

Chapitre II : Interférences lumineuses par division du front d'onde

I. Définitions :

Lorsque deux ondes lumineuses (ou plusieurs) atteignent un point M, leurs champs électriques et magnétiques s'ajoutent vectoriellement en ce point. On dit qu'il y a interférence entre les diverses ondes ou que ces ondes interfèrent.

Pour obtenir des interférences lumineuses, il faut que les :

- les deux ondes lumineuses oscillent à la même fréquence ($\nu_1 = \nu_2$).
- maintiennent une différence de phase constante dans le temps,

On dit que les deux ondes sont synchrones et cohérentes.

Pratiquement pour, Pour observer les interférences avec les sources lumineuses habituelles, il faut que les deux ondes à composer proviennent d'une même source.

Si les deux sources n'ont pas la même fréquence, ou si en un point M la différence de phase varie aléatoirement en fonction du temps, on n'observe aucune figure d'interférence, et les sources sont dites incohérentes.

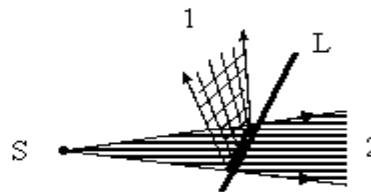
On classe les phénomènes des interférences suivant la manière dont l'appareil interférentiel divise l'onde incidente (principale) provenant de la source S.

Il y a deux types d'appareil interférentiels :

- des appareils utilisant le principe de la figure (a). il y a division du front d'onde.
- des appareils utilisant le principe de la figure (b). il y a division d'amplitude.



Par division du front d'onde.



Par division d'amplitude

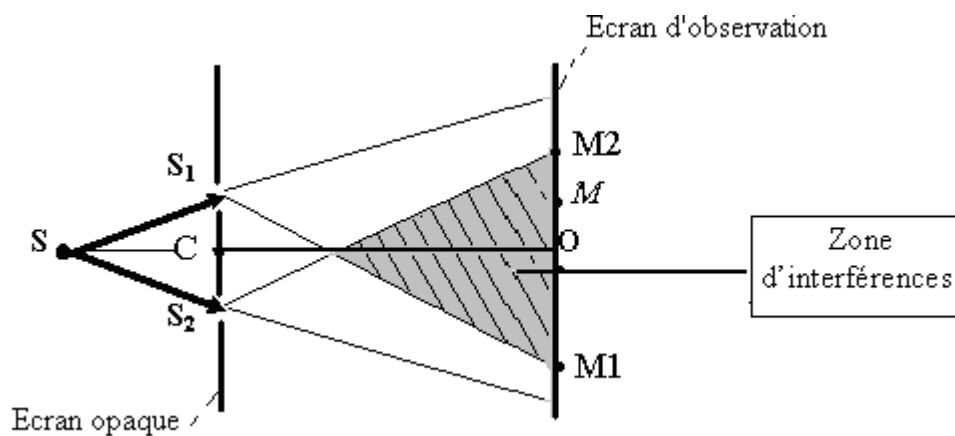
Figure a

Figure b

II. Interférences par division du front d'onde :

Les fentes d'Young, les trous d' Young, les miroirs de Fresnel et d'autres dispositifs sont basés sur ce principe.

II.1. Dispositif des trous d'Young



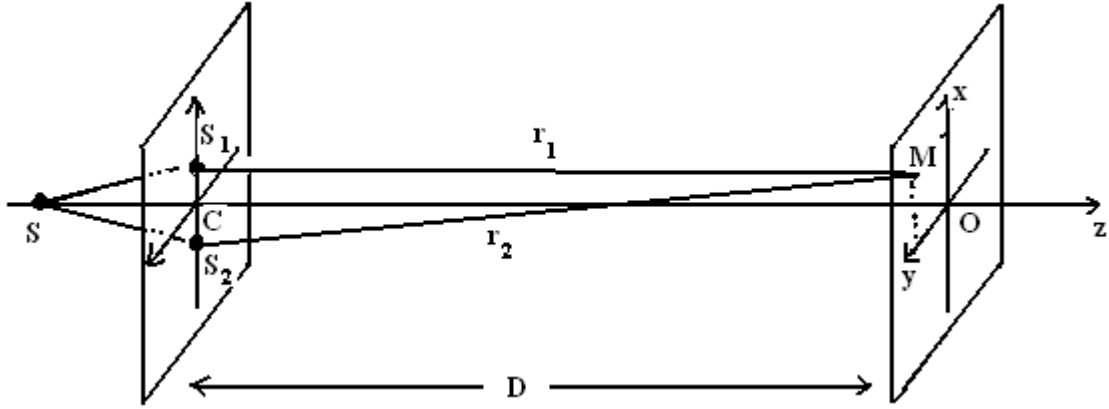
S : source lumineuse monochromatique ponctuelle de longueur d'onde λ .

S_1 et S_2 : deux trous de très faibles dimensions

S_1 et S_2 sont identiques, très rapprochées, percées dans un écran opaque et à la même distance de la source lumineuse S . Cette dernière est placée sur la normale en C (milieu de S_1S_2) à l'écran.

Les deux trous S_1 et S_2 diffractent, les vibrations lumineuses qui proviennent de la même source principale S et par conséquent, elles se comportent comme deux sources lumineuses secondaires cohérentes.

