

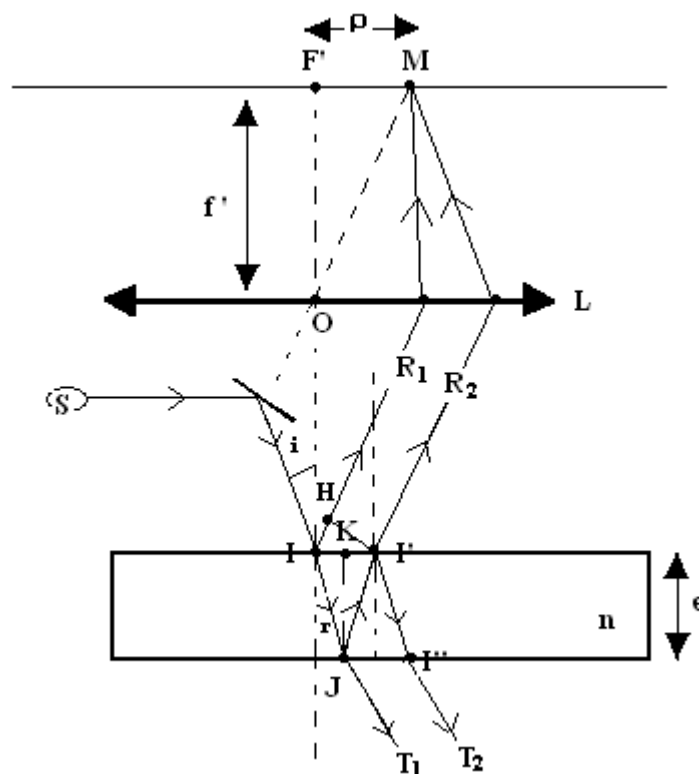
Chapitre III. Interférences par division d'amplitude

Le faisceau incident issu de la source est divisé par le dispositif interférentiel en plusieurs faisceaux d'amplitudes inégales. Les faisceaux obtenus après la division peuvent ensuite interférer à une distance finie ou infinie. On dit que les franges obtenues sont localisées.

I : Système à lame à faces parallèles :

I-1: Observation par réflexion :

Soit une lame à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice n éclairée par une source S ponctuelle et monochromatique.



Un rayon lumineux incident SI se dédouble en I sur la première face de la lame et donne naissance à un rayon réfléchi dans l'air IR_1 et un rayon réfracté IJ . Le rayon réfracté IJ se dédouble sur la

deuxième face de la lame et donne naissance à un rayon réfléchi à l'intérieur de la lame $J'I'$ et un rayon transmis JT_1 . Le rayon $J'I'$ se dédouble en I' pour donner un rayon qui sort suivant $I'R_2$ parallèle à IR_1 et un autre rayon I'' à l'intérieur de la lame. Ce dernier, donne naissance à deux rayons dont un sort suivant $I''T_2$ parallèle à JT_1 . Les deux rayons réfléchis parallèles IR_1 et $I'R_2$ interfèrent donc à l'infini. On dit que l'interférence est localisée à l'infini.

L'observation des franges d'interférences peut se faire si on place une lentille convergente L sur le trajet des rayons et un écran pour matérialiser les franges au foyer de cette lentille.

Nous négligerons les faisceaux plusieurs fois réfléchis à cause de la décroissance rapide de leur amplitude.

- Calcul de la différence de marche:**

$$\delta = (IJI') - (IH) = 2nIJ - IH$$

$$IJ = \frac{e}{\cos(r)} ; IH = II'(\cos(\frac{\pi}{2} - i) = II' \sin(i) = 2IK \sin(i)$$

$$IK = e \cdot \tan(r) \Rightarrow IH = 2e \cdot \tan(r) \cdot \sin(i)$$

$$\text{Donc : } \delta = 2n \frac{e}{\cos(r)} - 2e \cdot \tan(r) \cdot \sin(i)$$

$$\sin(i) = n \sin(r)$$

$$\Rightarrow \delta = 2 \frac{e}{\cos(r)} (n - n \sin^2(r)) = \frac{2ne}{\cos(r)} (1 - \sin^2(r)) = 2ne \cos(r)$$

Ce résultat n'est pas exact. En fait, il faut ajouter un terme supplémentaire à la différence de marche δ de $\frac{\lambda}{2}$.

