, 哈密顿量为:

$$H_{SDF} = \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^2 \frac{\eta_{j,m}\Omega}{2} \left(a_m^\dagger e^{i\delta_m t} + a_m e^{-i\delta_m t} \right) \hat{\sigma}_x^j \quad (4-28)$$

那么由公式(4-28)所描述的哈密顿量控制的演化可以推导出为:

$$U(\tau) = \mathcal{T} \exp \left[-i \int_0^\tau H_{SDF}(t) dt \right] \quad (4-29)$$

这是一个时间顺序的积分，因为 $[H_{SDF}(t_2), H_{SDF}(t_1)] \neq 0, t_1 \neq t_2$ 。幸运的是，通过利用 Magnus 公式，方程(4-29)可以解析计算如下^[89]：

$$U(\tau) = \exp \left\{ -i \int_0^\tau H_{SDF}(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^\tau dt_2 \int_0^{t_2} [H_{SDF}(t_2), H_{SDF}(t_1)] dt_1 \right\} \quad (4-30)$$

具体来看，公式(4-30)中第一个积分变为：

$$T_1 = -i \int_0^\tau H_{SDF}(t) dt \quad (4-31)$$

$$= -i \int_0^\tau \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^2 \frac{\eta_{j,m} \Omega}{2} (a_m^\dagger e^{i\delta_m t} + a_m e^{-i\delta_m t}) \hat{\sigma}_x^j dt \quad (4-32)$$

$$= \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^2 (\alpha_{j,m}(\tau) a_m^\dagger - \alpha_{j,m}^*(\tau) a_m) \hat{\sigma}_x^j \quad (4-33)$$

其中，

$$\alpha_{j,m}(\tau) = -i \frac{\eta_{j,m} \Omega}{2} \int_0^\tau e^{i\delta_m t} dt = \frac{\eta_{j,m} \Omega}{2} \frac{1 - e^{i\delta_m \tau}}{\delta_m} \quad (4-34)$$

显然，第一个积分的结果揭示了在多个运动模式上的状态相关位移算子，它将量子比特状态与其在位置动量相空间中的位移纠缠在一起。

公式(4-30)中第二个双重积分可以简化为：

$$T_2 = -\frac{1}{2} \int_0^\tau dt_2 \int_0^{t_2} [H_{SDF}(t_2), H_{SDF}(t_1)] dt_1 \quad (4-35)$$

$$= - \sum_{j,j'=1}^2 \sum_{m,m'=1}^2 \frac{\eta_{j,m} \eta_{j',m'} \Omega^2}{8} \hat{\sigma}_x^j \hat{\sigma}_x^{j'} \quad (4-36)$$

$$\int_0^\tau dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 [a_m^\dagger e^{i\delta_m t_2} + a_m e^{i\delta_m t_2}, a_{m'}^\dagger e^{i\delta_{m'} t_1} + a_{m'} e^{i\delta_{m'} t_1}] \quad (4-37)$$

$$= i \sum_{j,j'=1}^2 \sum_{m,m'=1}^2 \frac{\eta_{j,m} \eta_{j',m'} \Omega^2}{4} \hat{\sigma}_x^j \hat{\sigma}_x^{j'} \int_0^\tau dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \sin[\delta_m(t_2 - t_1)] \quad (4-38)$$

$$= i \sum_{j,j'=1}^2 \sum_{m,m'=1}^2 \frac{\eta_{j,m} \eta_{j',m'} \Omega^2}{4} \left(\frac{\tau}{\delta_m} - \frac{\sin(\delta_m \tau)}{\delta_m^2} \right) \hat{\sigma}_x^j \hat{\sigma}_x^{j'} \quad (4-39)$$

$$= -i \theta_{1,2}(\tau) \hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_x^2 \quad (4-40)$$

其中,

$$\theta_{1,2}(\tau) = -2 \sum_{m=1}^2 \frac{\eta_{1,m}\eta_{2,m}\Omega^2}{4} \left(\frac{\tau}{\delta_m} - \frac{\sin(\delta_m\tau)}{\delta_m^2} \right) \quad (4-41)$$

由于 $\hat{\sigma}_x^j \hat{\sigma}_x^j = \mathbb{I}$, 所有自交互项都消失了, 仅导致可忽略的恒定相位。耦合强度 $\theta_{1,2}$ 中的两个因子是由于 $\hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_x^2$ 和 $\hat{\sigma}_x^2 \hat{\sigma}_x^1$ 的对称贡献产生的。这里的量子比特-量子比特耦合项提供了纠缠不同量子比特的可能性。这里注意, 由于 $[H_{SDF}(t_3), [H_{SDF}(t_2), H_{SDF}(t_1)]] = 0$, 即使是高阶积分也会消失。

通过将公式(4-33)和公式(4-33)带入公式(4-30)中, 我们可以得到简化的演化算子:

$$U(\tau) = \exp \left[\sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left(\alpha_{j,m}(\tau) a_m^\dagger - \alpha_{j,m}^*(\tau) a_m \right) \hat{\sigma}_x^j - i\theta_{1,2}(\tau) \hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_x^2 \right] \quad (4-42)$$

为了具有纯量子比特耦合, 量子比特运动应该在时间 τ 处解纠缠, 这表明对于任何 j, m 来说 $\alpha_{j,m}(\tau)$ 应该为零。由公式(4-34)可知, 这些等价于 $\delta_m\tau$ 对任意 m 来说都是 2π 的整数倍。对于两量子比特链来说, 这可以通过设置 $\mu = (v_1 + v_2)/2$ 和 $\tau = 2n\pi \times 2/(v_1 - v_2)$ (假设 $v_1 > v_2$), 其中 n 是正整数。这样一来, 耦合力变为:

$$\theta_{1,2} = -\frac{n\pi\Omega^2}{\delta_1} \left(\frac{\eta_{1,1}\eta_{2,1}}{\delta_1} + \frac{\eta_{1,2}\eta_{2,2}}{\delta_2} \right) \approx -\frac{2n\pi\eta_{1,1}^2\Omega^2}{\delta_1^2} \quad (4-43)$$

最后的简化是由于 $\delta_1 = -\delta_2$ 和 $\eta_{1,1} = \eta_{2,1} \approx \eta_{1,2} = -\eta_{2,2}$ 的关系。最终的演化算子揭示了双量子位纠缠操作, 可以写为:

$$XX_{1,2}(\theta_{1,2}) = U(\tau) = \exp[-i\theta_{1,2}\hat{\sigma}_x^1\hat{\sigma}_x^2] \quad (4-44)$$

这是镜像型门 (*Ising-Type Gate*) 之一, 表示为 XX 门。通过改变驱动激光 Ω 的功率来调节耦合强度。

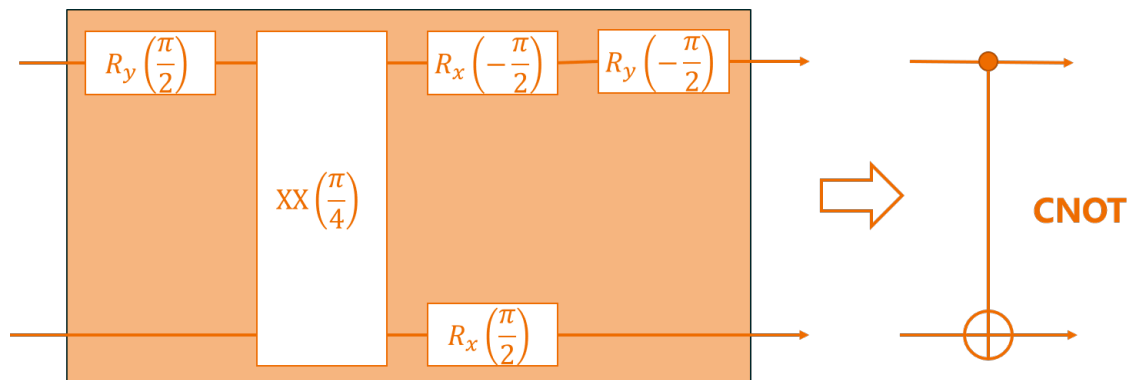
如前面第2章中所述, 在量子计算社区中, CNOT 门是最著名的双量子比特门。XX 门可以通过夹在几个单量子旋转门之间转换为 CNOT 门^[15], 如图4-14所示。从这个意义上说, 我们总是选择任意单量子比特旋转和双量子比特 XX 门, 而不是 CNOT 门, 作为我们的囚禁离子平台的通用门集。

XX 门最重要的功能之一是制备纠缠态, 如下公式所描述的:

$$XX(\theta) |00\rangle = \cos \theta |00\rangle - i \sin \theta |11\rangle \quad (4-45)$$

在选择 θ 为 $\pm\pi/4$ 时, 制备出的状态是最大纠缠态 $|00\rangle \pm i |11\rangle / \sqrt{2}$, 相当于贝尔态。通常用这些状态的状态保真度来表征 XX 门的性能。

图 4-14 XX 门转换为 CNOT 门



第 5 章 基于 FPGA 的 RTMQ 测控系统

量子物理实验系统常常涉及到一些物理量的精确调控和测量，这既包括量上的精确性，也包括时间上的精确性。因此量子物理实验系统对测量和控制性能提出了很多新的要求，其中十分关键的一点就是对测控系统实时性的要求。

目前实时系统在医疗、加工、汽车等行业都有较多的应用，实时系统具有响应快、延迟短等特点，其响应延迟和计时精度通常在毫秒至微秒量级，这一精度已经能满足当前诸多传统行业的控制需求。现有的实时系统一般使用主频在数百 MHz 至 GHz 量级的通用微处理器或微控制器作为控制的主体，以计时器中断和时间片分配等方式实现实时控制。这一方案成立的前提在于，所需的时间控制精度与指令执行频率之间有 3-6 个数量级的差异，因而通用处理器架构中存在的一些诸如分支预判、乱序执行等导致指令执行顺序不确定的因素以及中断系统中存在的现场保护、控制权交接等额外开销导致的时间控制不确定性可以忽略不计。

然而近来随着量子技术的发展，量子物理实验系统也开始产生对数据处理、复杂流程控制和实时控制的需求。不同于传统行业，量子物理实验系统对时间控制的精度和分辨率的要求在纳秒量级、延迟要求在百纳秒至数十微秒量级，与当前微处理器的主频相当，从而前述的现有的实时控制方案难以满足需求。

因此早年在量子物理实验领域内，通常用 FPGA（现场可编程门阵列）设计特定的时序脉冲发生器来产生高时间精度的脉冲序列，以此作为其它实验设备的触发信号，进行准确的时序控制。然而，这种方案的灵活性较差，只能产生预定的序列，无法在实验中对实验数据进行即时的处理，或根据实验的中间结果对后续的流程进行及时的调整。近年来随着量子算法的发展，实验方案越来越复杂，实验流程中开始包含快速反馈的结构，即在实验过程中对实验目标进行测量，获得一些中间结果，而后对中间结果进行计算和处理，并进而确定后续的实验流程。中间结果的处理和后续流程的确定，一般要求在数十纳秒至数十微秒量级的时间内完成，并且执行时刻必须要严格确定。这要求实验的测控系统具有通用计算的能力，简单的时序脉冲发生器无法满足这一要求。

当前领域内针对此问题的主要解决思路为，另置一与时序脉冲发生器紧密连接的通用微处理器，用来对实验数据进行即时处理和产生时序脉冲发生器的后续输出时序。这一方案能较好的满足系统规模较小且实验时序不太复杂的情形下的实时控制需求。然而，这一问题之一在于，微处理器和时序脉冲发生器依

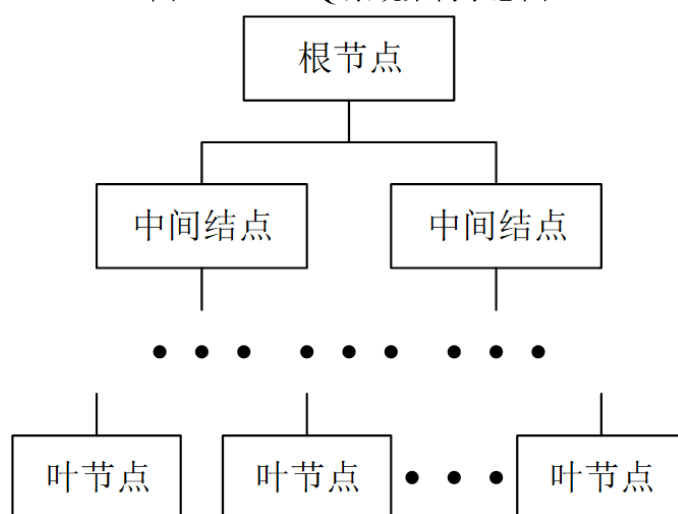
然是相互独立的两个个体，而微处理器的执行时序有其内在不确定性；二者之间要保持同步，或者需要频繁地相互交换触发信号，或者需要在时序设计上预留出充足的余量以覆盖此不确定性的最坏情形，总之都会复杂化时序的设计并产生时间浪费。