Dans la zone d'interférence, il y a superposition des faisceaux lumineux diffractés par S_1 et S_2 . On peut donc observer les franges d'interférences en un point M de cette région.



$$S_1 = \begin{pmatrix} a/2 \\ 0 \\ -D \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} -a/2 \\ 0 \\ -D \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les vibrations issues des sources secondaires S_1 et S_2 qui atteignent le point M s'écrivent:

$$\vec{E}_1(M, t) = E_{01} e^{j(\alpha t - \varphi_1)} \vec{e}_1 \quad \text{et} \quad \vec{E}_2(M, t) = E_{02} e^{j(\alpha t - \varphi_2)} \vec{e}_2$$

$$\text{avec : } \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} r_1 \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} r_2$$

Les vibrations proviennent d'une même émission initiale, nous pouvons donc les additionner:

$$\vec{E}_R(M, t) = \vec{E}_1(M, t) + \vec{E}_2(M, t) = \left[E_{01} e^{-j\varphi_1} \vec{e}_1 + E_{02} e^{-j\varphi_2} \vec{e}_2 \right] e^{j\alpha t}$$

i L'intensité au point M de l'écran s'écrira donc:

$$I(M) = \vec{E}_R(M, t) \cdot \vec{E}_R^*(M, t) = (\vec{E}_1(M, t) + \vec{E}_2(M, t)) \cdot (\vec{E}_1(M, t) + \vec{E}_2(M, t))^*$$

$$I(M) = E_{01}^2 + E_{02}^2 + E_{01} E_{02} \left[e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)} + e^{-j(\varphi_2 - \varphi_1)} \right] \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2$$

$$I(M) = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2$$

Dans l'expérience des trous de Young les interférences sont observées à proximité du centre O de l'écran et les sources sont très éloignées de l'écran ($D \gg a$). Dans ces conditions, on a:

$$E_{01} = E_{02} = E_0 \quad \text{et} \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \approx 1$$

L'intensité au point M de l'écran s'écrira donc:

$$I(M) = 2E_0^2 (1 + \cos \varphi)$$

avec

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = \frac{2\pi\delta(M)}{\lambda}$$

$$I(M) = 2E_0^2 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta(M)}{\lambda}\right)$$

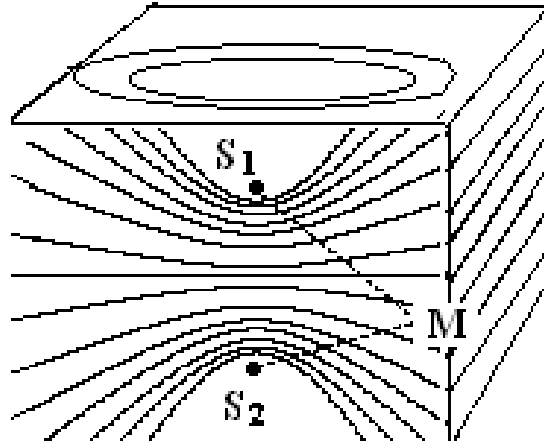
où $\delta(M) = r_2 - r_1$ est la différence de marche.

II.2. Lieu des points de même intensité lumineuse :

Les lieux des points de même intensité I sont obtenus par $\varphi(M) = (\varphi_2 - \varphi_1) = \text{constante}$ ou $\frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = \text{constante}$ ou encore $\delta(M) = r_2 - r_1 = \text{constante}$.

- Si le milieu est le vide ou l'air d'indice $n=1$: $\lambda = \lambda_0$.
- Dans un milieu transparent d'indice $n \neq 1$: $\lambda = \lambda_0/n$

Les surfaces d'égales intensités ou surfaces équiphasées ($r_2 - r_1 = \text{constante}$) sont des hyperboloïdes de révolutions qui ont S_1 et S_2 pour foyers. On rappelle qu'un hyperboloïde est la surface engendrée par une hyperbole autour d'un axe de révolution.



L'intersection de ces hyperboloïdes avec un écran perpendiculaire aux rayons lumineux donne lieu à des branches d'hyperboles qu'on appelle franges d'interférences.

II.3. Détermination de la différence de marche δ en un point M de l'écran E.

Pour expliciter, l'allure de la figure d'interférence sur l'écran E, déterminons la différence de marche δ en fonction des coordonnées du point M et des sources S_1 et S_2 dans le repère Oxyz.

$$\begin{aligned}\delta(M) &= \|S_2M\| - \|S_1M\| = r_2 - r_1 = \sqrt{D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2} - \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} . \\ \Rightarrow \delta(M) &= D \sqrt{1 + \left[\frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)}{D}\right]^2} - D \sqrt{1 + \left[\frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)}{D}\right]^2} \\ \Rightarrow \delta(M) &= D \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)}{D}\right]^2 \right\} - D \left\{ 1 + \left[\frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)}{D}\right]^2 \right\} \\ \Rightarrow & \boxed{\delta(M) = \frac{a \cdot x}{D}}\end{aligned}$$

En première approximation, les franges (lieu des points de même intensité) sont des droites parallèles et équidistantes. Elles sont dirigées perpendiculairement à l'axe vertical ox.

a) Emplacement des franges brillantes :

- les franges brillantes (d'intensité lumineuse maximale) sont obtenues pour :

Si, $\cos \varphi = 1$ soit $\varphi = 2k\pi$ ou $\delta = k\lambda$ soit $x_B = k \cdot (\lambda D/a)$; $I(M) = I_{\max} = 4 \cdot I_0$

b) Emplacement des franges sombres :

- les franges sombres (d'intensité lumineuse minimale) sont obtenues pour :

Si, $\cos \varphi = -1$ soit $\varphi = (2k+1)\pi$ ou $\delta = (k+1/2)\lambda$ soit $x_N = (k+1/2) \cdot (\lambda D/a)$; $I(M) = I_{\min} = 0$.

c) l'interfrange :

La distance entre deux franges consécutives de même intensité lumineuse est appelée interfrange et est notée i .

$$i = x_b(k+1) - x_b(k) = (k+1) \frac{\lambda_0 D}{a} - k \frac{\lambda_0 D}{a} = \frac{\lambda_0 D}{a}$$