La démonstration de ce résultat est détaillée dans les livres de l'électromagnétisme. Ce résultat, qui est la conséquence de l'équation de continuité du champ \vec{E} et \vec{B} à travers une surface diélectrique, dit : Lors d'une réflexion d'un milieu moins réfringent sur un milieu plus réfringent ($n_2 > n_1$), alors on doit ajouter une différence de marche de $\frac{\lambda}{2}$ ou, ce qui revient au même, un déphasage de π .

Dans ce cas, notre différence de marche sera :

$$\boxed{\delta = 2ne \cos(r) + \frac{\lambda}{2}}$$

- Forme des franges d'interférence :

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2ne \cos(r)}{\lambda} + \frac{1}{2} \text{ est l'ordre d'interférence.}$$

On sait que p est constant en tout point d'une frange. Pour un système donné (n , e et λ fixes), p ne dépend que de r ou de i . On dit que l'on a des franges d'égale inclinaison.

Cas où i et r sont faibles.

$$\text{Dans ce cas, } \cos r = 1 - \frac{r^2}{2} \quad \text{et} \quad p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2ne}{\lambda} \left(1 - \frac{r^2}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2ne}{\lambda} \left(1 - \frac{r^2}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{2ne}{\lambda} + \frac{1}{2} - \frac{2ner^2}{2\lambda} = p_0 - \frac{2n^2er^2}{2n\lambda}$$

$$\text{Avec } i = nr$$

$$p = p_0 - \frac{2.e.i^2}{2n\lambda} \Rightarrow i = \sqrt{\frac{n\lambda}{e}} \cdot \sqrt{p_0 - p}$$

Avec $\text{tg}(i) \approx i \approx \frac{\rho}{f'}$, le rayon d'un anneau est donné par:

$$\rho = f' \sqrt{\frac{n\lambda}{e}} \cdot \sqrt{p_0 - p}$$

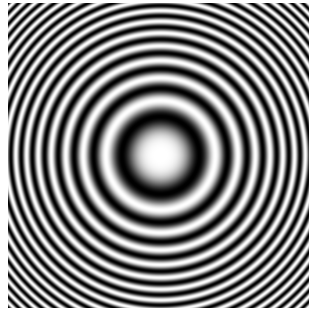
Si p_0 est entier, le centre est brillant:

- Les rayons des anneaux brillants (p entier) sont donnés par:

$$p_0 - p = k \text{ entier } (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots) \text{ et } \rho_{kB} = f' \sqrt{\frac{n\lambda}{e}} \cdot \sqrt{k}$$

- Les rayons des anneaux sombres (p demi entier) sont donnés par:

$$p_0 - p = k + \frac{1}{2} \text{ entier } (k = 1, 2, 3, 4, 5, \dots) \text{ et } \rho_{kS} = f' \sqrt{\frac{n\lambda}{e}} \cdot \sqrt{k - \frac{1}{2}}$$



Les franges ont donc pour axe de symétrie circulaire la direction de la normale à la lame. Ce sont des franges circulaires concentriques ou anneaux dans le plan focal de la lentille d'observation.

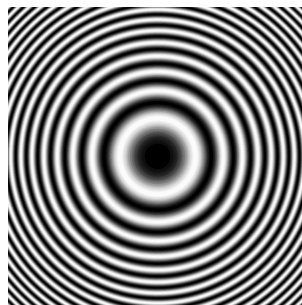
Si p_0 est demi-entier, le centre est sombre:

- Les rayons des anneaux brillants (p entier) sont donnés par:

$$p_0 - p = k - \frac{1}{2} \text{ demi entier } (k = 1, 2, 3, 4, 5, \dots) \text{ et } \boxed{\rho_{kB} = f' \sqrt{\frac{n\lambda}{e}} \cdot \sqrt{k - \frac{1}{2}}}$$

- Les rayons des anneaux sombres (p demi entier) sont donnés par:

$$p_0 - p = k \text{ entier } (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots) \text{ et } \boxed{\rho_{kS} = f' \sqrt{\frac{n\lambda}{e}} \cdot \sqrt{k}}$$



I-2: Observation par transmission :

