Morfología Matemática

Rodrigo Javier Herrera García *

La morfología matemática es un área del procesamiento de imágenes que difiere de las demás áreas debido a las herramientas utilizadas. Mientras que en el procesamiento no morfológico se utiliza como base el cálculo por el hecho de considerar las imágenes como funciones, en morfología matemática se utiliza la teoría de conjuntos donde el interés está en las formas y geometría de los objetos. Con las operaciones morfológicas las imágenes se simplifican y se preservan las características de forma principales de los objetos.

Siendo el lenguaje de la morfología matemática la teoría de conjuntos, esta se constituye en un método poderoso y único para abordar algunos problemas del procesamiento de imágenes. Los conjuntos representan las formas de los objetos dentro de una imagen. Aunque se desarrolló en imágenes binarias, sus principios y conceptos son aplicables a espacios euclidianos de N dimensiones. En consecuencia, en una imagen binaria, los conjuntos están constituidos por los miembros del espacio bidimensional de números enteros Z^2, donde cada elemento del conjunto es una dupla que corresponde a las coordenadas del píxel que pertenece al objeto. Por convención, en las imágenes binarias, los objetos están definidos por los píxeles que tienen un valor de 1 y el fondo por los píxeles que tienen un valor de 0. Las imágenes digitales de intensidades de gris se pueden representar como conjuntos en espacios tridimensionales Z^3, donde cada elemento del conjunto es una tripla que hace referencia a las coordenadas del píxel con los dos primeros números y a una intensidad discreta con el tercero. Se pueden tener conjuntos de espacios dimensionales mayores para describir otros atributos como color, saturación o variación en el tiempo.

En general, las operaciones morfológicas son predominantemente utilizadas para los siguientes propósitos:

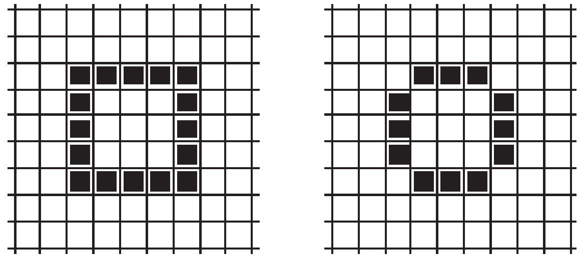
- Procesamiento preliminar de imágenes como filtraje de ruido, simplificación de formas, etc.
- Resaltado de estructuras de objetos como formación de esqueletos, adelgazamiento, engrosamiento, cercado convexo, rotulación de objetos.
- Descripción cuantitativa de objetos como áreas, perímetros, proyecciones y otros.

En las siguientes secciones entonces se desarrollarán e ilustrarán varios conceptos de morfología matemática. Aunque muchas de estas operaciones se pueden formular en términos de espacios euclidianos N-dimensionales, el estudio se centrará fundamentalmente en imágenes binarias cuyos elementos son componentes en Z^2, con proyección a imágenes en intensidades discretas de gris cuyos elementos son componentes en Z^3.

1. Conectividad en Imágenes Binarias

Las operaciones morfológicas en imágenes binarias están basadas en la relación geométrica o conectividad de los píxeles que son considerados son de la misma clase. En la imagen binaria (a) de la **Figura 1**, el anillo de píxeles negros, por todas las definiciones razonables de conectividad, divide la imagen en tres segmentos: los píxeles blancos exteriores al anillo, los píxeles blancos interiores al anillo y los píxeles negros de anillo. Los píxeles en cada segmento están conectados a otros. Este concepto de conectividad es fácilmente entendible para la imagen (a) de la **Figura 1** pero cuando se considera la imagen binaria (b) surgen ambigüedades. ¿Definen aún, los píxeles negros, un anillo o forman cuatro segmentos de líneas desconectadas? La respuesta a esta pregunta no es absoluta sino que está sujeta a la definición de conectividad.

*Profesor del Proyecto Curricular de Ingeniería Electrónica, Facultad de Ingeniería, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, D.C., Colombia.



(a) (b)

Figura 1: Conectividad en imágenes binarias. (a) Anillo, (b) figura ambigua. (Véase texto para detalles.)

Considere el siguiente vecindario de píxeles

$$\begin{matrix} X_3 & X_2 & X_1 \\ X_4 & X & X_0 \\ X_5 & X_6 & X_7 \end{matrix}$$

en el cual un píxel de valor binario $f[m,n] = X$, donde $X = 0$ (blanco) o $X = 1$ (negro), está rodeado por sus ocho vecinos más cercanos $X_0, X_1, \ldots, X_7$.

Se dice que el píxel X está 4-*conectado* a un vecino si es un uno lógico y si alguno de sus vecinos X_0, X_2, X_4 o X_6 es también un uno lógico. El píxel X está 8-*conectado* si es un uno lógico y si alguno de sus ocho vecinos $(X_0, X_1, \ldots, X_7)$ es también un uno lógico.