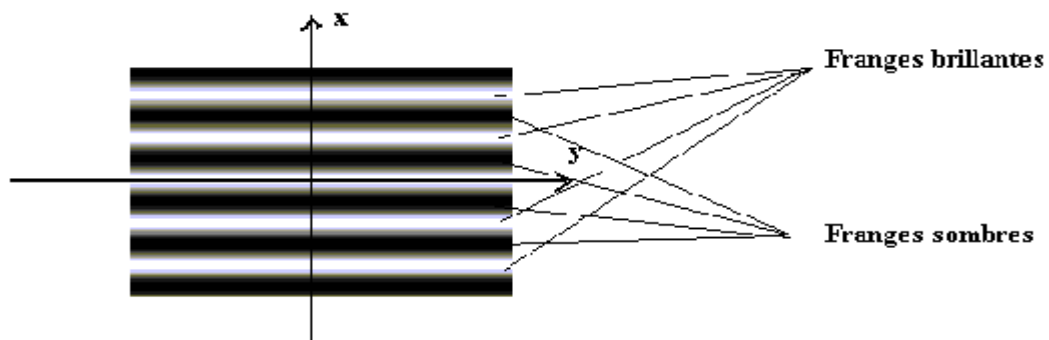
d) ordre d'interférence

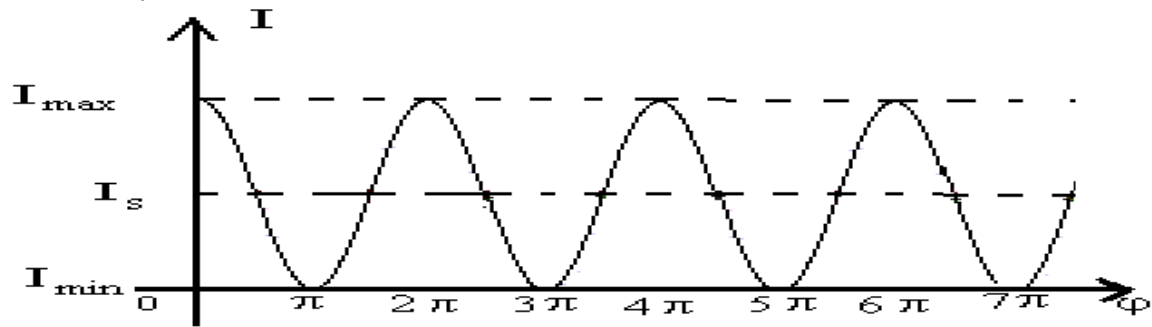
La quantité δ/λ est appelée ordre d'interférence p :

- pour les franges brillantes p entier.
- pour les franges sombres p est demi entier

On observe donc une succession de franges rectilignes, équidistantes et parallèles alternativement brillantes et sombres. L'arrête centrale est brillante puisque $p = 0$.

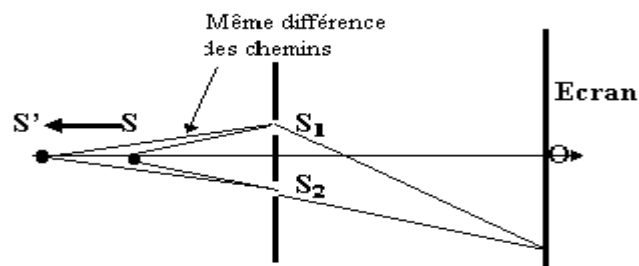
Ces franges sont visibles dans tout le domaine de l'espace où les faisceaux lumineux issus de S_1 et S_2 se rencontrent. On dit que les franges ne sont pas localisées.





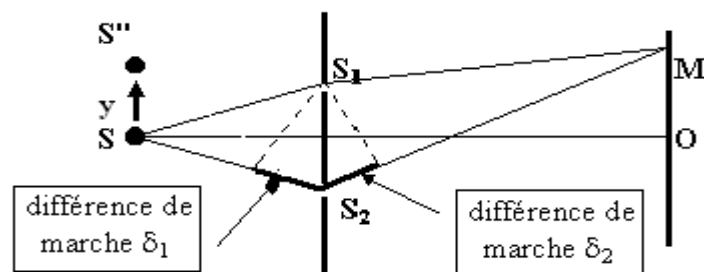
II.4. Déplacement la source

a) Horizontalement de S en S'.



Pas de modification du phénomène.

b) Verticalement de S en S''.

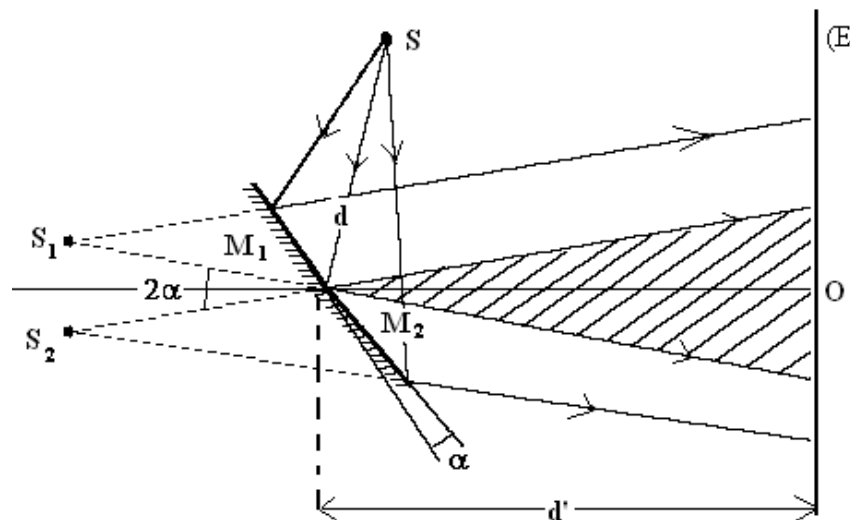


$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = a y / d + a x / D$$

Décalage en bloc du système de franges : franges rectilignes et même interfrange que précédemment.

