TD 1 : Analyse spectrale des signaux unidimensionnels

Exercice 1 :

Partie A :

1) Ecrire la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par : $f(x) = \pi - \mathrm{x}$ si $0 < x < 2\pi$.
2) Etudier sa convergence.
3) Prouver que :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{1}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$$

Partie B :

1) Ecrire la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par : $f(x) = \pi - \mathrm{x}$ si $0 \leq \mathrm{x} \leq \pi$.
2) Etudier sa convergence.
3) Prouver que :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Exercice 2 :

Soit p∈ℕ et f_p la fonction 2π-périodique telle que :

$$f_p(t) = \left(\frac{t}{\pi}\right)^{2p}, t \in [-\pi; \pi]$$

1) Calculer les coefficients de Fourier de f ainsi que sa série de Fourier.
2) Préciser sa convergence.
3) En déduire les valeurs de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad et \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

Exercice 3 :

1) Développer en série de Fourier par la méthode des résidus :

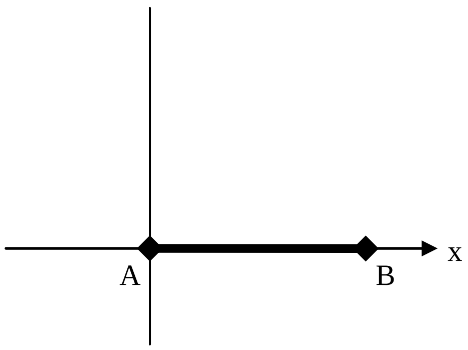
$$f(x) = \frac{1}{2 + cosx}$$

2) Développer en série de Fourier par la méthode des séries entières :

$$f(x) = \frac{1 + cosx}{4 - 2cosx}$$

Exercice 4 : Equation de la chaleur

On considère une tige de longueur L=AB, placée sur l'axe (Ox). La tige est supposée thermiquement isolée c'est-à-dire seules les extrémités A et B peuvent échanger la chaleur avec l'extérieur. On note y(x,t) la température de la tige au point d'abscisse x à l'instant t.



On montre que y(x,t) satisfait l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

On pose :

* Les conditions au limites : y(0,t)=y(L,t)=0.
* La condition initiale : y(x,0)=φ(x) , φ donné avec les hypothèses de régularités à discuter.

1) Déterminer y(x,t) en utilisant la méthode de séparation des variables.
2) Prouver que :

$$y(x,t) = \int_0^L K(x,t,u)\varphi(u)du \quad \text{où} \quad K(x,t,u) \ \ est\ un\ noyau\ \text{à}\ expliciter$$

TD 1 : Analyse spectrale des signaux unidimensionnels

Exercice 5 : Equation de Laplace

Déterminer le potentiel électrostatique V(x,y) à l'intérieur d'un prisme carré dont trois faces sont maintenues au potentiel zéro, tandis que la quatrième est portée au potentiel V_0.

Rappel : L'équation de Laplace est :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

Exercice 6 : Equation des cordes vibrantes

Les petits mouvements d'une corde vibrante de longueur l , en l'absence de forces extérieures, sont gouvernés par l'E.D.P :

$$(E) :\ c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

u(x,t) représente l'ordonnée du point d'abscisse x de la corde à l'instant t. Le mouvement de n'importe quel point de la corde est déterminé dès lors que l'on se fixe les conditions suivantes :

* Conditions initiales : Pour t=0, u(x,0)=φ(x) et $\frac{\partial u\,(x,0)}{\partial t} = \psi(x), 0 \leq x \leq l.$

* Conditions limites : u(0,t)=u(l,t)=0 $\forall t \geq 0.$

1) Chercher les solutions de (E) qui soient de la forme u(x,t)=f(x).g(t) avec f et g de classe C^2.

2) Préciser la période par rapport à x et par rapport à t de la série trigonométrique :

$$u(x,t) \coloneqq \sum_{n=1}^{+\infty} sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).\left\{A_n cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + B_n sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)\right\}$$

3) Déterminer A_n et B_n pour qu'elle soit solution de (E).

4) On suppose que, pour t=0, la corde est abandonnée sans vitesse initiale et que sa forme est une ligne brisée.

4.1- Déterminer l'allure des signaux permettant de calculer les A_n et les B_n.

4.2- Quelle est la vitesse de convergence ?

4.3- Calculer alors les A_n et les B_n et donner la forme que prend u(x,t).