Bajo la definición de conectividad de 4 (4-conectado), la imagen (b) de la **Figura 1** contiene cuatro segmentos de líneas negras desconectadas, mientras que con la definición de conectividad 8 (8-conectado), la imagen contiene un anillo de píxeles negros conectados. Sin embargo, se debe notar que bajo la conectividad de 8, todos los píxeles blancos están conectados. Entonces existe una paradoja. Si los píxeles negros están 8-conectados formando un anillo, se esperaría una división de los píxeles blancos en internos y externos al anillo. Para eliminar este dilema, se puede definir la conectividad de 8 para los píxeles negros de un objeto y se puede establecer la conectividad de 4 para los píxeles blancos del fondo. Se dice además que una cadena de píxeles negros está *mínimamente conectada* si la eliminación de cualquier píxel negro produce una pérdida de conectividad del resto de píxeles negros.

2. Principios Básicos y Transformaciones

El término *morfología* viene originalmente del estudio de las formas de las plantas y animales. En este contexto, significa el estudio de la topología o estructura de los objetos en las imágenes. El procesamiento morfológico se refiere a ciertas operaciones donde un objeto es modificado por medio de un *elemento estructurante* y, en consecuencia, reducido a una forma más reveladora.

El procesamiento morfológico de imágenes es un tipo de procesamiento en la cual la forma espacial o estructura de los objetos dentro de una imagen son modificados. Las dos operaciones morfológicas fundamentales son la *dilatación* y la *erosión*. Con la dilatación, un objeto crece en extensión espacial mientras que, con la erosión, un objeto se encoge.

2.1. Trasformaciones Morfológicas

La morfología matemática explota las propiedades de los conjuntos de puntos, la geometría integral y la topología. La suposición inicial establece que las imágenes reales pueden ser modeladas como conjuntos de puntos de cualquier dimensión. El espacio euclidiano de dos dimensiones E^2 y su sistema de subconjuntos es un dominio natural para la descripción de formas planas. Entonces, se da por entendido que operaciones como *inclusión* ($\subset$ o $\supset$), *intersección* ($\cap$), *unión* ($\cup$) o conjuntos como el *conjunto vacío* ($\emptyset$) y el *conjunto complemento* ($^{\complement}$) son propios del ambiente de conjuntos. El *conjunto diferencia* se define como

$$X - Y = X \cap Y^{\complement} \tag{1}$$

En un espacio euclidiano de dos dimensiones, un punto se representa por medio de un par de números enteros que corresponden a las coordenadas con respecto a dos ejes coordenados de una rejilla digital. La unidad de longitud de la rejilla es igual al período de muestreo en cada dirección. Esta representación es apropiada para rejillas rectangulares o hexagonales pero la rectangular es la que se utilizará aquí.

Una imagen binaria puede ser tratada como un conjunto de puntos de dos dimensiones. Los puntos que pertenecen a los objetos en la imagen representan un conjunto X. Los puntos de este conjunto X son los píxeles de la imagen cuyo valor es igual a uno. Los puntos del conjunto complemento $X^{\complement}$ corresponden a los píxeles del fondo de la imagen y tienen un valor de cero. El *origen* tiene coordenadas $(0,0)$ y las coordenadas de cualquier punto son interpretadas como $(fila, columna)$. De hecho, cualquier punto $\mathbf{x}$ de una imagen X puede considerarse como un vector con respecto al punto origen. En la **Figura 2** se puede ver un ejemplo de tales conjuntos de puntos. Los puntos que pertenecen al objeto se muestran como pequeños cuadrados negros dentro de la rejilla digital, mientras que los puntos del conjunto del fondo se muestran vacíos. El punto origen está resaltado con una cruz diagonal. En este caso, el conjunto de puntos X, para los elementos que tienen el pequeño cuadrado, está dado por

$$X = \{(0,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),\\ (3,6),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(5,3),(5,7),(6,3),(7,2),(7,3)\}$$

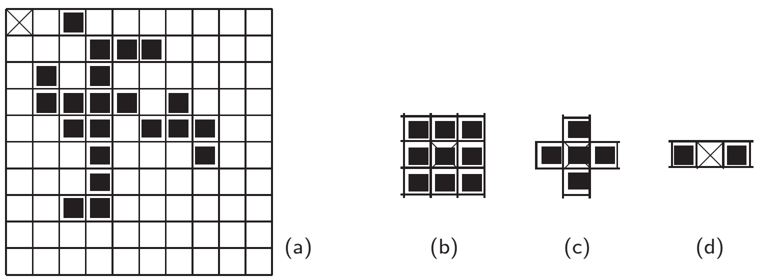


Figura 2: (a) Ejemplo de un conjunto de puntos. (b), (c) y (d) Elementos estructurantes típicos.

Una *transformación morfológica* Φ está dada por la relación de la imagen (el conjunto de puntos X) con otro pequeño conjunto de puntos B llamado el *elemento estructurante*. El conjunto B es expresado con respecto a un origen local $\mathcal{O}$ llamado el *punto representativo*. Algunos elementos estructurantes típicos se muestran en la **Figura 2** donde los puntos representativos se resaltan con una cruz. Observe que la parte (d) de la Figura ilustra la posibilidad de que el punto representativo no sea parte del elemento estructurante B.