III. Miroirs de Fresnel

On considère deux miroirs M_1 et M_2 ayant une arrête commune et faisant entre eux un angle dont le supplément α est très faible. La lumière émise par la source S se réfléchit sur les deux miroirs qui donnent deux images S_1 et S_2 . Ces deux sources jouent le rôle des deux sources en phase de l'expérience précédente de Young.



Les deux images virtuelles S_1 et S_2 sont placées tel que :

L'angle $S_1OS_2 = 2\alpha$; α est petit on a donc $S_1S_2 = a = 2d\alpha$.

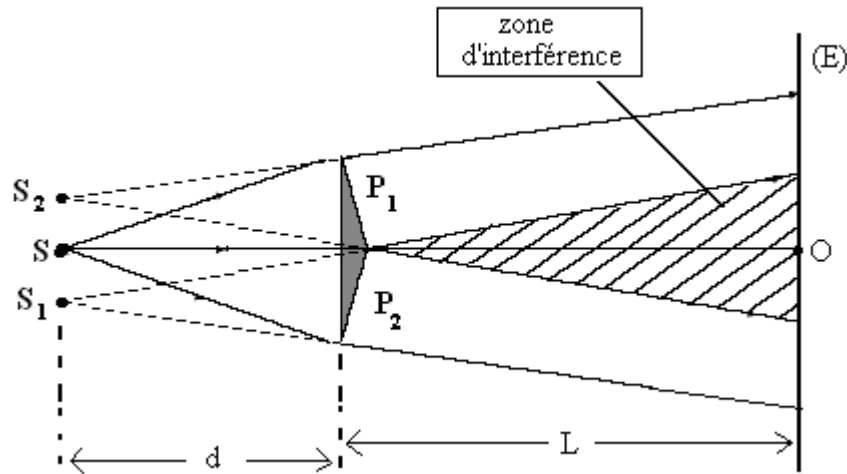
La partie commune des deux faisceaux donne lieu à des interférences, les franges sont toujours rectilignes et normales au plan S_1S_2 .

Si d' est la distance de l'arrête commune au plan d'observation (E), l'interfrange est alors égale à :

$$i = \frac{\lambda_0 (d + d')}{2\alpha d}$$

IV. Biprisme de Fresnel

Deux prismes identiques P_1 et P_2 de petits angles A (quelques minutes) sont accolés par leur base et ils sont éclairés par une source ponctuelle S placée dans le plan médiateur à une distance d des deux prismes.



Les deux sources secondaires en phase S_1 et S_2 sont les images, de la source principale S , données par les deux prismes. Chaque prisme dévie le faisceau lumineux vers sa base d'un angle D tel que :

$$D = \alpha = i + i' - A = (n - 1)A$$

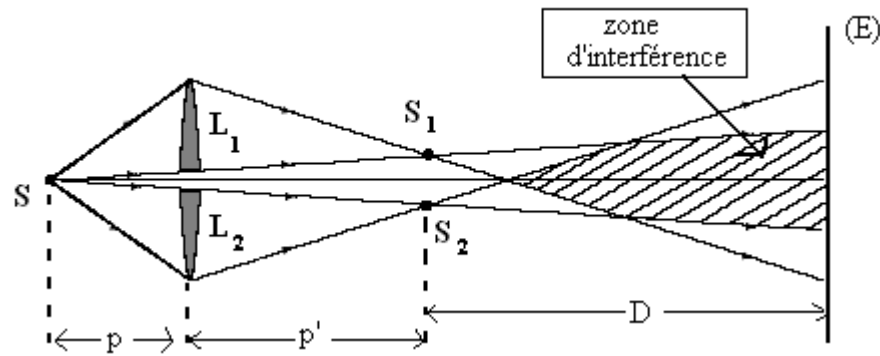
n est l'indice de réfraction du prisme et A l'angle du prisme.

On a donc: $S_1S_2 = a = 2d\alpha = 2d(n - 1)A$.

$$i = \frac{\lambda_0(L + d)}{2(n - 1)Ad}$$

V. Bi lentilles de Billet

Une lentille convergente est sciée suivant un diamètre, on obtient ainsi deux demi-lentilles L_1 et L_2 de centres optiques O_1 et O_2 et légèrement espacées par une distance e .



Chaque demi lentille donne une image de la source S. les deux images réelles S_1 et S_2 de S constituent deux sources en phase. Les faisceaux lumineux issus de S_1 et S_2 se recouvrent pour donner lieu à un phénomène d'interférences qu'on peut observer sur l'écran (E).

Tous ces rayons donnent des franges d'interférences non localisées puisque l'écran d'observation peut être déplacé dans toute la région de l'espace où les faisceaux lumineux se recouvrent.

$$a = S_1 S_2 = \varepsilon \left(1 + \frac{p'}{p}\right) \quad \text{et l'interfrange est} \quad i = \frac{\lambda D}{\varepsilon \left(1 + \frac{p'}{p}\right)}$$

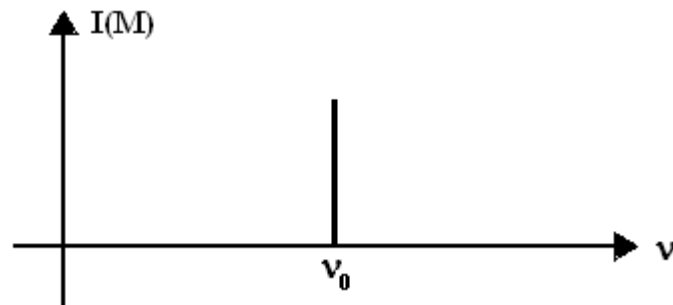
VI Effets des incohérences

Lorsque l'on fait l'expérience d'Young, on s'aperçoit que le contraste tend très vite vers zéro. Deux causes permettent d'expliquer la faible visibilité des franges d'ordre élevé : L'incohérence temporelle et l'incohérence spatiale.

