📖 ➲ Bibliografía:

- **Mathworks, The**, Statistical Toolbox for Use with MATLAB®, User's Guide, Versión 3, Natick, Massachusetts, EE. UU., Mayo 2.001.

Función de Densidad de Probabilidad (Probability Density Function — pdf)

La función de densidad de probabilidad (probability density function — pdf) tiene diferente significado dependiendo de si se trata de una distribución contínua o discreta.
Para distribuciones discretas la pdf es la probabilidad de observar un valor particular.
Si fabricamos videocintas, la probabilidad de que haya exactamente un defecto cada 33 m es el valor de la pdf en 1.
Al revés de las distribuciones discretas, la pdf de una distribución contínua en un valor dado no es la probabilidad de observar tal valor.
Para las distribucines contínuas la probabilidad de observar un valor particular es 0.
Para obtener las probabilidades debemos integrar la pdf sobre el intervalo de interés.
Por ejemplo, la probabilidad de que el espesor de la viseocinta sea de entre 1 y 2 mm es la integral de la pdf apropiada desde uno a dos.
Una pdf tiene dos propiedades teóricas:

- La pdf es 0 o positiva para cada posible resultado.
- La integral de la pdf sobre todo el rango posible de valores es uno.

Una pdf no es una función simple.
Más bien es una familia de funciones caracterizadas por uno o más parámetros.
Una vez que hayamos elegido (o estimado) los parámetros de una pdf, hemos especificado unívocamente la función.
En MATLAB® el llamado a la función pdf function tiene el mismo formato general de cada distribución en la Toolbox.
Los siguientes comandos ilustran cómo llamar la pdf para la distribución normal:

```
x = [-3:0.1:3];
f = normpdf(x,0,1);
```

La variable f contiene la pdf de la normal con parámetros $m = 0$ y $s = 1$ para los valores de x
El primer argumento de input para cualquier pdf es el conjunto de valores para los cuales deseemos averiguar la densidad.
Otros argumentos contienen tantos datos como sean necesarios para definir la distribución de modo único.
La distribución normal requiere dos parámetros; uno de ubicación (la media, μ) y un parámetro de escala (el desvío estándar, σ).

Función Acumulada de Probabilidad (Cumulative Distribution Function — cdf)

Si f es la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X, la función acumulada de probabilidad (cdf) F es

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{X} f(t)\, dt$$

La cdf de un valor x, $F(x)$, es la probabilidad de observar cualquier resultado menor o igual a x

Una cdf tiene dos propiedades teóricas:

- La cdf va de 0 a 1.
- Si $y > x$, entonces la cdf de y es mayor o igual que la cdf de x

El llamado a la función cdf tiene el mismo formato general de todas las distribuciones en la Toolbox.
Los comandos siguientes ilustran cómo llamar la cdf para la distribución normal:

```
x = [-3:0.1:3];
p = normcdf(x,0,1);
```

La variable `p` contiene las probabilidades asociadas con la cdf normal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ a los valores de x

El primer argumento de input de cada cdf es el conjunto de valores para los cuales deseamos evaluar la probabilidad.

Otros argumentos contienen tantos parámetros como son necesarios para definir unívocamente la distribución.

Función Acumulada Inversa de Probabilidad (Inverse Cumulative Distribution Function)

La función acumulada inversa de probabilidad da valores críticos para test de hipótesis dadas probabilidades de significación.

Para entender la relación entre una cdf continua y su inversa, probemos lo siguiente:

```
x = [-3:0.1:3];
xnew = norminv(normcdf(x,0,1),0,1);
```

Que da el resultado:

```
xnew =
     -3.0000   -2.5000   -2.0000   -1.5000   -1.0000   -0.5000
          0    0.5000    1.0000    1.5000    2.0000    2.5000
          3.0000
```

¿Cómo se compara esto con `x`?

O, al revés, probemos:

```
p = [0.1:0.1:0.9];
pnew = normcdf(norminv(p,0,1),0,1);

pnew =
     0.1000    0.3000    0.5000    0.7000    0.9000
```

¿Cómo es `pnew` respecto a `p`?

El cañcular los valores de cdf en el dominio de una distribución continua da probabilidades entre cero y uno.

Aplicando a estas probabilidades la cdf inversa da los valores originales.

Para distribuciones discretas, la relación entre la cdf y su inversa es más complicada.

Es probable que no haya valor de `x` tal que la cdf de `x` de `p`

En estos casos la función inversa da el primer valor de `x` tal que la cdf de `x` iguala o excede `p`

Probemos esto:

```
x = [0:10];
```

```
y = binoinv(binocdf(x,10,0.5),10,0.5);

y =
     0     1     2     3     4     5     6     7     8     9    10
```

¿Cómo es `x` comparada con `y`?
Los comandos que siguen ilustran el problema de reconstruir, para distribuciones discretas, la probabilidad `p` del valor de `x`

```
p = [0.1:0.2:0.9];
pnew = binocdf(binoinv(p,10,0.5),10,0.5)
pnew =
     0.1719    0.3770    0.6230    0.8281    0.9453
```

La función inversa es útil en los test de hipótesis y en la generación de intervalos de confianza.
Aquí tenemos una forma de obtener un intervalo de confianza del 99% de una muestra con distribución normal:

```
p=[0.005 0.995];
x= norminv(p,0,1)
x =
     -2.5758   2.5758
```

La variable `x` contiene los valores asociados con la función inversa normal de parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ de las probabilidades en `p`
La diferencia `p(2)-p(1)` is 0.99.
Entonces, los valores en x definen un intervalo que contiene 99% de la probabilidad normal estándar.
El llamado de la función inversa tiene el mismo formato general para todas las distribuciones en la Toolbox.
El primer argumento de input de cada función inversa es el conjunto de probabilidades de las cuales deseemos evaluar los valores críticos.
Otros argumentos contienen tantos parámetros como sean necesarios para definir unívocamente la distribución.

Generador de Números Aleatorios

Los métodos para generar números aletorios de cualquier distribución comienzan todos con números aleatorios distribuidos uniformemente.
Una vez que tengamos un generador de números aleatorios distribuidos uniformemente, podemos generar números aleatorios para otras distribuciones, directamente o utilizando los métodos de inversión o rechazo, que se describirán más abajo.

Directo

Los métodos directos se obtienen de la definición de la distribución.
Como ejemplo, consideremos la generación de números aleatorios distribuidos binomialmente.
Podemos pensar a los números aleatorios distribuidos como el númerp de caras en *n* tiradas de una moneda con probabilidad *p* de caras en cualquier tirada.
Si generamos números aleatorios distribuidos uniformemente y contamos el número de los que son superiores a *p*, el resultado es binomial con parámetros *n* and *p*

Inversión

El método de inversión funciona debido al teorema fundamental que relaciona la distribución uniforme con otras distribuciones continuas.

Si F es una distribución continua con inversa F^{-1}, y U es un número aleatorio con distribución uniforme, entonces F^{-1} (U) tiene distribución F

De tal forma que podemos generar un número aleatorio desde una distribución aplicando la función inversa a un número aleatorio de distribución uniforme.

Esta manera, desgraciadamente, no es generalmente la más eficiente.