Una transformación morfológica $\Phi(X)$ aplicada a una imagen X significa que el elemento estructurante se mueve sistemáticamente a través de toda la imagen. Si se supone que B está ubicado en algún punto de la imagen, el píxel de la imagen que corresponde al punto representativo $\mathcal{O}$ del elemento estructurante se le conoce como el *píxel actual*. El resultado de la relación (que puede ser uno o cero) entre la imagen X y el elemento estructurante B en la posición actual se almacena en el píxel actual de la imagen.

La *dualidad* de las operaciones morfológicas se deduce de la existencia del conjunto complemento. Por cada transformación morfológica $\Phi(X)$ existe una transformación dual $\Phi^*(X)$ que cumple con

$$\Phi(X) = \left(\Phi^*(X^{\complement})\right)^{\complement} \tag{2}$$

La *traslación* del conjunto de puntos X por medio del vector $\mathbf{h}$ se denota como X_h y se define como

$$X_h = \left\{\mathbf{d} \in E^2, \mathbf{d} = \mathbf{x} + \mathbf{h} \quad \forall \mathbf{x} \in X\right\} \tag{3}$$

La **Figura 3** muestra un ejemplo de traslación con el conjunto de puntos de la **Figura 2**. La traslación horizontal es de 2 unidades y la vertical es de una unidad.

Es apropiado restringir el conjunto de posibles transformaciones morfológicas en las imágenes a través de la imposición de varias restricciones. Se presentan brevemente aquí cuatro principios morfológicos que

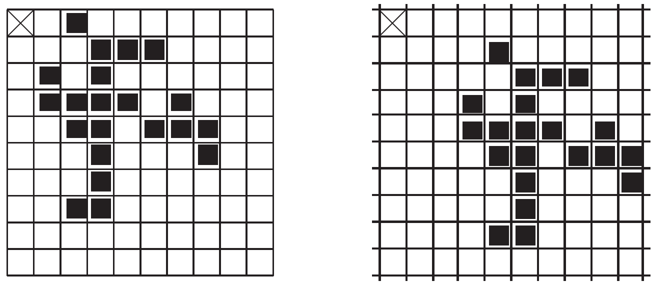


Figura 3: Traslación de un conjunto de puntos por medio de un vector.

expresan dichas restricciones. Estos conceptos pueden resultar difíciles de entender pero su comprensión no es esencial para entender lo que sigue.

Una transformación morfológica se dice que es *cuantitativa* si y sólo si satisface los cuatro principios básicos siguientes:

Compatibilidad con la traslación. Sea la transformación Φ dependiente de la posición del origen $\mathcal{O}$ del sistema de coordenadas y tal transformación se denota como $\Phi_{\mathcal{O}}$. Si todos los puntos son trasladados por medio del vector $-\mathbf{h}$, entonces la transformación se expresa como $\Phi_{-\mathbf{h}}$. El principio de *compatibilidad con la traslación* está dado por

$$\Phi_{\mathcal{O}}(X_{\mathbf{h}}) = (\Phi_{-\mathbf{h}}(X))_{\mathbf{h}} \tag{4}$$

Si Φ no depende de la posición del origen $\mathcal{O}$, entonces el principio de compatibilidad con la traslación se reduce a la invarianza bajo traslación, es decir,

$$\Phi(X_{\mathbf{h}}) = (\Phi(X))_{\mathbf{h}} \tag{5}$$

Compatibilidad con el cambio de escala. Sea que λX representa la homogeneidad de un conjunto de puntos X (es decir, las coordenadas de cada punto del conjunto son multiplicadas por alguna constante positiva λ). Esto es equivalente al cambio de escala con respecto a algún origen. Sea que Φ_λ denote una transformación que depende del parámetro positivo λ (cambio de escala). La *compatibilidad con el cambio de escala* está dado por

$$\Phi_\lambda(X) = \lambda\Phi\left(\frac{1}{\lambda}X\right) \tag{6}$$

Si Φ no depende de la escala λ, entonces la compatibilidad con el cambio de escala se reduce a la invarianza al cambio de escala, es decir,

$$\Phi(\lambda X) = \lambda\Phi(X) \tag{7}$$

Conocimiento local. El principio de conocimiento local considera la situación en la cual únicamente una parte de una estructura grande puede ser examinada. Este es siempre en realidad el caso, debido al tamaño restringido de la rejilla digital. La transformación morfológica Φ tiene un *principio de conocimiento local* si para cualquier conjunto de puntos restringido Z' en la transformación $\Phi(X)$ existe un conjunto restringido Z, de manera que el conocimiento de Z es suficiente para proveer Φ. El principio de conocimiento local puede escribirse simbólicamente como

$$(\Phi(X \cap Z)) \cap Z' = \Phi(X) \cap Z' \tag{8}$$

Continuidad-semi-superior. El *principio de continuidad-semi-superior* dice que la transformación morfológica no exhibe ningún cambio abrupto.