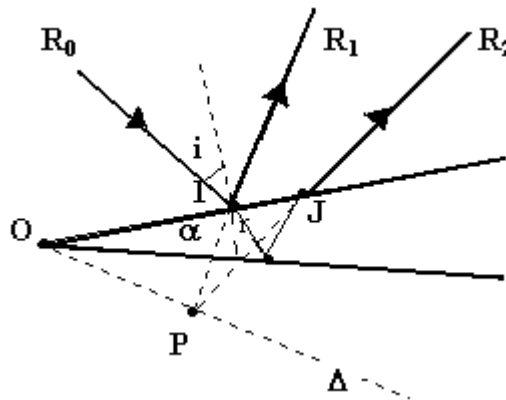
Dans ce cas, il n'y a pas de différence de marche supplémentaire car au point J.

$$\delta = 2ne \cos(r)$$

Les rayons transmis sont en général moins lumineux que les rayons réfléchis. En général, on étudie surtout les interférences par réflexion.

II: Système à lame à faces non parallèles : (interférence localisée sur une lame mince).

On envoie un faisceau de lumière parallèle monochromatique sur une lame d'indice n en forme de coin d'angle α très petit, sous un faible angle d'incidence i .



α étant petit et la lame est très mince, les points **I** et **J** sont très voisins, par conséquent l'épaisseur e peut être considérée comme constante entre ces deux points.

Le calcul de la différence de marche δ dans le cas d'une lame à faces parallèles reste valable :

$$\delta = 2ne \cos(r) + \frac{\lambda}{2}$$

Puisque i et r sont petits donc :

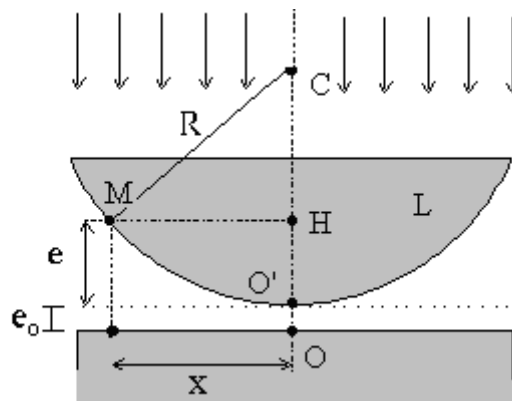
$$\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2}$$

Une frange correspond à l'ordre d'interférence p constant c'est à dire δ égale à une constante ou l'épaisseur e est constante. **Donc ces franges sont d'égales épaisseurs.** Ce sont des franges

rectilignes et parallèles à l'arrête de la lame. La frange voisine de l'arrête centrale est sombre puisque pour $e = 0$ on a, $p = \frac{1}{2}$.

III : Anneaux de Newton :

Les anneaux de Newton sont des franges d'interférences obtenues au moyen d'une lame d'air mince limitée par la face supérieure d'un plan de verre et la face courbe d'une lentille plan-convexe (figure).



On observe par réflexion des interférences produites par la lame d'air. Les franges d'égale épaisseur sont ici des franges circulaires centrées en O (anneaux concentriques). Ce sont les anneaux de Newton.

En un point M quelconque l'épaisseur d'air est e. en posant $HM = x$ et OH étant petit :

$$R^2 = x^2 + (R - O'H)^2$$

$$R^2 = x^2 + R^2 + O'H^2 - 2R.O'H$$

$$x^2 = O'H.(2R - O'H)$$

avec $R \gg O'H$

on écrit alors:

$$x^2 = 2R.O'H$$

$$e = O'H$$

La différence de marche en m sera :

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = \frac{x^2}{R} + \frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{x^2}{R\lambda} + \frac{1}{2}$$

Donc les franges d'égale épaisseur sont ici des anneaux de centre O et de rayon x .

Il y aura un anneau noir au point M si :

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{x_N^2}{R\lambda} + \frac{1}{2} = k + \frac{1}{2}$$

c'est à dire :

$$\frac{x_N^2}{R\lambda} = k$$

Le rayon x de cette anneau noir sera donné par :

$$x_N = \sqrt{R\lambda} \sqrt{k}$$

Pour les anneaux brillants :