Rechazo

La forma funcional de algunas distribuciones hacen o dificultosa o lenta la generación de númeroa aleatorios utilizando los métodos directo o de inversión.

Los métodos de rechazo a veces pueden proveer en estos casos una solución elegante.

Supongamos que deseamos generar números aleatorios de una distribución con pdf f

Para utilizar los métodos de rechazo primero debemos encontrar otra densidad, g, y una constante, c, de tal manera que se cumpla la siguiente inegualdad:

$$f(x) \leq c\ g(x) \quad \forall_x$$

Entonces generamos los números aleatorios que deseamos utilizando los siguientes pasos:

1. Generar un número aleatorio x de la distribución G con densidad g
2. Formar el cociente $r = \dfrac{c\ g(x)}{f(x)}$
3. Generar un némero aleatorio uniforme u
4. Si el producto de u y r es menor a uno, regresas x
5. De lo contrario repetir los pasos uno a tres.

Por razones de eficiencia, necesitamos un método barato para generar números aleatorios de G, y el escalar c debería ser pequeño.

El número esperado de iteraciones es c

Sintaxis de Funciones de Números Aleatorios

Podemos generar números aleatorios de cada distribución.

Esta función provee números aleatorios únicos o una matriz de números aleatorios, dependiendo de los argumentos que especifiquemos en el llamado a la función.

Por ejemplo, aquí tenemos una manera de generar números aleatorios de una distribución beta.

Cuatro sentencias obtienen números aleatorios: la primera genera un número, la segunda una matriz de 2 por 2 de números aleatorios y la tercera y cuarta matrices de números aleatorios de 2 por 3.

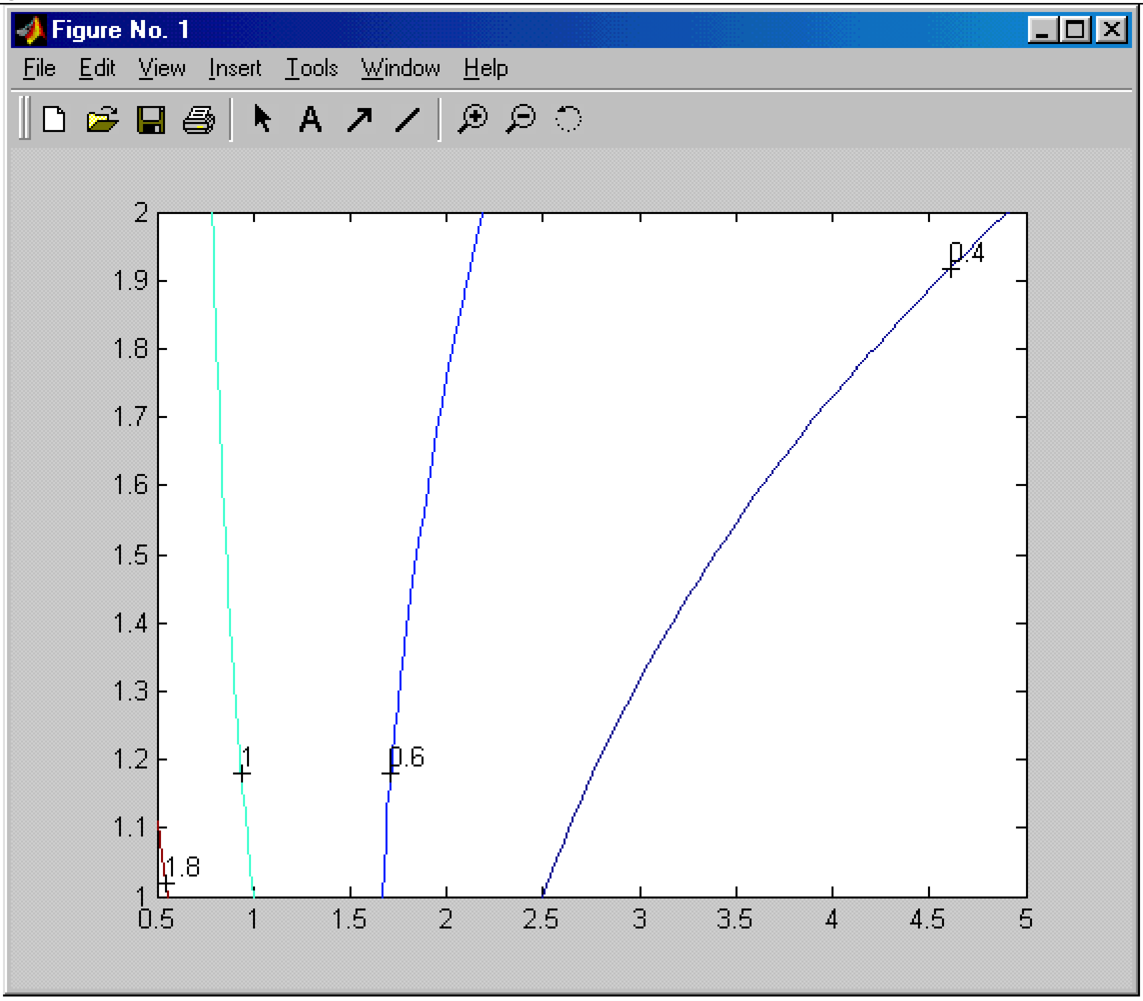
```
a = 1;
b = 2;
c = [.1 .5; 1 2];
d = [.25 .75; 5 10];
m = [2 3];
nrow = 2;
ncol = 3;
r1 = betarnd(a,b)
r1 =
     0.4469
r2 = betarnd(c,d)
```

```
r2 =
     0.8931    0.4832
     0.1316    0.2403
r3 = betarnd(a,b,m)
r3 =
     0.4196    0.6078    0.1392
     0.0410    0.0723    0.0782
r4 = betarnd(a,b,nrow,ncol)
r4 =
     0.0520    0.3975    0.1284
     0.3891    0.1848    0.5186
```

La Media y la Varianza con una Función de Parámetros

La media y la varianza de una distribución de probabilidad generalmente son funciones simples de los parámetros de la distribución.
Las funciones de la Toolbox que finalizan con "`stat`" producen todas la media y la varianza de la distribución deseada para los parámetros dados.
El siguiente ejemplo muestra un gráfico de la media de la distribución Weibull como una función de los parámetros.

```
x = (0.5:0.1:5);
y = (1:0.04:2);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
Z = weibstat(X,Y);
[c,h] = contour(x,y,Z,[0.4 0.6 1.0 1.8]);
clabel(c);
```



Distribución Beta

La distribución beta describe una familia de curvas que son únicas por el hecho de que son no nulas en el intervalo (0 1).
Una versión más general de la función asigna parámetros a los puntos extremos del intervalo.
La cdf de la beta es la misma de la función beta incompleta.
La distribución beta posee una relación funcional con la distribución t
Si Y es una observación de la distribución t de Student con ν grados de libertad, entonces la transformación siguiente genera X, la cual está distribuida con distribución beta.

$$X = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{Y}{\sqrt{\nu + \gamma^{2}}}$$

$$\text{si} \quad Y \sim t(\nu) \text{ entonces } X \sim \beta\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$$

La Toolbox utiliza esta relación para computar valores de la cdf de t y la función inversa así como para generar números aleatorios distribuidos con distribución t

Definición de la Distribución Beta

La pdf de la beta es

$$y = f(x|a,b) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} I_{(0,1)}(x)$$

donde $B(.)$ es la función beta.