El conjunto más simple de transformaciones morfológicas cuantitativas está formado por la *dilatación*, la *erosión*, la *apertura* y el *cierre*.

2.2. Dilatación

La transformación morfológica de *dilatación* $\oplus$ combina dos conjuntos utilizando la suma de vectores. La dilatación de $X \oplus B$ es el conjunto de puntos de todas las sumas de vectores posibles de pares de elementos, uno de cada uno de los conjuntos X y B, es decir,

$$X \oplus B = \left\{ \mathbf{d} \in E^2 : \mathbf{d} = \mathbf{x} + \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{x} \in X \text{ y } \mathbf{b} \in B \right\} \tag{9}$$

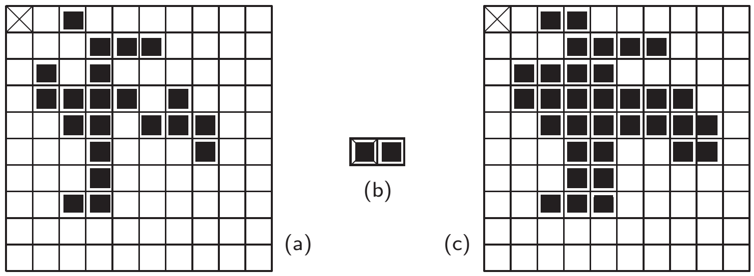


Figura 4: Ejemplo de la operación morfológica de dilatación. (a) Imagen original, (b) elemento estructurante y (c) imagen binaria dilatada.

La **Figura 4** muestra un ejemplo de dilatación con

$$X = \{(0,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),\\ (3,6),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(5,3),(5,7),(6,3),(7,2),(7,3)\}$$

y $B = \{(0,0),(0,1)\}$. El resultado de la dilatación es

$$X = \{(0,2),(0,3),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),\\ (3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (4,7),(4,8),(5,3),(5,4),(5,7),(5,8),(6,3),(6,4),(7,2),(7,3),(7,4)\}$$

La **Figura 5** muestra una imagen binaria original y el resultado de la dilatación de esta con el elemento estructurante mostrado en la **Figura 2** (b). Este tipo de dilatación es una expansión *isótropa* del objeto en un píxel porque se comporta de la misma manera en todas las direcciones. Esta operación es también llamada *rellenada* o *crecimiento*. La dilatación con un elemento estructurante isótropo de 3×3 puede explicarse como una transformación que cambia todos los píxeles del fondo vecinos del objeto. En la parte (c) de la misma Figura se observa la diferencia entre la imagen dilatada y la imagen original. Los píxeles del contorno (en negro) son aquellos píxeles del fondo de la imagen que son vecinos de los objetos y que cambiaron de estado con la operación de dilatación.

La dilatación tiene varias propiedades interesantes que pueden facilitar su implementación en circuitos o programas. Algunas de ellas se enuncian a continuación.
La operación de dilatación es *conmutativa*, es decir,

$$X \oplus B = B \oplus X \tag{10}$$

También es *asociativa*,

$$X \oplus (B \oplus D) = (X \oplus B) \oplus D \tag{11}$$

La dilatación puede expresarse como una unión de conjuntos de puntos desplazados o trasladados, o sea,

$$X \oplus B = \bigcup_{\mathbf{b} \in B} X_{\mathbf{b}} \tag{12}$$

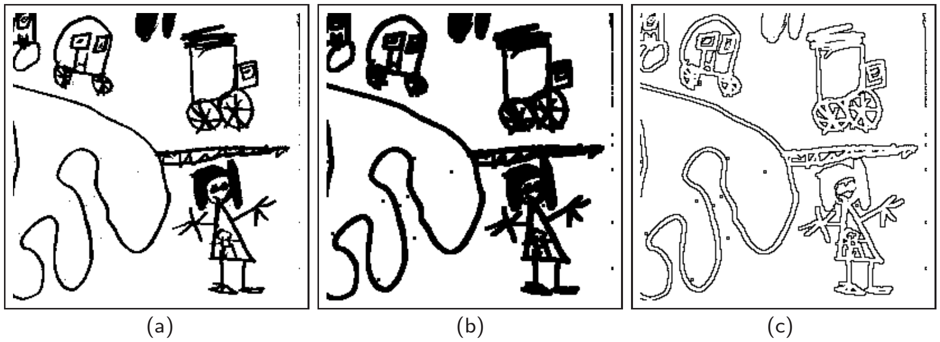


Figura 5: Operación morfológica de dilatación. (a) Imagen binaria original; (b) imagen resultante de la operación de dilatación con el elemento estructurante de 3×3 de la **Figura 2**; (c) diferencia entre la imagen resultado de la dilatación y la imagen original. Corresponde a los píxeles del fondo que son vecinos de los objetos de la imagen (a).

