Cour Du Traitement Du Signal

M.Moulay Taib Belghiti

1 mars 2016

Écris par:
Kawtar Doublali ;Ayoub El Bourakkadi Soussi ; Walid Ait Chaib

Chapitre 1

"Série de Fourier des signaux unidimensionnel"

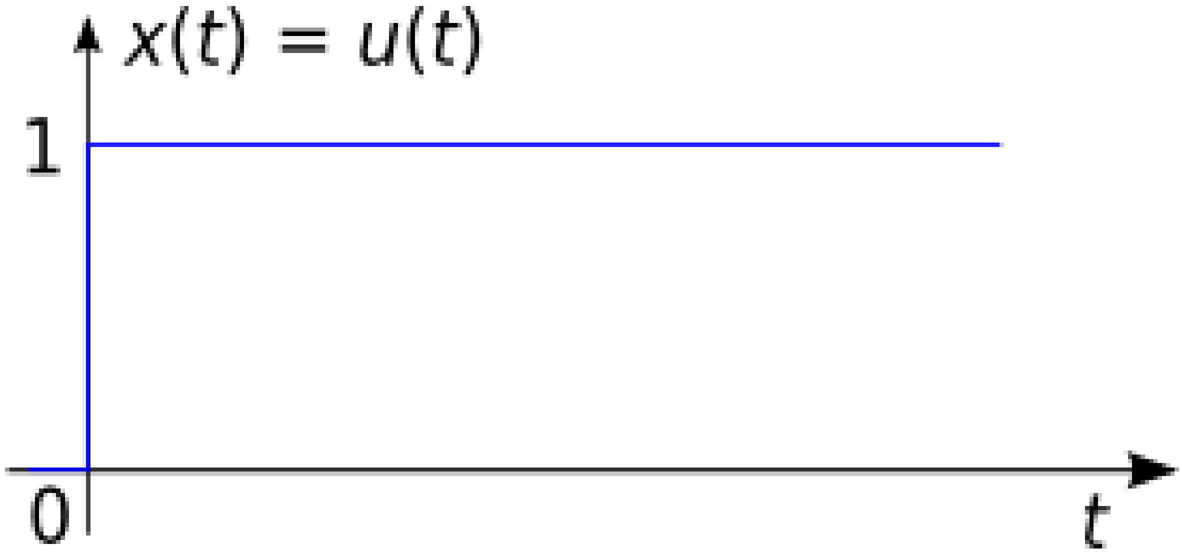
1.1 Introduction :

un signal unidimensionnel à l'image d'un signal sonore est modélisé par une fonction :

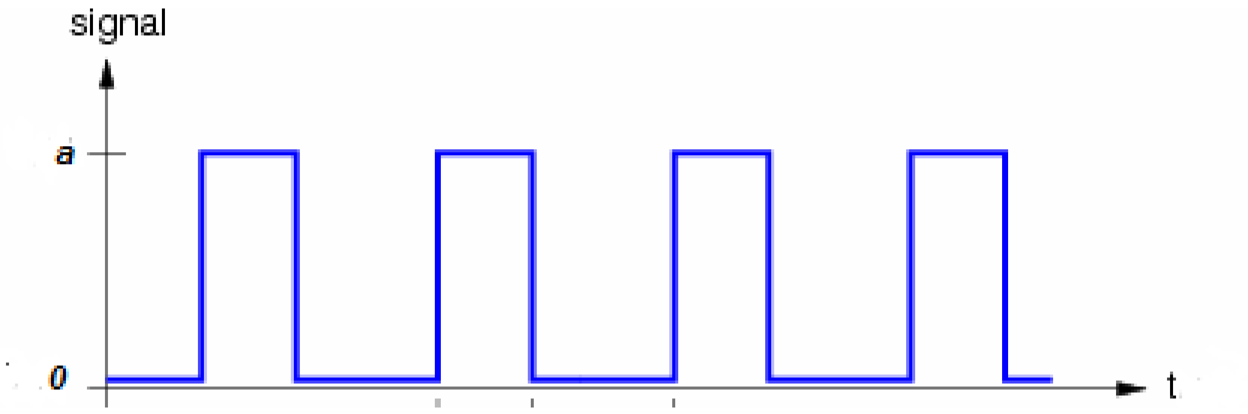
$$\begin{aligned} R &\longrightarrow C \\ t &\longrightarrow f(t) \end{aligned}$$

Exemples :

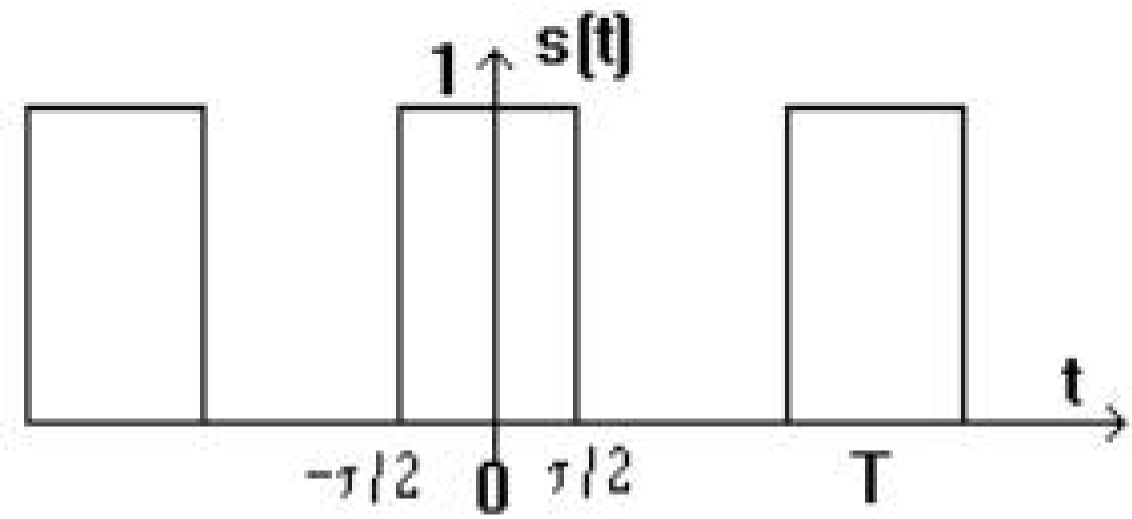
**signal échelon(signal d'énergie infinie)* :



**signal créneau* :

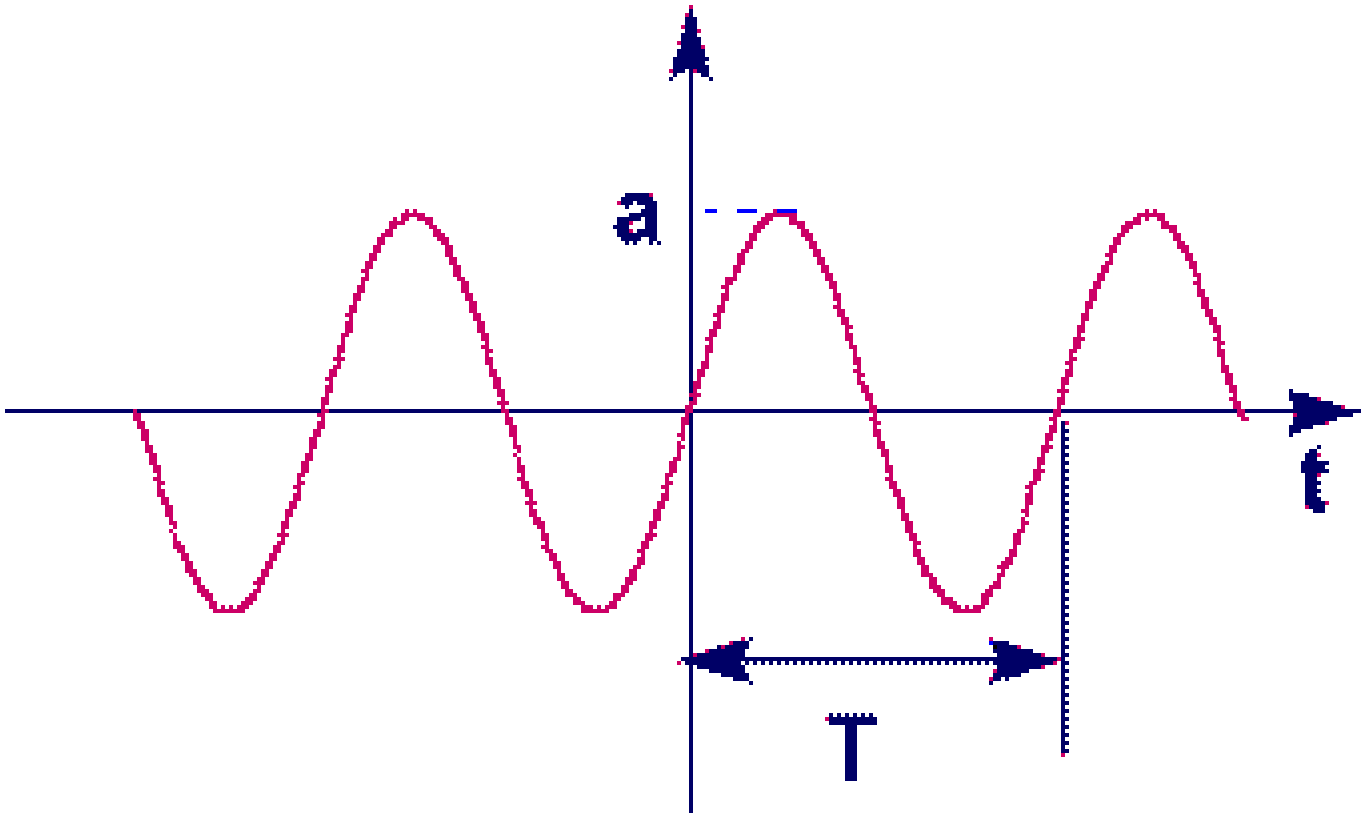


**signal créneau centré au porté*



**signal sinusoïdal ou monochromatique :*

$$\mathbf{t} \longrightarrow \mathbf{A}\cos(\omega\mathbf{t}+\varphi)$$



correspond à la propagation d'une onde tq :
$*A=$ *amplitude du signal*
$*\omega$: *pulsation* , $\omega=\frac{2\Pi}{T}$
$*\varphi$: (déphasage)phase initiale *T : période du signal, $\frac{1}{T}$=N ("N :fréquence du signal")