La función indicadora $I_{(1,0)}(x)$ asegura que sólo valores de x en el rango (0 1) tengan probabilidad no nula.

Estimación de Parámetros para la Distribución Beta

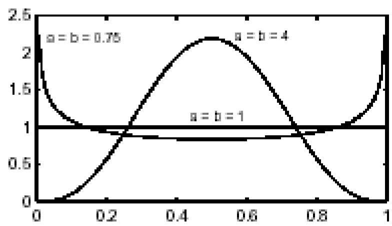
Supongamos que estamos recolectando datos que poseen fuertes límites en 0 y 1 respectivamente.
La estimación de parámetros es el proceso de determinar los parámetros de la distribución beta que ajusta estos datos de la mejor forma posible en algún sentido.
Un criterio popular de bondad es maximizar la función de verosimilitud.
La verosimilitud tiene la misma forma que la pdf de la beta.
Pero para la beta los parámetros son constantes conocidas y la variable es x
La función de verosinilitud invierte los roles de las variables.
Aquí los valores de las variables (las x) ya se han observado.
Por lo tanto ellas son las constantes fijas.
Las variables son los parámetros desconocidos.
La estimación de la máxima verosimilitus (maximum likelihood estimation — MLE) involucra calcular los valores de los parámetros que dan la verosimilitud más alta dado el conjunto particular de datos.
La función `betafit` da la MLE y los intervalos de confianza para los parámetros de la función beta.
Aquí tenemos un ejemplo utilizando números aleatorios de la distribución beta con $a = 5$ y $b = 0.2$

```
r = betarnd(5,0.2,100,1);
[phat, pci] = betafit(r)
phat =
     4.5330    0.2301
pci =
     2.8051    0.1771
     6.2610    0.2832
```

La MLE para el parámetro a es 4.5330, comparado con el valor real de 5.
El intervalo de confianza del 95% para a va de 2.8051 a 6.2610, lo que incluye el valor real.
En forma similar la MLE para el parámetro b es 0.2301, comparado con el valor real de 0.2.
El intervalo de confianza del 95% para b va de 0.1771 a 0.2832, lo cual también incluye el valor real.
Por supuesto, en este ejemplo fabricado, conocemos los valores.
En la experimentación no.

Ejemplo y Gráfico de la Distribución Beta

La forma de la distribución beta es bastante variable dependiendo de los valores de los parámetros, como muestra la siguiente figura:



La pdf constante (la línea horizontal) muestra la distribución uniforme estándar es un caso especial de la distribución beta.

Distribución Binomial

La distribución binomial modeliza el número total de éxitos en pruebas repetidas de una población infinita bajo las siguientes condiciones:

- De cada n pruebas sólo son posibles dos resultados
- La probabilidad de éxito en cada prueba es constante.
- Todas las pruebas son independientes unas de otras.

James Bernoulli[1] derivó la distribución binomial en 1.713 (*Ars Conjectandi*).
Antes, Blaise Pascal[2] había considerado el caso especial donde $p = ½$

Definición de la Distribución Binomial

La pdf de la binomial es

[1] Born Jan. 6, 1655, [Dec. 27, 1654, old style], Basel, Switzerland Died Aug. 16, 1705, Basel first of the Bernoulli family of Swiss mathematicians.
He introduced the first principles of the calculus of variation.
Bernoulli numbers, a concept that he developed, were named after him.
The scion of a family of drug merchants, Jakob Bernoulli was compelled to study theology but became interested in mathematics despite his father's opposition.
His travels led to a wide correspondence with mathematicians.
Refusing a church appointment, he accepted a professorial chair of mathematics at the University of Basel in 1687; and, following his mastery of the mathematical works of John Wallis, Isaac Barrow (both English), René Descartes (French), and G. W. Leibniz, who first drew his attention to calculus, he embarked upon original contributions.
In 1690 he became the first to use the term integral in analyzing a curve of descent.
His 1691 study of the catenary, or the curve formed by a cord suspended between its two extremities, was soon applied in the building of suspension bridges.
In 1695 he also applied calculus to the design of bridges.
During these years, he often engaged in disputes with his brother Johann Bernoulli over mathematical issues.
Jakob Bernoulli's pioneering work Ars Conjectandi (published posthumously, 1713; "The Art of Conjecturing") contained many of his finest concepts: his theory of permutations and combinations; the so-called Bernoulli numbers, by which he derived the exponential series; his treatment of mathematical and moral predictability; and the subject of probability--containing what is now called the Bernoulli law of large numbers, basic to all modern sampling theory.
His works were published as Opera Jacobi Bernoullii, 2 vol. (1744).

[2] Born June 19, 1623, Clermont-Ferrand, France. Died Aug. 19, 1662, Paris French mathematician, physicist, religious philosopher, and master of prose.
He laid the foundation for the modern theory of probabilities, formulated what came to be known as Pascal's law of pressure, and propagated a religious doctrine that taught the experience of God through the heart rather than through reason.
The establishment of his principle of intuitionism had an impact on such later philosophers as Jean-Jacques Rousseau and Henri Bergson and also on the Existentialists.
Pascal's life to the Port-Royal years
Pascal's father, Étienne Pascal, was presiding judge of the tax court at Clermont-Ferrand.
His mother died in 1626, and in 1631 the family moved to Paris.
Étienne, who was respected as a mathematician, devoted himself henceforth to the education of his children.
While his sister Jacqueline (born in 1625) figured as an infant prodigy in literary circles, Blaise proved himself no less precocious in mathematics.
In 1640 he wrote an essay on conic sections, Essai pour les coniques, based on his study of the now classical work of Girard Desargues on synthetic projective geometry.
The young man's work, which was highly successful in the world of mathematics, aroused the envy of no less a personage than the great French Rationalist and mathematician René Descartes.
Between 1642 and 1644, Pascal conceived and constructed a calculating device to help his father--who in 1639 had been appointed intendant (local administrator) at Rouen--in his tax computations.
The machine was regarded by Pascal's contemporaries as his main claim to fame, and with reason, for in a sense it was the first digital calculator since it operated by counting integers.
The significance of this contribution explains the youthful pride that appears in his dedication of the machine to the chancellor of France, Pierre Seguier, in 1644.
Until 1646 the Pascal family held strictly Roman Catholic principles, though they often substituted l'honnêteté ("polite respectability") for inward religion.
An illness of his father, however, brought Blaise into contact with a more profound expression of religion, for he met two disciples of the abbé de Saint-Cyran, who, as director of the convent of Port-Royal, had brought the austere moral and theological conceptions of Jansenism into the life and thought of the convent.
Jansenism was a 17th-century form of Augustinianism in the Roman Catholic Church.

$$y = (x|n,\ p) = \binom{n}{x} p^x\ q^{(1-x)} I_{(0,\ 1,\ \ldots,\ n)}(x)$$

$$\text{donde} \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}\ \text{ y }\ q = 1-\ p$$

La distribución binomial es discreta.
Para cero y enteros positivos menores a n, la pdf es no nula.