Y también es *invariante a la translación*, entonces,

$$X_{\mathbf{h}} \oplus B = (X \oplus B)_{\mathbf{h}} \tag{13}$$

La dilatación es una *transformación creciente*, es decir,

$$\text{Si} \quad X \subseteq Y \quad \text{entonces} \quad X \oplus B \subseteq Y \oplus B \tag{14}$$

La **Figura 6** muestra el resultado de la dilatación cuando el punto representativo no hace parte del conjunto que conforma el elemento estructurante (como se muestra). Observe que el resultado es sustancialmente diferente al resultado obtenido en la **Figura 4** y, obviamente, difiere de la imagen original.

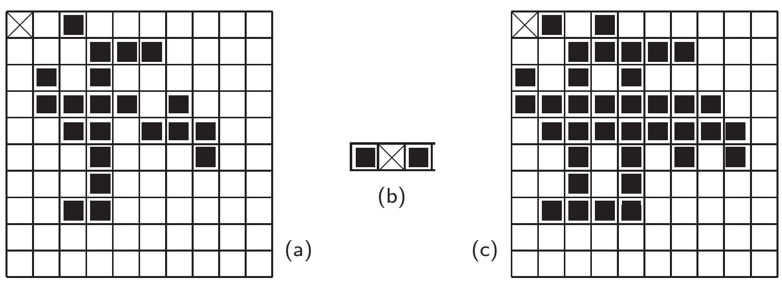


Figura 6: Dilatación de una imagen con elemento estructurante que no incluye el punto representativo. (a) Imagen original, (b) elemento estructurante y (c) imagen resultado de la operación de dilatación.

En general, la dilatación se utiliza para llenar pequeños huecos o pequeños golfos dentro de los objetos de una imagen. La operación también incrementa el tamaño de los objetos, condición que debe ser tomada en cuenta cuando se hacen mediciones. Sin embargo, es posible preservar el tamaño de los objetos utilizando la dilatación junto con la erosión, descrita a continuación.

2.3. Erosión

La transformación morfológica de *erosión* $\ominus$ combina dos conjuntos utilizando la sustracción de vectores de los elementos de los conjuntos. Está definida como

$$X \ominus B = \{\mathbf{d} \in E^2 : \mathbf{d} + \mathbf{b} \in X \quad \forall \mathbf{b} \in B\} \tag{15}$$

La operación de erosión es la dual de la operación de dilatación. Sin embargo, las operaciones de dilatación y erosión no son invertibles. La ecuación (15) nos dice que se prueba todo punto d del conjunto X (imagen). El resultado de la erosión está dado por aquellos puntos d para los cuales todos los posibles $d+b$ están en X. La **Figura 7** muestra un ejemplo de erosión donde el conjunto de puntos X, que es el mismo definido para la parte (a) de la **Figura 2**, es erosionado por medio del elemento estructurante B, definido como $B = \{(0,0),(0,1)\}$. El resultado de la erosión es

$$X \ominus B = \{(1,3),(1,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,2),(4,5),(4,6),(7,2)\}$$

tal como se observa en la Figura.

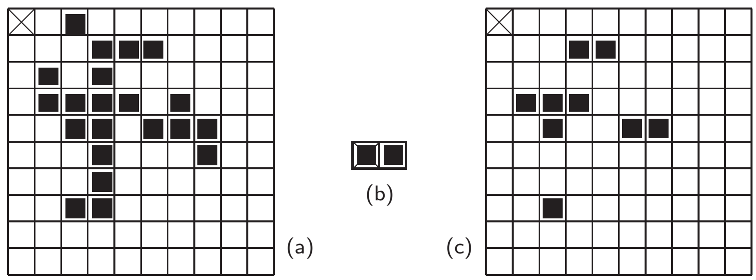


Figura 7: Operación morfológica de erosión. (a) Imagen original, (b) elemento estructurante y (c) imagen erosionada.

Cuando el elemento estructurante es isótropo, como el mostrado en la parte (b) de la **Figura 2**, la operación de erosión también es llamada *drenado* o *reducción*. La **Figura 8** muestra un ejemplo de erosión con un elemento estructurante isótropo de 3×3. Debe notarse que las líneas de un solo píxel de ancho desaparecen. Adicionalmente, también se muestra la imagen diferencia entre la imagen original y la imagen erosionada. En este caso, se pueden observar los contornos de los objetos. De hecho, las transformaciones morfológicas se utilizan para encontrar contornos.

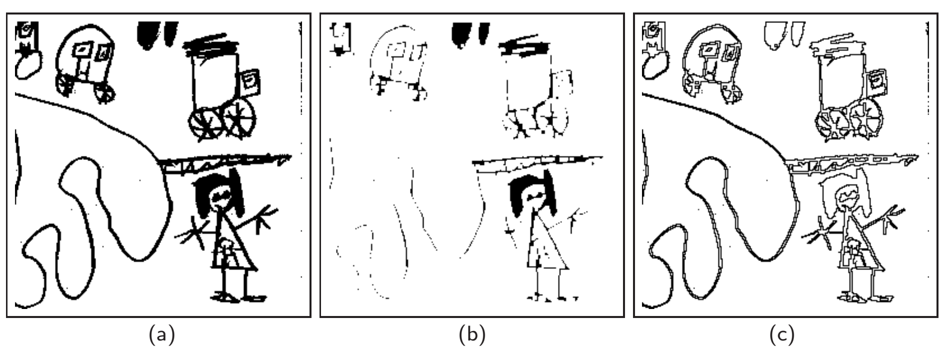


Figura 8: Operación morfológica de erosión. (a) Imagen binaria original; (b) imagen resultado de aplicar la operación de erosión con el elemento estructurante de 3×3 de la **Figura 2**; (c) diferencia entre la imagen binaria original y la imagen erosionada (b). La imagen (c) corresponde a los píxeles de los objetos que son vecinos con el fondo de la imagen.

