UNIVERSITÉ IBN TOFAIL
ENSAK

# *Analyse Numérique*

## Résolution des systèmes linéaires Ax = b

## Série 5, S4, 2014/2015

### Exercice 1 :

Soit A la matrice définie par : $$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

1- Triangulariser la matrice A et déduire la factorisation $LU$ (sans effectuer le calcul de décomposition), telle que $L$ n'ait que des 1 sur la diagonale.
2- En utilisant l'algorithme de Crout, déterminer la factorisation $LU$ de A, telle que $U$ n'ait que des 1 sur la diagonale.
3- Résoudre les systèmes linéaires $Ax = e_i$, $i = 1,2,3,4$ ($les\ e_i$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$)
4- Déduire la matrice $A^{-1}$.

### Exercice 2 :

On définit la matrice $A$, à $n$ lignes et $n$ colonnes par

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On veut résoudre $Ax = 0$.

1. Montrer en résolvant les $n-1$ premières équations que $x_i = ix_1$, $i = 1, \ldots, n$.
2. Résoudre la dernière équation et en déduire que $x = 0$.
3. En déduire que $A$ est inversible.

### Exercice 4 :

Soit la matrice $A$ et le vecteur $b$ suivants :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre par la méthode d'élimination de *Gauss* le système linéaire $Ax = b$.
2. Donner la factorisation $LU$ de $A$ et calculer son déterminant (on peut résoudre cette question conjointement avec la première).

## Exercice 5 :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

2.1 Factoriser par la méthode de Choleskey la matrice A.

2.2 Donner la matrice de Gauss correspondante à A.

2.3 Déduire la résolution du systéme suivant : $\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 6 \\ 2x + 5y + 3z = 11 \\ 2x + 3y + 3z = 9 \end{cases}$

2.4 Donner l'algorithme de Gauss-Seidel qui permet de résoudre le systéme précédent.

2.5 Donner l'algorithme de Jacobi qui permet de résoudre le systéme précédent.

2.6 Dans un tableau présenter les résultats des quatres premiéres itérations de ces deux méthodes itératives.

2.5 Que peut on dire sur la convergence de ces méthodes pratiquement et théoriquement ?

## Exercice 6:

En utilisant la méthode d'identification pour trouver un polynôme d'interpolation, nous avons le systéme suivant :

$$\begin{cases} -x + y - z + e = \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z + e = \frac{2}{5} \\ x + y + z + e = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z + e = \frac{2}{5} \end{cases}$$

1- Ècrire le systéme sous la forme $Ax = b$, puis donner la décomposition LU de la matrice $A$.
2- Résoudre le systéme $Ax = b$ par la méthode LU. Peut-on faire la résolution avec Choleskey?
3- Donner les algorithmes de Jacobi et de Gauss-Sidel du systéme $Ax = b$.
4- Que peut-dire sur la convergence de ces deux algorithmes.
5- Donner les matrices d'itération de Jacobi et de Gauss-Seidel ($A_J$ $et$ $A_{GS}$).
6- Calculer les rayons spectrale $\rho(A_{GS})et\ \rho(A_J)$. Que peut-on dire sur la convergence des deux méthodes comparativement à la question 4 ? (3 pts)
7- Dans un tableau présenter les résultats des quatres premiéres itérations de ces deux méthodes itératives afin de confirmer vos déduction de convergence ($x_0 = 0$)
8- Calculer le conditionnement de A.