这一方案的另一问题在于，当系统规模较大，一个时序脉冲发生器无法控制整个系统时，就需要同时使用多个时序脉冲发生器，而一个微处理器同时处理过多的实验数据、同时控制过多的时序脉冲发生器，将不可避免的产生拥塞，这会进一步加剧前述的同步性问题。而如果同时使用多个微处理器，则不同微处理器之间的同步性又将成为问题；当前主流的微处理器架构和指令集都是针对通用计算而优化的，主流的微处理器使用的通信协议都是针对高吞吐率而优化的，二者都难以实现精确的时序同步。

5.1 RTMQ 实时系统架构介绍

对于离子阱量子计算研究来说，一种实时性更强、拓展性更好、更灵活的测控系统十分重要。我们实验中对系统的控制和测量采用一种叫 RTMQ 的系统架构来实现。RTMQ 系统架构提供了一种新的量子物理实验平台实时测控系统架构，解决了上述的不足。在 RTMQ 系统架构中，通用计算和时序控制由同一微处理器实现，因此避免了两个独立的模块之间同步性的问题；同时树状结构的系统中每个节点都具有通用计算的能力，因此可以实现计算任务的分布式处理，避免了拥塞的问题。

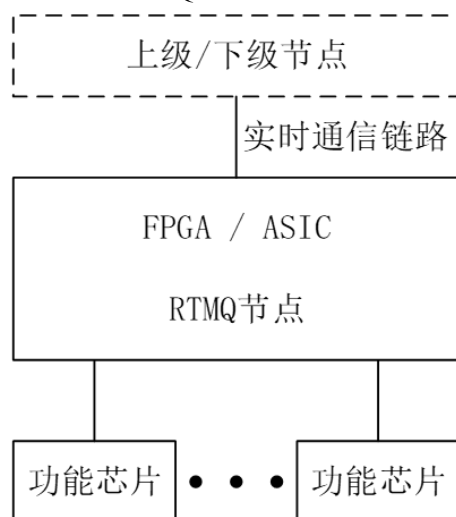
图 5-1 RTMQ 系统架构示意图



RTMQ（用于量子物理实验的实时微系统，RealTime Microsystem for Quantum physics）架构主要用于基于 FPGA 或 ASIC 的兼具通用计算和高精度时序控制能

力的微系统。系统的整体结构为树状结构，如图5-1所示，系统包含一个根节点，多个中间结点和多个叶节点；根节点通过网络、USB等方式与控制计算机相连。不同节点可位于同一PCB上，亦可位于不同PCB上。

图 5-2 RTMQ 系统架构节点示意图

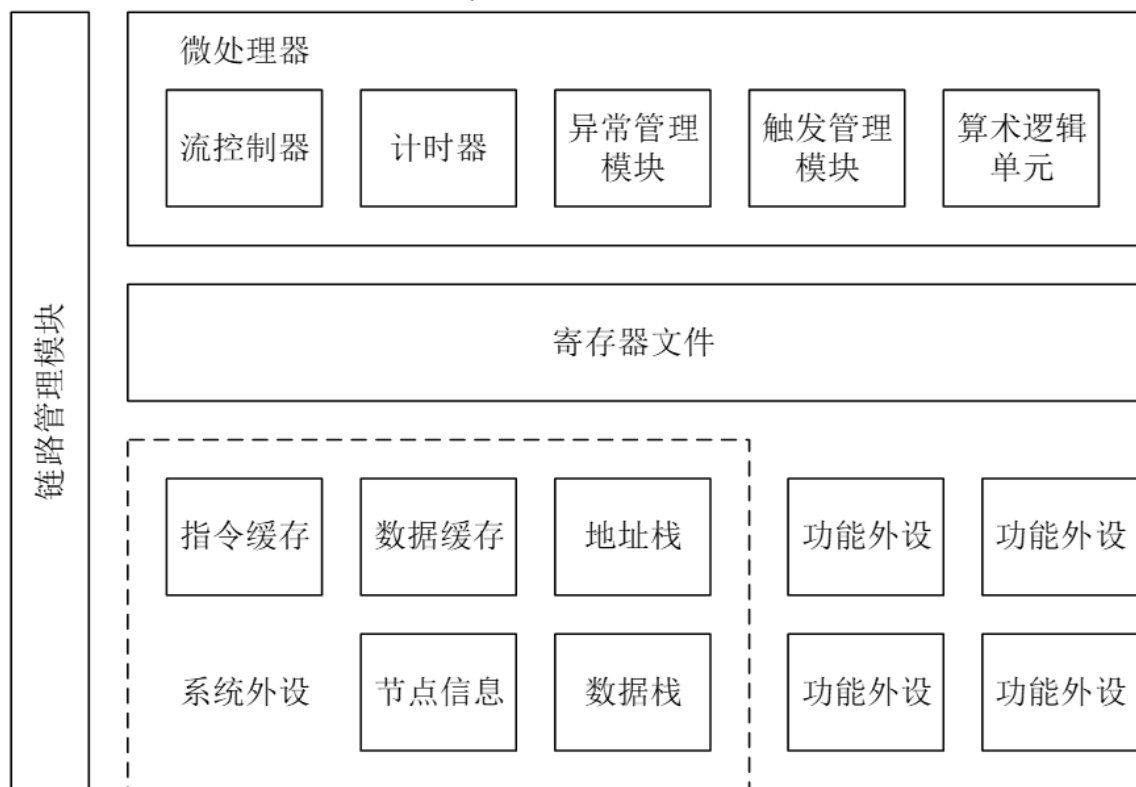


一般而言一个板卡具有如图5-2所示的结构，板卡上的FPGA或ASIC包含一个RTMQ节点，RTMQ节点通过控制FPGA或ASIC的输入输出与数模/模数转换等各类功能芯片进行交互以实现所需功能，同时通过实时通信链路与其上级和下级节点连接。

一个RTMQ节点的内部模块儿如图5-3所示，包含一个32位的微处理器、一个寄存器文件、一系列外设模块和一个链路管理模块。其中微处理器包含流控制器、计时器、异常管理模块、触发管理模块和算术逻辑单元5个子模块；寄存器文件包含多个寄存器；外设可分为系统外设和功能外设，系统外设包括指令缓存、数据缓存、节点信息只读存储器以及地址栈和数据栈，功能外设用于实现具体的逻辑或时序功能，可包含多个。

RTMQ架构中包含的微处理器可受指令控制进入挂起状态，而挂起状态可受计时器或触发管理模块的控制恢复正常运行，如此，微处理器的指令流便可以按一定的时间间隔对齐或与外部信号对齐。同时，节点中的系统外设和功能外设的行为受关联寄存器的读写控制，即微处理器的指令与系统各模块的功能和时序有严格的对应关系。因此，本发明提供的架构可实现实时控制与通用计算在指令流层面的结合。而配置指令插入中断的机制确保了节点对其下级节点的绝对控制，即使下级节点的微处理器处于挂起状态，依然不受影响。配置指令插入中断配合具有确定通信延迟的实时通信链路系统，即可实现时序确定的跨节点的即时反馈控制。

图 5-3 RTMQ 系统架构节点内部模块示意图



此外，RTMQ 架构中每个节点都具有通用计算和时序控制能力，如此，大多数通用计算和时序生成都可以在叶节点或较近的中间结点完成，对于大规模系统不存在拥塞的问题，具有良好的可扩展性。

5.2 测控硬件组成

1. 展示实物板卡照片；
2. 结合照片给出主要器件清单及其介绍（参考专利：一种量子物理实验平台的实时测控系统架构）；

5.3 软件 API

1. 介绍软件 API 的功能和使用（可选，根据情况看吧，怎么介绍还没想好）；

5.4 基于 FPGA 的数字超前进位加法器

1. 介绍数字加法器功能、逻辑图、Vivado 中的实现、局限性；
2. 介绍超前进位加法器的优势、逻辑图、Vivado 中的实现；

5.5 基于 FPGA 的数字 Booth 乘法器

1. 介绍数字 Booth 乘法器功能、逻辑图、Vivado 中的实现、优势；

5.6 基于 FPGA 的数字 PID

1. 介绍数字 PID 功能、逻辑图、Vivado 中的实现、优势；

5.7 基于 FPGA 的通用数字滤波器

1. 介绍数字滤波器功能、种类、基本原理，比如有限冲激响应滤波器、无限冲激响应滤波器等等；
2. 介绍数字通用滤波器功能、逻辑图、Vivado 中的实现、优势；

第 6 章 螺线管谐振腔

这部分将对之前谐振腔的研究进行整理和总结...

6.1 离子阱系统中的螺线管谐振腔

如前面在第3章中所介绍的, Paul 阱是离子阱量子计算实验平台上普遍使用的阱, 它也是一类具有代表性的离子阱, 利用交替电流 (Alternating-Current, AC) 电场来动态囚禁带电原子或粒子。上述交流场的频率总是落在射频 (RF) 范围内, 而相应的电压可以达到几百伏。通常, 将这种高压射频信号直接应用于 Paul 阱的电极是具有挑战性的, 因为阱本身可以被视为纯电容器件; 因此, 信号发生器和阱之间的阻抗失配使得功率注入效率低下。

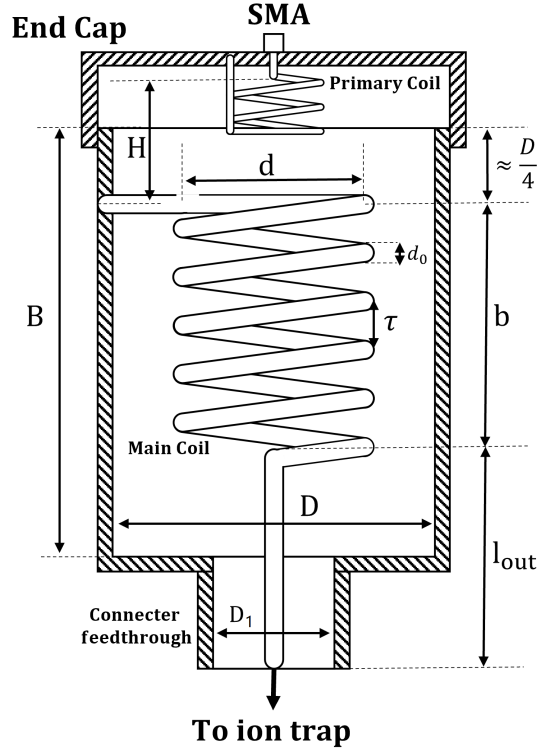
解决上述困难的标准方法是使用螺线管谐振腔来作为信号发生器和离子阱之间的“桥梁”。一个设计合适的螺线管谐振腔既能够实现阻抗匹配的要求也能够放大施加到阱电极上的电场。同时, 它还充当带通滤波器来阻断潜在的电子噪声。因此, 螺线管谐振腔是离子阱系统中最关键的角色之一。

对于螺线管谐振腔, 它通常具有两个基本特性, 即谐振频率 f_0 和品质因子 Q 。它们的值主要由谐振腔本身的几何设计决定, 如图6-1所示。设计螺线管谐振腔的主要目标是找到合适的几何参数, 使得谐振频率 f_0 与期望值相匹配, 并最大化品质因子 Q 。设计谐振器的一种方法是由其简化的 LC 电路模型指导, 并利用经验公式从几何参数估计相应的电容、电感和电阻。然而, 为了使用经验公式, 某些几何参数之间的比率仅限于给定的区间, 而且估计的 f_0 和 Q 总是偏离实际值。近来, 一种基于商业软件的有限元 (Finite Element, FE) 仿真的设计方法开始被广泛使用。与经验估计方法相比, 使用 FE 方法模拟谐振腔在属性评估方面提供了更高的准确性, 在几何设计方面提供了更大的灵活性。

6.2 螺线管谐振腔的仿真

常用的商业化 FE 仿真工具有 ANSYS HFSS、Comsol 等, 接下来的仿真中我们采用的 ANSYS HFSS 来研究影响谐振腔 f_0 和 Q 值的各种因素。在 HFSS 中, 有两种方法可以分析 3D 结构, 本征模模式 (Eigen-mode) 和驱动模式 (Driven-mode)。本征模模式通过分析计算电磁场模式, 直接给出谐振频率 f_0 和品质因子 Q 的结

图 6-1 谐振腔结构平面示意图

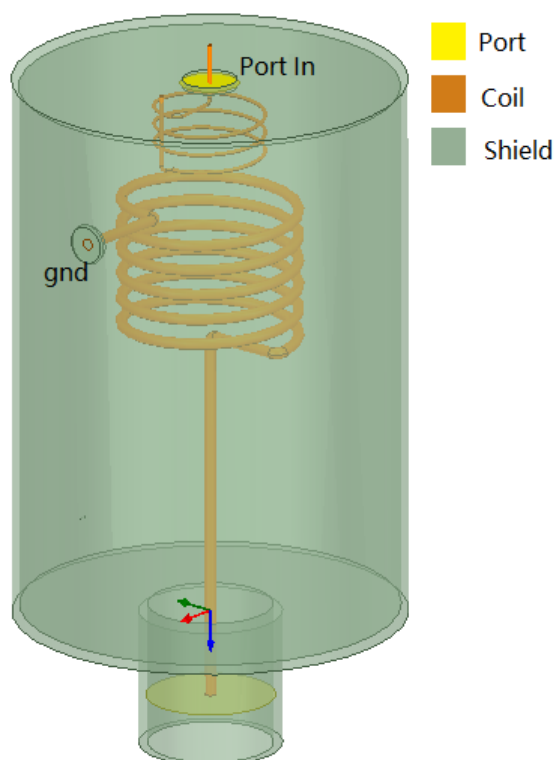


果；而驱动模式是通过设置输入和输出微波端口，分析和计算散射参数 (*Scattering Parameter, SP*)，与实验更具可比性。这两种模式都可以用来模拟螺线管谐振腔，但本征模法更常用于谐振器设计，驱动模态在一般仿真中更为频繁。因为驱动模式得到的结果可以直接与实际实验结果做比对，在接下来的仿真研究中我们默认使用这种方法来进行仿真（特别说明的情况除外）。请注意，由于阻抗匹配网络损耗^[90]，驱动模态中品质因子 Q 的结果大约是本征模结果的一半。