Estimación de Parámetros de la Distribución Binomial

Supongamos que estamos recolectando datos de un proceso de fabricación de piezas, y que registramos el número de piezas dentro de las especificaciones en cada lote de 100 piezas.
Podríamos estar interesados en la probabilidad de que una pieza individual esté dentro de la especificación.
La estimación de parámetro es el proceso de determinar el parámetro, p, de la distribución binomial que mejor ajusta, en cierto sentido, a estos datos.
Un criterio popular de bondad es maximizar la función de verosimilitud.
La verosimilitud tiene la misma forma que la pdf binomial de más arriba.
Pero, para la pdf, los parámetros (n y p) son constantes conocidas y la variable es x
La función de verosimilitud invierte los roles de las variables.
Aquí los valores de la muestra (las x) ya se han observado.
Por tanto, son las constantes fijas.
Las variables son los parámetros desconocidos.
La MLE involucra calcular el valor de p que da la verosimilitud más alta dado el conjunto particular de datos.

It repudiated free will, accepted predestination, and taught that divine grace, rather than good works, was the key to salvation.
The convent at Port-Royal had become the centre for the dissemination of the doctrine.
Pascal himself was the first to feel the necessity of entirely turning away from the world to God, and he won his family over to the spiritual life in 1646.
His letters indicate that for several years he was his family's spiritual adviser, but the conflict within himself--between the world and ascetic life--was not yet resolved.
Absorbed again in his scientific interests, he tested the theories of Galileo and Evangelista Torricelli (an Italian physicist who discovered the principle of the barometer).
To do so, he reproduced and amplified experiments on atmospheric pressure by constructing mercury barometers and measuring air pressure, both in Paris and on the top of a mountain overlooking Clermont-Ferrand.
These tests paved the way for further studies in hydrodynamics and hydrostatics.
While experimenting, Pascal invented the syringe and created the hydraulic press, an instrument based upon the principle that became known as Pascal's law: pressure applied to a confined liquid is transmitted undiminished through the liquid in all directions regardless of the area to which the pressure is applied.
His publications on the problem of the vacuum (1647-48) added to his reputation.
When he fell ill from overwork, his doctors advised him to seek distractions; but what has been described as Pascal's "worldly period" (1651-54) was, in fact, primarily a period of intense scientific work, during which he composed treatises on the equilibrium of liquid solutions, on the weight and density of air, and on the arithmetic triangle: Traité de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air (Eng. trans., The Physical Treatises of Pascal, 1937) and also his Traité du triangle arithmétique.
In the last treatise, a fragment of the De Alea Geometriae, he laid the foundations for the calculus of probabilities.
By the end of 1653, however, he had begun to feel religious scruples; and the "night of fire," an intense, perhaps mystical "conversion" that he experienced on November 23, 1654, he believed to be the beginning of a new life.
He entered Port-Royal in January 1655, and though he never became one of the solitaires, he thereafter wrote only at their request and never again published in his own name.
The two works for which he is chiefly known, Les Provinciales and the Pensées, date from the years of his life spent at Port-Royal.

La función `binofit` da la MLE y los intervalos de confianza para los parámetros de la distribución binomial.
Aquí tenemos un ejemplo utilizando números aleatorios de la distribución binomial con n = 100 y p = 0.9

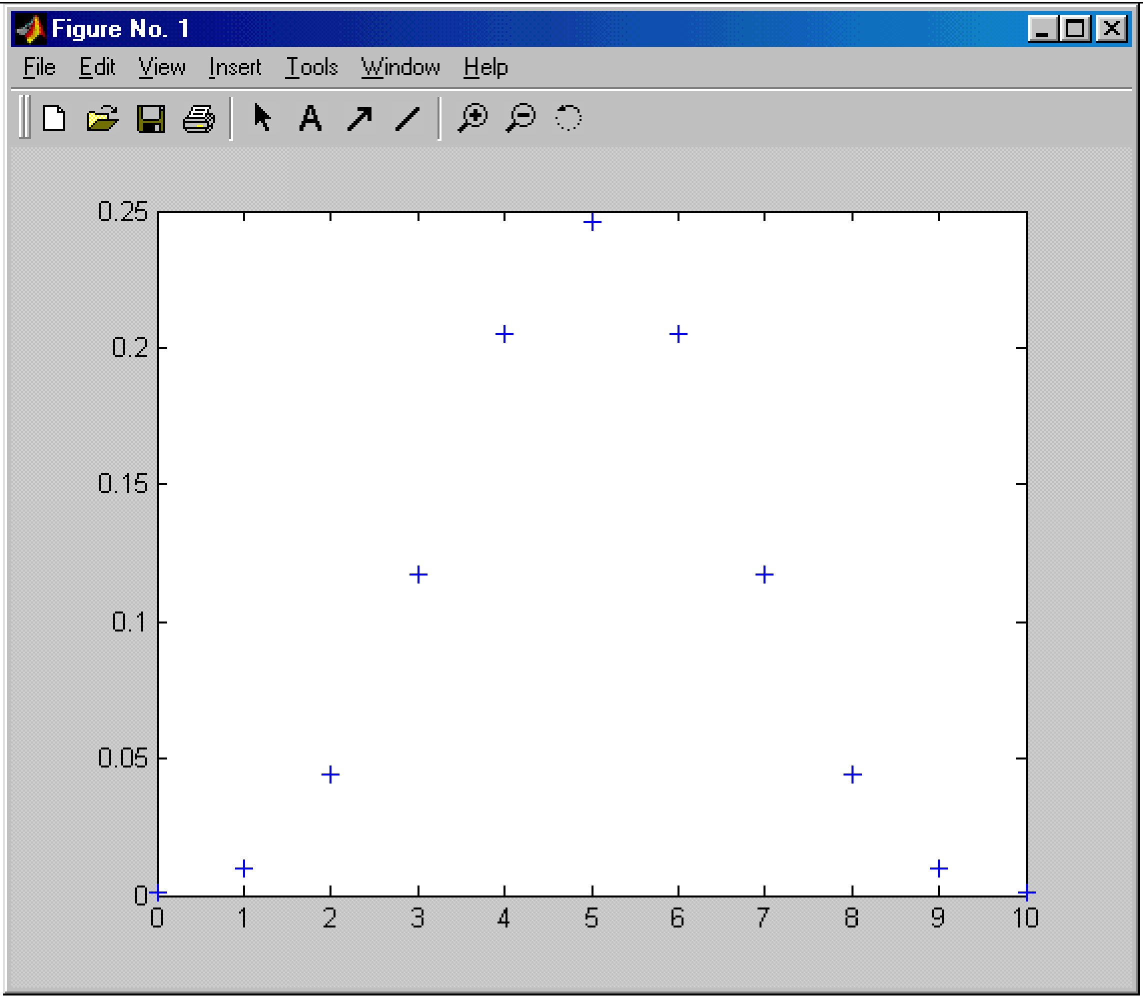
```
r = binornd(100,0.9)
r =
     88
[phat, pci] = binofit(r,100)
phat =
     0.8800
pci =
     0.7998
     0.9364
```

La MLE para el parámetro p es 0.8800, comparado con el valor real de 0.9.
El intervalo de confianza para el 95% para p va de 0.7998 a 0.9364, el cual incluye el valor real.
Por supuesto, en este ejemplo fabricado, conocemos el “valor real” de p
En la experimentación no.