*Fourier :*tout signal"doit" pouvoir se décomposer en signaux élémentaires c'est à dire un signal (sous certaine hypothèses que l'on précisera) est une superposition de signaux élémentaires.
t $\longrightarrow$| f(t) $|^2$:s'identifie à une puissance instantané de sorte que : $\int_0^T \mid f(t) \mid^2 dt$: s'identifie à une énergie,c'est pour cette raison que l'on introduit l'espace :

$$\boxed{L_p^2\textbf{[o,T]=\{f :R}\longrightarrow\textbf{C,T périodique,}\int_0^T \mid f(t) \mid^2 dt<+\infty\}}$$

c'est l'espace des signaux qui sont T périodique d'énergie finie.
Résultat :
L_p^2[o,T] sera muni d'un *espace de Hilbert.*
sur L_p^2[o,T] on définit le produit suivant :

$$\boxed{< f.g >= \int_0^T f(t)\bar{g}(t)dt}$$

*Espace de Hilbert :*espace muni d'un produit scalaire et qui est complet.

•*propriété :*

*toute suite de Cauchy dans L_p^2[o,T] est convergente.

*tout espace vectoriel de dimension finie est complet,(L_p^2[o,T] : est un espace de dimension infinie).

Introduisons : pour N$\in Z$,l'espace vectoriel engendré par la famille :
$e_n(t) = e^{\frac{2i\pi Nt}{T}}$,(t$\in$[o,T],$N \in Z$),*(signaux complexes élémentaire)*

*calculer$< e^N.e^M >$!(N,M$\in Z$)

on a : $e_N \in L_p^2[o,T]$,(car e_n est T périodique,et $\int_0^T \|e_N\|^2 dt$=T<+∞)

$< e_N.e_M >= \int_0^T e^{\frac{2i\pi(N-M)t}{T}} dt$

$*$ si $N = M \Rightarrow < e_N.e_M >= 0$,*($e_N$et $e_M$sont orthogonaux)*

$*$ si $N \neq M \Rightarrow < e_N.e_M >= T$

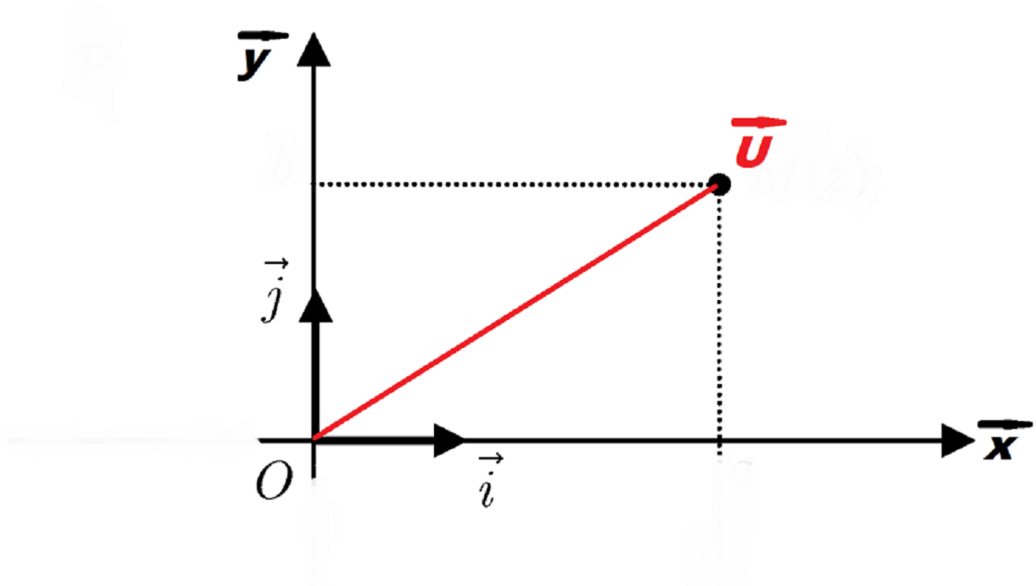
$\frac{1}{T} < e_N.e_M >= 1$, $(siN = M)$, on obtient ainsi une famille orthonormée

L'espace vectoriel engendré par $(e_k)_{-N<k<N}$ est un espace vectoriel de dimension finie (engendrer par un nombre fini d'élément,donc fermer),l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré$\leqslant N$ un élément f de τ_N s'écrit :$\vec{f} = \Sigma C_k \vec{e_k} (C_k \in C)$

$$\vec{f}(t) = \sum_{k=-N}^{N} C_k e^{\frac{2i\pi kt}{T}}$$

$$\vec{f}(t) = \sum_{k=-N}^{N} C_k (e^{\frac{2i\pi t}{t}})^k$$

C_k : est le k^{eme} coefficient de Fourier.



$\vec{u} = x\vec{i} + u\vec{j}$,$x =< \vec{u}.\vec{i} >$

$C_k =< f.e_k >$

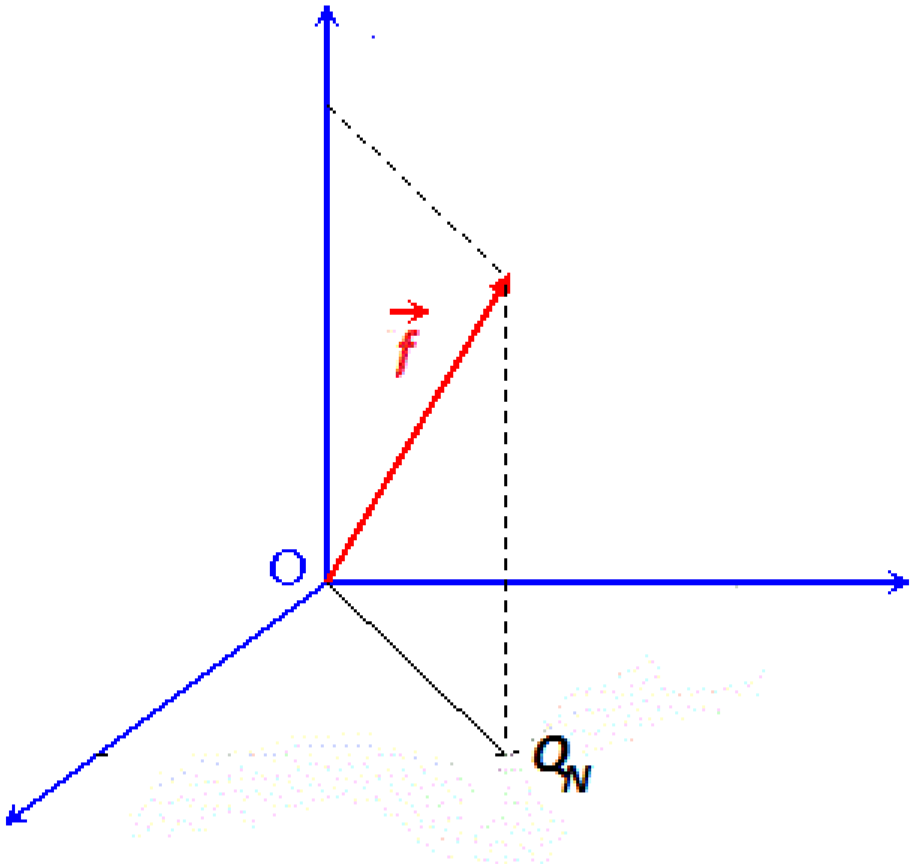
$$C_k(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{\frac{2i\pi kt}{T}}$$

théorème1 :
pour $f \in L_p^2$,il existe un unique polynôme dans τ qui réalise le minimum de $\| f - Q \|$, $Q \in \tau$
C_k est la projection f sur l'espace vectoriel de dimension finie τ_n (qui est fermé) on a donc :

$$Q_n = \Sigma C_k e^{\frac{2i\pi kt}{T}}$$

$$C_k = C_k(f) =< f, C_k >= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{\frac{-2i\pi kt}{T}}dt$$

le k^{eme} coefficient de Fourier complexe
Q_n une approximation de f



théorème 2 :

on a lim $\| f - Q_n \|_2 = 0$ ou encore :
lim $\| f - \Sigma C_k e^{\frac{2i\pi kt}{T}} \|_2 = 0$
c'est la convergence au sens de la norme $\| \|_2$
ou encore convergence au moyenne quadratique
en particulier on a :
$\| \Sigma C_k e^{\frac{2i\pi kt}{T}} \|_2 \longrightarrow 0$
car
$| \| f \|_2 - \| \Sigma C_k e^{\frac{2i\pi kt}{T}} \| | \leq | f - \Sigma C_k e^{\frac{2i\pi kt}{T}} | \longrightarrow 0$
la norme du vecteur projection est plus petite que la norme du vecteur initiale donc :
$\| Q_n \|_2 \leq \| f \|_2$
ou encore
$\Sigma | C_k |^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T | f(t) |^2 dt$ inégalité de Bessel
lorsque N $\longrightarrow +\infty$ on a l'identité de Parseval suivante :
lim $\Sigma | C_k |^2 = \frac{1}{T} \int_0^T | f(t) |^2 dt$
ou encore :