我们在仿真软件中构建了与实际谐振器相同的一个 3D 模型。模型结构示意图如图 6-1 所示，HFSS 中建立的 3D 模型视图如图 6-2 所示。在这个 3D 模型中，除了主线圈和铜壳结构外，它还包括耦合线圈、输出导线 l_{out} 和连接器馈通结构，3D 模型的所有实体结构均为紫铜材料。主线圈与铜屏蔽壳侧壁接触 (gnd)；在耦合线圈和主线圈设置两个集总端口，耦合线圈作为输入端口，主线圈作为输出端口，如图 6-2 中黄色的圆片所示。通过调整耦合线圈到主线圈的距离可以实现阻抗匹配，阻抗匹配的目标是使得 S 参数反射最小，仿真中采用的标准是 $S_{11} < -40dB$ 。仿真结果的后处理与实际实验完全相同，中心频率 f_0 和 Q 因子可以从 S 参数导出。

离子阱实验中的谐振频率通常在 10 – 100MHz 之间，主线圈的典型直径和螺距间距分别为 50 – 60mm 和 5 – 8mm。为了测试 HFSS 模拟和实验之间的一致性，我们选择了三组几何设置，如表 6-1 所示。在每个组中，谐振器具有相似的谐

图 6-2 HFSS 中建立的 3D 模型图



振中心频率，但线圈直径和绕组间距不同，即 30MHz、50MHz、75MHz 组。除了正常参数外，我们故意选择一个更大的参数范围，接近线圈直径和绕组间距的极限，比如线圈直径在 30 – 80mm 之间（与屏蔽直径 $D = 103\text{mm}$ 相比）；绕组间距在 4mm – 18mm 之间（与导线直径为 $d_0 = 3\text{mm}$ 相比）。关于其它参数，参数 $d = 48\text{mm}/\tau = 7\text{mm}$ 的初始轮数 $N = 5.734$ ，屏蔽外壳的高度 $B = 136\text{mm}$ 。螺旋谐振器由网络分析仪 Keysight E5063A 进行了实验测试。实验测试方案和螺旋谐振器的照片如图6-3所示。

我们选择在表6-1中的 2、6、9 三行设置作为示例来比较 HFSS 模拟和实验的结果，散射参数 S_{11} 的对比结果如图6-4所示（中心频率平移到相互重合，以便清楚地显示 S_{11} 的差异）。结果中的差异 $\Delta = f(Q)_{\text{exp}} - f(Q)_{\text{HFSS}}$ 。实验测试的频率 f_0 和品质因子 Q 结果和误差棒如图6-5所示。误差条非常小，几乎不可见。频率的最大差异约为 0.7MHz。除了一个设置的 Q 因子差为 -122，其他 Q 因子的差异约为或小于 60。相对较大的 Q 偏差的原因可能是由于频率和电阻影响。频率的大小受到电感和电容的影响，电感和电容的具体值由谐振腔的几何结构和材料决定。电阻受材料和加工过程的影响，例如焊点电阻、金属表面氧化等。此外，我们模拟了我们之前使用的几种螺旋设计，并与实验记录相比，频率差异小于 1MHz， Q 差异

图 6-3 实际实验的测量方式示意图



表 6-1 仿真的谐振腔参数设置

#	groups	d	τ	f_{HFSS}	Q_{HFSS}	f_{exp}	Q_{exp}
1	30MHz	40	4	32.4062	565	31.7472	513
2		80	4	25.2663	346	24.8038	207
3		60	5	28.4732	639	28.3904	587
4		50	6	30.2228	650	30.6030	599
5		80	10	27.1943	354	27.6059	317
6	50MHz	48	5	49.878739	708	49.2687	631
7	75MHz	30	4	76.4602	595	76.2748	542
8		80	4	61.2866	453	60.7942	389
9		48	7	74.9382	802	75.2466	708
10		40	14	88.4308	686	88.8163	571
11		80	18	77.9517	469	78.4634	377

小于 50。

以上结果表明，仿真方法都能较好地预测实验结果。这验证了 HFSS 商业软件是帮助设计和预测螺旋谐振器行为的绝佳工具，为谐振腔的研究提供了极大的方便。

6.3 几何维度对频率和 Q 的影响

在离子阱的应用中，螺线管谐振腔最重要的性能是谐振频率和 Q 因子，具有特定谐振频率和最高 Q 因子的谐振腔是最理想的^[91]。谐振频率和 Q 可以由以下包含集总参数电感 L 、电容 C 和电阻 R 的公式表达：

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (6-1)$$

$$Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (6-2)$$

对于特定的材料，几何物理参数完全决定了设备的所有特性和等效的集总电路参数。进一步地，频率主要取决于电感和电容两者的比值 L/C ，从几何角度看就是取决于谐振腔主线圈的直径、螺距以及总线长等；在此基础上， Q 除了跟 L/C 有关外，还与电阻有关。在之前的研究中，大多数研究人员将线圈直径、绕组间距和主线圈数视为非独立参数^[91-92]。然而，在我们的模拟中，我们发现如果主线圈的

图 6-4 谐振腔仿真与实验散射参数结果对比

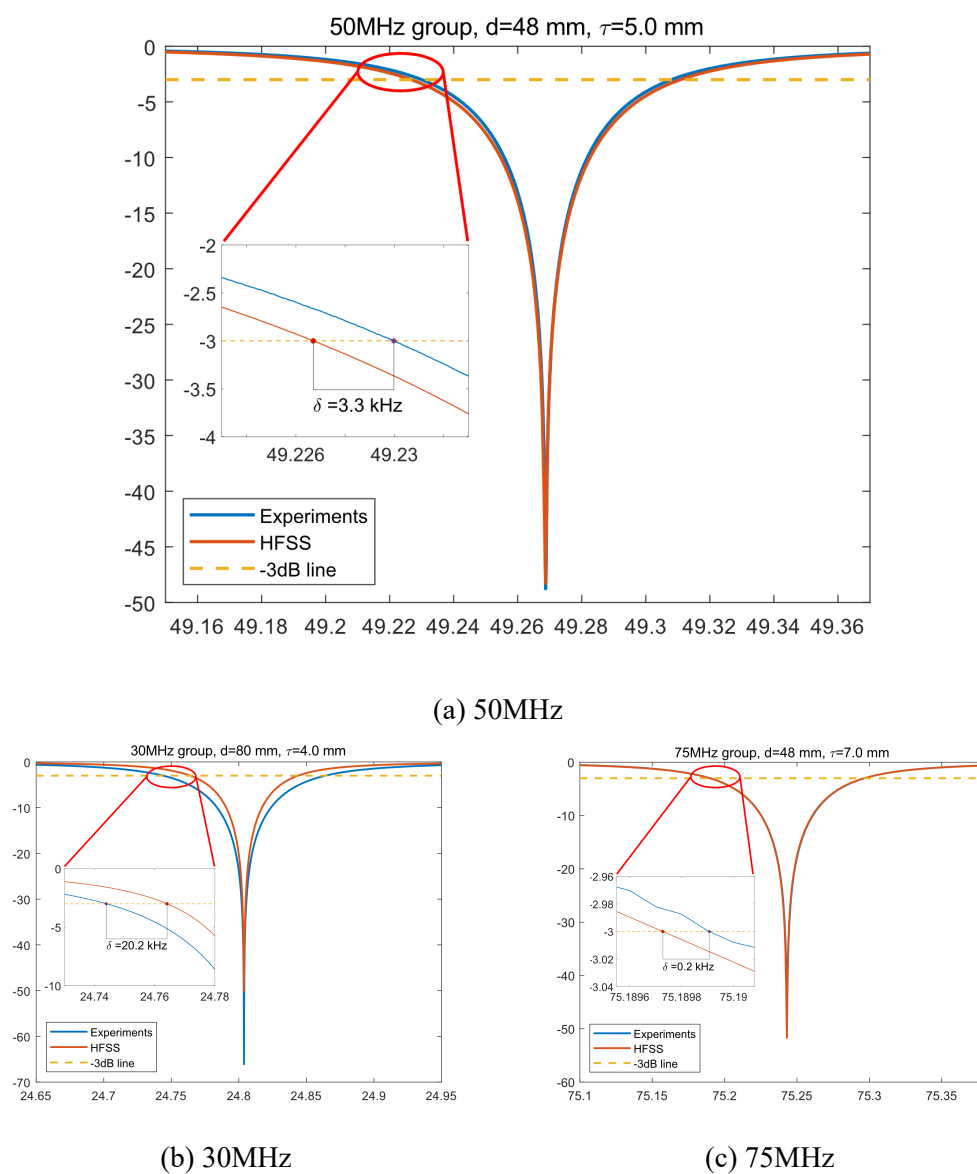
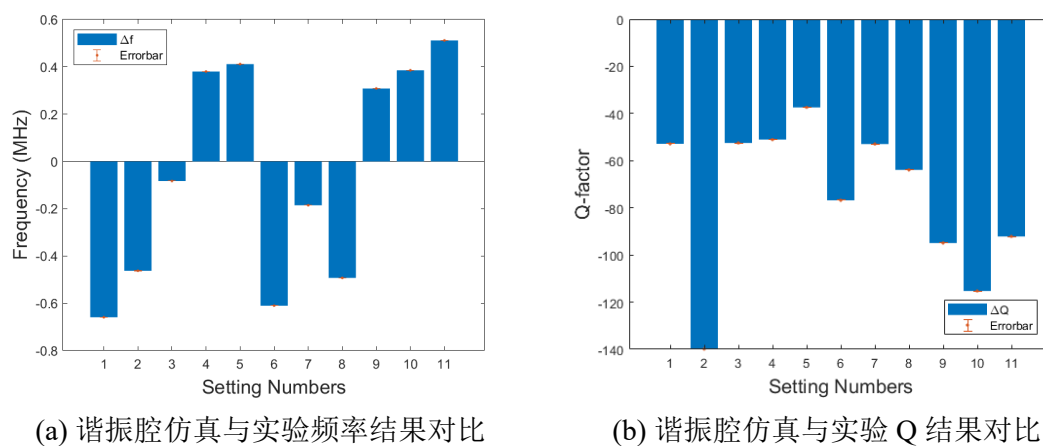
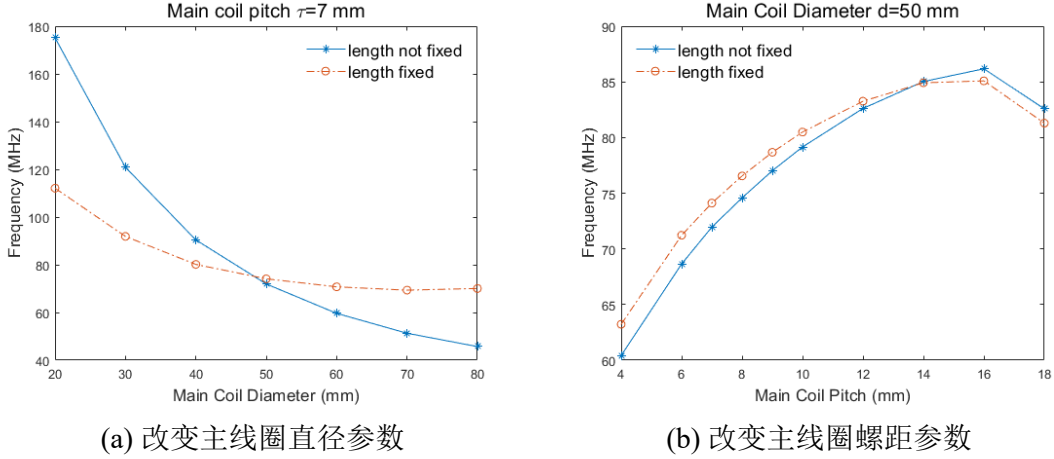


图 6-5 谐振腔仿真与实验频率和 Q 结果对比



总长度是固定的，谐振频率将比总导线长度变化小得多，结果如图6-6所示。这使得谐振频率的控制更容易。一项研究^[93]也指出了这种类似的现象，它给出了谐振频率与主线圈长度之间的关系。螺线管谐振腔基本上与四分之一波长谐振器相同。