Hay una definición equivalente para la erosión que puede expresar mejor sus propiedades, esto es

$$X \ominus B = \{\mathbf{d} \in E^2 : B_{\mathbf{d}} \subseteq X\} \tag{16}$$

El elemento estructurante B puede ser interpretado como un elemento de prueba que se desliza a través de la imagen X; luego, si B, que es trasladado por el vector $\mathbf{d}$, está contenido en la imagen X, el píxel correspondiente al punto representativo de B pertenece a la erosión $X \ominus B$. Una implementación de la erosión puede simplificarse si se nota que una imagen erosionada por el elemento estructurante B se puede expresar como una intersección de todas las traslaciones de la imagen X a través del vector $-\mathbf{b} \in B$, es decir,

$$X \ominus B = \bigcap_{\mathbf{b} \in B} X_{-\mathbf{b}} \tag{17}$$

Si el punto representativo hace parte del elemento estructurante, la erosión es una transformación *antiextensiva*; esto quiere decir que si $(0,0) \in B$ entonces $X \ominus B \subseteq X$. La erosión es también una transformación invariante a la traslación:

$$X_{\mathbf{h}} \ominus B = (X \ominus B)_{\mathbf{h}} \tag{18}$$
$$X \ominus B_{\mathbf{h}} = (X \ominus B)_{-\mathbf{h}} \tag{19}$$

y, como la dilatación, la erosión también es una transformación creciente, es decir

$$\text{Si} \quad X \subseteq Y \quad \text{entonces} \quad X \ominus B \subseteq Y \ominus B \tag{20}$$

Si B y D son elementos estructurantes y D está contenido en B, la erosión obtenida por medio de B es más agresiva que la obtenida por medio de D. Escrito de otra manera sería

$$\text{Si} \quad D \subseteq B \quad \text{entonces} \quad X \ominus B \subseteq X \ominus D \tag{21}$$

Esta propiedad permite el ordenamiento de las erosiones de acuerdo con elementos estructurantes de la misma forma pero diferentes tamaños.

Ya se ha mencionado que la erosión y la dilatación son transformaciones duales. Escrito formalmente sería

$$(X \ominus Y)^{\mathsf{C}} = X^{\mathsf{C}} \oplus \check{Y} \tag{22}$$

donde $\check{Y}$ denota el *conjunto simétrico* de Y con respecto al punto representativo $\mathcal{O}$. Al conjunto simétrico también se le llama conjunto *transpuesto* o *racional* por parte de algunos autores. Está definido como

$$\check{Y} = \{-y : y \in Y\} \tag{23}$$

Las diferencias entre las operaciones de erosión y dilatación se muestran a través de las siguientes propiedades. La erosión, en contraste con la dilatación, no es conmutativa

$$X \ominus B \neq B \ominus X \tag{24}$$

Las propiedades de la erosión combinadas con la intersección son

$$(X \cap Y) \ominus B = (X \ominus B) \cap (Y \ominus B) \tag{25}$$
$$B \ominus (X \cap Y) \supseteq (B \ominus X) \cup (B \ominus Y) \tag{26}$$

Por otro lado, la intersección de imágenes y la dilatación no pueden intercambiarse; la dilatación de la intersección de dos imágenes está contenida en la intersección de sus dilataciones, es decir

$$(X \cap Y) \oplus B \subseteq (X \oplus B) \cap (Y \oplus B) \tag{27}$$
$$B \oplus (X \cap Y) \subseteq (X \ominus B) \cap (Y \oplus B) \tag{28}$$

El orden de la erosión junto con la dilatación puede intercambiarse con la unión de conjuntos. Este hecho permite que el elemento estructurante pueda ser descompuesto en una unión de elementos estructurantes más sencillos. Entonces,

$$B \oplus (X \cup Y) = (X \cup Y) \oplus B = (X \oplus B) \cup (Y \oplus B) \tag{29}$$

y

$$(X \cup Y) \ominus B \supseteq (X \ominus B) \cup (Y \ominus B) \tag{30}$$
$$B \ominus (X \cup Y) = (X \ominus B) \cup (Y \ominus B) \tag{31}$$

La dilatación (así como la erosión) de la imagen X primero por el elemento estructurante B y luego por el elemento estructurante D es equivalente a la dilatación (erosión) de la imagen X por medio de $B \oplus D$, esto es

$$(x \oplus B) \oplus D = X \oplus (B \oplus D) \tag{32}$$
$$(X \ominus B) \ominus D = X \ominus (B \oplus D) \tag{33}$$

A partir de estas operaciones morfológicas básicas de dilatación y erosión se pueden construir operaciones más complejas. A continuación se estudian dos de las más utilizadas.