$\Sigma| C_k |^2 = \frac{1}{T}\int_0^T| f(t) |^2dt \ e^{\frac{2i\pi kt}{T}}$: harmonique de rang k
$| C_k |^2$: représente l'énergie de cette harmonie . l'interprétation physique de cette identité est comme suivant :
« L'énergie moyenne du signal est égale à la somme des énergies de cette harmonie de ces signaux élémentaires »
C'est une relation de conservation de l'énergie .
La série de Fourier de f qui est $\Sigma C_k e^{\frac{2i\pi kt}{T}}$converge en moyenne quadratique vers f ,et on a la relation de conservation de l'énergie.
Introduisons l'espace :

$$\boxed{\{L_p^1([0,T]) \ f : R \longrightarrow C, Tpriodiques, et\int_0^T | f(t) |dt < +\infty\}}$$

c'est l'espace des signaux de moyenne finie
on a :$L_p^2([0,T]) \in L_p^1([0,T])$

$$*soit\ f \in L_p^2([0,T]),\ mq\ f \in L_p^1([0,T])?$$

$\int_0^T 1. | f(t) |dt \leq \int_0^T 1^2dt\int_0^T| f(t) |^2dt$
$\int_0^T 1. | f(t) |dt \leq T\int_0^T| f(t) |^2dt$
on a $\int_0^T| f(t) |^2dt$ est finie car f$\in L_p^2$
donc $f \in L_p^2[(0,T)]$
remarque :
le fait que T soit fini est crucial

1.2 Convergence ponctuelle de série de Fourier :

soit $T > 0$

$$\boxed{L_p^1[o,T]=\{f : R\longrightarrow C, T\ périodique, \int_0^T \parallel f(t) \parallel dt<+\infty\}}$$

soit $f \in L_p^1([o,T])$,$\boxed{C_k(t) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{\frac{-2i\pi kt}{T}}dt}$
on a bien $C_k(f)$ a bien un sens pour $f \in L_p^1([o,T])$:
$| C^k(f) | < \frac{1}{T}\int_0^T | f(t) | dt < +\infty$,car $f \in L_p^1[o,T]$
on définit formellement la série de Fourier de f comme étant :

$$\Sigma C_k(f) e^{\frac{2i\pi kt}{T}}$$

-la première question qui s'oppose est la convergence de cette série, et lorsque elle converge (la limite dépend de (t)) qu'elle est la relation avec la somme et le signal de départ "t".
-nous avons vu que si $f \in L_p^2$ cette série converge au moyenne quadratique(au sens de la norme 2)vers$\rightarrow t$.
$L_p^1 > L_p^2$,on doit voir le comportement des C_k.

<u>proposition :REIMMAN LE BERGUE :</u>

$$\textbf{si } f \in L_p^2 \textbf{ alors : } \lim_{k\rightarrow+\infty} C_k(f) = 0$$

Démonstration :
on a :

$$C_k(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{\frac{-2i\pi kt}{T}} dt$$

$$e^{\frac{-2i\pi kt}{T}} = cos\frac{2i\pi kt}{T} - isin\frac{2i\pi kt}{T}$$

(n'a pas de limite à$\rightarrow +\infty$)
donc la suite $C_k(f)$ est bornée, supposons que f est C^1 sur $[0, T]$, une intégration par partie donne :

$$\left\{\begin{array}{r} u(t) = f(t) \\ v'(t) = e^{\frac{-2i\pi kt}{T}} \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{r} u'(t) = f'(t) \\ v(t) = \frac{-T}{2ik\pi}e^{\frac{-2i\pi kt}{T}} \end{array}\right.$$

$C_k(f) = \frac{1}{T}\left(\left[\frac{-T}{2i\pi k}f(t)e^{\frac{-2i\pi kt}{T}}\right]_0^T - \int_0^{T f'(t)} \frac{-T}{2i\pi k}e^{\frac{-2i\pi kt}{T}} dt\right)$
<u> majoration en module du crochet :</u>*

$$\left|\left[\frac{-T}{2i\pi k}f(t)e^{\frac{-2i\pi kt}{T}}\right]_0^T\right| = \frac{-T}{2i\pi k}\left[f(t)e^{2i\pi k} - f(0)\right] = 0(sifpriodique)$$

on a pas besoin de majorer car c'est nulle.
<u> majoration en module du crochet même si f n'est pas périodique :</u>*

$$\left|\left[\frac{-T}{2i\pi k}f(t)e^{\frac{-2i\pi kt}{T}}\right]_0^T\right| = |\frac{-T}{2i\pi k}\left[f(t)e^{2i\pi k} - f(0)\right]|$$

$$\left|\left[\frac{-T}{2i\pi k}f(t)e^{\frac{-2i\pi kt}{T}}\right]_0^T\right| \leqslant \frac{T}{2i\pi k}[f(t)+f(0)] \longrightarrow_{|k|\to+\infty} 0$$

<u>** majoration du 2^{eme} terme :*</u>

on pose : $I = \int_0^T \frac{-T}{2i\pi k}e^{\frac{-2i\pi kt}{T}}dt$

$$I = \left|\frac{Tf'(t)}{2i\pi k}\int_0^T e^{\frac{-2i\pi kt}{T}}dt\right| \leqslant \frac{T}{2\pi k}\int_0^T |f'(t)|dt$$

f est de classe C^1 sur $[0,T]$;f' est continue sur le segment $[o,T]$
donc elle est bornée

$$I \leqslant \frac{T}{2\pi}ksupp|f(t)|T \longmapsto_{|k|\to+\infty} 0$$

donc $I \longmapsto_{|k|\to+\infty} 0$ (donc on a besoin de périodicité)
si f n'est pas de C^1 sur $[0,T]$ on utilise un argument de dancite
$\forall f \in L_p^1[0,T]$ et pour $\varepsilon > 0$,$\exists f_\varepsilon$ de C^1

$$\| f - f_\varepsilon \|_{L^1} \longmapsto_{\varepsilon\longmapsto 0} 0$$

le résultat est vraie pour f_ε car de classe C^1 et un passage à la limite donne que le résultat est vraie pour f.

$$\left|\frac{1}{T}|f(t)-f_\varepsilon(t)|e^{\frac{-2i\pi kt}{T}}dt\right| \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)-f_\varepsilon(t)| = \frac{1}{T}\| f(t)-f_\varepsilon(t) \|_{L^1}$$

<u>***théorème de Dirichlet :***</u>

soit $f \in L_p^1[(0,T)]$,$f \simeq \Sigma C_k e^{\frac{2i\pi kt}{T}}$
si t_0 est tq $f(t_0^+) = \lim f(t)$ et $f(t_0^-) = \lim f(t)$ existent
et $f'(t_0^+)$,$f'(t_0^-)$ existent (f' présente en t_0 une discontinuité de première espèce).
alors la série de Fourier de fonction $\Sigma C_k(f)e^{\frac{2i\pi kt}{T}}$ converge vers $\frac{1}{2}[f(t_0^+)+f(t_0^-)]$.
en particulier,si f est continue en t_0 alors $\Sigma C_k(f)e^{\frac{2i\pi kt}{T}}$ converge vers f(t_0).
Il s'agit bien d'une convergence normale et donc uniforme $\longmapsto$ je récupère une fonction continue .
donc la somme est une fonction continue .

exercice :

** décomposer en série de Fourier le signal 2π-périodique*
f(x)=π-x ;0≤ $x \leq 2\pi$ (tracer le)
** étudier la convergence de la série :*

$$\{g(x)=\pi\text{-}x\ ;0\leq x \leq 2\pi \text{ et } 2\pi\text{-périodique} \\ g \text{ est pair}$$

(on connait le signal sur [−π,π],on complète par la sym)
remarque :
ces deux série sont identiques sur [0,π]

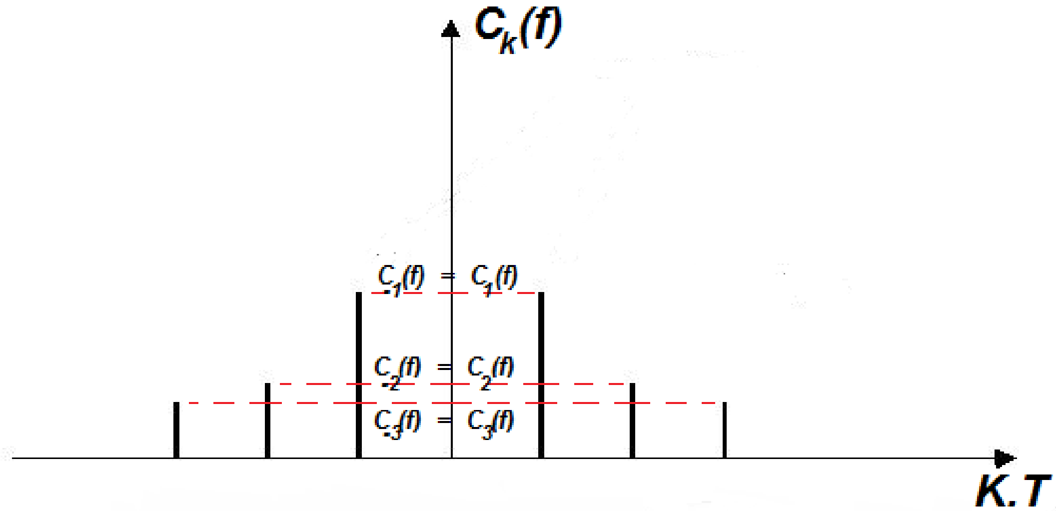
Corollaires :