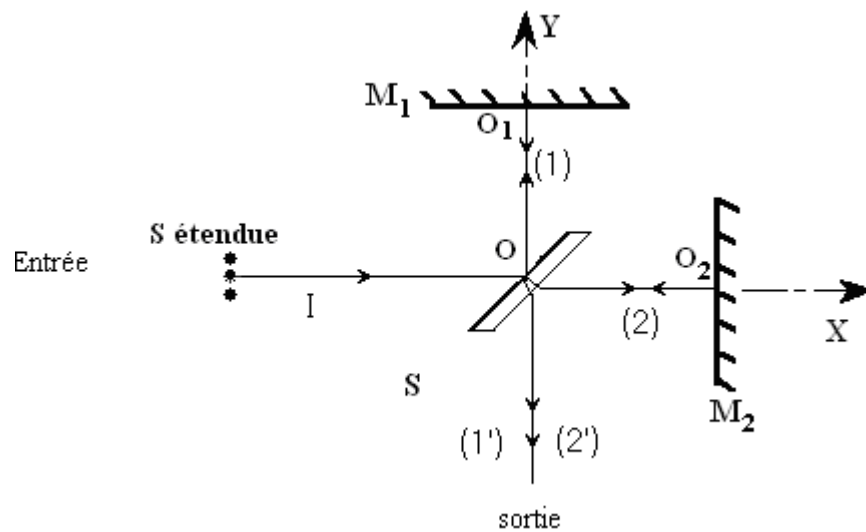
$$\frac{x_B^2}{R\lambda} + \frac{1}{2} = k \Rightarrow x_B = \sqrt{k - \frac{1}{2}} \sqrt{R\lambda} .$$

$$x_B = \sqrt{k - \frac{1}{2}} \sqrt{R\lambda}$$

IV: Interféromètre de Michelson

IV-1: Description

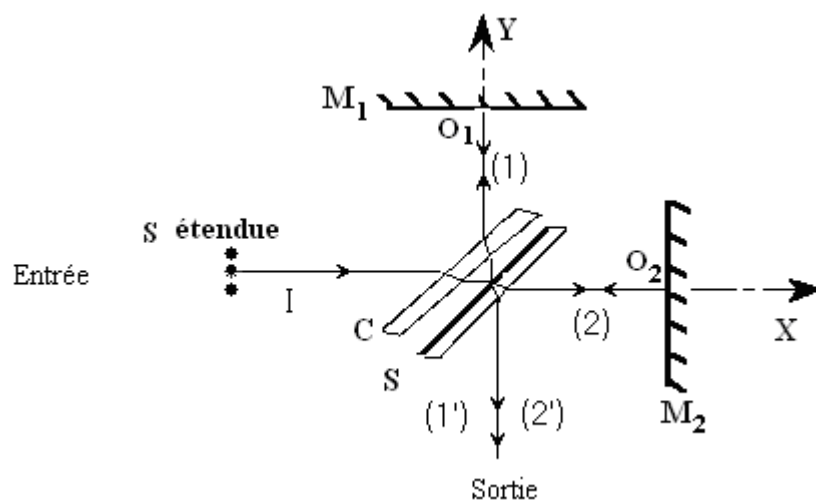
L'interféromètre de Michelson est constitué principalement de deux surfaces planes parfaitement réfléchissantes (miroirs M_1 et M_2) et d'une lame semi réfléchissant (pouvoir de réflexion $R = I_r/I_0$ est égale au pouvoir de transmission $T = I_t/I_0 = 0.5$) S appelée séparatrice.



- Un rayon 1 se réfléchit sur la séparatrice, puis en O_1 sur M_1 , puis traverse la séparatrice et sort de l'interféromètre.

