Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra

Année universitaire 2013-2014
Semestre 4

Contrôle de Probabilité

(Durée 1H30)

La présentation des copies et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'évaluation des copies. ***Aucun résultat non justifié ne sera accepté.***

Bon courage

Exercice. On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant des boules blanches et noires indiscernables telles que:

- U_1 contient 5 boules blanches et 3 noires,
- U_2 contient 2 boules blanches et 3 noires,
- U_3 contient 3 boules blanches et 1 noires,

On dispose aussi d'un sac contenant 10 jetons, dont chaque jeton porte un seul numéro: 1,2 ou 3 tels que:

5 jetons portent le numéro 1 et 3 jetons portent le numéro 2.

On considère l'épreuve $\mathcal{E}$ suivante:

$$(\mathcal{E})\begin{cases}\text{On tire au hasard et avec remise un jeton du sac et on note son numéro.}\\ \text{Si le numéro tiré est } i,\ (i \in \{1,2,3\}),\ \text{on effectue alors un tirage avec remise}\\ \text{dans l'urne portant le numéro } i:\ \text{c.à.d l'urne } U_i.\end{cases}$$

On considère l'événement: $A =$ "La boule tirée est blanche" et on associe à l' épreuve $(\mathcal{E})$ la variable aléatoire X telle que

$$(*):\quad X \text{ vaut } +3 \text{ points si } A \text{ se réalise et } -2 \text{ points sinon.}$$

1. Calculer $p(A)$.
2. On tire une boule, comme dans $(\mathcal{E})$, et on s'aperçoit qu'elle est noire. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_2.
3. Donnez la loi de X ainsi que son espérance mathématique.
4. On répète l'épreuve $(\mathcal{E})$ trois fois successives et on définit la variable aléatoire Y par

   $$Y = X_1 + X_2 + X_3$$

   où chaque variable X_j, $j = 1,2,3$ est associée à la $j^{\text{ème}}$ itération de $(\mathcal{E})$ et définie comme dans $(*)$ plus haut.

   (a) Donner la loi de Y sous forme d'une table.

   (b) Tracer la fonction de répartition F de Y.

   (c) i. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ a-t-on $p(Y < x) = 0.7$?

   ii. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ a-t-on $p(Y < x) < 0.2$?
5. On répète maintenant l'épreuve $(\mathcal{E})$ jusqu'à la réalisation de A et on définit la variable aléatoire Z qui prend comme valeurs le nombre de répétitions effectuées jusqu'à la réalisation de A pour la première fois.

   Donner la loi de Z, son espérance mathématique ainsi que sa variance.