1] :si f est continue sur R et si f présente des discontinuités de 1^{re} espèce (càd : la limite à droite et limite à gauche existent en tout points)alors la série de Fourier de f : $\Sigma C_k(f)e^{\frac{2i\pi kt}{T}}$ converge vers f(t) (f(t^+) $= f(t^-) = f(t)$).
En fait cette série converge uniformément vers f (ceci grace à la continuité de f), et on s'attend à ce que les coefficients c_k varient en $\frac{1}{k^2}$.
2] :Si f présente des discontinuités de 1^{re} espèce,ainsi que sa dérivée on s'attend à ce que les c_k varient en $\frac{1}{k^1}$ (au moins).
3] :si f,f' sont continues et f" présente des discontinuités de 1^{re} espèce,on doit s'attendre à ce que les c_k varient en $\frac{1}{k^3}$...
4] :* Si f est de classe C^∞ alors les $C_k(f)$ varie comme $\frac{1}{k^n}$, ∀ n càd la suite $C_k(f)$ est à décroissance rapide .
* Si f est de classe C^p alors $C_k(f)$ varie en $\frac{1}{k^p}$.
Supposons que f est de classe C^1 . Montrer que f' est aussi T-périodique .
$C_k(f') = \frac{1}{T}\int_0^T f'(t)e^{\frac{-2i\pi kt}{T}}dt.$
On recourt à une intégration par partie.
on pose$\Big\{ u(t) = e^{\frac{-2i\pi kt}{T}}dtv'(t) = f'(t) \Longrightarrow \Big\{\ u'(t) = -\frac{2i\pi k}{T}e^{\frac{-2i\pi kt}{T}}dt$
$v(t) = f(t)$
$C_k(f') = \frac{1}{T}[f(t)e^{\frac{-2i\pi kt}{T}}]_0^T + \frac{2ik\pi}{T^2}\int_0^T f(t)e^{\frac{-2i\pi kt}{T}}dt$
$C_k(f') = \frac{2ik\pi}{T}.\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{\frac{-2i\pi kt}{T}}dt$
$C_k(f') = \frac{2ik\pi}{T}.C_k(f)$
$C_k(f^p) = (\frac{2ik\pi}{T})^p.C_k(f)$
En particulier , on a :
$|C_k(f)| \leq (\frac{T}{2ik\pi})^p C_k(f^p)$
si f est de classe C^p alors $\mid (f^p(t)) \mid\leq M_p$,$\forall t \in [0,T]$
de sorte que $|C_k(f)| \leq M_p(\frac{T}{2\pi})^p\frac{1}{|k|^p} = c_p.\frac{1}{|k|^p}$

avec $c_p = M_p(\frac{T}{2\pi})^p$
càd $C_k(f)$ varie comme $\frac{1}{|k|^p}$
en particulier si f est de C^∞ et donc $C_k(f)$ est à décroissance rapide

En résumé :

, les propriétés analytiques(prpts de régularité) du signal se reflètent sur sa représentation discrète que sont les C_k.
le thm Dirichlet est un résultat assez général qui permet de reconstituer le signal d'origine à partir de ses coefficients.
De même les prpts géométriques du signal se lisent sur les coefficients .
1*.-*linéarité :* L'app : f(t) $\longrightarrow C_k(f)$ est linéaire
représentation temporelle$\longrightarrow$ représentation fréquentielle(discrète)
$C_k(\lambda f + \mu g) = \lambda C_k(f) + \mu C_k(g)$
2*.- Si f est paire alors $C_k(f)$ est réel.
3*.-Si f est impaire alors $C_k(f)$est imaginaire pur.
4*.-Supposons que le signal f est réel (à valeurs dans R).
C_k ?
$C_k(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{\frac{-2i\pi kt}{T}}dt.$
$C_k(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{\frac{2i\pi kt}{T}}dt.$
$C_k(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{\frac{2i\pi kt}{T}}dt.$
$C_k(f) = C_{-k}(f)$
le spectre $C_k(f)$ est donc hermétique (forme hermitienne)
$\Rightarrow |C_{-k}(f)| = |C_k(f)|$:le module de $C_k(f)$ est paire
$\Rightarrow argC_{-k}(f) = -argC_k(f)$:arg $C_k(f)$ est impaire
on trace $C_k(f)$ en fonction de k.T :spectre énergétique de f



Coefficient d'ondulation et taux d'harmonique

On, définit :

**** le taux d'harmonique :***

$$\tau^2 = \frac{\Sigma|C_k|^2}{|C_1|^2}$$

**** le coefficient d'ondulation :***

$$\eta^2 = \frac{\Sigma|C_k|^2}{|C_0|^2}$$

.Il s'identifie à une énergie

.Ce sont tous les deux des rapports d'énergie

Le taux d'harmonique compare (au sens de l'énergie) la puissance des harmoniques de rang$\geq$ 2 par rapports à la puissance de l'harmonique de rang 1 :

le fondamental $\longrightarrow$ un signal sinusoïdal ou monochromatique

C'est une comparaison au sens de l'énergie des harmonique de rang$\geq$1 par rapport au courant constant ,c'est le courant moyen $C_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$

●***remarque :*** L'intégration sur [0,T] n'est pas en soi pertinente .

En effet,tout ce qu'on a fait peut être effectué sur un intervalle de longueur T.

$C_k(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{\frac{-2i\pi kt}{T}}dt$= $C_k(f) = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)e^{\frac{-2i\pi kt}{T}}dt$.

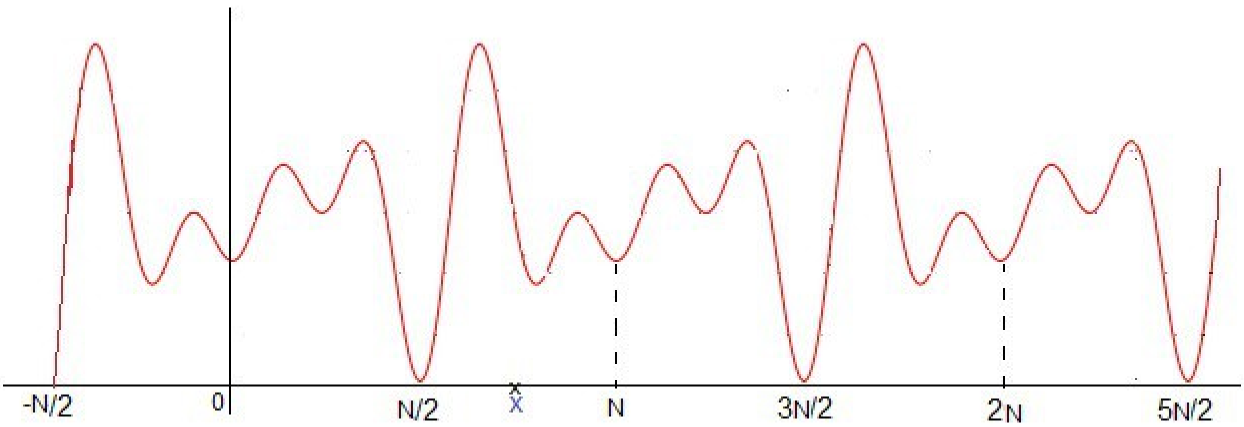
Chapitre 2

Transformation de Fourier :

partant d'un signal qlq on peut si l'on désir app la théorie on peut le périodisé càd le rendre périodique

exemple :

si f déf sur $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$



$x \in [\frac{N}{2}, \frac{3N}{2}]$ on pose $x - N \in [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$ $f(x) = f(x - N)$

$$C_k(f) = \frac{1}{N} \int_{\frac{-N}{2}}^{\frac{N}{2}} f(t) e^{\frac{-2i\pi kt}{T}} dt$$

on considère alors la transformation suivante

$$\widehat{f}(v) = \int_{+\infty}^{-\infty} f(t) e^{\frac{-2i\pi kt}{T}} dt$$

c'est la transformation de Fourier de f

v : le rôle de la fréquence

$f(t) \longrightarrow \widehat{f}(v)$

espace temporel$\longrightarrow$espace fréquentiel

on pose :

$$L^1(R) = \{f : R \longrightarrow C, \|f(t)\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty = \int_R |f(t)|dt\}$$

la transformée de Fourier de $f \in L^1(R)$,est :

$$Ff(\nu) = \widehat{f(\nu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\nu t}dt$$

on a :

$$|\widehat{f(\nu)}| \leqslant |\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)|dt$$

donc :

$$sup|\widehat{f(\nu)}| \leqslant M = |\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)|dt = \| f(t) \|_1$$

donc $\widehat{f}$ est bornée .On écrit $\widehat{f} \in L^\infty$, de sorte

$$F : L^1(R) \longmapsto L^\infty(R)$$

$$f \longmapsto Ff = \widehat{f} : \nu \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt$$

F : est linéaire :

$$F(\lambda f + \mu g) = \lambda F(f) + \mu F(g)$$

-Effet d'une translation :

si $f \in L$,et $g(t) = f(t-\tau)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-\tau)| = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|du, (u = t - \tau)$$

donc :$g \in {}^1R$, de plus $\|g\|_1 = \|f\|_1$

$$\widehat{g(\nu)} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2i\pi\nu t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)e^{-2i\pi\nu t}dt$$

$$= \int_{+\infty^{-\infty}} f(t) e^{-2i\Pi\nu u+\tau} dt$$

$$= e^{-2i\Pi\nu\tau} \widehat{f}(\nu)$$

$$f(t-\tau) \rightleftharpoons e^{-2i\Pi\nu\tau} \widehat{f}(\nu)$$

espace temporel espace fréquentiel

$$f(at) \rightleftharpoons ?$$

$$f'(t) \rightleftharpoons ?$$

$$f^p(t) \rightleftharpoons ?$$

$$? \rightleftharpoons \frac{\partial \widehat{f}(\nu)}{\partial}$$

$$? \rightleftharpoons \frac{\partial \widehat{f}(\nu)}{\partial}$$

$$F : L^1(R) \longrightarrow L^\infty(R)$$

$$f \longrightarrow \widehat{f} = F \quad f : R \longrightarrow C$$

$$\nu \longrightarrow \widehat{f}(\nu)$$

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{+\infty}^{-\infty} f(t) e^{-2i\Pi\nu t} dt$$

