Analyse Numérique
TD 3, S4, 2013/2014

Ordre de Convergence :

Soit α un point fixe d'une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^{p+1}$ pour un entier $p \geq 1$ dans un intervalle $[a;b]$ contenant α. Si $\varphi^{(i)}(\alpha) = 0$ pour $1 \leq i \leq p$ et $\varphi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, alors la méthode de point fixe associée à la fonction d'itération φ est d'ordre $p+1$.

Exercice 1:

Déterminer la suite des premiers 3 itérés des méthodes de dichotomie dans l'intervalle $[1,3]$ et de Newton avec $x_0 = 2$ pour l'approximation du zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$. Combien de pas de dichotomie doit-on effectuer pour améliorer d'un ordre de grandeur la précision de l'approximation de la racine ?

Exercice 2:

Le but de cet exercice est de calculer la racine cubique d'un nombre positif a. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\frac{a}{x^2} \qquad (a > 0 \text{ fixé}).$$

1. Faire l'étude complète de la fonction g.
2. Comparer g à l'identité.
3. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$x_{n+1} = g(x_n), \qquad x_0 > 0.$$
À l'aide des graphe de g et de l'identité sur $\mathbb{R}_+^*$, dessiner la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'axe des abscisses. Observer graphiquement la convergence.
4. Justifier mathématiquement la convergence observée graphiquement. En particulier, montrer que cette suite est décroissante à partir du rang 1.
5. Calculer l'ordre de convergence de la suite.
6. Écrire l'algorithme défini par la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui permet de déterminer $\sqrt[3]{a}$ à une précision de 10^{-6}.
7. Expliciter la méthode de Newton pour la recherche du zéro de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - a$. Que remarque-t-on ?

Exercice 3:

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(x^2) - 4x^2$. On se propose de trouver les racines réelles de f.

1. Situer les 4 racines de f (*i.e.* indiquer 4 intervalles disjoints qui contiennent chacun une et une seule racine).
2. Montrer qu'il y a une racine α comprise entre 0 et 1.
3. Soit la méthode de point fixe
$$\begin{cases} x_{k+1} = \phi(x_k), \\ x_0 \in]0,1[, \end{cases} \tag{1.3}$$
avec ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \frac{\sqrt{\exp(x^2)}}{2}$. Examiner la convergence de cette méthode et en préciser l'ordre de convergence.
4. Écrire la méthode de Newton pour la recherche des zéros de la fonction f.
5. Entre la méthode de Newton et la méthode de point fixe (1.3), quelle est la plus efficace ? Justifier la réponse.

Exercice 4:

Soit $f(x) = x^3 - \frac{11}{4}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}$

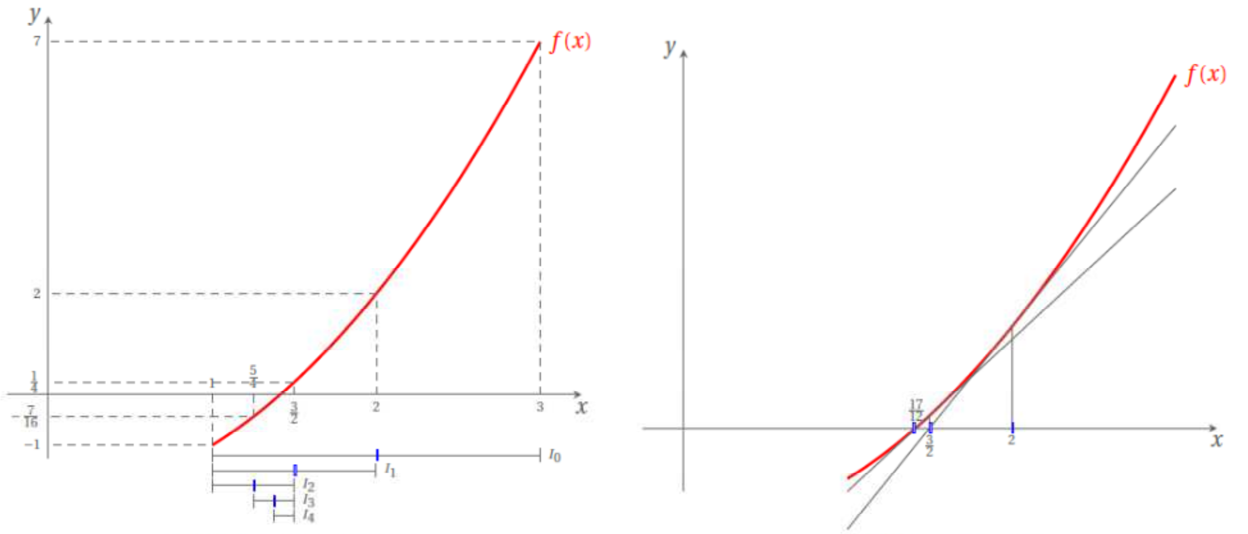
1- Calculer *f(0)* et *f(1).*
2- *Que peut-on déduire ?*
3- En utilisant la méthode de Dichotomie, appliquée à f dans l'intervalle [0,1], calculer les deux premiéres itérés.
4- En partant de $x_0 = 0.5$, calculer les deux premiéres itérés obtenus par la méthode de Newton-raphson.