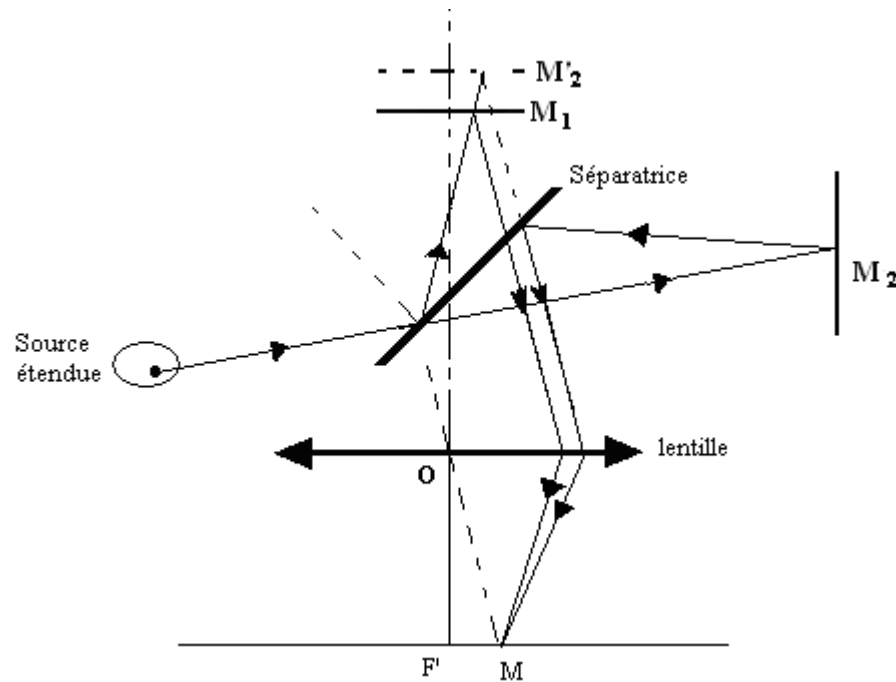
- Un rayon 2 traverse la séparatrice, se réfléchit en O_2 sur M_2 , puis à nouveau sur la séparatrice et sort de l'interféromètre.

Sur la figure précédente le trajet du rayon (1) comporte une seule traversée du verre de la séparatrice et trois traversées pour le trajet (2). Pour rétablir l'égalité des chemins optiques dans le verre quelle que soit l'incidence et les longueurs d'onde des radiations utilisées, on place sur le trajet (1) parallèlement à la séparatrice, une lame compensatrice C identique à la séparatrice.



IV-3-a: lame d'air : franges localisées à l'infini

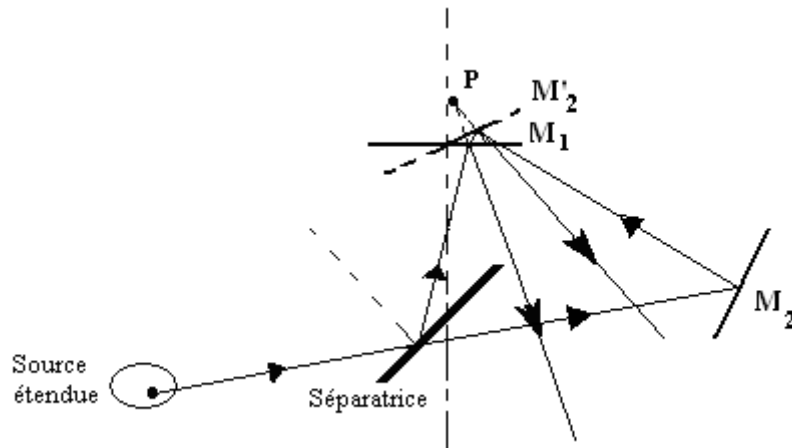
Lorsque les deux miroirs M_1 et M_2 sont rigoureusement parallèles, un incident quelconque donne deux émergents parallèles entre eux : ils interfèrent à l'infini, où sont donc observables les interférences.



Les franges de lame d'air à faces parallèles sont localisées à l'infini et peuvent être rendues visibles dans le plan focal d'une lentille convergente.

IV-3-b: Coin d'air : franges localisées sur les miroirs

Dans le cas où les miroirs se coupent en faisant entre eux un angle ε , un incident quelconque donne deux émergents qui se coupent en un point très proche des miroirs. On montre plus précisément que l'ensemble de ces points forme un plan, lui-même voisin de ceux des miroirs



Les franges de coin d'air sont localisées au voisinage des miroirs.

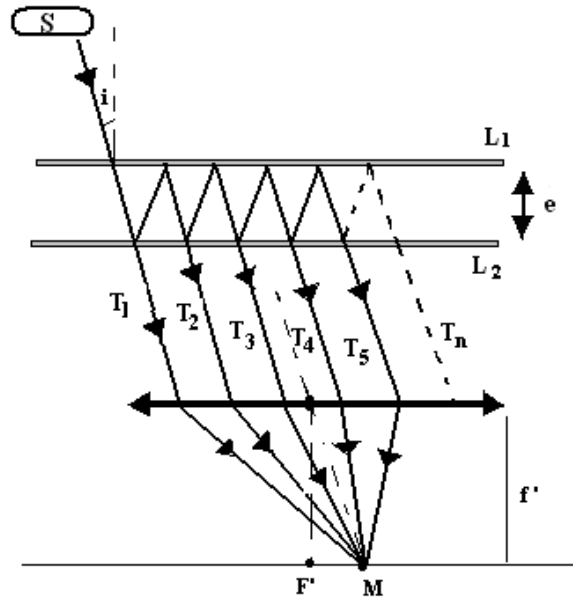
V Les interférences d'ondes multiples (interféromètre de Fabry-Pérot).