图 6-6 固定线长下改变主线圈参数的频率 f_0 变化



在我们的模拟中，主要线圈几何形状设置了两个限制，即固定的总导线长度 l_{total} 和固定的总导线高度 h ：

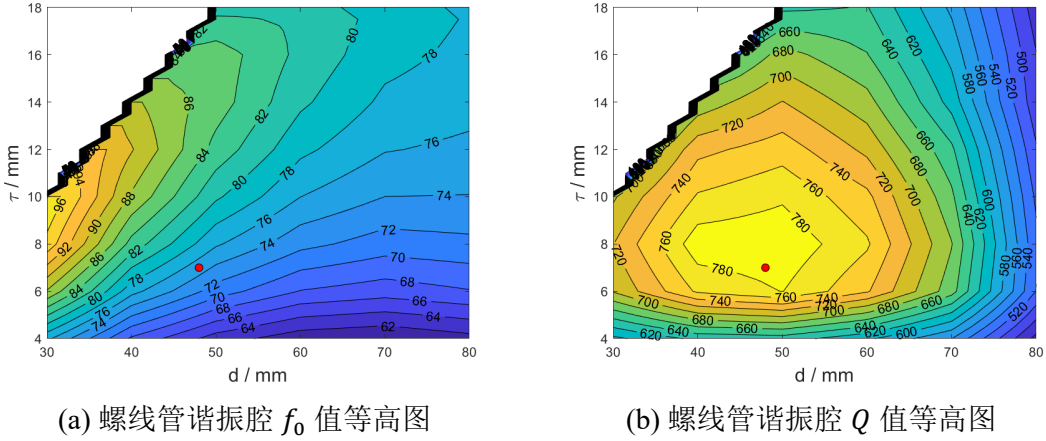
$$l_{total} = N\sqrt{(\pi d)^2 + \tau^2} + l_{out} \quad (6-3)$$

$$h = N\tau + l_{out} \quad (6-4)$$

因此，频率在 $d = 20$ mm 到 $d = 80$ mm 时平均变化约为 0.701 MHz/mm；虽然绕组间距效应不那么明显，但频率在 $\tau = 4$ mm 到 $\tau = 118$ mm 时平均变化约为 1.29 MHz/mm。这种现象有助于分离几何效应和频率变化之间 Q 因子改进的原因。接下来的几节将在这些预设下，研究几个几何参数的效应来设计所需的频率 f_0 和 Q 因子。

6.3.1 主线圈几何参数的影响

为了研究对谐振频率 f_0 和 Q 因子的几何效应，基于表6-1中第 9 行的参数，对几组主线圈参数进行设置和模拟。主线圈的直径和间距设置为双参数扫描；直径从 $30 - 80$ mm，步长为 10 mm；螺距设置为 $4 - 18$ mm，步长为 2 mm。这些模拟的结果给出了一个谐振频率 f_0 和 Q 因子的几何效应图，将其绘制为等高线图，如图6-7所示。左上角的白色三角形是参数禁止区，因为主线圈参数不满足约束公式(6-3)和(6-4)。使用一组确定的参数 (d 和 τ)，可以近似在这个等高线图上立即读出谐振频率 f_0 和 Q 因子，如图中红点代表表6-1中第 9 行的参数设置。

图 6-7 螺线管谐振腔 f_0 、 Q 值等高图


在图6-7(a)中, 频率 f_0 在绝大部分地方随着 τ 的减小而减小。随着主线圈直径 d 的增加, 电感 L 会先慢慢增加 (当 d 较小时) 然后减小 (当 d 较大时)。同时, C_c 和 C_s 单调地增加。因此在这个过程中频率会先急剧下降然后慢慢下降。参考频率计算公式(6-1)和文献^[91-92]中的电感 L 和电容 $C = C_c + C_s$ 计算公式:

$$L = 39.37b \frac{0.025d^2(1 - (\frac{d}{D})^2)}{\tau^2} \quad \mu\text{H/m} \quad (6-5)$$

$$C_c = d(11.26 \frac{b}{d} + 8 + \frac{27}{\sqrt{b/d}}) \quad \text{pF/m} \quad (6-6)$$

$$C_s = 39.37b \frac{0.75}{\lg(D/d)} \quad \text{pF/m} \quad (6-7)$$

然而, 在左上和右下角, 有两个非单调异常区域。一种是在大 d 和小 τ 参数区 (右下区域)。频率等高线不是单调的, 随着 d 的增大等高线向下弯曲。这是因为当单独改变 d 时 L 有一个最大值, 并且由 τ 导致的 L 变化不足以逆转这个最大值附近的影响。另一处是在小 d 和大 τ 参数区 (左上区域)。在这里频率等高线也不是单调的, 随着 τ 的增大等高线向左弯曲 (如果是将 τ 作为横轴则是向下弯曲)。这是因为当 τ 过大时会螺线圈会更加接近输出端会更加接近屏蔽壳引入较大的侧壁电容 C_s 而增大 τ 带来的电感减少效应不足以抵消, 从而导致频率未能随 τ 单调增加。

对于 Q 的变化, 如图6-7(b)所示, 它具有一个明显的最大值。可见选择合适的 d 和 τ 是十分重要的。图中 Q 的最大值位置约在 $d = 48\text{mm}$, $\tau = 7.3\text{mm}$ 处, 最大 Q 约为 810。图中红点表示了表6-1中第9行的参数的 Q 值结果。

在图6-7的 f_0 , Q 结果图的帮助下, 可以直接读出具有特定几何参数设置的任何 f_0 和 Q 结果。该图还可以帮助谐振腔设计和确定的 f_0 和 Q 。此外, 沿 d 或 τ 方向任意点的偏导数将给出线圈参数对频率和 Q 的敏感性。几何参数对 f , Q 的敏感

性决定了线圈的加工精度，以及实验误差范围。以图6-7中的红点参数为例，计算线圈 d 和 τ 灵敏度，结果如表6-2所示。从结果中可以看出，灵敏度 d 的结果值小于 τ 的结果值。因此，在加工过程中， τ 大小的偏差更有可能对 f, Q 产生影响，值得更多地关注。

表 6-2 谐振腔对主线圈直径和螺距参数的敏感性

Operation	range (mm)	F sensitivity(MHz/mm)	Q sensitivity (/mm)
d Stretch	[-1,1]	≈ -0.606	≈ 0.4
τ Stretch	[0, 0.5]	≈ 2.988	≈ 23.491
Axial Shift	[-2, 2]	≈ -0.049	≈ 0.185
Radial Shift	[-2, 2]	≈ 0.034	≈ -0.4904

除了研究 f, Q 的独立参数变化效应外，我们还研究了主线圈平移对 f, Q 的影响，即沿径向或轴向。结果如图6-8和表6-2所示。从结果可以看出，主线圈的轴向平移和径向平移对 f, Q 影响不大。平移对 f, Q 的影响远小于几何参数 (d, τ) 变化效应。因此，我们需要更多地关注加工过程中主线圈的俯仰精度，以获得更一致的实验结果。

6.3.2 输出线参数的影响

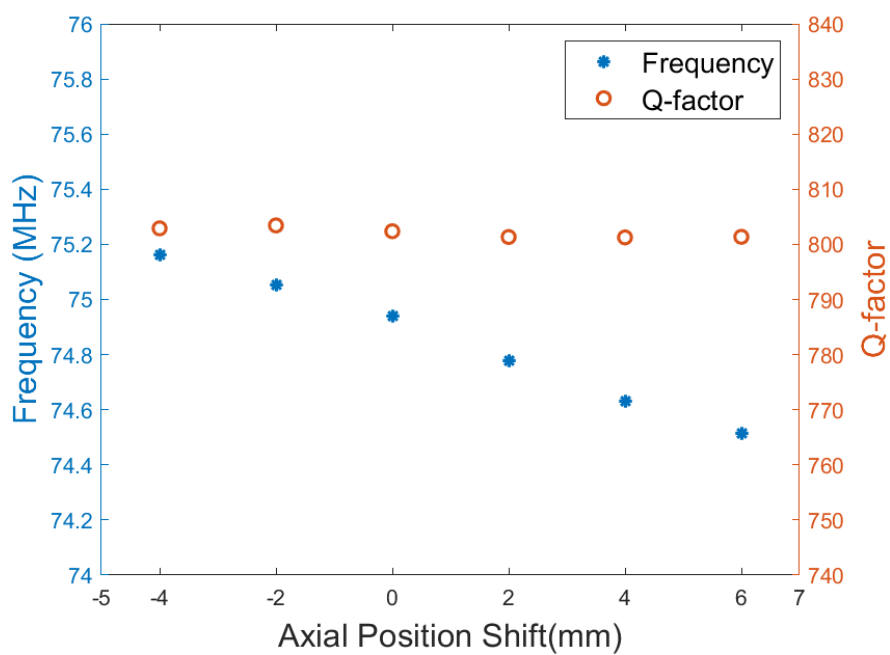
在我们的模拟中，我们发现输出导线长度对谐振 f, Q 有很大的影响。与之前的固定线长情况不同，这里我们不再做公式(6-3)和公式(6-4)的约束。主线圈直径及其螺距保持在相同的长度，独立改变输出导线 l_{out} 的总长度，其中 $l_{out} = l_{out1} + l_{out2}$ 。 l_{out1} 和 l_{out2} 分别是屏蔽外壳中的输出线和连接器馈通部分的输出线，如图6-9所示。

仿真结果如图6-10所示。随着输出导线长度的增加，谐振频率下降。 Q 随着谐振频率的减小而减小，两者成正比，与公式(6-2)具有相同的关系。这主要是输出线引入额外电容而对电阻和电感影响较小导致的。

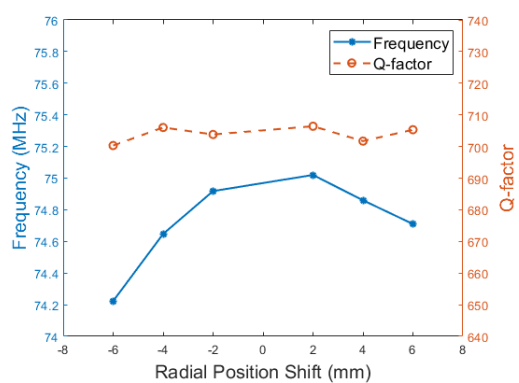
为了验证仿真结果，我们进行了输出导线长度切割实验，测量了输出导线长度和器件谐振频率 f_0 和 Q 。结果如图6-10所示。实验与模拟的频率差约为 2MHz，实验测量的 Q 数据比模拟低约 150。为了在同一图中绘制 Q 数据，实验 Q 数据偏移了 100。除了偏移之外，频率 f_0 和 Q 都与其对应的数据一致。该结果再次表明了仿真结果的可信度。

文献^[90,92,94]之前研究中的理论预测和实验之间的大频率误差可能来自于忽略输出线电容^[93,95]。我们给出了改进的 LCR 电路模型和一种新的电容评估公式来