2.4. Apertura y Cierre

La dilatación y la erosión no son transformaciones invertibles. Si una imagen es erosionada y luego dilatada, la imagen original no se recupera. En lugar de esta, se obtiene una imagen simplificada y con menos detalles. Sin embargo, la erosión seguida por la dilatación conforma una importante transformación morfológica llamada *apertura*. La apertura de una imagen X por medio del elemento estructurante B se denota como $X \circ B$ y está definida como

$$X \circ B = (X \ominus B) \oplus B \tag{34}$$

Por otro lado, la dilatación seguida por la erosión conforma la operación morfológica conocida como *cierre*. El cierre de una imagen X por medio del elemento estructurante B se denota como $X \bullet B$ y se define como

$$X \bullet B = (X \oplus B) \ominus B \tag{35}$$

Si una imagen X no cambia con la apertura con un elemento estructurante B se dice que es *abierta* con respecto a B. De manera similar, si una imagen X no cambia con el cierre con un elemento estructurante B, entonces se dice que X es *cerrada* con respecto a B.

Las operaciones de apertura y cierre con elementos estructurantes isótropos se utilizan para eliminar detalles de imagen específicos más pequeños que los elementos estructurantes utilizados. La forma global de los objetos no se distorsiona. La operación de cierre conecta objetos que están cerca, llena huecos pequeños o golfos estrechos, suaviza los contornos de los objetos. Los términos 'cerca', 'pequeño', 'estrecho' están relacionados directamente con el tamaño y la forma de los elementos estructurantes.

(a) (b) (c)

Figura 9: Operación morfológica de apertura sobre una imagen binaria. (a) Imagen binaria original; (b) resultado de la apertura de la imagen (a) con un elemento estructurante isótropo cuadrado de 3×3; (c) resultado de la apertura sobre la misma imagen con un elemento estructurante isótropo cuadrado de 5×5.

En la **Figura 9** se puede ver la apertura de la imagen mostrada previamente (en las **Figuras 5** y **8**) con dos elementos estructurantes de diferente tamaño: 3×3 y 5×5. Con los mismos elementos estructurantes, la **Figura 10** muestra el cierre de la misma imagen. Obsérvese la pérdida de detalles de la imagen original con las dos operaciones.

Así como la dilatación y la erosión, la apertura y el cierre son invariantes a la traslación del elemento estructurante. Debido a que tanto la dilatación como la erosión son transformaciones crecientes, la apertura y el cierre son transformaciones crecientes. La apertura es antiextensiva, es decir

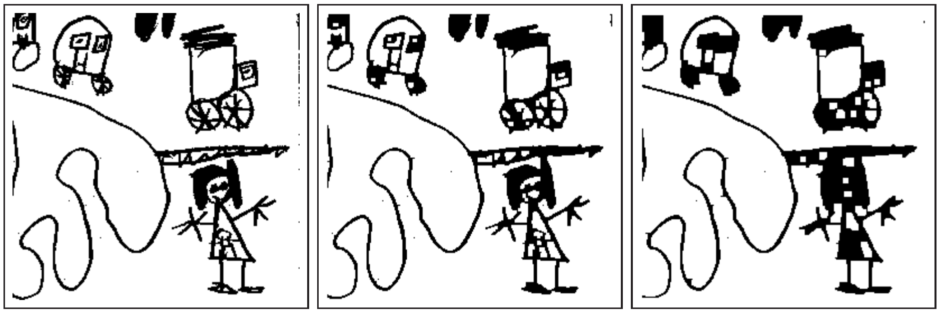
$$X \circ B \subseteq X \tag{36}$$

mientras que el cierre es extensivo,

$$X \subseteq X \bullet B \tag{37}$$

La apertura como el cierre, así como la dilatación y la erosión, son transformaciones duales, entonces

$$(X \bullet B)^{\mathsf{C}} = X^{\mathsf{C}} \circ \check{B} \tag{38}$$



(a) (b) (c)

Figura 10: Operación morfológica de cierre sobre una imagen binaria. (a) Imagen binaria original; (b) resultado del cierre de la imagen con un elemento estructurante isótropo cuadrado de 3×3; (c) resultado del cierre sobre la misma imagen con un elemento estructurante isótropo cuadrado de 5×5.