Exercice 5:

1- Montrer que l'équation $tg(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ et vérifier que $\alpha \epsilon]4.4,4.5[$.
2- Quel est le nombre d'itérations nécessaire pour approcher α *à* 10^{-3} par la méthode de Dichotomie?
3- Déterminer α à 10^{-3} *prés.*

Solution

Exercice1 :



(a) Méthode de la dichotomie. (b) Méthode de Newton.

FIGURE 1.1.: Approximation du zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$.

SOLUTION. On cherche les zéros de la fonction $f(x) = x^2 - 2$:

▷ Méthode de la dichotomie : en partant de $I_0 = [a, b]$, la méthode de la dichotomie produit une suite de sous-intervalles $I_k = [a_k, b_k]$ avec $I_{k+1} \subset I_k$ et tels que $f(a_k)f(b_k) < 0$. Plus précisément

- ▷ on pose $a_0 = a$, $b_0 = b$, $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$,
- ▷ pour $k \geq 0$
  - ▷ si $f(a_k)f(x_k) < 0$ on pose $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_k$ sinon on pose $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$
  - ▷ et on pose $x_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$.

Voir la figure 1.1a.

▷ Méthode de Newton :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{x_k}.$$

Voir la figure 1.1b.

Donc on a le tableau suivant

	x_0	x_1	x_2	x_3
Dichotomie	2	$\frac{3}{2} = 1{,}5$	$\frac{5}{4} = 1{,}25$	$\frac{11}{8} = 1{,}375$
Newton	2	$\frac{3}{2} = 1{,}5$	$\frac{17}{12} = 1{,}41\bar{6}$	$\frac{17}{24} + \frac{12}{17} \simeq 1{,}4142156$

On rappelle qu'avec la méthode de la dichotomie, les itération s'achèvent à la m-ème étape quand $|x_m - \alpha| \leq |I_m| < \varepsilon$, où ε est une tolérance fixée et $|I_m|$ désigne la longueur de l'intervalle I_m. Clairement $I_k = \frac{b-a}{2^k}$, donc pour avoir $|x_m - \alpha| < \varepsilon$ on doit prendre

$$m \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}.$$

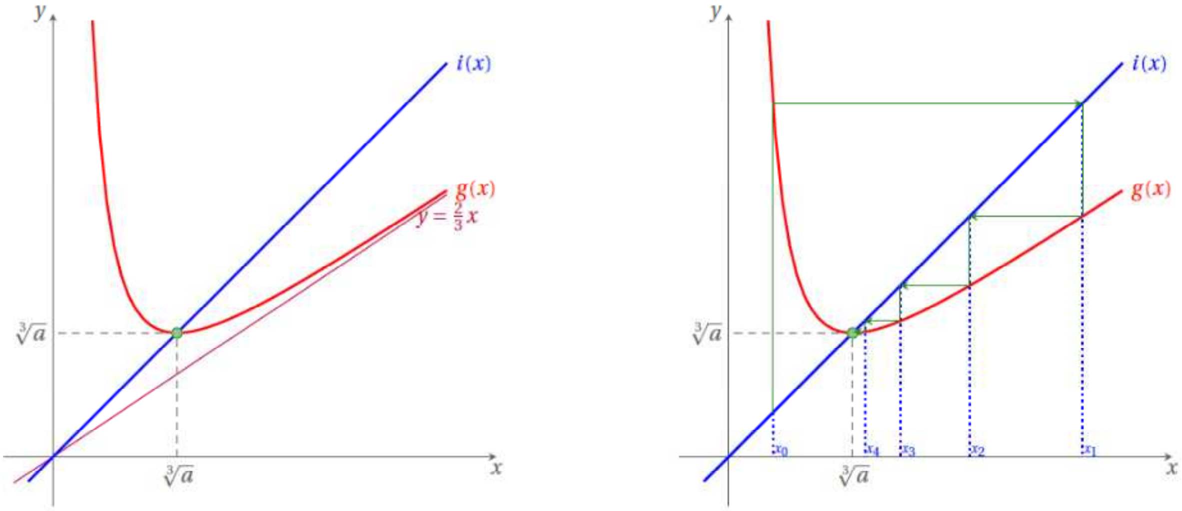
Améliorer d'un ordre de grandeur la précision de l'approximation de la racine signifie avoir

$$|x_k - \alpha| = \frac{|x_j - \alpha|}{10}$$

donc on doit effectuer $k - j = \log_2(10) \simeq 3{,}3$ itérations de dichotomie.