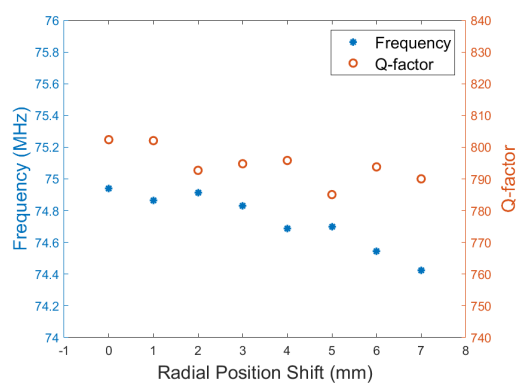
图 6-8 谐振腔仿真与实验散射参数结果对比



(a) 主线圈轴向偏移



(b) 主线圈径向偏移（平行于接地端）



(c) 主线圈径向偏移（垂直于接地端）

图 6-9 输出线部分示意图

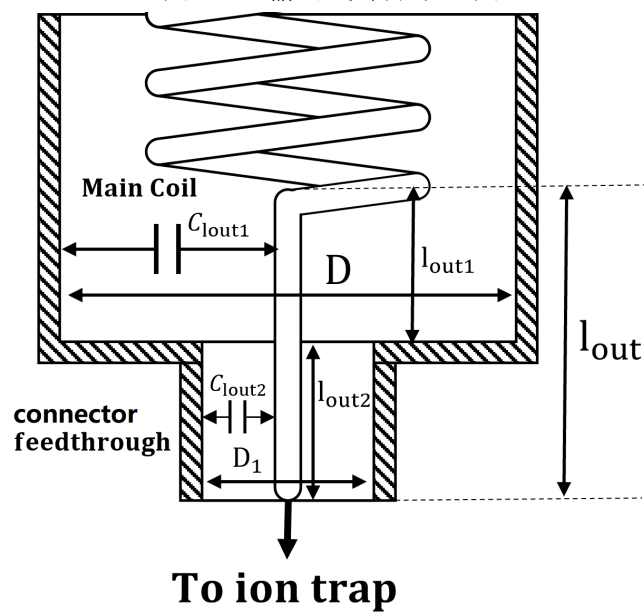
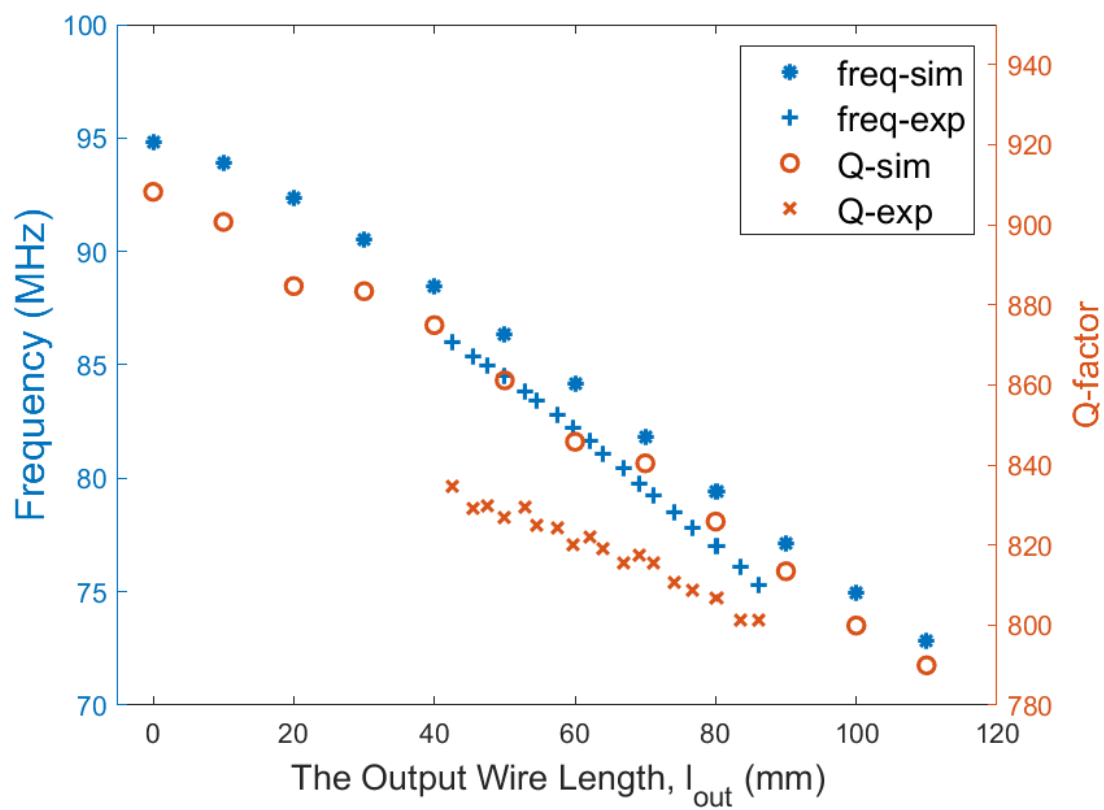


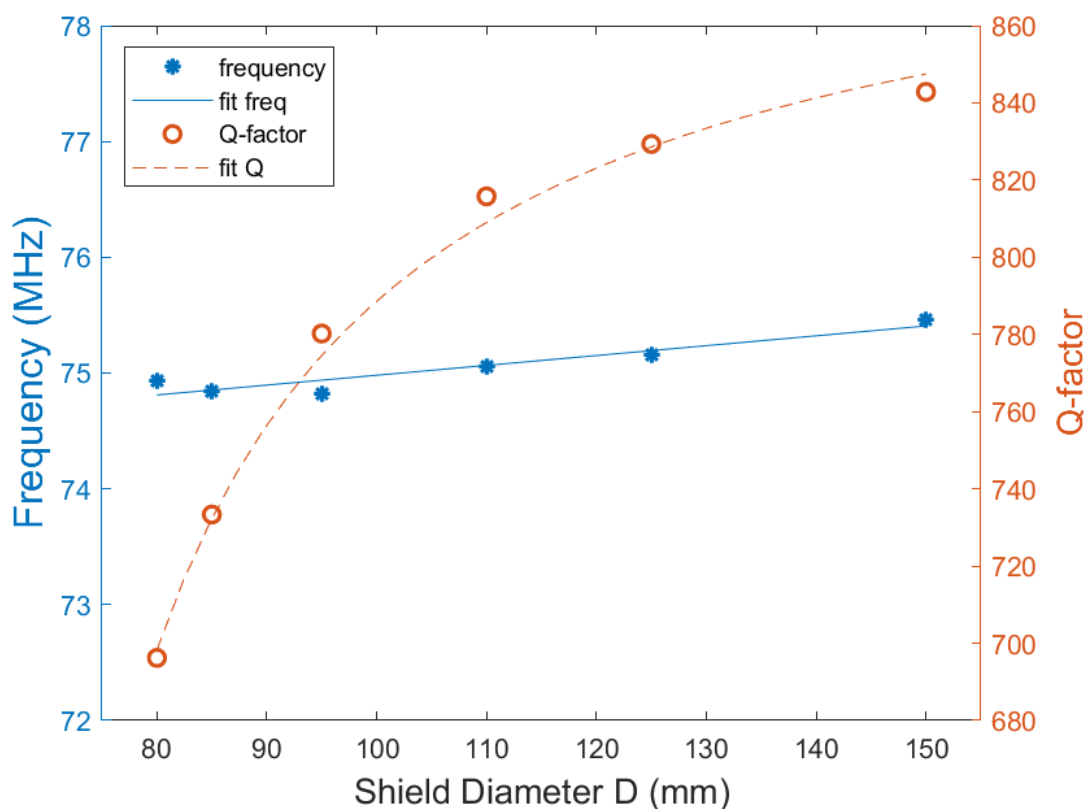
图 6-10 输出线部分影响



估计频率。与 HFSS 仿真结果相比，我们的新模型的频率预测有了很大的提高，更多细节见第6.4节。

6.3.3 屏蔽外壳参数的影响

图 6-11 屏蔽外壳的影响



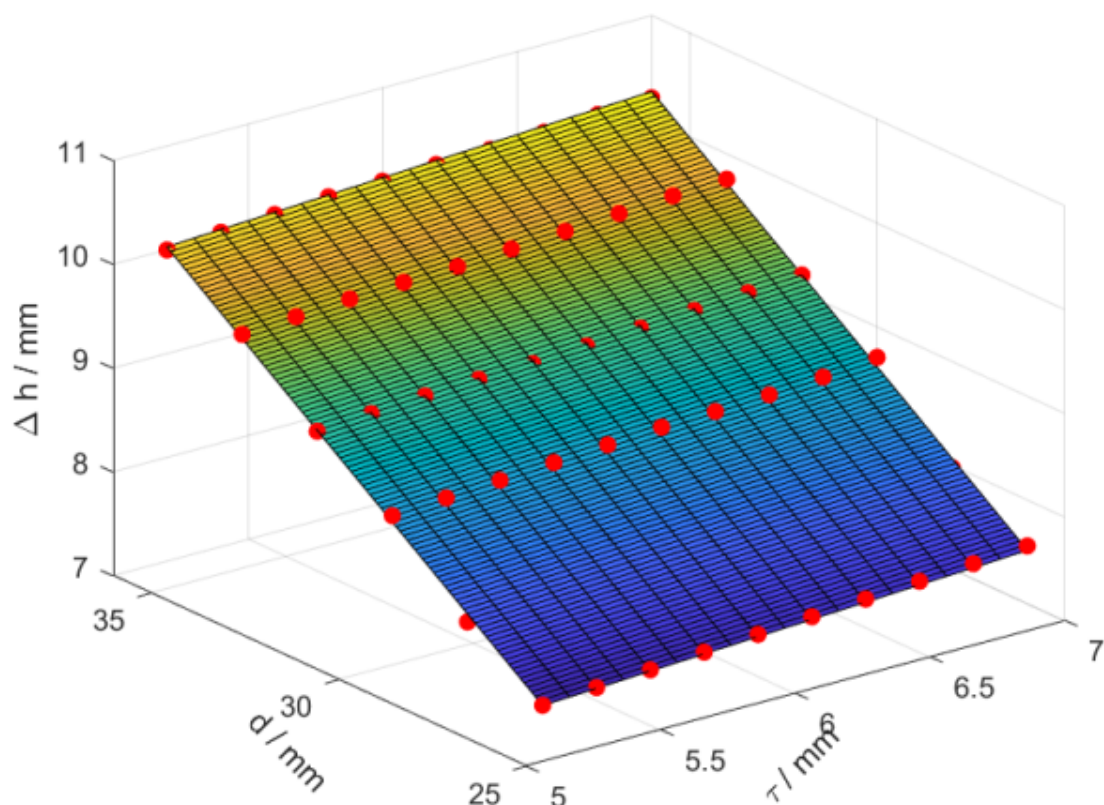
铜屏蔽外壳完成了电流回路，定义了螺旋谐振腔中的 EM 场边界条件。屏蔽外壳和主线圈形成电容 C_s ，因此屏蔽的直径对谐振频率有影响。屏蔽外壳可以屏蔽和减少电磁场辐射耗散，因此谐振器将具有高 Q 因子。在这里，通过数值模拟研究了屏蔽外壳直径 D 对频率 f_0 和 Q 因子的影响。结果如图6-11所示，当屏蔽直径 D 增加时，频率 f_0 和 Q 因子都会增加。频率变化很小，而 Q 因子首先快速增长，然后逐渐减慢。频率的微弱增加是由于侧壁电容随着屏蔽外壳 D 的增大而减小。 Q 因子的增加是因为屏蔽直径越大，电场强度越小，屏蔽电流越小，电阻相等，耗散越小。因此为了获得更大的 Q ，在合理的设备尺寸下将首选较大的屏蔽直径。

屏蔽外壳高度的影响与相对于外壳沿轴向移动主线圈位置并相应地调整端帽位置相同。结果如图6-8(a)所示。屏蔽高度对频率 f_0 和 Q 因子的影响很小。

6.3.4 耦合线圈参数的影响

耦合线圈是螺线管谐振腔的一个有趣部分。通过调节耦合线圈的形状和位置可以满足阻抗匹配工作，实现最佳耦合以最小化散射参数 S_{11} 。然而，据我们所知，以前还没有耦合线圈几何形状影响的具体相关研究。在这里，数值模拟方法提供了研究这些问题的机会。

图 6-12 耦合线圈的影响



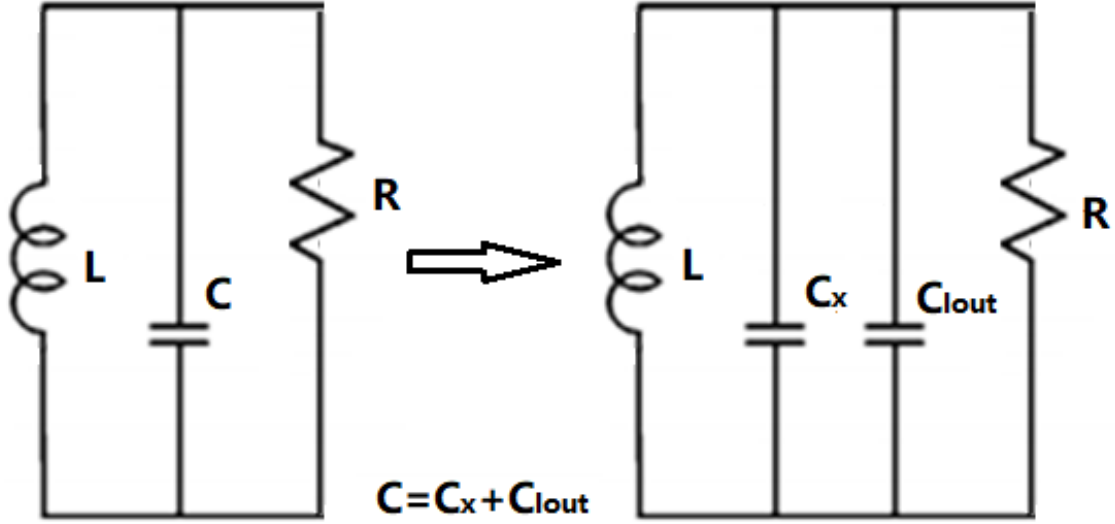
为了研究主线圈形状效应，我们在其他参数满足表6-1中第9行的情况下，模拟了各种耦合线圈尺寸（耦合线圈直径 d_1 和螺距 τ_1 ）及其轴向位置，并试图满足阻抗匹配。对于每个耦合线圈（直径 d_1 和螺距 τ_1 ），扫描和优化耦合线圈在轴向的位置，以实现最小耦合反射 S_{11} 。如果 S_{11} 系数可以达到 -45dB 或更低，认为阻抗匹配过程完成，同时记录耦合线圈轴向位置。仿真结果如图6-12所示。 x 轴和 y 轴分别为直径 d_1 和俯仰 τ_1 ， z 轴为耦合线圈达到最佳耦合条件时的轴向位置。结果表明，所有 d_1 , τ_1 参数设置都具有最佳的耦合位置 δ_1 ，几乎所有数据点 (d_1, τ_1, δ_1) 都位于同一平面表面上。这意味着耦合线圈的绝对形状对于实现阻抗匹配过程并不重要。总可以通过调整耦合线圈轴向位置来补偿耦合线圈的所有变形形状。

可以考虑将耦合过程会有不同的 Q 值的那个图也放上来说明一下...