Ejemplo y Gráfico de la Distribución Binomial

Los comandos siguientes generan un gráfico de la pdf de la distribución binomial para n = 10 y p = 1/2.

```
x = 0:10;
y = binopdf(x,10,0.5);
plot(x,y,'+')
```



Distribución Chi-Cuadrado

La distribución κ^2 es un caso especial de la distribución gama donde $b = 2$ en la siguiente ecuación de gama:

$$y = \left(x \middle| a, b\right) = \frac{1}{b^a \, \Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}}$$

La distribución κ^2 es interesante por su importancia en la teoría de las pequeñas muestras.
Si un conjunto de n observaciones está distribuido normalmente con varianza σ^2, y s^2 es el desvío estándar de la muestra, entonces la Toolbox utiliza la relación de más arriba para calcular los intervalos de confianza para la estimación del parámetro normal σ^2 en la función `normfit`.

Definición de la Distribución Chi-Cuadrado

La pdf de κ^2 es

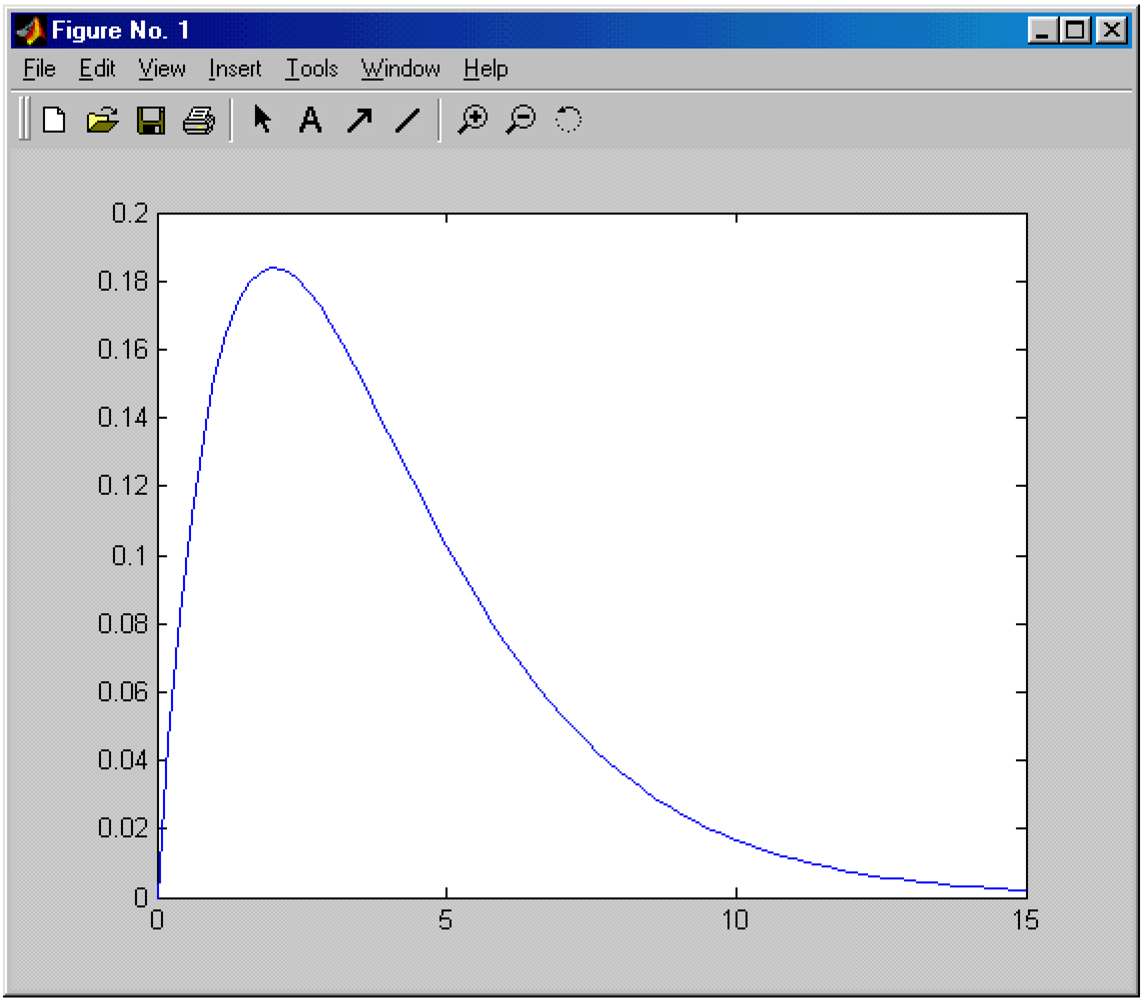
$$y = f\left(x \middle| \nu\right) = \frac{x^{(\nu-2)/2} \, e^{-x/2}}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu/2)}$$

donde Γ (.) es la función gama, y ν es el número de grados de libertad.

Ejemplo y Gráfico de la Distribución Chi-Cuadrado

La distribución κ^{2} está sesgada hacia la derecha especialmente para pocos grados de libertad.
El gráfico muestra la distribución κ^{2} con cuatro grados de libertad.

```
x = 0:0.2:15;
y = chi2pdf(x,4);
plot(x,y)
```



Distribución Uniforme Discreta

La distribución uniforme discreta es una distribución simple que otorga pesos iguales a los enteros entre 1 y N