Le modèle de la source monochromatique est une idéalisation. En réalité la source n'est pas absolument monochromatique mais possède plusieurs composantes spectrales. En effet, une raie spectrale n'est pas rigoureusement fine mais possède un profil (lorentzien) en cloche centré en ν_0 avec une largeur spectrale $\Delta\nu$. Chaque composante produit son propre système d'interférence et le résultat à l'écran est une superposition des figures d'interférences (l'éclairement s'ajoute puisque que chaque composante est indépendante des autres) ; il en résulte un phénomène de *brouillage* : le contraste diminue au fur et à mesure que la différence de chemin optique augmente.

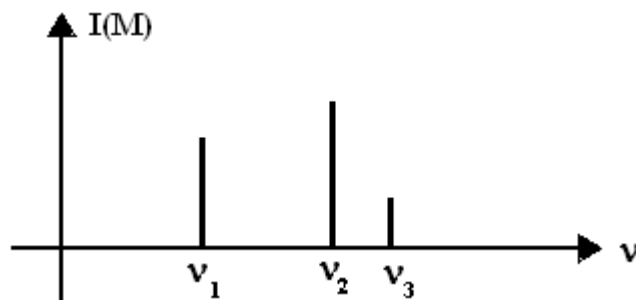
1) Quelques aspects des sources lumineuses.

a) Une raie infiniment fine de fréquence ν_0 .

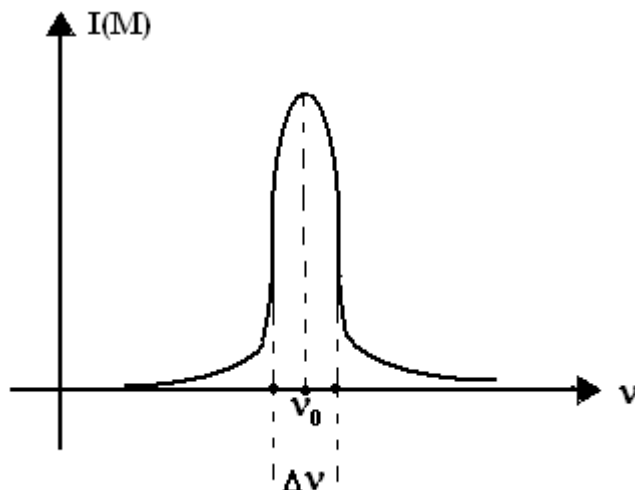


C'est une source monochromatique émettant une radiation de fréquence ν_0 ou de longueur d'onde λ_0 .

b) Plusieurs raies infiniment fines.

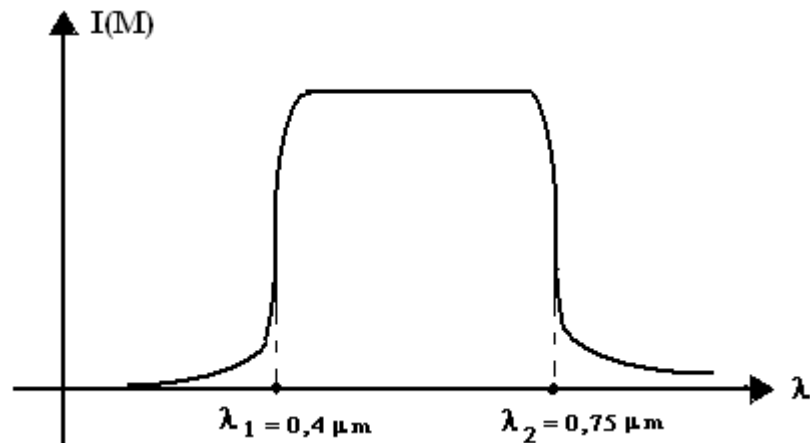


c) une raie fine de centre ν_0 et de largeur $\Delta\nu$.



La largeur $\Delta v \ll v_0$.

c) Une source de lumière blanche.



2) Cas où la source émet deux radiations.

Chaque radiation donne son propre système de franges. Soient λ_1 et λ_2 les longueurs d'ondes des deux radiations émises par la source ponctuelle. En un point M de la zone d'interférences, les ordres :

$$p_1 = \frac{\delta}{\lambda_1} \text{ et } p_2 = \frac{\delta}{\lambda_2} \text{ différent de :}$$

$$p_2 - p_1 = \delta \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = \frac{\delta}{\lambda_1} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2} = p_1 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2}$$

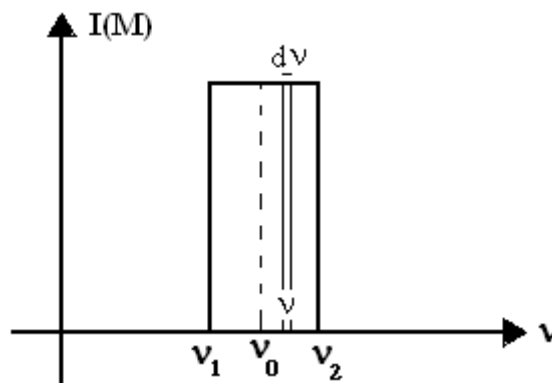
Pour p_1 petit les deux systèmes d'interférence coïncident à peu près : on dit qu'on a concordance.