6.4 螺线管谐振腔的数学建模

螺线管谐振腔的集总电路模型可以解释和预测器件的行为。一个好的电路模型可以帮助研究人员轻松地设计具有特定属性的设备。在这里，对于螺线管谐振腔，谐振频率和较高的 Q 因子是最重要的两个指标。首先，对于谐振频率，我们假设额外的输出导线长度电容是频率误差发生的主要原因，如第6.3.2节所述。

图 6-13 LCR 电路模型



因此，输出线电容被添加到 LCR 电路模型中，如图6-13所示。总等效电容可视为传统电容 C_T 和输出线总电容 C_{lout} 的总。传统的电容部分与以往的研究相同，而输出线和外部屏蔽将形成同轴电容：

$$C_{lout} = C_{lout1} + C_{lout2} \quad (6-8)$$

$$C_{lout1} = \frac{2\pi\epsilon_0 l_{out1}}{\ln(D/d_0)} \quad (6-9)$$

$$C_{lout2} = \frac{2\pi\epsilon_0 l_{out2}}{\ln(D_1/d_0)} \quad (6-10)$$

其中输出线电容 C_{lout1} (C_{lout2}) 是长度为 l_{out1} (l_{out2}) 的输出线与内径为 D (D_1) 侧壁形成的电容。

然而，在补偿输出线长效应后，频率预测仍然低于数值模拟或实验结果。经过多次尝试，我们发现主要原因是对电容 C_c 和 C_s 的高估。最近的一项研究^{[96]p52, f5.3}给出了一个螺线管电容 C_c 的新估计公式：

$$C_c = \frac{4\epsilon_0 b}{\pi} (1 + k_c) / \cos^2 \psi \quad (6-11)$$

其中 $k_c = 0.717439(d/b) + 0.933048(d/b)^{3/2} + 0.106(d/b)^2$ ， d 是螺线管的直径， b 是螺线管的长度， ψ 是螺距角 ($\tan \psi = \tau/(\pi d) \approx 1$)， ϵ_0 是真空介电常数。

另一方面，屏蔽壁电容 C_s 在主线圈和外部屏蔽壁之间形成，与电容 C_{lout} 相同，因此同轴电容公式可用于计算 C_s 。主线圈的等效同轴线长度为 Nd_0 ，单匝等效长度为 d_0 ，总主线圈有 N 匝，因此屏蔽电容计算为：

$$C_s = 2\pi\epsilon_0 \frac{Nd_0}{\ln(D/d')} \quad (6-12)$$

其中 d' 是一个等效的线圈直径， $d' = d + \pi d_0/4$ ，其中 $\pi d_0/4$ 是一个用于修正线圈边缘效应的因子。

此外，实际的主线圈螺旋长度有限，匝稀疏，因此需要更新或修改文献^[91]中的电感计算方法。短螺旋电感估计方法可计算为：

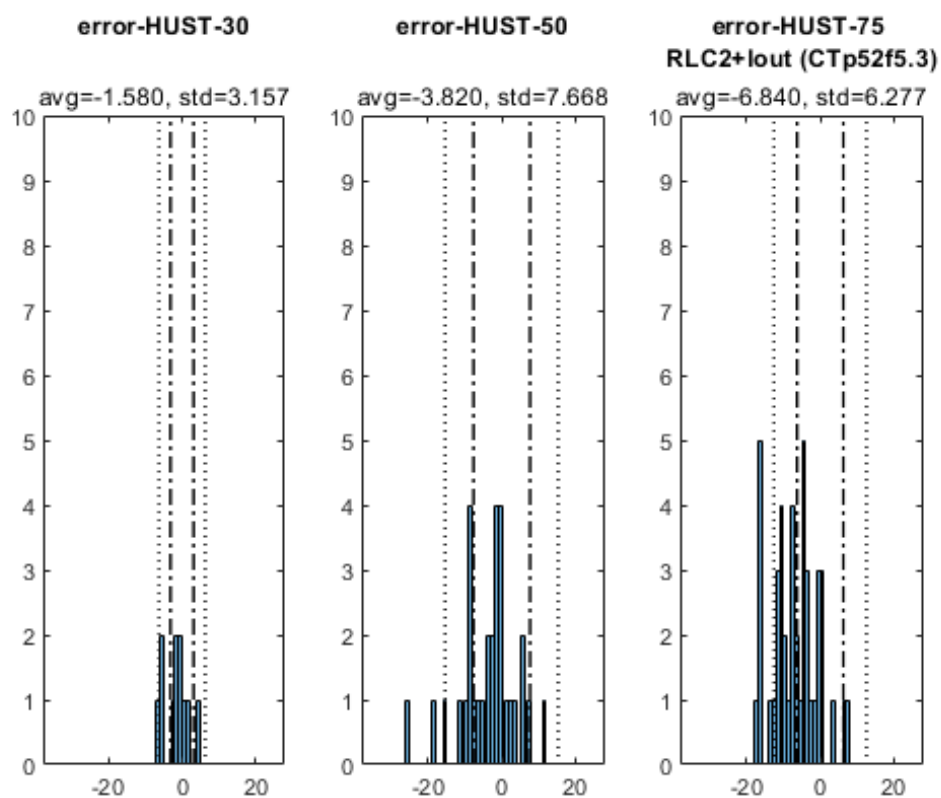
$$L = \frac{\mu_0\pi(d/2)^2}{\tau^2}(\sqrt{b^2 + (d/2)^2} - d/2) \quad (6-13)$$

最后，我们通过更新上述所有估计的方法，得到了一个新的频率预测模型。我们比较了频率预测模型、Sussex 模型^[91]、SUST 模型（本文）和 HUST 模型^[94]的准确性。基于数值模拟结果，通过统计直方图对模型的有效性和准确性进行比较和评估，如图 14(c) 所示。频率误差的平均值和标准差越小，精度越好，误差离散越小。所有的模型都与仿真的结果为标准做比较。图中的每一个数据结果都是一些列可行的 d, τ 参数组合的模型预测和仿真结果的差值 $\delta f = f_{model} - f_{HFSS}$ ，最终绘制出误差的统计分布。针对不同的谐振频率组计算和模拟一系列离散的 d, τ 参数（与表 6-130MHz、50MHz、75MHz）。 d 的样本在 20 – 80mm 的范围内，步长为 10mm； τ 的样本在 4 – 18mm 的范围内，步长为 2mm。平均偏差和标准偏差都在每个图的顶部标记。平均值是一个有符号值，表示模型的整体频率预测效果。标准差表示频率误差的离散程度。

直方图结果表明：对于 75MHz 组，本文中的模型的均值和标准差（SUST）在三个模型中都是最小的，预测的准确性是最好的。对于 50MHz 组，SUST 和 HUST 模型之间的平均偏差值和标准偏差值基本相似。它们都预测了比 Sussex 模型更准确的谐振频率。对于 30MHz 组，HUST 频率预测的平均值最小，SUST 模型准确率次之，但它们都优于 Sussex 模型。HUST 和 SUST 模型的标准偏差相似，但它们都优于 Sussex 模型。需要注意的是，在 30MHz 组中，由于主线圈线长度约束，所有 56 种可能组合中只有 11 个可行数据，参见公式(6-3)和(6-4)，因此结果可能会波动和偏差很大。

在上述结果中，对于 30 – 80MHz 频率范围内的情况，本文提出的 LCR 模型提高了预测精度。输出线效应（参见第 6.3.2 节）作为对分布式电容效应的替代解

图 6-14 HUST 模型结果



释，给出了更简单直观的物理解释。

6.5 螺线管谐振腔的加工和制作

6.6 螺线管谐振腔的机械结构优化

图 6-15 Sussex 模型结果

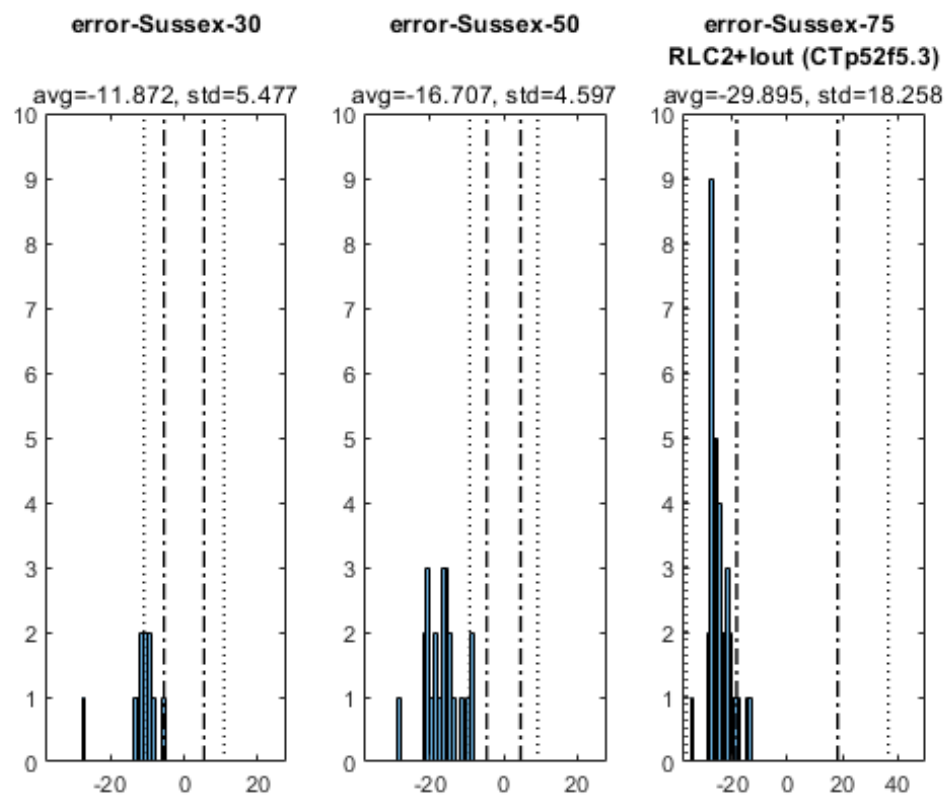
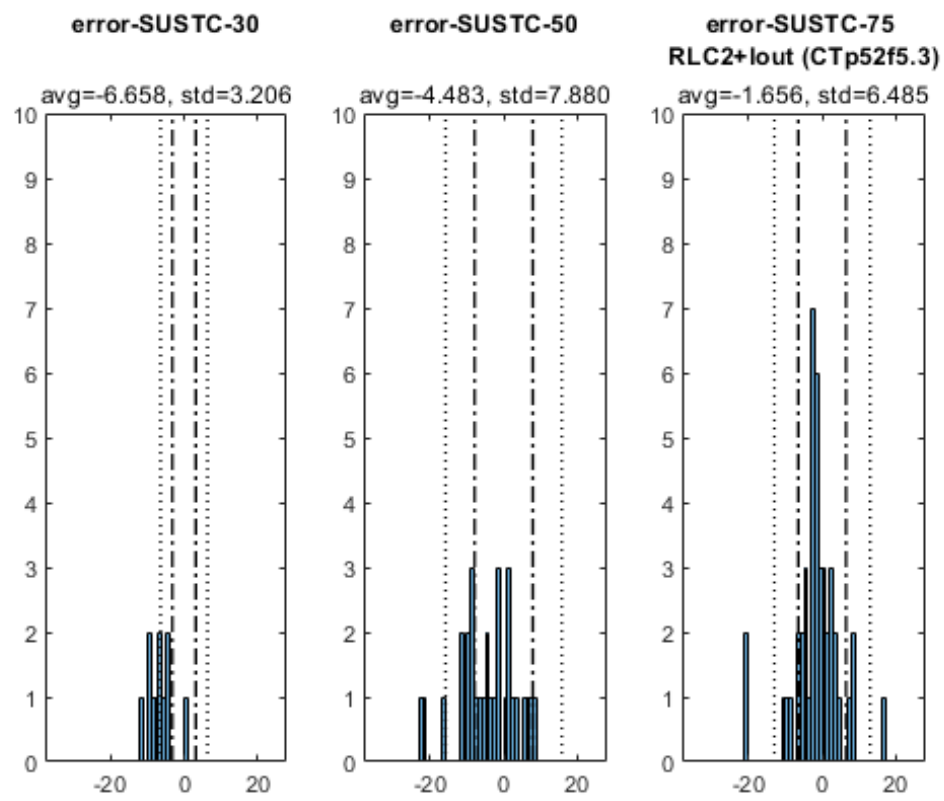


图 6-16 SUST 模型结果



第 7 章 脉冲激光拍频锁定

这部分叙述主要参考文献^[97]

- 7.1 脉冲激光拍频锁定原理
- 7.2 脉冲激光拍频锁定系统搭建
- 7.3 脉冲激光拍频系统锁定结果

第 8 章 激光功率锁定

- 8.1 激光功率锁定原理
- 8.2 激光功率锁定系统搭建
- 8.3 激光功率锁定系统结果

第 9 章 离子阱频率锁定

这部分主要介绍参考文献^[98]

- 9.1 脉冲激光拍频锁定原理
- 9.2 脉冲激光拍频锁定系统搭建
- 9.3 脉冲激光拍频锁定系统结果

第 10 章 脉冲激光操控离子（量子门）实验

这章看情况，如果实验系统跟得上的话加上，具体实验设计留再讨论...