Definición de la Distribución Uniforme Discreta

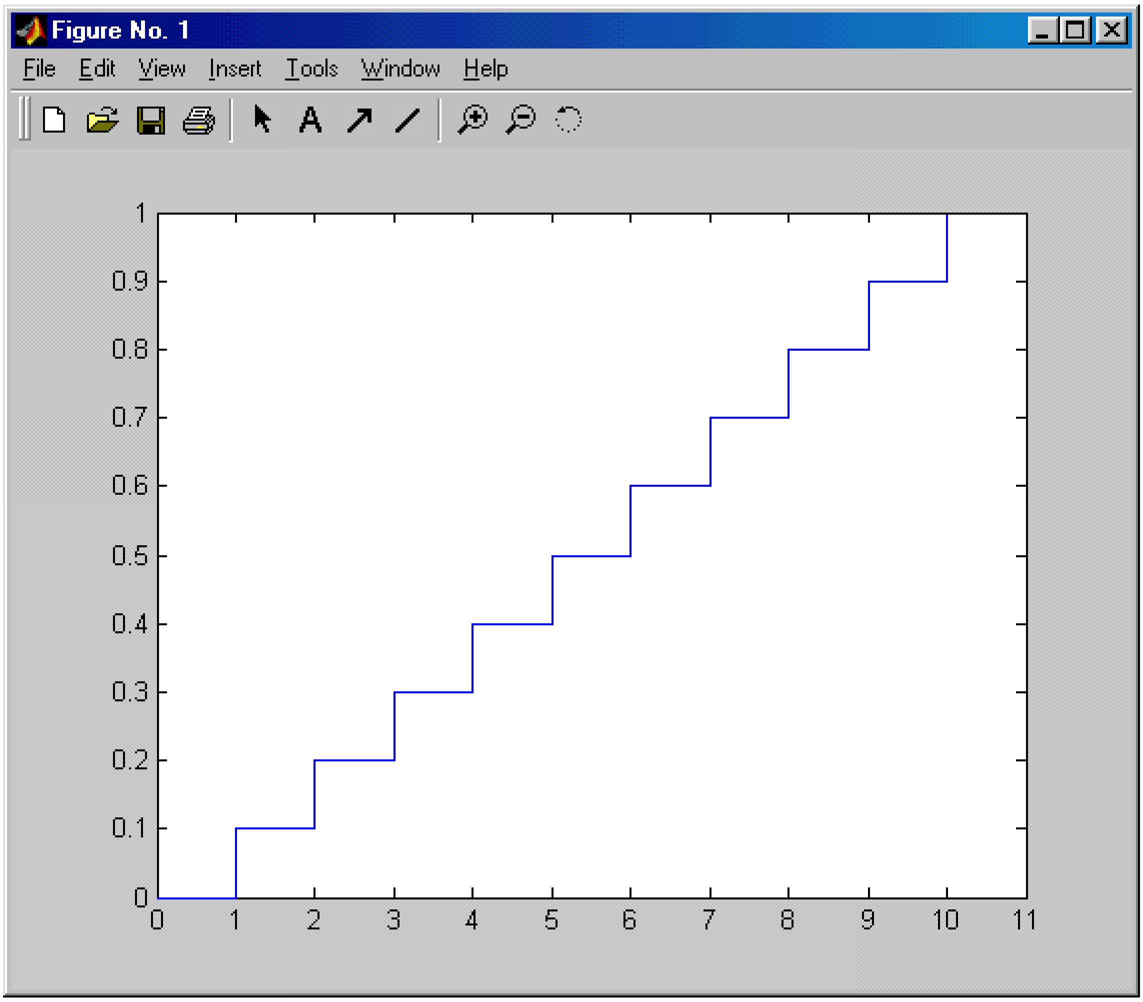
La pdf de la distribución uniforme discreta es:

$$y = f(x|N) = \frac{1}{N} I_{(1, \ldots, N)}(x)$$

Ejemplo y Gráfico de la Distribución Uniforme Discreta

Como todas las distribuciones discretas, la cdf es una función escalón.
El gráfico muestra la cdf de la distribución uniforme discreta para $N = 10$

```
x = 0:10;
y = unidcdf(x,10);
stairs(x,y)
set(gca,'Xlim',[0 11])
```



Para elegir una muestra al azar de 10 de una lista de 553 items:

```
numbers=unidrnd(553,1,10)
numbers =
     122  27   376  376  517  213  288  460  20   30
```

Distribución Exponencial

Como la distribución chi-cuadrado, la distribución exponencial es una caso especial de la distribución gama (obtenida al fijar a = 1)

$$y = f\left(x|a, b\right) = \frac{1}{b^{a}\Gamma\left(a\right)} x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}}$$

donde Γ (.) es la función gama.
La distribución exponencial es especial debido a su utilidad en el modelado de eventos que ocurren aleatoriamente a lo largo del tiempo.
El área principal de aplicación es el de vida útil.

Definición de la Distribución Exponencial

La pdf de la exponencial es:

$$y = f(x|\mu) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}$$

Estimación de Parámetros para la Distribución Exponencial

Supongamos que estamos probando lamparitas y recolectando datos acerca de su vida útil.
Nosotros asumimos que esas vidas útiles siguen una distribución exponencial.
Deseamos saber cuánto tiempo podemos esperar que la lamparita promedio durará.
La estimación de parámetros es el proceso de determinar los parámetros de la distribución exponencial que ajusta mejor, en cierto sentido, a los datos.
Un criterio popular de bondad es maximizar la función de verosimilitud.
La verosimilitud tiene la misma forma que la de la pdf mostrada más arriba.
Pero para la pdf los parámetros son constantes conocidas y la variable es x
La función de verosimilitud invierte los roles de las variables.
Aquí, los valores de la muestra (las x) ya están observadas.
Por lo tanto son constantes fijas.
Las variables son los parámetros desconocidos.
MLE involucra calcular los valores de los parámetros que dan la mayor verosimilitud dado el conjunto particular de datos.
La función `expfit` da la MLE y los intervalos de confianza de los parámetros de la distribución exponencial.
Aquí tenemos un ejemplo utilizando números al azar de la distribución exponencial con μ = 700.

```
lifetimes=exprnd(700,100,1);
[muhat, muci]=expfit(lifetimes)
muhat =
     641.0064
muci =
     521.5484
     772.5982
```

La MLE para el parámetro μ es 641, comparado con el valor real de 700.
El intervalo de confianza del 95% para μ va de 521 a 772, que incluye el valor real.
En nuestros test de la vida real no conocemos el valor real de μ, por lo que es bueno tener un intervalo de confianza del parámetro para tener un rango de los valores probables.

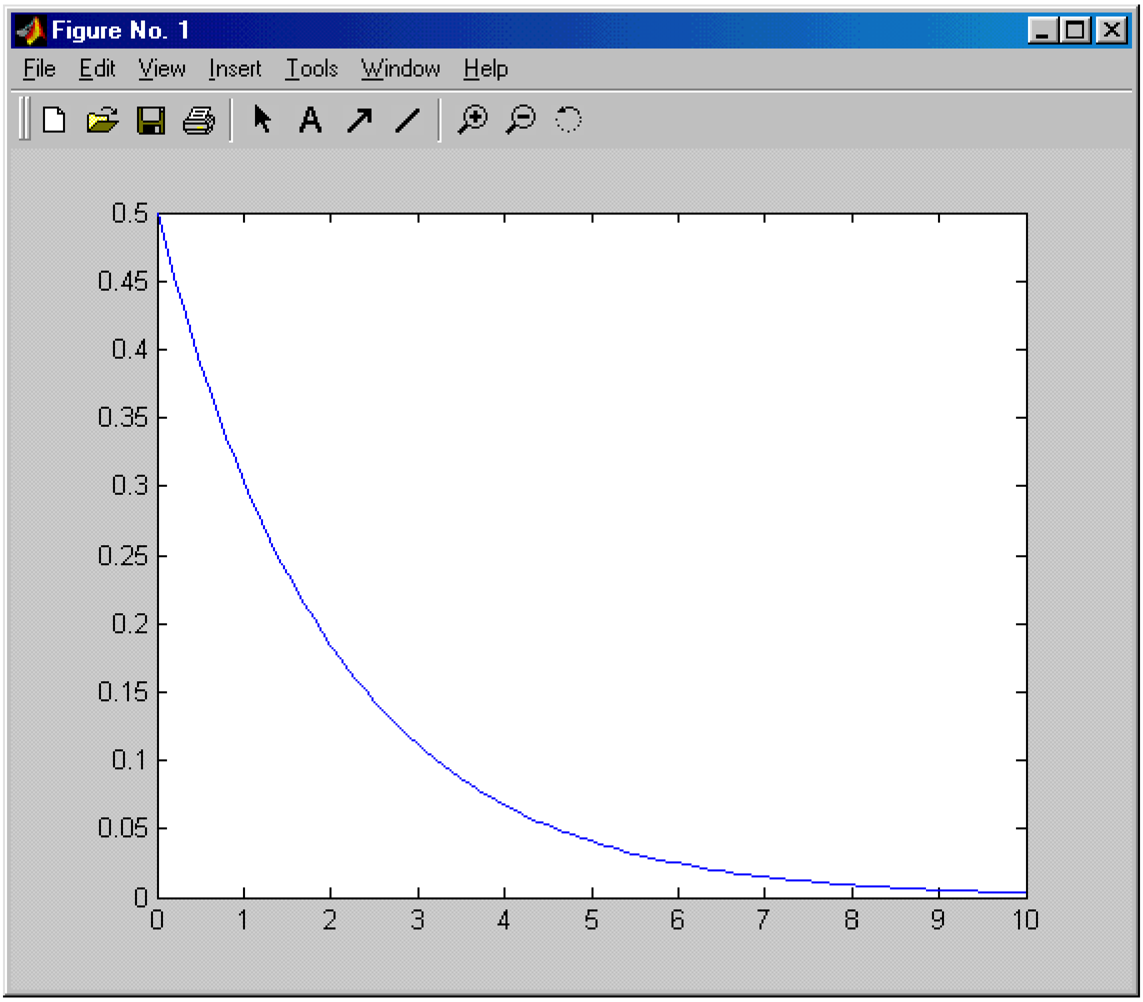
Ejemplo y Gráfico de la Distribución Exponencial