Mais $p_2 - p_1$ augmente avec p_1 et à un moment donné, la différence devient égale à $1/2$: on dit qu'il y a discordance entre les deux systèmes de franges. Si p_1 continue à augmenter, il y aura de nouveau concordance et ainsi de suite. On observe une série de régions où les franges brillantes du système (1) se coïncident exactement avec les franges brillantes du système (2). Ces régions sont séparées par d'autres régions où les franges brillantes du système (1) coïncident avec les franges sombres du système (2).

- * Les concordances sont données par $p_2 - p_1 = k$, (k est un entier).
- * les discordances sont données par $p_2 - p_1 = k + 1/2$ (k est un entier).

3) Interférence avec une raie fine.

On considère un dispositif interférentiel éclairé par une raie fine de largeur très faible, mais non négligeable et dont le profil d'intensité émise est:



v_0 est la fréquence du centre de la raie fine. v_1 et v_2 sont les fréquences des bords de la raie.

$$\Delta v = v_2 - v_1 \text{ et } v_0 = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Chacune des radiations monochromatiques qui composent la raie va donner son système de frange sur un écran. En un point M du champ d'interférence où la différence de marche est δ , l'éclairement $I(M)$ résultant sera la somme des éclairements $dI(M)$ dus à chaque radiation.

Soit I_0 : l'intensité émise par la toute la raie de largeur $\Delta v = v_2 - v_1$

dI_0 : l'intensité émise par l'élément de la raie de fréquence v et de largeur dv .

$$\left. \begin{array}{l} I_0 \text{ --- } \rightarrow v_2 - v_1 \\ dI_0 \text{ --- } \rightarrow dv \end{array} \right\} \Rightarrow dI_0 = \frac{I_0 dv}{v_2 - v_1} = \frac{I_0 dv}{\Delta v}$$

En un point M du champ d'interférence l'éclairement $dI(M)$ correspondant à l'interférence avec la radiation de fréquence v et de largeur dv est:

$$dI(M) = 4dI_0 \cos^2\left(\frac{\pi\delta v}{c}\right)$$

$$dI(M) = 4 \frac{I_0}{\Delta v} dv \cos^2\left(\frac{\pi\delta v}{c}\right) \text{ avec } \Delta v = v_2 - v_1$$

$$I(M) = \int dI(M) = \int_{v_1}^{v_2} 4 \frac{I_0}{\Delta v} \cos^2\left(\frac{\pi\delta v}{c}\right) dv$$

$$= 4 \frac{I_0}{\Delta v} \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta v}{c}\right) dv$$

$$= 2 \frac{I_0}{\Delta v} \left[v + \frac{c}{2\pi\delta} \sin \frac{2\pi\delta v}{c} \right]_{v_1}^{v_2}$$

$$I(M) = 2 \frac{I_0}{\Delta v} \left[(v_2 - v_1) + \frac{c}{2\pi\delta} \left(\sin \frac{2\pi\delta v_2}{c} - \sin \frac{2\pi\delta v_1}{c} \right) \right]$$

$$I(M) = 2 \frac{I_0}{\Delta v} \left[(v_2 - v_1) + \frac{c}{\pi\delta} \sin \frac{\pi\delta(v_2 - v_1)}{c} \cdot \cos \frac{2\pi\delta(v_1 + v_2)}{2c} \right]$$

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \frac{c}{\pi\delta \cdot \Delta v} \sin \frac{\pi\delta(v_2 - v_1)}{c} \cdot \cos \frac{2\pi\delta(v_1 + v_2)}{2c} \right]$$

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \frac{c}{\pi\delta \cdot \Delta v} \sin \frac{\pi\delta \cdot \Delta v}{c} \cdot \cos \frac{2\pi\delta \cdot v_0}{c} \right]$$

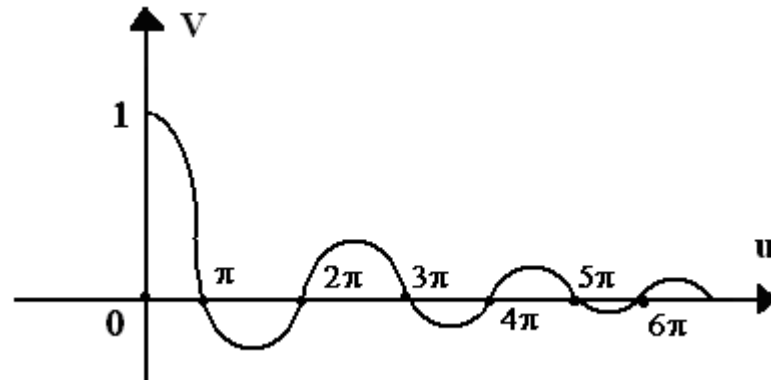
$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \frac{\sin \frac{\pi\delta \cdot \Delta v}{c}}{\frac{\pi\delta \cdot \Delta v}{c}} \cdot \cos \frac{2\pi\delta \cdot v_0}{c} \right]$$

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + V \cdot \cos \frac{2\pi\delta \cdot v_0}{c} \right]$$

avec
$$V = \frac{\sin \frac{\pi\delta \cdot \Delta v}{c}}{\frac{\pi\delta \cdot \Delta v}{c}} = \frac{\sin u}{u} \text{ avec } u = \frac{\pi\delta \cdot \Delta v}{c}$$

V est appelé facteur de visibilité.