Nous n'avons considéré jusqu'à présent que les interférences produites par deux ondes parties d'un même point de la source et présentant une certaine différence de marche. Si on donne à la lame un pouvoir réflecteur élevé, on ne peut plus négliger les ondes multiples.

V-1: intensité de l'onde résultante de l'onde transmise.

Considérons une lame d'air d'épaisseur e délimitée par deux lames de verres L_1 et L_2 (d'épaisseurs négligeables) semi-argentées (rendues très réfléchissantes) identiques et parallèles.

L'ensemble est éclairé par une source étendue monochromatique S et on observe les franges obtenues dans le plan focal d'une lentille convergente L .



Soient t et r respectivement, les coefficients (ou facteurs) de transmission et de réflexion pour l'amplitude de chaque lame.

Si :

- a_0 est l'amplitude de l'onde incidente issue de la source S,
- a_r est l'amplitude de l'onde réfléchie par une lame,
- a_t est l'amplitude de l'onde transmise par une lame,

$$r = \frac{a_r}{a_0} \quad \text{et} \quad t = \frac{a_t}{a_0}$$

On désigne par T et R les pouvoirs transmission et de réflexion pour l'intensité de chaque lame. $R = r^2$ et $T = t^2$.

$$T = \frac{I_{\text{transmise}}}{I_{\text{incidente}}} = \frac{I_T}{I_0} \quad \text{et} \quad R = \frac{I_{\text{réfléchie}}}{I_{\text{incidente}}} = \frac{I_R}{I_0}$$

On envoie un rayon incident d'amplitude a_0 sous faible incidence i .

- Le rayon T_1 a effectué deux transmissions: une première transmission à travers la lame L_1 et une deuxième transmission à travers la lame L_2 .
- Le rayon T_2 a effectué deux transmissions et **deux** réflexions.
- Le rayon T_3 a effectué deux transmissions et **quatre** réflexions.
- Le rayon T_4 a effectué deux transmissions et **six** réflexions.

La différence de marche en un point M entre les deux premiers rayons transmis est:

$\delta(M) = 2ne \cos(r) = 2e \cos(i)$; L'indice étant égale à 1 puisqu'il s'agit d'une lame d'air et l'angle d'incidence i est égal à l'angle de réfraction r .

Rayons	T_1	T_2	T_3	T_4		T_n
Amplitude	$a_0.t^2$ $a_0.T$	$a_0.t^2.r^2$ $a_0.T.R$	$a_0.t^2.r^4$ $a_0.T.R^2$	$a_0.t^2.r^6$ $a_0.T.R^3$		$a_0.t^2.r^{2(n-1)}$ $a_0.T.R^{n-1}$
d.d.m par rapport au premier rayon transmis	0	δ	2δ	3δ		$(n-1)\delta$
Déphasage par rapport au premier rayon transmis	0	φ	2φ	3φ		$(n-1)\varphi$
Amplitude complexe	0	$a_0.T.R.e^{j\varphi}$	$a_0.T.R^2.e^{j2\varphi}$	$a_0.T.R^3.e^{j3\varphi}$		$a_0.T.R^{n-1}.e^{j(n-1)\varphi}$

L'amplitude totale complexe de tous les rayons émergents est:

$$\mathcal{A} = a_0T + a_0TR e^{j\varphi} + a_0TR^2 e^{j2\varphi} + a_0TR^3 e^{j3\varphi} + \dots + a_0TR^{(n-1)} e^{j(n-1)\varphi}$$

$$\mathcal{A} = a_0T(1 + R e^{j\varphi} + R^2 e^{j2\varphi} + R^3 e^{j3\varphi} + \dots + R^{(n-1)} e^{j(n-1)\varphi})$$

Cette somme est une progression géométrique et comme R^n tend vers zéro quand n croît, sa somme est:

$$A = \frac{a_0T(1 - R^n e^{jn\varphi})}{1 - R e^{j\varphi}} = \frac{a_0T}{1 - R e^{j\varphi}}$$