F est linéaire
F est continue :

$$||Ff||_{L^\infty(R)} \qquad \leq \qquad ||f||_{L^1}$$

continuité :

$$||Ff - F - f_0|| = ||F(f - f_0)|| \leq 1 - ||f - f_0||$$

donc F est 1- lipschitzienne donc **continue**

$$\boxed{\textbf{Fest linéaire continue}}$$

Lemme de Riemann-Lebesgue :

$$lim_{|\nu|\to+\infty}\widehat{f}(\nu) = 0$$

2 :Formule d'échange :

-Effet d'une translation ou d'échange dans le temps :

$$g(t) = f(t-\tau)$$

$$\widehat{g}(\nu) = e^{-2i\Pi\nu\tau}\widehat{f}(\nu)$$

$$f(t-\tau) \rightleftharpoons e^{-2i\Pi\nu\tau}\widehat{f}(\nu)$$

-Effet d'un changement d'échelle (dilatation-compression)
$a \in R$:

$$g(t) = f(at) \in L^1 \Rightarrow g{\in}l^1$$

$$\widehat{g}(\nu) = \int_{+\infty}^{-\infty} g(t)e^{-2i\Pi\nu t}dt$$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} f(at)e^{-2i\Pi\nu t}dt$$

on va procéder par un changement de variable :

$$\int_{+\infty}^{-\infty} f(at)e^{-2i\Pi\nu t}dt$$

posons at=u

$$\frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} f(u)e^{-2i\Pi\nu\frac{1}{a}u}du$$

-Dilatation compression

$$\boxed{f(at){\rightleftharpoons}\frac{1}{a}\widehat{f}(\frac{\nu}{a})}$$

Une compression ou une dilatation dans l'espace temporelle se traduit par inverse dans l'espace fréquentielle

$$a \mapsto \frac{1}{a}$$

-Effet d'une deviation :

$g(t) = f'(t)$

$$\widehat{g}(\nu) = \int_{+\infty}^{-\infty} g(t)e^{-2i\Pi\nu t}dt$$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} f(t)e^{-2i\Pi\nu t}dt$$

$$\begin{cases} U' = f'(t) \\ V = e^{-2i\Pi\nu t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = f(t) \\ V' = -2i\pi\mu e^{-2i\Pi\nu t} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-2i\pi\nu\tau}dt = \left[f(t)e^{-2i\pi\nu\tau}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} 2i\pi\nu f(t)e^{-2i\pi\nu\tau}dt$$

$\left|\left[f(t)e^{-2i\pi\nu\tau}\right]_{-A}^{A}\right| = |f(A) + f(-A)|$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty$$

$\Longrightarrow f$: petite à l'infinie

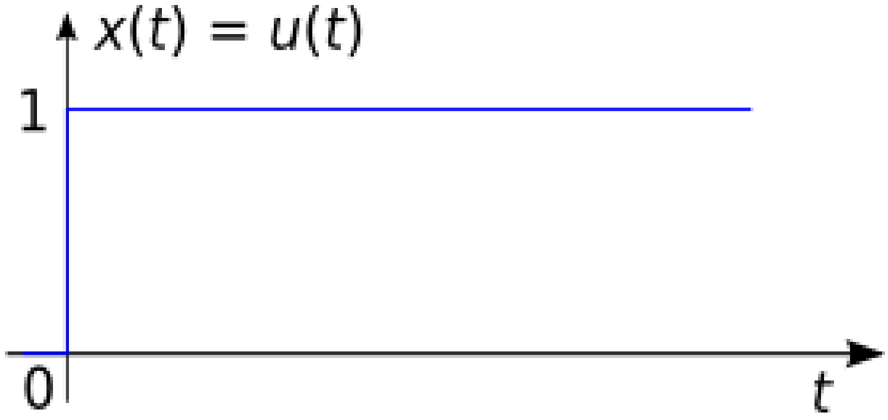
Exercice :

$f \in L^1, et, f'(t)$ *continue*

-*prouver que* $lim_{|t|\to+\infty} f(t) = 0!$

Exemple :

quand on branche un :
napartient pas a $L^1(R)$
$U \notin L^1(R)$



$$f'(t) \rightleftharpoons 2i\pi\nu\widehat{f(\nu)}$$

$$f^k(t) \rightleftharpoons (2i\pi\nu)^k\widehat{f(\nu)}$$

une dérivation d'ordre k, dans l'espace temporel se traduit par une multiplication monomoniale d'ordre$k$,dans l'espace fréquentiel.

(ici $f, f', f", ..., f^k \in L^1$, donc "petites" à l'infinie)

$$\widehat{f(\nu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt$$

on a envie d'intervertir l'intégration et la dérivation.

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \nu}\int_{+\infty}^{-\infty} f(t)e^{-2i\Pi\nu t}dt$$

-apres justification convergence uniforme

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} f(t)(-2i\Pi t)e^{-2i\Pi\nu t}dt$$

$$= \widehat{g}(\nu)$$

$$\boxed{f(t)(-2i\Pi t) \rightleftharpoons \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \nu}}$$

$$\boxed{f(t)(-2i\Pi t)^k \rightleftharpoons \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \nu^k}}$$

effet d'une **modulation**

$$e^{-2i\Pi\nu_0 t}\ f(t) = g(t) \quad (f \in L^1 \Rightarrow g \in L^1)$$

$$\widehat{g}(\nu) = e^{-2i\Pi}\nu_0 t f(t) e^{-2i\Pi\nu t} dt$$

$$= e^{-2i\Pi}(\nu - \nu_0) t f(t) dt$$

$$= \widehat{f}(\nu - \nu_0) dt$$

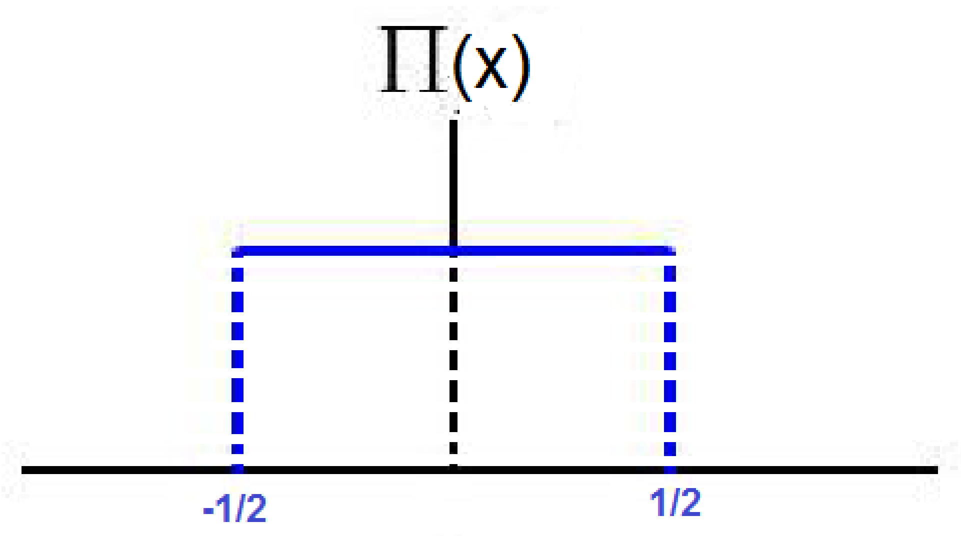
$$e^{-2i\Pi} f(t) \rightleftharpoons \widehat{f}(\nu - \nu_0)$$

Une modulation dans l'espace temporelle va se traduire par une translation dans l'espace fréquentielle

exemple

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 si |x| \leqslant \frac{1}{2} \\ si \quad non \quad 0 \end{cases}$$

Signal porté



Appartient-il à L^1 ?

$$\int_{+\infty}^{-\infty} |\Pi(x)| dx = \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} 1 dx = 1 \leqslant +\infty$$

$donc\ \ \Pi \in L^1\ \ \widehat{\prod}$ a un sens : $\widehat{\prod} = \int_{-\infty}^{\infty} \prod(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$

$$\widehat{\prod} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2i\pi\nu t} dt = \left[\frac{e^{-2i\pi\nu t}}{2i\pi\nu}\right]_{-1/2}^{+1/2} = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}, (pour \nu \neq 0)$$

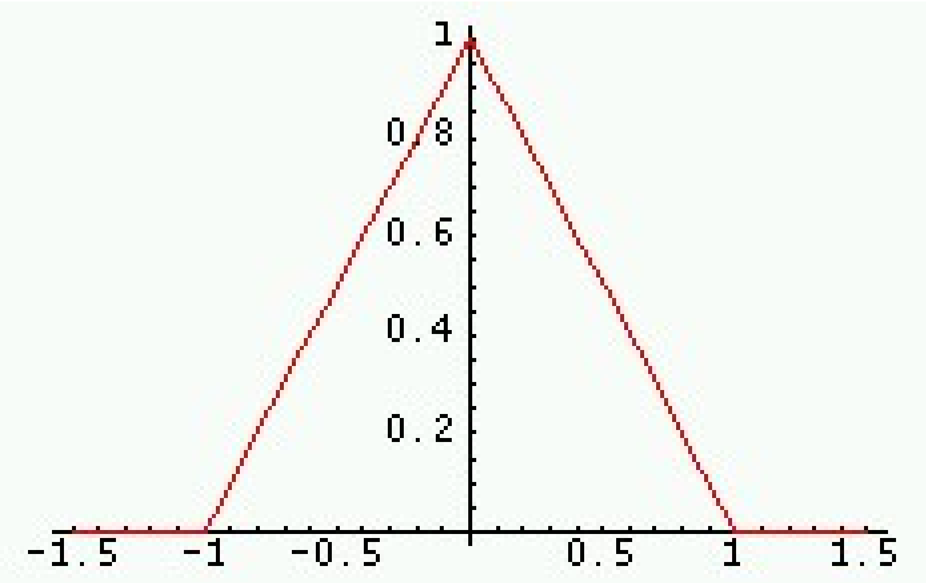
(pour $\nu = 0$)

$$\int_{-1/2}^{1/2} \prod(t) e^{-2i\pi\nu t} dt = \int_{-1/2}^{1} ??dt = 1$$

$$\widehat{\prod} \rightleftharpoons \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}$$

$$\lim_{\nu \to 0} \widehat{\prod}(\nu) = 1 = \widehat{\prod}(0); \widehat{f(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