10.1 态初始化保真度

10.2 XXXX

10.3 XXXX

10.4 XXXX

10.5 XXXX

结 论

量子计算拥有着广阔的发展和应用前景。离子阱量子计算因其较高的相干时间和保真度是量子计算未来重要的发展方向之一。

参考文献

- [1] SHOR P W. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer[J/OL]. SIAM Journal on Computing, 1997: 1484–1509. <http://dx.doi.org/10.1137/s0097539795293172>.
- [2] SINGLETON JR R L. Shor’ s Factoring Algorithm and Modular Exponentiation Operators [J/OL]. Quanta, 2023: 41–130. <http://dx.doi.org/10.12743/quanta.v12i1.235>.
- [3] FEYNMAN R P. Simulating physics with computers[J/OL]. International Journal of Theoretical Physics, 1982: 467–488. <http://dx.doi.org/10.1007/bf02650179>.
- [4] LLOYD S. Universal Quantum Simulators[J/OL]. Science, 1996, 273(5278): 1073 – 1078. <http://dx.doi.org/10.1126/science.273.5278.1073>.
- [5] GROVER L K. Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack[J/OL]. Physical Review Letters, 2002: 325–328. <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.79.325>.
- [6] FEDOROV A, MAN’ KO V. Superposition principle for qubit states in spin-projection mean representation[A]. 2019.
- [7] DIVINCENZO D P. The Physical Implementation of Quantum Computation[J/OL]. Fortschritte der Physik, 2000: 771–783. [http://dx.doi.org/10.1002/1521-3978\(200009\)48:9/11<771::aid-PROP771>3.0.CO;2-E](http://dx.doi.org/10.1002/1521-3978(200009)48:9/11<771::aid-PROP771>3.0.CO;2-E).
- [8] FISK P, SELLARS M, LAWN M, et al. Accurate measurement of the 12.6 GHz “clock” transition in trapped $^{171}\text{Yb}^{+}$ ions[J/OL]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, 1997, 44(2): 344–354. <http://dx.doi.org/10.1109/58.585119>.
- [9] BLATT R, WINELAND D. Entangled states of trapped atomic ions[J/OL]. Nature, 2008, 453 (7198): 1008–1015. <http://dx.doi.org/10.1038/nature07125>.
- [10] LANGER C, OZERI R, JOST J, et al. Long-lived qubit memory using atomic ions[J/OL]. Physical Review Letters, 2005, 95(6). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.95.060502>.
- [11] WANG Y, UM M, ZHANG J, et al. Single-qubit quantum memory exceeding ten-minute coherence time[J/OL]. Nature Photonics, 2017, 11(10): 646–650. <http://dx.doi.org/10.1038/s41566-017-0007-1>.
- [12] MONZ T, SCHINDLER P, BARREIRO J T, et al. 14-Qubit entanglement: creation and coherence.[J/OL]. Physical Review Letters, 2011, 106(13). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.106.130506>.
- [13] FRIIS N, MARTY O, MAIER C, et al. Observation of Entangled States of a Fully Controlled 20-Qubit System[J/OL]. Physical Review X, 2018, 8(2). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevx.8.021012>.
- [14] KAUFMANN H, RUSTER T, SCHMIEGELOW C, et al. Scalable Creation of Long-Lived Multipartite Entanglement.[J/OL]. Physical Review Letters, 2017, 119(15). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.119.150503>.

-
- [15] DEBNATH S, LINKE N M, FIGGATT C, et al. Demonstration of a small programmable quantum computer with atomic qubits[J/OL]. *Nature*, 2016: 63–66. <http://dx.doi.org/10.1038/nature18648>.
- [16] MYERSON A H, SZWER D J, WEBSTER S C, et al. High-fidelity readout of trapped-ion qubits.[J/OL]. *Physical Review Letters*, 2008, 100(20). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.100.200502>.
- [17] BALLANCE C, HARTY T, LINKE N, et al. High-Fidelity Quantum Logic Gates Using Trapped-Ion Hyperfine Qubits.[J/OL]. *Physical Review Letters*, 2016, 117(6). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.117.060504>.
- [18] MONROE C, RAUSSENDORF R, RUTHVEN A, et al. Large-scale modular quantum-computer architecture with atomic memory and photonic interconnects[J/OL]. *Physical Review A*, 2014, 89(2). <http://dx.doi.org/10.1103/physreva.89.022317>.
- [19] MOEHRING M, BLINOV B, MADSEN M, et al. Observation of entanglement between a single trapped atom and a single photon[J]. *International Quantum Electronics Conference*, 2004. (IQEC)., International Quantum Electronics Conference, 2004. (IQEC)., 2004.
- [20] LEIBFRIED D, DEMARCO B, MEYER V, et al. Experimental demonstration of a robust, high-fidelity geometric two ion-qubit phase gate[J/OL]. *Nature*, 2003, 422(6930): 412–415. <http://dx.doi.org/10.1038/nature01492>.
- [21] MEHTA K K, ELTONY A M, BRUZEWICZ C D, et al. Ion traps fabricated in a CMOS foundry [J/OL]. *Applied Physics Letters*, 2014, 105(4). <http://dx.doi.org/10.1063/1.4892061>.
- [22] MONROE C, KIM J. Scaling the Ion Trap Quantum Processor[J/OL]. *Science*, 2013, 339 (6124): 1164–1169. <http://dx.doi.org/10.1126/science.1231298>.
- [23] STERLING R C, RATTANASONTI H, WEIDT S, et al. Fabrication and operation of a two-dimensional ion-trap lattice on a high-voltage microchip.[J/OL]. *Nature Communications*, 2014, 5(1). <http://dx.doi.org/10.1038/ncomms4637>.
- [24] LEE M, JEONG J, PARK Y, et al. Ion shuttling method for long-range shuttling of trapped ions in MEMS-fabricated ion traps[J/OL]. *Japanese Journal of Applied Physics*, 2021, 60(2): 027004. <http://dx.doi.org/10.35848/1347-4065/abdabb>.
- [25] NIFFENEGGER R J, STUART J, SORACE-AGASKAR C, et al. Integrated multi-wavelength control of an ion qubit[J/OL]. *Nature*, 2020: 538–542. <http://dx.doi.org/10.1038/s41586-020-2811-x>.
- [26] MEHTA K K, ZHANG C, MALINOWSKI M, et al. Integrated optical multi-ion quantum logic [J/OL]. *Nature*, 2020: 533–537. <http://dx.doi.org/10.1038/s41586-020-2823-6>.
- [27] IVORY M, SETZER W, KARL N, et al. Integrated optical addressing of a trapped ytterbium ion[A]. 2020.
- [28] CRAMER J, KALB N, ROL M A, et al. Repeated quantum error correction on a continuously encoded qubit by real-time feedback.[J/OL]. *Nature Communications*, 2016. <http://dx.doi.org/10.1038/ncomms11526>.
- [29] REICHARDT B W. Fault-tolerant quantum error correction for Steane’ s seven-qubit color code with few or no extra qubits.[J/OL]. *Quantum Science and Technology*, 2021, 6(1): 015007. <http://dx.doi.org/10.1088/2058-9565/abc6f4>.

-
- [30] WILLIAMS C P. Quantum Gates[M/OL]. London: Springer London, 2011: 51-122. https://doi.org/10.1007/978-1-84628-887-6_2.
 - [31] BURRIS S. Boole's Chapter XV: Syllogism Details[Z]. 2023.
 - [32] MUKHERJEE A, DHAR A S. Double-fault tolerant architecture design for digital adder [C/OL]//Proceedings of the 2014 IEEE Students' Technology Symposium. 2014. <http://dx.doi.org/10.1109/techsym.2014.6807932>.
 - [33] SHU S, HARUO K. Study of Digital Multiplier Algorithms Using a Square Law Its FPGA implementation[J]. IEICE Technical Report; IEICE Tech. Rep., IEICE Technical Report; IEICE Tech. Rep., 2016.
 - [34] KUMAR A, AGARWAL R P. Design and Implementation of Efficient FIR Low Pass Filters Based on Vedic and Traditional Digital Multiplier Algorithm[M/OL]. 2021: 271–279. http://dx.doi.org/10.1007/978-981-16-0942-8_25.
 - [35] KASTNER R, SCHLATTER A. A Note on Landauer's Principle[EB/OL]. 2023. <https://arxiv.org/abs/2307.02643v1>. DOI: 10.48550/arXiv.2307.02643.
 - [36] MASLOV D, DUECK G, MILLER D. Toffoli network synthesis with templates[J/OL]. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 2005, 24(6): 807–817. <http://dx.doi.org/10.1109/tcad.2005.847911>.
 - [37] ADAMATZKY A. Fredkin and Toffoli gates implemented in Oregonator model of Belousov-Zhabotinsky medium[J/OL]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2017, 27(03): 1750041. <http://dx.doi.org/10.1142/s0218127417500419>.
 - [38] PRUDÊNCIO T. Quantum state transfer and Hadamard gate for coherent states[J/OL]. International Journal of Quantum Information, 2013, 11(02): 1350024. <http://dx.doi.org/10.1142/s021974991350024x>.
 - [39] ZAJAC D M, SIGILLITO A J, RUSS M, et al. Quantum CNOT Gate for Spins in Silicon[J/OL]. Science, 2018: 439–442. <http://dx.doi.org/10.1126/science.aao5965>.
 - [40] ZHU M, CHENG X, ZHU P, et al. Physical constraint-aware CNOT quantum circuit synthesis and optimization[J/OL]. Quantum Information Processing, 2022, 22(1). <http://dx.doi.org/10.1007/s11128-022-03716-1>.
 - [41] BRUZEWICZ C D, CHIAVERINI J, MCCONNELL R, et al. Trapped-Ion Quantum Computing: Progress and Challenges[J/OL]. Applied Physics Reviews, 2019. <http://dx.doi.org/10.1063/1.5088164>.
 - [42] PAUL W. Electromagnetic Traps for Charged and Neutral Particles (Nobel Lecture)[J/OL]. Angewandte Chemie International Edition in English, 1990, 29(7): 739–748. <http://dx.doi.org/10.1002/anie.199007391>.
 - [43] PAUL W, OSBERGHAUS O, FISCHER E. Theorie[M/OL]. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften, 1958: 6-25. https://doi.org/10.1007/978-3-663-04689-9_2.
 - [44] MCLACHLAN N. Theory and Application of Mathieu Functions[EB/OL]. 1964. <https://www.cambridge.org/core/journals/mathematical-gazette/article/abs/theory-and-application-of-mathieu-functions-by-n-w-mclachlan-pp-xii-401-dover-new-york/7D3AA60F3EE9409EA97488038B8F38C1>. DOI: 10.2307/3614519.

-
- [45] MCQUARRIE D A. Handbook of Mathematical Functions[J/OL]. American Journal of Physics, 1966: 177–177. <http://dx.doi.org/10.1119/1.1972842>.
 - [46] ARIMONDO E, PHILLIPS W, STRUMIA F. Laser Manipulation of Atoms and Ions[J/OL]. Elsevier, 1992. <https://shop.elsevier.com/books/laser-manipulation-of-atoms-and-ions/arimondo/978-0-444-89993-4>.
 - [47] SOLIMENO S, DI PORTO P, CROSIGNANI B. Quantum Harmonic Oscillator with Time-Dependent Frequency[J/OL]. Journal of Mathematical Physics, 1969, 10(10): 1922 – 1928. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1664783>.
 - [48] LEIBFRIED D, BLATT R, MONROE C, et al. Quantum dynamics of single trapped ions[J/OL]. Reviews of Modern Physics, 2003: 281–324. <http://dx.doi.org/10.1103/revmodphys.75.281>.
 - [49] SCHRÖDINGER E. Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik[J/OL]. Naturwissenschaften, 1926, 14: 664–666. <https://doi.org/10.1007/BF01507634>.
 - [50] GLAUBER R J. Photon Correlations[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 1963, 10: 84–86. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.10.84>.
 - [51] DEWITT C, BLANDIN A, COHEN-TANNOUDJI C. Quantum Optics and Electronics[J/OL]. Nuclear physics, Nuclear physics, 1965. <https://www.springer.com/journal/11082>.
 - [52] KLAUDER J, SKAGERSTAM B. Coherent States and Quantum Mechanics[M/OL]. 1985: 333–446. http://dx.doi.org/10.1142/9789814415118_0003.
 - [53] WALLENTOWITZ S, VOGEL W. Reconstruction of the quantum mechanical state of a trapped ion.[J/OL]. Physical Review Letters, 2002, 75(16): 2932–2935. <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.75.2932>.
 - [54] WALLENTOWITZ S, VOGEL W. Unbalanced homodyning for quantum state measurements. [J/OL]. Physical Review A, 2002: 4528–4533. <http://dx.doi.org/10.1103/physreva.53.4528>.
 - [55] CALDEIRA A O, LEGGETT A J. Influence of damping on quantum interference: An exactly soluble model[J/OL]. Physical Review A, 2002, 31(2): 1059–1066. <http://dx.doi.org/10.1103/physreva.31.1059>.
 - [56] JANSZKY J, YUSHIN Y. Squeezing via frequency jump[J/OL]. Optics Communications, 1986: 151–154. [http://dx.doi.org/10.1016/0030-4018\(86\)90468-2](http://dx.doi.org/10.1016/0030-4018(86)90468-2).
 - [57] CIRAC J I, GARAY L J, BLATT R, et al. Laser cooling of trapped ions: The influence of micromotion.[J/OL]. Physical Review A, 2002, 49(1): 421–432. <http://dx.doi.org/10.1103/physreva.49.421>.
 - [58] BARDROFF P J, LEICHTLE C, SCHRADE G, et al. Paul trap multi-quantum interactions[Z]. 1996.
 - [59] LEIBFRIED D, MEEKHOF D M, KING B E, et al. Experimental Determination of the Motional Quantum State of a Trapped Atom[J/OL]. Physical Review Letters, 2002, 77(21): 4281–4285. <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.77.4281>.
 - [60] BEIGE A, BOSE S, BRAUN D, et al. Entangling Atoms and Ions in Dissipative Environments [J/OL]. Journal of Modern Optics, 2000, 47(14–15): 2583–2598. <http://dx.doi.org/10.1080/09500340008232183>.