Para tiempos de vida distribuidos exponencialmente, la probabilidad de que un item sobrevivirá una unidad extra de tiempo es independiente de la edad actual del item.
El ejemplo muestra un caso específico de esta propiedad especial:

```
l = 10:10:60;
lpd = l+0.1;
deltap = (expcdf(lpd,50)-expcdf(l,50))./(1-expcdf(l,50))
deltap =
     0.0020    0.0020    0.0020    0.0020    0.0020    0.0020
```

El gráfico de más abajo muestra la pdf exponencial con su parámetro (y media), μ, fijada en 2.

```
x = 0:0.1:10;
y = exppdf(x,2);
plot(x,y)
```



Distribución Normal

La distribución normal es una familia de curvas de dos parámetros.
El primer parámetro, μ , es la media.
El segundo, σ , es el desvío estándar.
La distribución normal estándar (que se escribe $\Phi(x)$) fija μ en cero y σ en 1.
$\Phi(x)$ está relacionada funcionalmente a la función de error, *erf*

$$erf(x) = 2\Phi\left(x\sqrt{2}\right) - 1$$

El primer uso de la distribución normal fue como una aproximación continua a la binomial.
La justificación usual para utilizar la distribución normal para modelizar es el Teorema del Límite Central, que dice (a grandes rasgos) que la suma de muestras independientes de diferentes distribuciones con medias y desvíos finitos converge con la distribución normal a medida que el tamaño de la muestra tiende a infinito.

Definición de la Distribución Normal

La pdf de la distribución normal es:

$$y = \left(x \middle| \mu , \sigma \right) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2 \pi}} e^{\frac{-(x-\mu)}{2 \sigma^2}}$$

Estimación de Parámetros para la Distribución Normal

Una de las primeras aplicaciones de la distribución normal en análisis de datos fue el modelar la altura de los escolares.

Supongamos que deseamos estimar la media, μ , y la varianza, σ^2 de todos los niños de 4° de los Estados Unidos.

Ya hemos introducido la MLE.

Otro criterio deseable en un estimador estadístico es el que sea sin sesgo.

Un estadístico es sin sesgo si el valor esperado del estadístico es igual al parámetro que está siendo estimado.

La MLEs no siempre es sin sesgo.

Para cada ejemplo de datos, puede haber más de un estimador sin sesgo de los parámetros de la distribución padre de la muestra.

Por ejemplo, cada valor de la muestra es un estimador sin sesgo del parámetro μ de una distribución normal.

El Estimador sin Sesgo de Mínima Varianza (Minimum Variance Unbiased Estimator — MVUE) es el estadístico que tiene la varianza mínima de todos los estimadores sin sesgo de un parámetro.

El MVUE de los parámetros μ y σ^2 de la distribución normal son el promedio simple y la varianza.

El promedio simple es también la MLE para μ

Hay dos fórmulas comunes de los textos para la varianza.

Son:

1) $$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

2) $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

donde

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}$$

La ecuación 1) es el máximo estimador de verosimilitud para σ^2, y la ecuación 2 es el MVUE.

La función `normfit` da los MVUE y los intervalos de confianza para μ y σ^2

Aquí tenemos un ejemplo de las "alturas" (en pulgadas) en una clase de 4° grado elegida al azar.

```
height = normrnd(50,2,30,1);      % Simular las alturas.
[mu,s,muci,sci] = normfit(height)
mu =
     50.2025
s =
     1.7946
muci =
     49.5210
```

```
        50.8841
    sci =
        1.4292
        2.4125
```

Distribución Poisson

La distribución Poisson es apropiada para aplicaciones que involucran el contar las veces que ocurre un evento en una cantidad dada de tiempo, distancia, área, etc.
Los ejemplos de aplicaciones involucran la distribución Poisson son el número de clicks por segundo de un contador Geiger[3], el número de personas que ingresan por hora a un comercio y el número de defectos en 1.000 piés de cinta.
La distribución Poisson es una distribución discreta de un parámetro que toma valores enteros no negativos.
El parámetro, λ , es tanto la media como la varianza de la distribución.
Por lo tanto, a medida que aumenta el número de números aleatorios con distribución Poisson, así lo hace la variabilidad de los números.
Como demostró Poisson (1837)[4], la distribución Poisson es un caso límite de la distribución normal donde N se aproxima a infinito mientras tiende a cero mientras $Np = \lambda$
Las distribuciones Poisson y exponenciales están relacionadas.
Si el número contado sigue una distribución Poisson, entonces el intervalo entre conteos individuales sigue una distribución exponencial.

---

[3] **Geiger, Hans** (1882-1945), pionero alemán en física nuclear e inventor del contador Geiger para la detección de la radiactividad.
Nació en Neustadt-an-der-Haardt y su nombre verdadero era Johannes Wilhelm Geiger.
Estudió en la Universidad de Erlangen, donde se doctoró en Filosofía en 1906.
Su tesis trató de las descargas eléctricas en los gases.
Desde 1906 hasta 1912, trabajó con Ernest Rutherford en Manchester, donde en 1908 inventó la primera versión de su detector para el recuento de partículas alfa.
El instrumento constaba de un cilindro lleno de gas con un hilo de alta tensión eléctrica a través de su eje.
Cada partícula alfa hace que el gas se ionice y la corriente resultante tras la explosión se mide mediante un electrómetro conectado al hilo.
Geiger y Rutherford demostraron que las partículas alfa tenían dos unidades de carga.
Un año después, Geiger y Ernest Marsden observaron que en ocasiones las partículas alfa se desvían en amplios ángulos cuando chocan con una lámina delgada de oro o plata.
Estos primeros experimentos de dispersión condujeron a Rutherford a la teoría nuclear del átomo.
En 1910 Geiger mostró junto con Rutherford que en la desintegración radiactiva del uranio se emiten dos partículas alfa, y en 1912, en colaboración con J. M. Nuttall, reveló que esto es producido por dos isótopos del uranio.
Ese mismo año Geiger fue nombrado director de la Escuela Técnica Superior de Berlín donde confirmó el efecto Compton con un contador perfeccionado.
En la década de 1920 Geiger y Walther Müller desarrollaron en la Universidad de Kiel lo que es en la actualidad el contador de Geiger-Müller, que también registra otros tipos de radiación ionizante, como la de las partículas beta y los rayos gamma.