Exercice2 :

1. Étude de la fonction $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\frac{a}{x^2}$:
   - ★ $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$;



(a) Graphe de g comparé au graphe de $i(x) = x$.

(b) Étude graphique de la convergence de la méthode de point fixe.

FIGURE 1.2.: Exercice 1.5

- ★ $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$;
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{2}{3}$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) - \frac{2}{3}x = 0$ donc $y = \frac{2}{3}x$ est un asymptote ;
- ★ $g'(x) = \frac{2}{3x^3}(x^3 - a)$;
- ★ g est croissante sur $[\sqrt[3]{a}, +\infty[$, décroissante sur $[0, \sqrt[3]{a}]$;
- ★ $x = \sqrt[3]{a}$ est un minimum absolu et $g(\sqrt[3]{a}) = \sqrt[3]{a}$.

x	0	$\sqrt[3]{a}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$\sqrt[3]{a}$	↗ $+\infty$

2. Graphe de g comparé au graphe de $i(x) = x$: voir la figure 1.2a. On vérifie analytiquement qu'il existe une et une seule intersection entre la courbe d'équation $y = g(x)$ et la droite d'équation $y = x$:
$$g(x) = x \quad \iff \quad \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\frac{a}{x^2} = x \quad \iff \quad x^3 = a.$$
3. Étude graphique de la convergence de la méthode de point fixe : voir la figure 1.2a.
4. On en déduit que pour tout $x > 0$ on a $g(x) \geq \sqrt[3]{a}$. Donc, pour tout $k > 0$, $x_k = g(x_{k-1}) \geq \sqrt[3]{a}$. Vérifions les hypothèses du théorème de point fixe qui fournit une condition suffisante de convergence de la suite :
   - 4.1. pour tout x dans $[\sqrt[3]{a}, +\infty[$ on a $g(x) > \sqrt[3]{a}$ donc $g([\sqrt[3]{a}, +\infty[) \subset [\sqrt[3]{a}, +\infty[$ (*i.e.* l'intervalle $\sqrt[3]{a}, +\infty[$ est stable) ;
   - 4.2. $g \in \mathscr{C}^1([\sqrt[3]{a}, +\infty[)$;
   - 4.3. pour tout x dans $[\sqrt[3]{a}, +\infty[$ on a
   $$|g'(x)| = \left|\frac{2}{3}\left(1 - \frac{a}{x^3}\right)\right| < 1$$
   donc g est contractante.

   Alors la méthode converge vers α point fixe de g. De plus, pour tout $\alpha \in [\sqrt[3]{a}, +\infty[$ on a $\alpha = g(\alpha) \iff \alpha = \sqrt[3]{a}$: la méthode permet donc de calculer de façon itérative la racine cubique de a.
5. Étant donné que
$$g'(\alpha) = 0, \qquad g''(\alpha) = \frac{2a}{\alpha^4} \neq 0$$
la méthode de point fixe converge à l'ordre 2.

Algorithm 1 Calcul de $x = g(x)$

Require: $x_0 > 0$
  while $|x_{k+1} - x_k| > 10^{-6}$ **do**
    $x_{k+1} \leftarrow g(x_k)$
  end while

6. Algorithme de point fixe : Quelques remarques à propos du critère d'arrêt basé sur le contrôle de l'incrément. Les itérations s'achèvent dès que $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$; on se demande si cela garantît-t-il que l'erreur absolue e_{k+1} est elle aussi inférieur à ε. L'erreur absolue à l'itération $(k+1)$ peut être évaluée par un développement de Taylor au premier ordre

$$e_{k+1} = |g(\alpha) - g(x_k)| = |g'(z_k)e_k|$$

avec z_k compris entre α et x_k. Donc

$$|x_{k+1} - x_k| = |e_{k+1} - e_k| = |g'(z_k) - 1|e_k \simeq |g'(\alpha) - 1|e_k.$$

Puisque $g'(\alpha) = 0$, on a bien $|x_{k+1} - x_k| \simeq e_k$.

7. La méthode de Newton est une méthode de point fixe avec $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Ici elle s'écrit

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - a}{3x_k^2} = x_k - \frac{1}{3}x_k + \frac{a}{3x_k^2} = \frac{2}{3}x_k + \frac{a}{3x_k^2}$$

autrement dit la méthode de point fixe assignée est la méthode de Newton (qu'on sait être d'ordre de convergence égale à 2 lorsque la racine est simple).