2-signal triangulaire :



$$f(x) = \begin{cases} 0, si|x| > 1 \\ 1 - |x| si|x \leqslant 1| \end{cases}$$

$^{*}\bigwedge \in L^1$

$$\hat{\bigwedge} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bigwedge(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$$

$$I = J + K = \int_{-1}^{0} (1+x) e^{-2i\pi\nu t} dt + \int_{0}^{1} (1-x) e^{-2i\pi\nu t} dt$$

$$f(x)=\left\{\begin{array}{r}u=1+x\\ v'=e^{-2i\pi\nu t}\end{array}\right. \Rightarrow f(x)=\left\{\begin{array}{r}u'=1\\ v=\frac{-1}{2i\pi\nu}e^{-2i\pi\nu t}\end{array}\right.$$

$$I=\left[-(1-x)\frac{-1}{2i\pi\nu}e^{-2i\pi\nu t}\right]_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}e^{-2i\pi\nu t}dt$$

$$T=0+\frac{-1}{2i\pi\nu}\left[\frac{e^{-2i\pi\nu t}}{2i\pi\nu}\right]_{-1}^{0}$$

Interprétation des formules d'échange :

$$f^k(t)\rightleftharpoons(2i\pi\nu)^k\widehat{f}(\nu)$$

Si $\forall i$ de 1 à k ,$f^i\in L^1$

et on a

$$F(f^k)(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty}f^k(t).e^{-2i\pi\nu t}dt$$

$$F(f^k)(\nu)=(2i\pi\nu)^k\widehat{f}(\nu)$$

$$\Longrightarrow(2\pi\mid\nu\mid)^k\mid\widehat{f}(\nu)\mid\leq\int_{-\infty}^{+\infty}\mid f^k(t)\mid dt=\parallel f^k\parallel_1$$

on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mid f^k(t)\mid dt\quad estfini$$

de sorte que : $\mid\widehat{f}(\nu)\mid\leq\frac{\|f^k\|_1}{(2\pi|\nu|)^k}$

donc $\widehat{f}$ décroit sur $\frac{1}{|\nu|^k}$ càd :$k\nearrow$(f est réguliére)+$\widehat{f}$ décroit rapidement (f régulière :$C^1,C^2,C^3....,C^k$), en particulier si f est de C^∞

alors on a : (*) $\forall$ k càd $\widehat{f}$ est a décroissance rapide .

$$(-2i\pi t)^kf(t)\rightleftharpoons\frac{d^k}{d\nu^k}[\widehat{f}(\nu)]$$

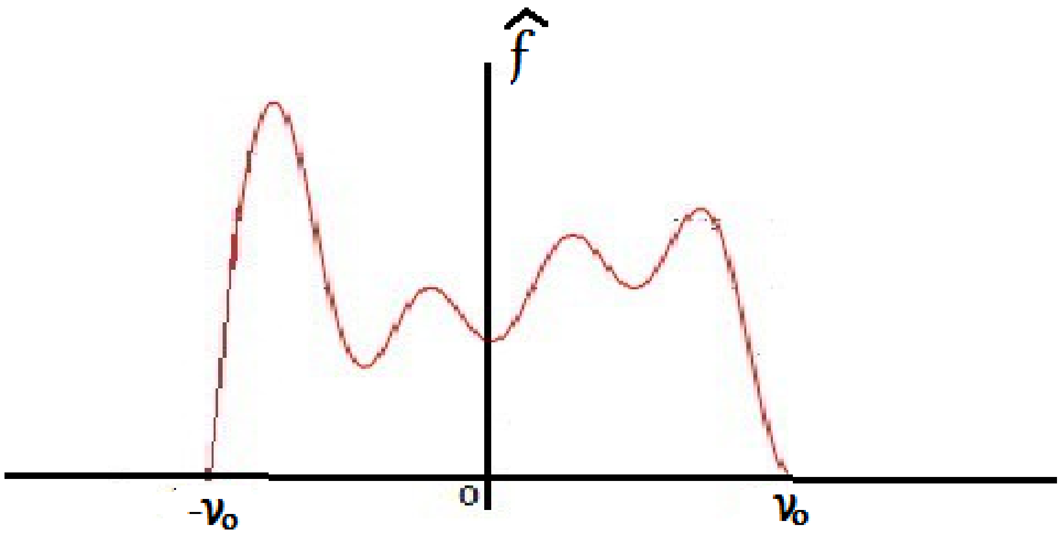
formule valable si f(t)$\in L^1\Longrightarrow t^kf(t)$ petite à l'infinie

1] $t^k f(t) \in L^1 \Longrightarrow \widehat{f}$ est dérivable à l'ordre k et

$$| \frac{d^k}{d\nu^k}[\widehat{f}(\nu)] | \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi t)^k \mid f(t) \mid dt$$

2] $t^k f(t) \in L^1 \Longrightarrow f$ décroit en $\dfrac{1}{|t|^2}$

plus f décroit à $l'\infty$, plus $\widehat{f}$ régulière
En particulier :
Si f est à décroissance rapide alors $\widehat{f}$ est de classe C^∞
ce sont ces interprétations qui vont justifiées l'introduction de l'espace f espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide aussi que toutes leurs dérivées.
Un signal f est à bande si son spectre $\widehat{f}$ est a support compacte (le spectre de f est borné).
Autrement dit $\widehat{f}$ s'annule en dehors d'un compact . En particulier : $\widehat{f}$ est à décroissance rapide , alors f est de C^∞



Application des formules de l'espace de Schwartz
calcul du spectre d'un signal Gaussien :

$$f(x) = e^{-\pi x^2}; f(x) = (-ax^2, a \geq 0$$

$$f \in L^2 car \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx, (\sum e^{-\pi x^2})$$

$$\lim x^2 e^{-\pi x^2} = 0 \Longleftrightarrow \exists x_0, x \geq x_0$$

$$\Longrightarrow x^2 e^{-\pi x^2} \leq 1$$

$$\Longrightarrow e^{-\pi x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\lim x^2 e^{-\pi x^2} = 0 \Longleftrightarrow \exists A > 0, \mid x \mid > A \Longrightarrow \mid x \mid^2 e^{-\pi x^2} \leq 1$$

$$x > A \Longrightarrow e^{-\pi x^2} \leq \frac{1}{\mid x \mid^2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} cv \Longleftrightarrow \alpha > 1$$

alors :

$$f \in L^1; I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx \quad et\ de\ Gauss$$

-1ére méthode :

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi\nu x} dx$$

par changement de variable .

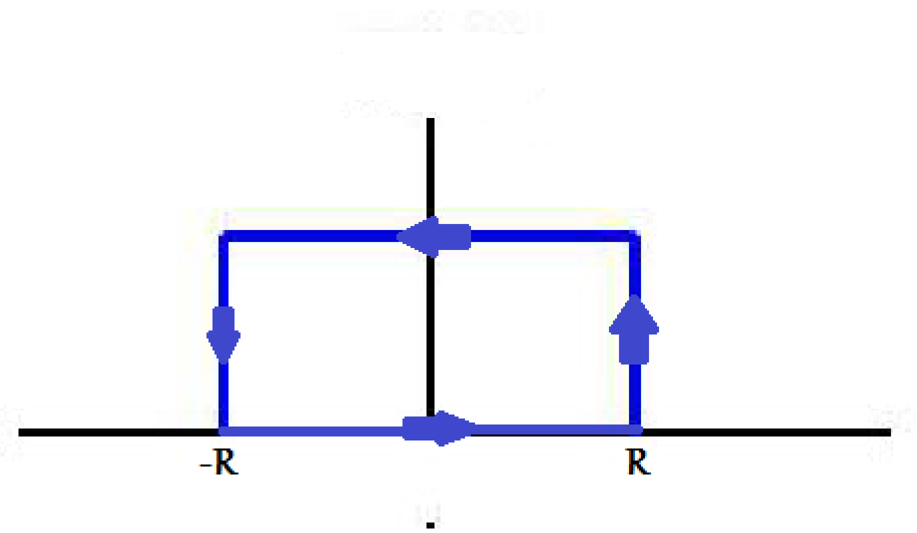
méthode des résidus

$$u = x\sqrt{\pi}$$

$$du = \sqrt{\pi} x dx$$

$$\Longrightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} du$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} dx = 1$$



-2ème méthode des résidus

On remarque que le signal f satisfait à une equation diff de 1 ére ordre
.

$$f'(x) = -2\pi x e^{-\pi x^2}, y' + 2\pi xy = 0$$

$$f'(x) + 2\pi x f(x) = 0$$

$$F(f'(x) + 2\pi x f(x)) = F0 = \widehat{0} = 0$$

$$(2i\pi\nu)\widehat{f}(\nu) - \frac{1}{i}.\frac{d}{d\nu}\widehat{f}(\nu) = 0$$

$$\frac{d}{d\nu}\widehat{f}(\nu) + 2\pi\nu\widehat{f}(\nu) = 0$$

$$\Longrightarrow \widehat{f}(\nu) = ke^{-\pi\nu^2}$$

car la structure des solutions est un espace de dimension 1, c'est une droite vectorielle

k= ? ;$\widehat{f}(0) = k \Longrightarrow k = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = \sqrt{\pi}$

d'ou :

$$\widehat{f}(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$$

ou encore :

$$e^{-\pi x^2} \rightleftharpoons e^{-\pi\nu^2}$$

le spectre d'un signal gaussien est un signal gaussien . On dit que $e^{-\pi x^2}$ est un **signal auto transformable** .