L'intensité de l'onde résultante transmise dans la direction i est :

$$I(M) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^* = \frac{a_0T}{1 - R e^{j\varphi}} \times \frac{a_0T}{1 - R e^{-j\varphi}} = \frac{a_0^2 T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} = \frac{a_0^2 T^2}{(1 - R)^2 + 2R(1 - \cos \varphi)}$$

$$I(M) = \frac{\frac{a_0^2 T^2}{(1 - R)^2}}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{I_0 \frac{T^2}{(1 - R)^2}}{1 + m(R) \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad \text{avec} \quad m(R) = \frac{4R}{(1 - R)^2}$$

$$I(M) = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + m(R) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$A(\varphi, R) = \frac{1}{1 + m(R) \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad \text{est appelé fonction d'Airy}$$

- L'intensité est maximale dans les directions i pour lesquelles le dénominateur est minimal, soit:

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = 0 \quad \text{pour } \varphi = 2k\pi \quad \text{donc} \quad I_{\max} = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2}$$

- L'intensité est minimale dans les directions i pour lesquelles le dénominateur est maximal, soit:

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1 \quad \text{pour } \varphi = (2k+1)\pi \quad \text{donc} \quad I_{\min} = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1+m} = I_0 \frac{T^2}{(1+R)^2}$$

V.2: Coefficient de finesse

Entre deux maxima d'intensité lumineuse consécutifs, le déphasage φ varie de 2π . Le facteur de finesse est défini par $\mathcal{F} = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}$ où $\Delta\varphi$ est largeur à mi-hauteur d'un maximum d'intensité telle que:

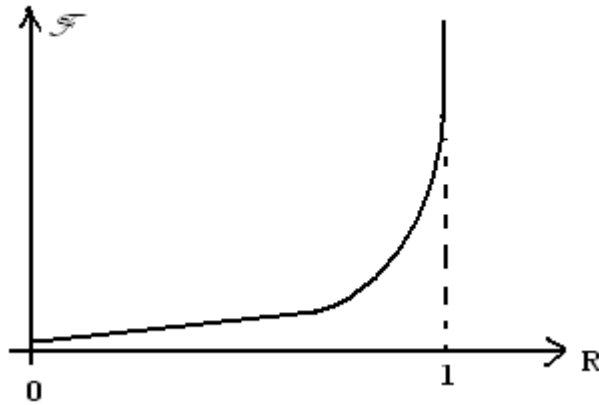
$$I = \frac{I_{\max}}{2} \quad \text{pour} \quad \varphi = 2k\pi \pm \frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + m(R) \sin^2 \left[\frac{2k\pi \pm \frac{\Delta\varphi}{2}}{2} \right]} = \frac{1}{1 + m(R) \sin^2 \left(k\pi \pm \frac{\Delta\varphi}{4} \right)} = \frac{1}{1 + m \frac{\Delta\varphi}{16}}$$

$$\text{Soit: } (\Delta\varphi)^2 = \frac{16}{m} \quad \text{ou bien} \quad \Delta\varphi = \frac{4}{\sqrt{m}} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

On en déduit le coefficient de finesse des franges

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$



V.3: Pouvoir de résolution

D'un anneau à un autre (ou d'une frange à une autre), φ varie de 2π . Pour un **Fabry-Pérot** d'épaisseur e , on a:

$$\varphi = 2\pi p = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 4\pi \frac{e \cos i}{\lambda} \quad \text{et} \quad d\varphi = -4\pi \frac{(e \cos i) d\lambda}{\lambda^2} = -\varphi \frac{d\lambda}{\lambda} = -2\pi p \frac{d\lambda}{\lambda}$$

La plus petite variation $\Delta\lambda$ de longueur d'onde décelable est telle que:

$$2\pi p \frac{\Delta\lambda_{\min}}{\lambda} = \Delta\varphi = \frac{2\pi}{F} \quad \text{on en déduit} \quad \Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda}{p.F}$$

Le pouvoir de résolution \mathcal{R} est défini par:

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}} = p.F$$

L'interféromètre de **Fabry-Pérot** est un dispositif très utilisé comme **spectromètre à très haute** résolution et aussi comme une **cavité optique résonante** dans les Lasers.