- Si $\Delta v = 0$ (cas d'une raie infiniment fine) ; $V = 1$ (visibilité maximale et le contraste est meilleur); $I(M) = 2I_0 \left[1 + \cos \frac{2\pi\delta \cdot v_0}{c} \right]$.
- Le facteur de visibilité $V = \frac{\sin u}{u}$ module la variation de la fonction $\cos \frac{2\pi\delta \cdot v_0}{c}$ et s'annule pour: $u = k\pi$ ou bien $\delta = k \frac{c}{\Delta v}$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$



- Pour $V = 0$ ($u = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \pm4\pi, \dots$ ou bien $\delta = \pm\frac{c}{\Delta v}, \pm2\frac{c}{\Delta v}, \pm3\frac{c}{\Delta v}, \pm4\frac{c}{\Delta v}, \pm5\frac{c}{\Delta v}, \pm6\frac{c}{\Delta v}, \dots$), le contraste est nulle ($I_{\max} = I_{\min}$), le système de franges disparaît et on a brouillage.
- Pour $u \neq k\pi$ ou bien $\delta \neq k\frac{c}{\Delta v}$, $V \neq 0$; les franges reparaissent avec un contraste plus faible.
- Pour la zone où $V < 0$; $I(M) = 2I_0 \left[1 - |V| \cdot \cos \frac{2\pi\delta \cdot v_0}{c} \right]$

$$I(M) = I_{\max} \quad \text{si} \quad \cos \frac{2\pi\delta \cdot v_0}{c} = -1$$

$$I(M) = I_{\min} \quad \text{si} \quad \cos \frac{2\pi\delta \cdot v_0}{c} = +1$$

- Pour la zone où $V > 0$; $I(M) = 2I_0 \left[1 + |V| \cdot \cos \frac{2\pi\delta \cdot v_0}{c} \right]$

$$I(M) = I_{\max} \quad \text{si} \quad \cos \frac{2\pi\delta \cdot v_0}{c} = +1$$

$$I(M) = I_{\min} \quad \text{si} \quad \cos \frac{2\pi\delta \cdot v_0}{c} = -1$$

Nous remarquons qu'entre la zone où V est négatif et la zone où V est positif les positions des franges brillantes ($I = I_{\max}$) et sombres ($I = I_{\min}$) sont inversées.

4) Cas de la lumière blanche

En lumière blanche toutes les radiations du spectre visible sont présentes dans l'intervalle violet ($\lambda_v = 0,4 \mu\text{m}$) – rouge ($\lambda_R = 0,75 \mu\text{m}$). On observe une frange blanche (frange achromatique) entourée de quatre ou cinq franges irisées de rouge vers le centre et du violet à l'extérieur: au delà, on observe le << blanc d'ordre supérieur >>: en effet si l'ordre p augmente, des radiations de plus en plus nombreuses s'éteignent et les divers systèmes de frange de chaque radiation du spectre visible empiètent les unes sur les autres; à travers la

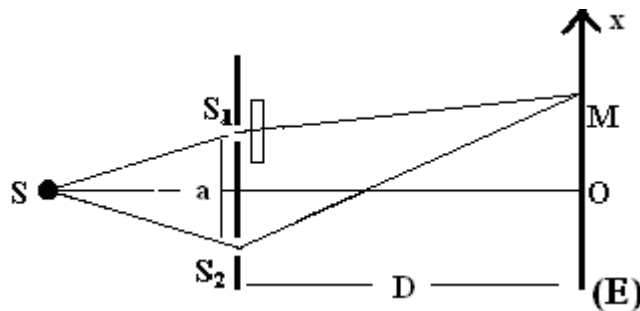
fente d'un spectroscopie placé à la distance x de la frange centrale, on observe un spectre cannelé : les longueurs d'onde manquantes correspondent aux cannelures noires (demi-entier)

5) frange achromatique mesure d'indices.

Considérons le dispositif des fentes d'Young et une lame mince de verre d'indice n donné par la formule de Cauchy: $n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$ où A et B sont des constantes. Pour déterminer A et B on réalise les deux expériences suivantes:

Expérience 1:

On éclaire le dispositif avec une source ponctuelle monochromatique émettant une lumière de longueur d'onde λ_m et interposant devant l'une des fentes la lame de verre d'indice n et d'épaisseur e .



La d.d.m en un point de l'écran (E) d'observation des franges est :

$$\delta = \frac{ax}{D} - e(n-1)$$

La nouvelle position x_1 de la frange centrale est:

$$x_1 = \frac{eD}{a}(n-1)$$

Expérience 2:

On éclaire maintenant le dispositif avec une source ponctuelle émettant une lumière blanche. pour la frange achromatique blanche, l'ordre d'interférence p est stationnaire et il varie très peu avec la longueur d'onde λ .

$$\frac{dp}{d\lambda} = 0 \quad \text{soit:} \quad \frac{dp}{d\lambda} = -\frac{ax}{\lambda^2 D} + \frac{e(n-1)}{\lambda^2} - e \frac{dn}{d\lambda} = 0$$

On en déduit la position x_a de la frange achromatique par:

$$\begin{aligned} x_a &= \frac{eD}{a} (n-1 - \frac{\lambda dn}{d\lambda}) \\ &= \frac{eD}{a} (n-1) - \frac{eD\lambda}{a} \frac{dn}{d\lambda} \\ &= x_1 - \frac{eD\lambda}{a} \frac{dn}{d\lambda} \end{aligned}$$

La constante B est telle que:

$$\begin{aligned} x_a - x_1 &= -\frac{eD\lambda}{a} \frac{dn}{d\lambda} \\ \frac{dn}{d\lambda} &= \frac{a}{eD\lambda} (x_a - x_1) = -\frac{2B}{\lambda^3} \end{aligned}$$

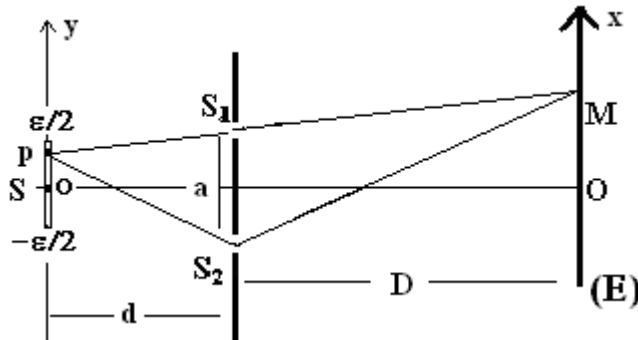
$$B = \frac{a(x_a - x_1)}{2eD} \lambda_m^2$$

D'après la première expérience:

$$x_1 = \frac{eD}{a} (n-1) = \frac{eD}{a} (A + \frac{B}{\lambda^2} - 1) \quad \Rightarrow \quad A = \frac{a}{2eD} (3x_1 - x_a) + 1$$

6) Influence de la largeur de la source.