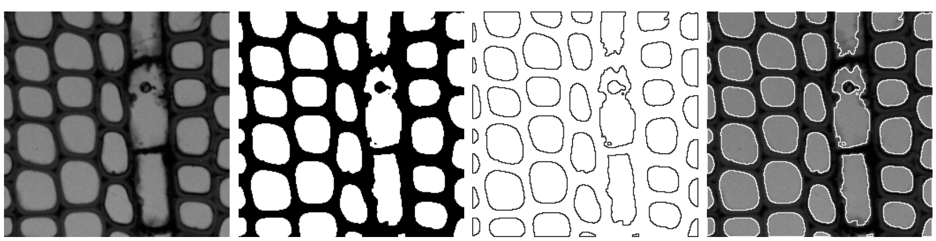
Otro hecho significativo es que las aperturas o cierres aplicados de manera iterativa son *ídem-potentes*, significando esto que la reaplicación de estas transformaciones no cambia el resultado anterior. Es decir,

$$X \circ B = (X \circ B) \circ B \tag{39}$$

$$X \bullet B = (X \bullet B) \bullet B \tag{40}$$

Como un ejemplo de la aplicación de morfología matemática, en la **Figura 11** se observa la obtención de bordes de las células de parénquima de la imagen microscópica de un corte transversal de una especie de madera. La imagen original en tonos de gris se digitaliza por medio de un umbral y luego se aplica las operaciones morfológicas de apertura y erosión con un elemento estructurante isótropo de 3×3 para obtener los bordes de la siguiente manera:

$$bordes = (X \circ B) - (X \ominus B) \tag{41}$$



(a) (b) (c) (d)

Figura 11: Ejemplo de aplicación de operadores morfológicos. (a) Imagen original (en tonos de gris) del corte transversal de una especie de madera; (b) imagen binaria obtenida por umbral; (c) imagen de los bordes de los objetos (en negativo). En este caso, los objetos son los elementos claros y de los cuales se espera medir sus dimensiones. (d) Imagen original y de bordes, superpuestas.

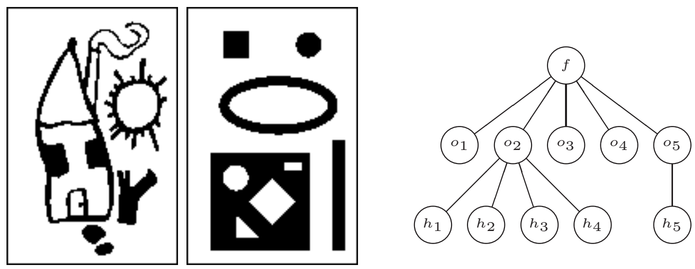
Aunque anteriormente se mostró una manera de obtener los bordes de los objetos, aquí se muestra otra nueva forma. La imagen de los bordes se superpuso a la imagen original para comparar los resultados. Observe que una buena parte del éxito de las aplicaciones con operadores morfológicos depende de la 'limpieza' de la imagen original.

3. Otros Procesos Topológicos

3.1. Transformaciones Homotópicas

Las propiedades topológicas están asociadas con la contigüidad. La morfología matemática puede usarse para estudiar esas propiedades de los objetos en las imágenes. Hay un grupo interesante de transformaciones morfológicas llamadas *transformaciones homotópicas*[1]. Una transformación es homotópica si no cambia las relaciones de contigüidad entre las regiones y los huecos en la imagen. Esta relación se expresa a través del *árbol homotópico*. La raíz del árbol corresponde al fondo de la imagen, las ramas de primer nivel a los objetos contenidos en la imagen, las ramas de segundo nivel a huecos dentro de los objetos, y así sucesivamente.

Un ejemplo de árbol homotópico se muestra en la **Figura 12**, donde hay dos imágenes diferentes con el mismo árbol. Obsérvese que las imágenes representan objetos diferentes aunque por su árbol son equivalentes. Las dos imágenes presentan un fondo donde se encuentran cinco objetos, tres de los cuales no tienen más detalles. Uno de ellos presenta un hueco, el sol en la imagen (a) y la elipse en la imagen (b). El otro presenta tres huecos, la casa en la imagen (a) y el cuadrado grande en la imagen (b). Como se observa en la Figura, o_5 representa en sol o la elipse mientras que o_2 representa la casa o el cuadrado grande. Los demás nodos corresponden a los otros objetos o huecos y son obvios.



(a) (b) (c)

Figura 12: Ejemplo de árbol homotópico para dos imágenes binarias (a) y (b). En (c) se muestra el árbol homotópico que es el mismo para las dos imágenes.

Bibiografía

[1] Gonzalo Pajares Martinsanz y Jesús M. De La Cruz García, *Visión por Computador: Imágenes Digitales y Aplicaciones*, Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V., México, D.F., 2002.

[2] John C. Russ, *The Image Processing Handbook*, Fourth Edition, CRC Press LLC, Boca Ratón, Florida, USA, 2002.

[3] Marcos Faúndez Zanuy, *Tratamiento Digital de Voz e Imagen y Aplicación a la Multimedia*, Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V., México, D.F., 2001.

[4] Rafael C. González and Richard E. Woods, *Digital Image Processing*, Second Edition, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, USA, 2002.

[5] Steven W. Smith, *The Scientist and Engineers Guide to Digital Signal Processing*, Second Edition, California Technical Publishing, San Diego, California, 1999.

[6] William K. Pratt, *Digital Image Processing*, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, USA, 1991.

[1] La palabra homotópico proviene de las palabras griegas *όμο* que significa 'igual' y *τόποζ* que significa 'lugar'.