TD 2 : Transformée de Fourier

Exercice 1 :

Calculer la transformée de Fourier (TF) de la fonction triangle définie par $f(x) = \begin{cases} 1 + x \ \ si \ -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x \ \ si \ \ 0 \leq x < 1 \\ 0 \ \ sinon \end{cases}$

Exercice 2 :

a est un réel strictement positif.

1) Calculer la TF de $f(x) = U(x)e^{-ax}$ où U(x) est la fonction d'*Heaviside* définie par :

$$U(x) = \begin{cases} 1 \ \ si \ \ x > 0 \\ 0 \ \ si \ \ x < 0 \end{cases}$$

2) Calculer la TF de $g(x) = e^{-a|x|}$.

3) Déterminer la TF de :

$$h_n(x) = U(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-ax}, n \ entier \ \geq 1$$

4) En déduire les spectres de :

$$u(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad et \quad m(x) = \frac{1}{1 + x^2 + x}$$

Exercice 3 :

1) En écrivant le développement en série de Fourier de la fonction impaire, 2π-périodique et valant ch(tx) si 0<x<π, t fixé, prouver l'identité :

$$\frac{1}{ch\left(\frac{\pi t}{2}\right)} = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{2p + 1}{(2p + 1)^2 + t^2}$$

2) En développant $\frac{1}{chx}$ selon les puissances de e^{-x} , prouver que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{cos(tx)}{chx}dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{ch\left(\frac{\pi t}{2}\right)}$$

3) En déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{chx}$.

4) En déduire que $x \mapsto \frac{1}{ch\pi x}$ représente un signal fractal auto-transformable.

Exercice 4 : Equation de Laplace

1) Prouver que :

$$\frac{2t}{t^2 + 4\pi^2 x^2} = \pi r^2 \leftrightharpoons \mathrm{e}^{-t|\upsilon|}, \mathrm{t} > 0$$

2) On suppose que V vérifie ΔV=0 dans le domaine $\{(x, y) \in IR^2, t > 0\}$ et V(x,0)=f(x) donné.

2.1- En appliquant une transformée de Fourier en x (sous quelles hypothèses ?), prouver que $\hat{V}(\upsilon, y)$ vérifie une équation différentielle du 2ème ordre en y que l'on explicitera et dont on donnera la solution générale.

2.2- Expliciter la solution bornée en tenant compte des conditions aux limites.

2.3- Prouver que :

$$V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\frac{y}{(x - u)^2 + y^2}du$$

2.4- Prouver que le potentiel électrostatique défini dans $\{(x, y) \in IR^2, y > 0\}$ et valant sur y=0 :

$$\begin{cases} 1 \ \ si \ \ |x| < a \\ 0 \ \ si \ \ |x| > a \end{cases}$$

vaut :

$$V(x, y) = \frac{1}{\pi}\left(Arctan\frac{x + a}{y} - Arctan\frac{x - a}{y}\right)$$

2.5- Que vaut $\lim_{y \to 0+} V(x, y)$.

TD 2 : Transformée de Fourier

Exercice 5 : Equation des cordes vibrantes

Soit y(x,t) une solution de l'équation des ondes :

$$(E) : \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \quad , \quad x \in IR \quad , \quad t > 0$$

avec: y(x,0)=f(x) , $\frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = 0.$

On note $\hat{y}(\upsilon, t)$ la TF en x de y(x,t).

1) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $\hat{y}(\upsilon, t)$.

2) Expliciter alors la solution y(x,t).

Exercice 6 : Equation de la chaleur

Résoudre l'équation de la chaleur pour une tige infinie.

* Condition initiale : y(x,0)=φ(x) avec $\varphi \epsilon L^1(IR)$.