- [61] MONROE C, MEEKHOF D M, KING B E, et al. Demonstration of a Fundamental Quantum Logic Gate[J/OL]. Physical Review Letters, 2002, 75(25): 4714–4717. <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.75.4714>.
- [62] LIN Y, GAEBLER J P, REITER F, et al. Preparation of Entangled States through Hilbert Space Engineering[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2016, 117: 140502. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.140502>.
- [63] BARRETT M, SCHAEZT T, DEMARCO B, et al. Sympathetic cooling of 9Be^+ and 24Mg^+ for quantum logic[J/OL]. APS,APS, 2003. <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevA.68.042302>.
- [64] WAN Y, KIENZLER D, ERICKSON S D, et al. Quantum gate teleportation between separated qubits in a trapped-ion processor[J/OL]. Science, 2019, 364(6443): 875–878. <http://dx.doi.org/10.1126/science.aaw9415>.
- [65] LANYON B P, HEMPEL C, NIGG D, et al. Universal Digital Quantum Simulation with Trapped Ions[J/OL]. Science, 2011, 334(6052): 57 – 61. <http://dx.doi.org/10.1126/science.1208001>.
- [66] MONZ T, NIGG D, MARTINEZ E A, et al. Realization of a scalable Shor algorithm[J/OL]. Science, 2016: 1068–1070. <http://dx.doi.org/10.1126/science.aad9480>.
- [67] SCHÄFER V M, BALLANCE C J, THIRUMALAI K, et al. Fast quantum logic gates with trapped-ion qubits.[J/OL]. Nature, 2018, 555(7694): 75–78. <http://dx.doi.org/10.1038/nature25737>.
- [68] DIETRICH M. Barium ions for quantum computation[J]. PhDT,PhDT, 2009.
- [69] DIETRICH M R, KURZ N, NOEL T, et al. Hyperfine and optical barium ion qubits[J/OL]. Physical Review A, 2010, 81(5). <http://dx.doi.org/10.1103/physreva.81.052328>.
- [70] HUCUL D, CHRISTENSEN J E, HUDSON E R, et al. Spectroscopy of a Synthetic Trapped Ion Qubit.[J/OL]. Physical Review Letters, 2017, 119(10). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.119.100501>.
- [71] OLMSCHENK S, YOUNGE K C, MOEHRING D L, et al. Manipulation and detection of a trapped Yb^+ hyperfine qubit[J/OL]. Physical Review A, 2007, 76(5). <http://dx.doi.org/10.1103/physreva.76.052314>.
- [72] WEIDT S, RANDALL J, WEBSTER S, et al. Trapped-Ion Quantum Logic with Global Radiation Fields.[J/OL]. Physical Review Letters, 2016, 117(22). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.117.220501>.
- [73] HARTY T, ALLCOCK D, BALLANCE C, et al. High-fidelity preparation, gates, memory and readout of a trapped-ion quantum bit[EB/OL]. 2014. <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.113.220501>.
- [74] HUNTEMANN N, OKHAPKIN M, LIPPHARDT B, et al. High-Accuracy Optical Clock Based on the Octupole Transition in $\text{Yb} + 171$ [J/OL]. Physical Review Letters, 2012, 108(9). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.108.090801>.
- [75] SENKO C. Dynamics and Excited States of Quantum Many-body Spin Systems with Trapped Ions[EB/OL]. 2014. <https://drum.lib.umd.edu/handle/1903/16147>. DOI: 10.13016/M2RS4X.

- [76] EARNSHAW S. On the Nature of the Molecular Forces which Regulate the Constitution of the Luminiferous Ether[EB/OL]. 1848. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:93567722>.
- [77] HÄNSCH T, SCHAWLOW A. Cooling of gases by laser radiation[J/OL]. Optics Communications, 1975, 13(1): 68–69. [http://dx.doi.org/10.1016/0030-4018\(75\)90159-5](http://dx.doi.org/10.1016/0030-4018(75)90159-5).
- [78] BLINOV B B, LEIBFRIED D, MONROE C, et al. Quantum Computing with Trapped Ion Hyperfine Qubits[J/OL]. Quantum Information Processing, 2004, 3(1–5): 45–59. <http://dx.doi.org/10.1007/s11128-004-9417-3>.
- [79] LEE P. Phase Control of Trapped Ion Quantum Gates[C/OL]//Frontiers in Optics. 2005. <http://dx.doi.org/10.1364/Is.2005.Itud1>.
- [80] FOOT C. Atomic Physics[M/OL]. Oxford university press, 2004: 344. <https://global.oup.com/ukhe/product/atomic-physics-9780198506966?cc=cn&lang=en&>.
- [81] YAO L. Fully Controllable Quantum Computing System Based on Trapped-Ion Platform[J]. PhD T, 2019, 146(1–5): 45–59.
- [82] JAMES D F, JERKE J. Effective Hamiltonian theory and its applications in quantum information[J/OL]. Canadian Journal of Physics, 2007, 85(6): 625–632. <https://doi.org/10.1139/p07-060>.
- [83] KARNIELI A, FAN S. Jaynes-Cummings interaction between low-energy free electrons and cavity photons[J/OL]. Science Advances, 2023, 9(22): eadh2425. <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/sciadv.adh2425>.
- [84] HAYES D, MATSUKEVICH D N, MAUNZ P, et al. Entanglement of Atomic Qubits Using an Optical Frequency Comb[J/OL]. Physical Review Letters, 2010, 104(14). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.104.140501>.
- [85] CIRAC J I, ZOLLER P. Quantum Computations with Cold Trapped Ions.[J/OL]. Physical Review Letters, 2002: 4091–4094. <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.74.4091>.
- [86] SCHMIDT-KALER F, HÄFFNER H, RIEBE M, et al. Realization of the Cirac – Zoller controlled-NOT quantum gate[J/OL]. Nature, 2003: 408 – 411. <http://dx.doi.org/10.1038/nature01494>.
- [87] SØRENSEN A, MØLMER K. QUANTUM COMPUTATION WITH IONS IN THERMAL MOTION[J/OL]. Physical Review Letters, 2002, 82(9): 1971–1974. <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.82.1971>.
- [88] JAMES D. Quantum dynamics of cold trapped ions with application to quantum computation [J/OL]. Applied Physics B: Lasers and Optics, 1998, 66(2): 181–190. <http://dx.doi.org/10.1007/s003400050373>.
- [89] LEE P J, BRICKMAN K A, DESLAURIERS L, et al. Phase Control of Trapped Ion Quantum Gates[J/OL]. Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, 2005: S371 – S383. <http://dx.doi.org/10.1088/1464-4266/7/10/025>.
- [90] GANDOLFI D, NIEDERMAYR M, KUMPH M, et al. Compact radio-frequency resonator for cryogenic ion traps[J/OL]. Review of Scientific Instruments, 2012, 83(8). <http://dx.doi.org/10.1063/1.4737889>.

-
- [91] SIVERNS J D, SIMKINS L R, WEIDT S, et al. On the application of radio frequency voltages to ion traps via helical resonators[J/OL]. *Applied Physics B*, 2012, 107(4): 921 – 934. <http://dx.doi.org/10.1007/s00340-011-4837-0>.
- [92] MACALPINE W, SCHILDKNECHT R. Coaxial Resonators with Helical Inner Conductor [J/OL]. *Proceedings of the IRE*, 1959, 47(12): 2099–2105. <http://dx.doi.org/10.1109/jrproc.1959.287128>.
- [93] NANDI J, SIKDAR A K, DAS P, et al. Design of a helical resonator with improved figure of merit[J/OL]. *Review of Scientific Instruments*, 2022. <http://dx.doi.org/10.1063/5.0065422>.
- [94] DENG K, SUN Y L, YUAN W H, et al. A modified model of helical resonator with predictable loaded resonant frequency and Q-factor[J/OL]. *Review of Scientific Instruments*, 2014, 85(10). <http://dx.doi.org/10.1063/1.4897478>.
- [95] BATRA N, PANJA S, DE S, et al. Design and Construction of a Helical Resonator for Delivering Radio Frequency to an Ion Trap[J/OL]. *MAPAN*, 2017, 32(3): 193–198. <http://dx.doi.org/10.1007/s12647-017-0209-5>.
- [96] KNIGHT D. The self-resonance and self-capacitance of solenoid coils[Z]. 2010.
- [97] ISLAM R, CAMPBELL W C, CHOI T, et al. Beat note stabilization of mode-locked lasers for quantum information processing.[J/OL]. *Optics Letters*, 2014: 3238. <http://dx.doi.org/10.1364/ol.39.003238>.
- [98] JOHNSON K G, WONG-CAMPOS J D, RESTELLI A, et al. Active Stabilization of Ion Trap Radiofrequency Potentials[J/OL]. *Review of Scientific Instruments*, 2016, 87(5). <http://dx.doi.org/10.1063/1.4948734>.

附录 A 补充内容

一些数学、图片、表格、代码等的补充...

致 谢

衷心感谢导师张君华副研究员和量子院路尧、王钊副研究员对本人的精心指导。他们的言传身教将使我终生受益。

感谢 ××××× 实验室主任 ××× 教授，以及实验室全体老师和同窗们学的热情帮助和支持！

本课题承蒙国家自然科学基金资助，特此致谢。

个人简历、在学期间完成的相关学术成果

个人简历

1998 年 04 月，出生于河南省南阳市邓州市；

2017 年 09 月，考入山东大学机电与信息工程学院学习；

2021 年 06 月，本科毕业并获得通信工程学士学位；

2021 年 09 月，进入南方科技大学量子科学与工程研究院学习；

2024 年 06 月，研究生毕业并电子科学与技术硕士学位；

获奖情况：

2021 年 12 月，获“华为杯”第十八届中国研究生数学建模竞赛国家级三等奖；

2022 年 02 月，获第十三届“挑战杯”广东大学生创业计划竞赛优秀奖；

2023 年 11 月，获南方科技大学研究生国家奖学金；

在学期间完成的相关学术成果

特别注意，下面的引用文献部分需要使用半角括号，例如 [J]，(已被 xxxx 录用)。(本行在使用时请删除)。

学术论文

- [1] Pei S, Huang L L, Li G, et al. Magnetic Raman continuum in single-crystalline $\text{H}_3\text{LiIr}_2\text{O}_6$ [J]. Physical Review B, 2020, 101(20): 201101. (SCI 收录, IDS 号为 LJ4UN, IF=3. 575, 对应学位论文 2.2 节和第 5 章.)
- [2] Pei S, Tang J, Liu C, et al. Orbital-fluctuation freezing and magnetic-nonmagnetic phase transition in $\alpha - \text{TiBr}_3$ [J]. Applied Physics Letters, 2020, 117(13): 133103. (SCI 收录, IDS 号为 NY3GK, IF=3. 597, 对应学位论文 2.2 节和第 3 章.)

申请及已获得的专利（无专利时此项不必列出）

- [3] 彭道杰，一种谐振腔：中国，实用新型专利，专利号：202222817815.1
- [4] 彭道杰，一种可多自由度活动的机械手：中国，发明专利，专利号：202310229097.2
- [5] 彭道杰，一种差分式谐振腔位移传感系统：中国，发明专利，专利号：202310108732.1
- [6] 路尧，彭道杰，谐振器：中国，实用新型专利，专利号：202321801161.1
- [7] 彭道杰，一种融合型飞行器及其控制方法：中国，发明专利，专利号：202310808122.2
- [8] 彭道杰，一种双目视角差立体深度测量方法、系统及存储介质：中国，发明专利，专利号：202310916798.3

参与的科研项目及获奖情况（无获奖时此项不必列出）

- [9] 姜锡洲，××××× 研究，×× 省自然科学基金项目。课题编号：××××，长长长长长长长长长长长长长长长长长长长长长长长长长长长长。
- [10] ×××，××××× 研究，×× 省自然科学基金项目。课题编号：××××。
- [11] ×××，××××× 研究，×× 省自然科学基金项目。课题编号：××××。