Considérons le dispositif interférentiel des trous d'Young et une source monochromatique fine étendue sur un axe parallèle à celui des trous d'Young.



La différence de marche en un point M de l'écran (E) entre deux vibrations lumineuses issues d'un point P de la source est:

$$\delta = \frac{ay}{d} + \frac{ax}{D} \quad \text{avec } OP = y \quad \text{et} \quad OM = x.$$

Soit I_0 : l'intensité émise par la source entière de largeur ϵ .

dI_0 : l'intensité émise par l'élément dy de la source autour du point p.

$$\left. \begin{array}{l} I_0 \longrightarrow \epsilon \\ dI_0 \longrightarrow dy \end{array} \right\} \Rightarrow dI_0 = \frac{I_0 dy}{\epsilon}$$

L'éclairement au point M de l'écran dû aux interférences des vibrations issues de l'élément de la source de largeur dy est:

$$dI(M) = 2dI_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)$$

$$dI(M) = 2 \frac{I_0}{\epsilon} \left[1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ay}{d} + \frac{ax}{D}\right)\right] dy$$

$$I(M) = \int dI(M) = 2 \frac{I_0}{\epsilon} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \left[1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ay}{d} + \frac{ax}{D}\right)\right] dy$$

$$= 2 \frac{I_0}{\epsilon} \left[y + \frac{\lambda d}{2\pi a} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ay}{d} + \frac{ax}{D}\right)\right) \right]_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2}$$

$$= 2 \frac{I_0}{\epsilon} \left[\epsilon + \frac{\lambda d}{2\pi a} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{a\epsilon}{2d} + \frac{ax}{D}\right)\right) - \frac{\lambda d}{2\pi a} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{-a\epsilon}{2d} + \frac{ax}{D}\right)\right) \right]$$

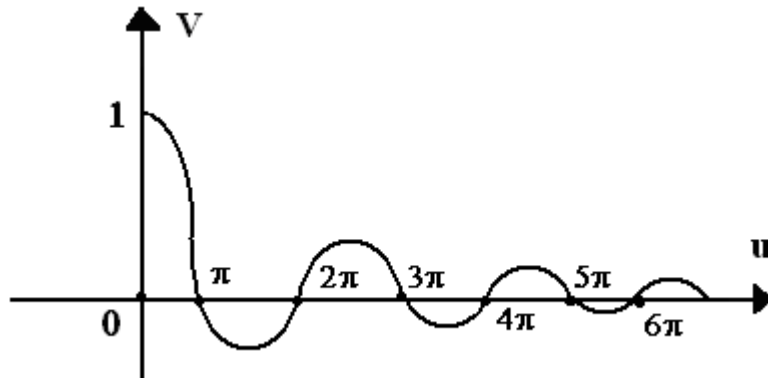
$$= 2I_0 \left[1 + \frac{\lambda d}{\pi a \epsilon} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a\epsilon}{2d}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D}\right) \right]$$

$$= 2I_0 \left[1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{a\epsilon}{d}\right)}{\frac{\pi a \epsilon}{\lambda d}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D}\right) \right]$$

$$\boxed{I(M) = 2I_0 \left[1 + V \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D}\right) \right]}$$

$$\text{avec } V = \frac{\sin(\frac{\pi a \varepsilon}{\lambda d})}{\frac{\pi a \varepsilon}{\lambda d}} = \frac{\sin u}{u} \text{ tel que: } u = \frac{\pi a \varepsilon}{\lambda d}$$

V: facteur de visibilité analogue à celui établie pour une raie fine de largeur Δv .



- Pour $V = 0$ ($u = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \pm4\pi, \dots$ ou bien $\varepsilon = \pm\frac{\lambda d}{a}, \varepsilon = \pm2\frac{\lambda d}{a}, \varepsilon = \pm3\frac{\lambda d}{a}, \varepsilon = \pm4\frac{\lambda d}{a}, \dots$), le contraste est nulle ($I_{\max} = I_{\min}$), le système de franges disparaît et on a brouillage.

- Pour $u \neq k\pi$ ou bien $\varepsilon \neq k\frac{\lambda d}{a}$, $V \neq 0$; les franges reparaissent avec un contraste plus faible.

- Pour la zone où $V < 0$; $I(M) = 2I_0 \left[1 - |V| \cos \frac{2\pi ax}{\lambda D} \right]$

$$I(M) = I_{\max} \quad \text{si} \quad \cos \frac{2\pi ax}{\lambda D} = -1$$

$$I(M) = I_{\min} \quad \text{si} \quad \cos \frac{2\pi ax}{\lambda D} = +1$$

- Pour la zone où $V > 0$; $I(M) = 2I_0 \left[1 + |V| \cos \frac{2\pi ax}{\lambda D} \right]$

$$I(M) = I_{\max} \quad \text{si} \quad \cos \frac{2\pi ax}{\lambda D} = +1$$

$$I(M) = I_{\min} \quad \text{si} \quad \cos \frac{2\pi ax}{\lambda D} = -1$$

Nous remarquons qu'entre la zone où V est négatif et la zone où V est positif les positions des franges brillantes ($I = I_{\max}$) et sombres ($I = I_{\min}$) sont inversées.