Analyse Numérique
TD 2, S4, 2015/2016

Exercice1 :

On lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure les premières 40 secondes l'accélération γ :

Temps (s)	0	10	20	30	40
$\gamma(m/s^2)$	30	31,63	33,44	35,47	37,75

Rappelons que l'accélération est la dérivée de la vitesse V , alors on peut écrire la vitesse sous la forme $V(t) = V_0 + \int_0^t \gamma(s)ds$.

1- Donner la vitesse V de la fusée à l'instant $t = 40s$, par la méthode des trapézes.
2- Donner la vitesse V de la fusée à l'instant $t = 40s$, par la méthode de Simpson.
3- Donner le polynôme d'interpolation passant par les points figurant dans le tableau ci-dessus pour approximer l'accélération $\gamma(t)$.

Exercice 2 : (Erreur d'interpolation méthode des Trapèzes et de Simpson)

On veut calculer l'erreur numérique pour l'approximation de $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant les méthodes des trapèzes et de Simpson en utilisant $n+1$ points de support.

Soient a, b deux réels $(a < b)$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a, b]$.

En utilisant les mêmes notations que le cours : le pas est h et α_i est le milieu du segment $[x_i, x_{i+1}]$.

1- Donner l'expression de l'erreur théorique pour l'interpolation polynomiale de la fonction $f$sur $[a, b]$ en utilisant n points d'interpolation x_i.
2- Déduire les erreurs théoriques de l'approximation de f par ses polynômes d'interpolation p_i (de degré 1) et q_i (de degré 2) sur $[x_i, x_{i+1}]$.
3- Montrer que : $\exists M_2 \in [a, b] \ / \ \left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} \big(f(t) - P_i(t)\big)dt\right| \leq \frac{M_2 h^3}{12}$
4- Montrer que $J = \int_{x_i}^{\alpha_i} (t - x_i)(x_{i+1} - t)(\alpha_i - t)dt = \frac{h^4}{64}$
5- Montrer que : $\exists M_3 \in [a, b] \ / \ \int_{x_i}^{x_{i+1}} |(f(t) - q_i(t))|dt \leq \frac{M_3 h^4}{192}$
6- Déduire une majoration de l'erreur d'approximation en utilisant la méthode de Simpson et celle des trapèzes en fonction de $a, b \ et \ n$.

Exercice 3 :

On veut intégrer la fonction $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ dans l'intervalle [0,2] en utilisant différentes maniéres.

1- Déterminer le polynôme de de Lagrange, $\mathrm{P(x)} = \mathrm{a_n\, x^n} + \cdots \mathrm{a_1 x} + \mathrm{a_0}$, qui interpole f aux points d'abscisses 0, 3/4 et 3/2 et 2**.**
2- Calculer $I_{Lag} = \int_0^2 P(x)\,\mathrm{dx}$.
3- Calculer analytiquement $I = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{dx}$.
4- Calculer en uilisant la méthode de Trapéze $I_t = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{dx}$, en utilisant 6 points de support.
5- Calculer en uilisant la méthode de Simpson $I_s = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{dx}$, en utilisant 6 points de support.
6- Comparer I_{Lag}, I_t, I_s avec I en expliquant pourquoi une méthode est meilleur par rapport à l'autre comparativement à la valeur analytique.
7- Donner une estimation de l'erreur pour l'approximation I_t, I_s.