$$f(x) = e^{-ax^2} \Longrightarrow f'(x) = -2axf(x).$$

$$f'(x) + 2axf(x) = 0$$

$$\hookrightarrow\Longrightarrow (2i\pi\nu)\widehat{f}(\nu) + \frac{2a}{-2i\pi}\frac{d}{d\nu}\widehat{f}(\nu) = 0$$

$$\Longleftrightarrow (2i\pi\nu)\widehat{f}(\nu) + \frac{ai}{\pi}\frac{d}{d\nu}\widehat{f}(\nu) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{d}{d\nu}\widehat{f}(\nu) + \frac{\pi}{a}(2\pi\nu)\widehat{f}(\nu) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{d}{d\nu}\widehat{f}(\nu) + \frac{2\pi^2\nu}{a}\widehat{f}(\nu) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \widehat{f}(\nu) = ke^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}}$$

$$k = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$$

reconstruction de signal à partir de son spectre-Formule d'inversion :
parler d'une formule d'inversion pour f relere d'une contradiction car

$$F : L^1 \longrightarrow L^\infty \neq L^1$$

(ce n'est pas le même espace à priori L^∞ est plus petit que $L^{`1}$)
Il fautdonc inposer des hypotheses supp sur le spectre . alors on suppose :
$f \in L^1 tq \widehat{f} \in L^1$(donc $\widehat{f} \in L^\infty \bigcap L^1$)
on a la formule suivante;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\nu)e^{2i\pi\nu x}d\nu = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

analogie dans le cas discret avec :

$$\sum C_n(f)e^{2i\pi nx} = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

En particulier : si de plus f est continue en x. Alors ,on a :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\nu)e^{2i\pi\nu x}d\nu$$

Formule d'inversion
ou
Formule de reconstraction du signal à partir de son spectre
on a :

$$f(-x) = \int \widehat{f} e^{-2i\pi\nu x} d\nu$$

$$f(-x) = F(f')(x)$$

Autrement dit :

$$\widehat{\widehat{f}} = f(-x)$$

Application :
calculer la transformée de Fourier de $\frac{sinx}{x}$
le signal porte :

$$\pi(x) = 1 \quad si \mid x \mid \leq \frac{1}{2}$$

$$\pi(x) = 0 sinon$$

On a deja vu que :

$$\pi(x) \rightleftharpoons \frac{sin\pi\nu}{\pi\nu}$$

$$\frac{sin\pi x}{\pi x} \rightleftharpoons \pi(-\nu) = \pi(\nu)$$

$$\frac{sin\pi x}{x} \rightleftharpoons \pi\pi(\nu)$$

on pose :

$$f(x) = \frac{sin\pi x}{x}$$

$$f(\frac{x}{\pi}) = \frac{\pi sinx}{x}$$

Calculer :

$$e^{-a|x|} \rightleftharpoons ?$$

$$u(x)e^{-ax} \rightleftharpoons ?$$

$$f(ax) \rightleftharpoons \frac{1}{\mid a \mid}\widehat{f}(\frac{\nu}{a})$$

$$\pi(\frac{x}{\pi}) = f(\frac{x}{\pi}) \rightleftharpoons \pi\widehat{f}(\pi\nu)$$

$$f(\frac{x}{\pi}) \rightleftharpoons \pi\pi(\pi\nu))$$

Espace ξ_R

ξ_R : espace vectoriel des fonctions C^∞ à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées.

$$\xi \subset \xi \Longleftrightarrow : \begin{cases} 1 * \xi, \, de\,classe\, C^\infty \\ \\ 2 * \forall p \in N, \forall q \in N \quad \lim_{|x| \to +\infty} x^p \xi(x)^q = 0 \end{cases}$$

(chaque dérivée de ξ absorbe toutes les puissances et dans tous les polynômes)

$x \longmapsto e^{-ax^2} \in \xi$(les signaux gaussiens sont dans ξ)

$$\xi^n = P_n(x) e^{-ax^2}$$

$$x \longmapsto e^{-x} \quad \notin \xi$$

$$x \longmapsto e^{-|x|} \quad \notin \xi \quad (non\ C^\infty)$$

$$x \longmapsto \frac{1}{ch(x)} \ \sim_{+\infty} \ 2e^{-x}$$

$$\sim_{-\infty} \ 2e^{x}$$

donc :

$$x \longmapsto \frac{1}{ch(x)} \in \xi$$

**** caractéristique de ξ :***

1)-$\xi \subset L^1(R)$,$\xi(R) \subset L^2(R)$

preuve :

$\xi \in \xi(R)$

on a :$\lim_{|x \to +\infty|} (1 + x^2)\varphi(x) \ = 0$

$\exists A > 0, \quad |x| > A \quad \Rightarrow \quad (1 + x^2)|\varphi(x)| \leqslant A$

ou encore $|\varphi(x)| \ \leqslant \ \frac{A}{1+x^2}$ $comme\ :$ $\int \frac{dx}{1+x^2} < +\infty$ donc :$\int_R |\varphi(x)| dx < +\infty$ $cad :$ $\varphi \in L^1(R)$

$$| \ \varphi(x) \ |^2 \leq \frac{A^2}{1 + x^2} \quad et \quad \int \frac{dx}{1 + x^2}$$

ATTENTION :

$L^2(R) \nsubseteq L^1(R)$; $L^1(R) \nsubseteq L^2(R)$

donc :

$$\int_R | \ \varphi(x) \ |^2 \ dx < +\infty$$

Si $\varphi \in \varphi$ alors $\widehat{\varphi} = F\varphi$ existe dans L^∞ et $\in C^0$;(Rieman...)
2*)-
$\widehat{\varphi} \in \varphi$ est à decroissance rapide $\Longrightarrow \widehat{\varphi} \in C^\infty$
φ $C^\infty \Longrightarrow \widehat{\varphi}$ à decroissance rapide.
Exo :
prouver que :$\mid \nu \mid^k .\widehat{\varphi}(\nu)^q \longmapsto 0$ qd :
$\mid \nu \mid \longmapsto +\infty$(utiliser correctement les formules d'échanges).
L'espace φ est stable par F càd : $Ff \longmapsto f$
. 3*)-
RESULTAT FONDAMENTAL :
$F : \varphi \longmapsto \varphi$ est un automorphisme son automorphisme réciproque est :
$\overline{F} : \varphi \longmapsto \varphi$
$f \longmapsto \overline{F}.f$

$$\overline{F}f(x) = \int f(x)e^{2i\pi u}du.$$

Ceci résulte de la formule de réciprocité.

$$f(x) = \int \widehat{f}(\nu).e^{2i\pi x\nu}d\nu$$

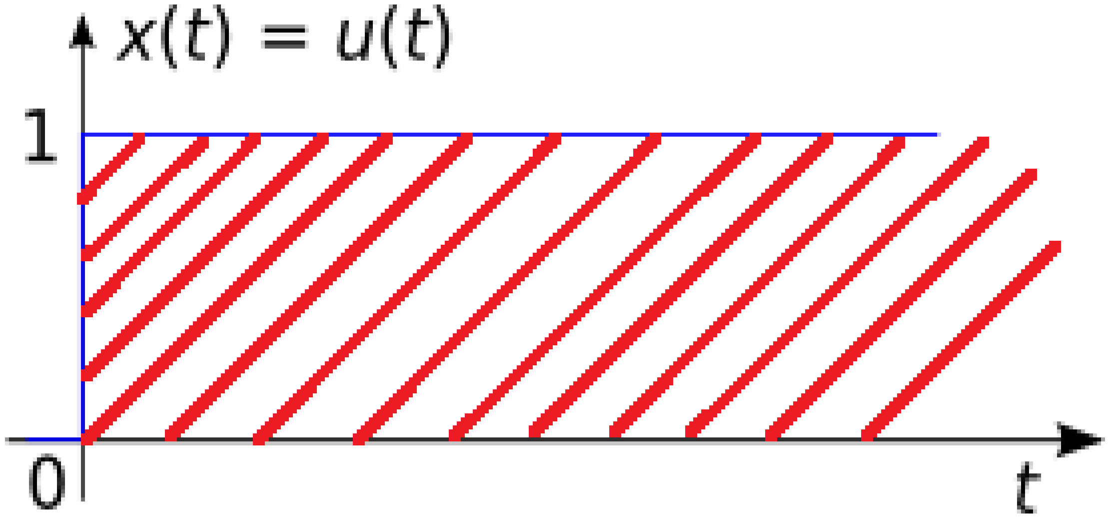
$$f(x) = \int (Ff)(\nu).e^{2i\pi x\nu}d\nu$$

valable car f : $\widehat{f}$sont dans φ et donc dans L^1.
$*L^1 \cap L^2$ dense dans L^2
donc si $f \in L^2, f = lim f_n avec f_n \in L^1 \cap L^2$ Ff est une limite.On l'appelle **transformée de Fourier Plancheval** .
la formule de reciprocité :
$\widehat{\widehat{f}} = f(-x)$
valable si f et $\widehat{f}$ sont dans L^1
En particulier si $f \in L^1 \bigcap L^2$ lequel est dense dans L^2 de sorte que $\widehat{\widehat{f}} = f(_x)$est valable aussi dans L^2 :
Ecrire $f = lim f_n, f_n \in L^1 \bigcap L^2$
$\Longrightarrow \widehat{f} = lim\widehat{f_n}$
$\widehat{\widehat{f}}(x) = f_n(-x) \Longrightarrow lim\widehat{\widehat{f}}(x)_n = lim f_n(-x)$
Ceci est vrai,en particulier,dans φ cé : $\widehat{\widehat{f}} = f(-x)$
REMARQUE :
On a : $\varphi(R) \supset D(R)=$ espace des fcts C^∞ à support compact.
lieu entre transformée de Fourier et moments d'une v.a (Théorie des moments).