Exercice3 :

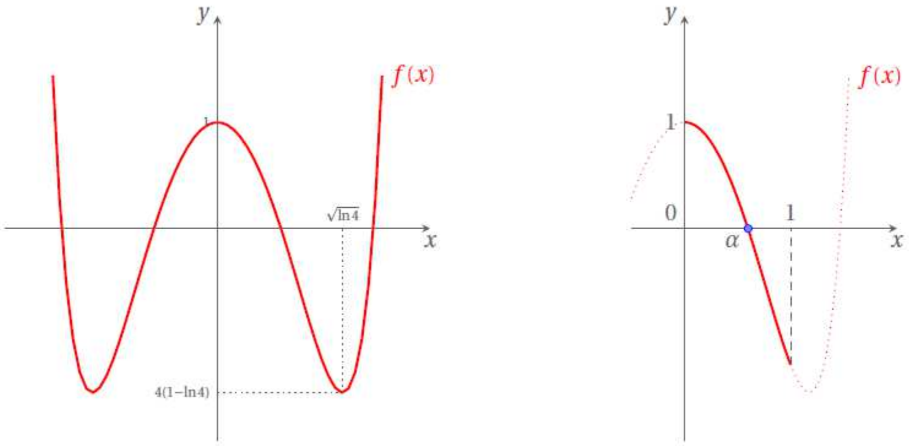
SOLUTION. On cherche les zéros de la fonction $f(x) = \exp(x^2) - 4x^2$.

1. On remarque que $f(-x) = f(x)$: la fonction est paire. On fait donc une brève étude sur $[0, +\infty[$:
   - ▷ $f(0) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,
   - ▷ $f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = \sqrt{\ln 4}$ et on a $f(0) = 1$ et $f(\sqrt{\ln 4}) = 4(1 - \ln 4) < 0$; f est croissante pour $x > \sqrt{\ln 4}$ et décroissante pour $0 < x < \sqrt{\ln 4}$.

   On a
   - ▷ une racine dans l'intervalle $]-\infty, -\sqrt{\ln 4}[$,
   - ▷ une racine dans l'intervalle $]-\sqrt{\ln 4}, 0[$,
   - ▷ une racine dans l'intervalle $]0, \sqrt{\ln 4}[$,
   - ▷ une racine dans l'intervalle $]\sqrt{\ln 4}, \infty[$.

   Voir la figure 1.4a pour le graphe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Puisque $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = e - 4 < 0$, pour le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins un $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$. Puisque $f'(x) = 2x\exp(x^2) - 8x = 2x(\exp(x^2) - 2^2) < 2x(e - 4) < 0$ pour tout $x \in]0, 1[$, ce α est unique. Voir la figure 1.4b.

/



(a) Graphe de $f(x) = \exp(x^2) - 4x^2$.

(b) Zoom.

FIGURE 1.4.: Exercice 1.7

3. Étude de la convergence de la méthode (1.3) :
   3.1. pour tout x dans $]0,1[$ on a
   $$0 < \sqrt{\frac{\exp(x^2)}{4}} < \sqrt{\frac{e}{4}} < 1$$
   donc $\phi\colon]0,1[\to]0,1[$;
   3.2. $\phi \in \mathscr{C}^1(]0,1[)$;
   3.3. pour tout x dans $]0,1[$ on a
   $$|\phi'(x)| = \left|\frac{x\sqrt{\exp(x^2)}}{2}\right| = \left|x\phi(x)\right| < |x| < 1$$
   donc ϕ est contractante.

   Alors la méthode (1.3) converge vers α point fixe de ϕ. De plus, pour tout $\alpha \in]0,1[$,
   $$\alpha = \phi(\alpha) \iff 2\alpha = \sqrt{\exp(\alpha^2)} \iff 4\alpha^2 = \exp(\alpha^2) \iff f(\alpha) = 0;$$
   donc α, point fixe de ϕ, est un zéro de f.
   Étant donné que
   $$\phi'(\alpha) = \alpha\phi(\alpha) = \alpha^2 \neq 0,$$
   la méthode de point fixe (1.3) converge seulement à l'ordre 1.
4. La méthode de Newton est une méthode de point fixe avec $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Ici donc elle s'écrit
   $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\exp(x_k^2) - 4x_k^2}{2x_k\exp(x_k^2) - 8x_k} = x_k - \frac{\exp(x_k^2) - 4x_k^2}{2x_k(\exp(x_k^2) - 4)}.$$
5. Puisque α est une racine simple de f, la méthode de Newton converge à l'ordre 2 tandis que la méthode de point fixe (1.3) converge seulement à l'ordre 1 : la méthode de Newton est donc plus efficace.