Chapitre 3

Transformation de Laplace :

1)-soit $t \longmapsto f(t)$ un signal causal c'est à dire $\forall t < 0, f(t) = 0$,ce qui se vient au même de dire $u(t).f(t) = f(t)$ où U fonction échelon
exemple :



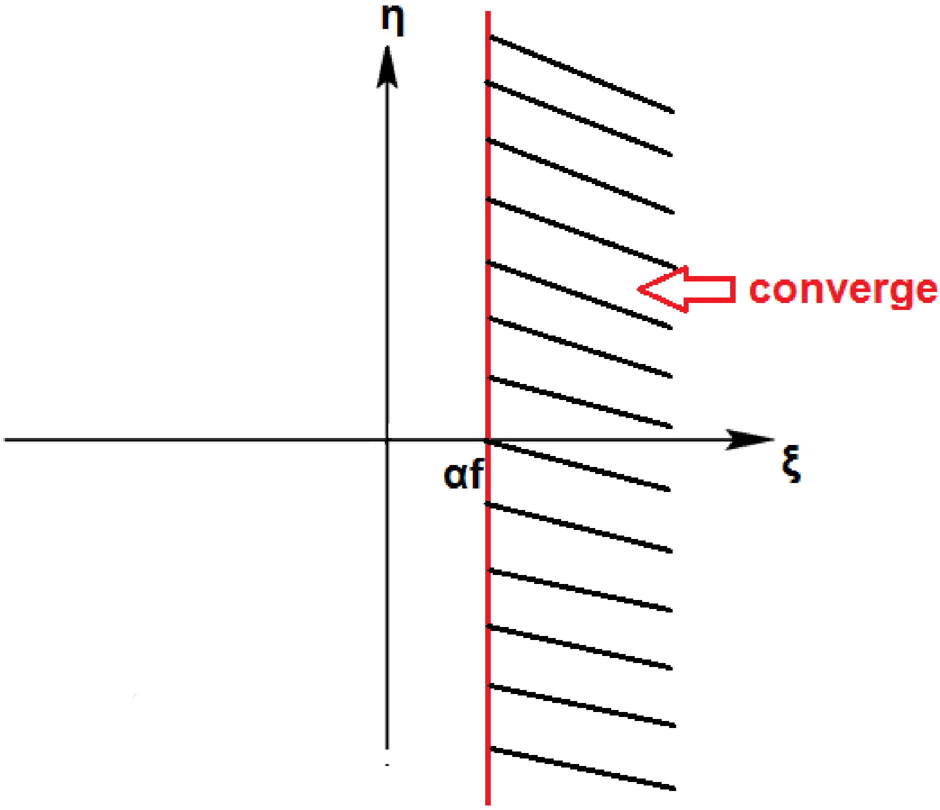
$t \longmapsto u(t)$,est causal ni d'énergie finie ni sommable.

$$[\notin L^1 \quad et \quad \notin L^2]$$

$p \in \; C$ on pose :

$$\begin{aligned} F(p) &= \xi(R) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) \end{aligned}$$

lorsque l'intégrale converge
proposition :
$\exists$ *un nombre* $\alpha_f \in [-\infty \,, +\infty]$, tq : si $Re(p) > \alpha_f$: $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$ converge si $Re(p) < \alpha_f$: $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$ diverge



le demi plan $\{p \in C, Re(p) > \alpha_f\}$ est appelé le demi plan de sommabilité de ξ_f :Transformée de Laplace de f.

α_f :*abscisse de sommabilité de* $\xi_f = F$

Terminologie :

on écrit

$$f \sqsupset \xi_f = F$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$$

origonal — image

régime temporel — régime exponentiel(image de Laplace)

exemple :

$\xi_u(p) \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt, (p = \epsilon + i\ \eta)$

$|e^{-pt}| = |e^{-\epsilon t e^{-ipt}}| = e^{-\epsilon t} = e^{-Re(p)t}$

l'intégrale converge si $Re(p) > 0$

0 *est l'abscisse de sommabilité*(α_f) *de* ξ_u*,et :*

$$\xi_u(p) = \frac{1}{p} \ \ et\ \ on\ \ a : U \sqsupset \frac{1}{p}$$

Remarque importante :
supposons que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\xi} f(t)dt$$

converge absolument si
$Re(p) > \xi_0$

$$\begin{aligned} \xi > \xi_0, 0 \leqslant |e^{-pt}f(t)| &= |e^{-\xi t}f(t)| \\ &\leqslant e^{-\xi t}|f(t)| \\ (e^{-\xi t} &\leqslant e^{-\xi_0 t}) \end{aligned}$$

comme : $\int e^{-\xi_0 t}|f(t)|dt$ converge alors(théorème de comparaison)
$\int e^{-pt}f(t)dt$ converge et donc α_f
$\alpha_f = inf[\xi \in R \int_0^{+\infty} e^{-\xi t}f(t)dt\ converge]$
Il existe des signaux f pour les quels $\alpha_f = +\infty$

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\ diverge$$

-posons : $f(t) = U(t)e^t \quad \xi_f(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^t dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(p-1)}dt$
$= \frac{1}{p-1}$

-image $t \longmapsto e^{at}$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-pt}dt &= \int_0^{+\infty} e^{-t(p-a)} \\ &= \frac{1}{p-a}\ si\ Re(p) > a \end{aligned}$$

$$U(t)e^{at} \sqsupset \frac{1}{p-a}$$

si $a \in C$:$Re(p) > Re(a)$

$$U(t)\cos(\omega t) \sqsupset \frac{1}{2}(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega})$$

$$U(t)\sin(\omega t) \sqsupset \frac{1}{2}(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega})$$

si $f(t)$ est causale et admet un développement en série entière :

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \frac{a_2 t^2}{2!} + \ldots + \frac{a_{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots$$

$$\sqsupset \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{p^n} + \ldots$$

$U(t)\cos(\omega t) = U(t)\left[1 - \frac{\omega^2 t^2}{2} + \frac{\omega^4 t^4}{4!} + \ldots\right]$
$= \frac{1}{p}.\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{p^2}}$
$= \frac{p}{p^2+\omega^2}$
$U(t)\sin(\omega t) = U(t)\left[\omega t - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \frac{(\omega t)^5}{5!} + \ldots\right]$
$\frac{\omega}{p^2}\left]1 - \frac{\omega^2}{p^2} + \frac{\omega^4}{p^4} + \ldots\right[$
$= \frac{\omega}{p^2}\left[1 - \frac{\omega^2}{p^2} + \frac{\omega^4}{p^4} - \ldots\right]$
$= \frac{\omega}{p^2}.\frac{1}{1+(\frac{\omega}{p})^2}$
$= \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
comme dans le cas de la transformation de Fourier on s'attend à avoir une formule d'inversion , il sera fait usage au résultat suivant : ***Résultat :*** ξ,est une fonction holomorphe dans son domaine de sommabilité.

preuve :

$$\frac{\partial \xi_f}{\partial \bar{p}} = \int \frac{\partial e^{-pt}}{\partial \bar{p}} f(t)dt = \frac{\partial}{\partial \bar{p}} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$$

$z \longmapsto e^{-z(t)}$ *est holomorphe sur* C
$(x\ ,\ y) \longmapsto (P(x\ ,\ y), Q(x\ ,\ y))$
$(z\ ,\ z)$,$z = x + iy\ ,\ \bar{z} = x - iy$
$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
$y = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$
les équations de Cauchy-Riemann pour f *s'écrivent*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

(cè f est indépendante de $\bar{z}$)
$g(z) = \bar{z} = x - iy \ \ (\frac{\partial g}{\partial z} = 1)$
$z.\bar{z} \qquad (\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = z)$
donc ξ_f est holomorphe sur son domaine de sommabilité

2)***-Formules d'échanges :***

i)-

$$\begin{matrix} f \sqsupset F \\ g \sqsupset G \end{matrix} \Longrightarrow \alpha f + \beta g \sqsupset \alpha F + \beta G$$

ii)-Effet d'une translation :

$$f(t) \sqsupset F(p)$$

$$g(t) = f(t - t_0)$$

$$\xi_g(p) = \int_0^{+\infty} f(t - t_0) e^{-pt} dt$$

$$f(t - t_0) \sqsupset e^{-pt_0} F(p)$$

$$F(p - p_0) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-t(p-p_0)} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{p_0 t} f(t) e^{pt} dt$$

$$= \xi(p)_{t \to f(t)e^{p_0 t}}$$

$$e^{p_0 t} f(t) \sqsupset F(p - p_0)$$

iii)-Effet d'un changement d'échelle :

$$u(t).f(t) = f(\nu) \qquad\qquad f(t) \sqsupset F(p)$$

$$g(t) = f(at) \qquad\qquad g(t) \sqsupset \frac{1}{|a|} F(\frac{p}{a})$$

iv)-Effet d'une dérivation :

$$\frac{\partial}{\partial p} \xi_f(p) = \frac{\partial}{\partial p} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t) \frac{\partial}{\partial p} e^{-pt} dt$$

$$= \int -t f(t) e^{-pt} dt$$

$$-t f(t) \sqsupset \frac{\partial F}{\partial p} \quad ; \quad -(t)^n f(t) \sqsupset \frac{\partial^n F}{\partial p^n}$$

$g(t) = f'(t), \xi_g(p) = \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt}$

$$f \sqsupset F \quad ; \quad f' \sqsupset pF(p) - f(0)$$

$$f" \sqsupset p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$$
$$f^n(t) \sqsupset p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0)\ldots f^{n-1}(0)$$

Exercice :

$\rightarrow$*Calculer les images de Laplace de :*

$*u(t)t\cos(\omega t)$ **;** $*u(t)\sinh(\omega t)$

$*u(t)t^2\cos(\omega t)$ **;** $*u(t)\cosh(\omega t)$

$*u(t)t^n\cosh(\omega t)$