[4] **Poisson, Siméon Denis** (1781-1840), físico matemático francés nacido en Pithiviers (Loiret).
Se le conoce, sobre todo, por sus contribuciones teóricas a la electricidad y al magnetismo, aunque también publicó varias obras sobre otros temas, como el cálculo de variaciones, la geometría diferencial y la teoría de la probabilidad.
La distribución de Poisson es un caso especial de la distribución binomial en estadística.
En la Escuela Politécnica trabajó bajo la influencia del matemático Joseph Louis Lagrange, y en 1802 fue ayudante de Joseph Fourier, cuya cátedra asumió Poisson en 1808.
Más tarde fue profesor de mecánica en la Sorbona y un miembro destacado de la sociedad científica francesa.
Su primera memoria sobre la electricidad apareció en 1812; en ella adoptó, lo mismo que Charles de Coulomb había hecho antes que él, el modelo de los dos fluidos de la electricidad.
Mediante la función potencial de Lagrange intentó calcular matemáticamente la distribución de cargas eléctricas sobre la superficie de los conductores.
Poisson demostró en 1824 que estas formulaciones se podían aplicar exactamente igual al magnetismo.
Fue injustamente acusado por sus contemporáneos de falta de originalidad.
También se interesó por la teoría de la elasticidad; en astronomía trabajó fundamentalmente en la matemática del movimiento de la Luna.

Definición de la Distribución Poisson

La pdf de Poisson es:

$$y = f(x|\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \; I_{(0,1,\ldots)}(x)$$

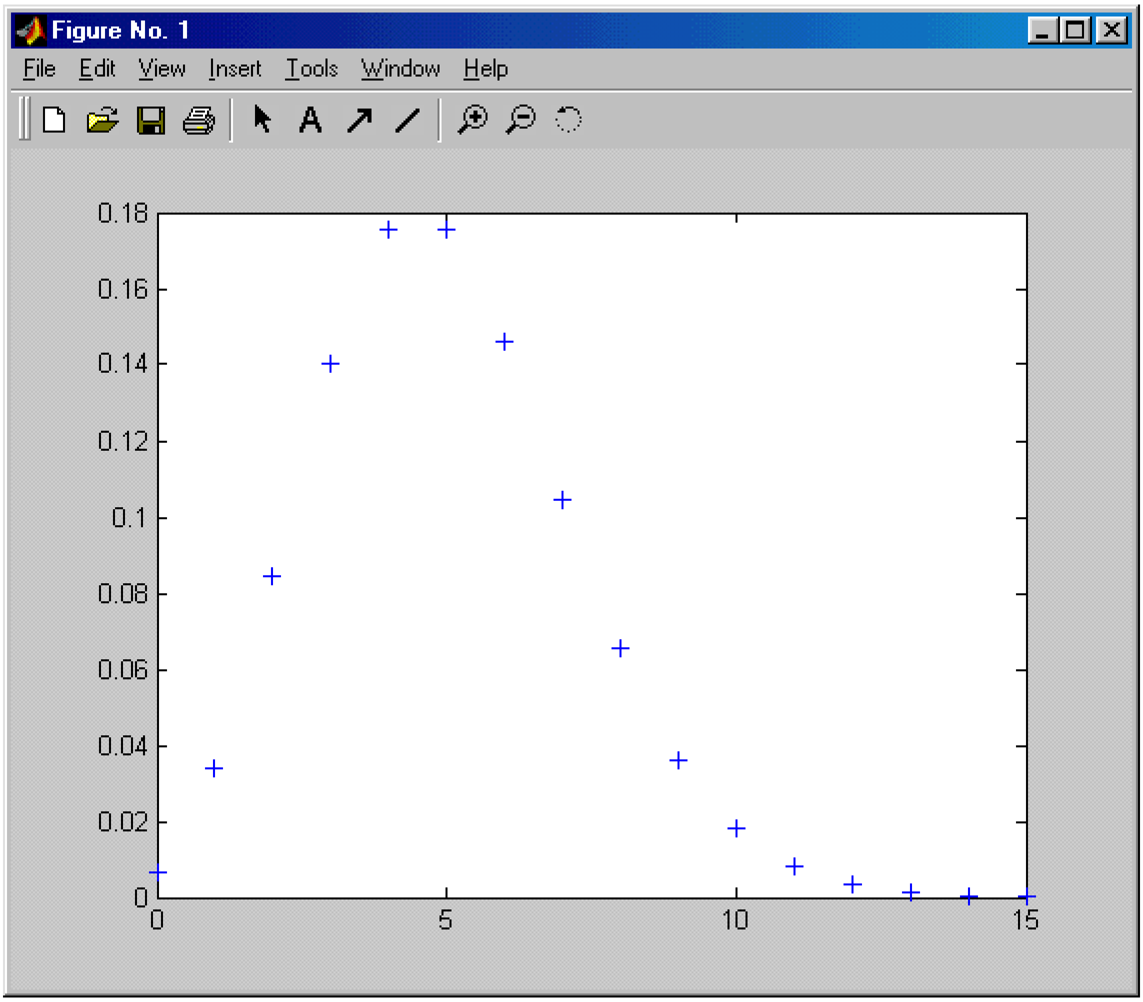
Estimación de Parámetros para la Distribución Poisson

La MLE y el MVUE del parámetro Poisson, λ, es la media simple.
La suma de variables independientes Poisson está también distribuida como Poisson con el parámetro igual a la suma de los parámetros individuales.
La Toolbox utiliza este hecho para calcular los intervalos de confianza sobre λ
A medida que crece λ la distribución Poisson se puede aproximar a la distribución normal con $\mu = \lambda$ y $\sigma^2 = \lambda$
La Toolbox utiliza esta aproximación para calcular intervalos de confianza para valores de λ mayores a 100.

Ejemplo y Gráfico de la Distribución Poisson

El gráfico muestra la probabilidad para cada entero no negativo cuando $\lambda = 5$

```
x = 0:15;
y = poisspdf(x,5);
plot(x,y,'+')
```



Distribución Uniforme (Continua)

La distribución uniforme (también llamada rectangular) tiene una pdf constante entre sus dos parámetros: *a* (el mínimo) y *b* (el máximo).
La distribución uniforme estándar ($a = 0$ y $b = 1$) es un caso especial de la distribución beta, obtenida fijando ambos parámetros en 1.
La distribución uniforme es apropiada para representar la distribución de los errores de redondeado tabulados con un número particular de decimales.

Definición de la Distribución Uniforme

La cdf de la distribución uniforme es:

$$p = F(x|a,b) = \frac{x-a}{b-a} I_{(a,b)}(x)$$

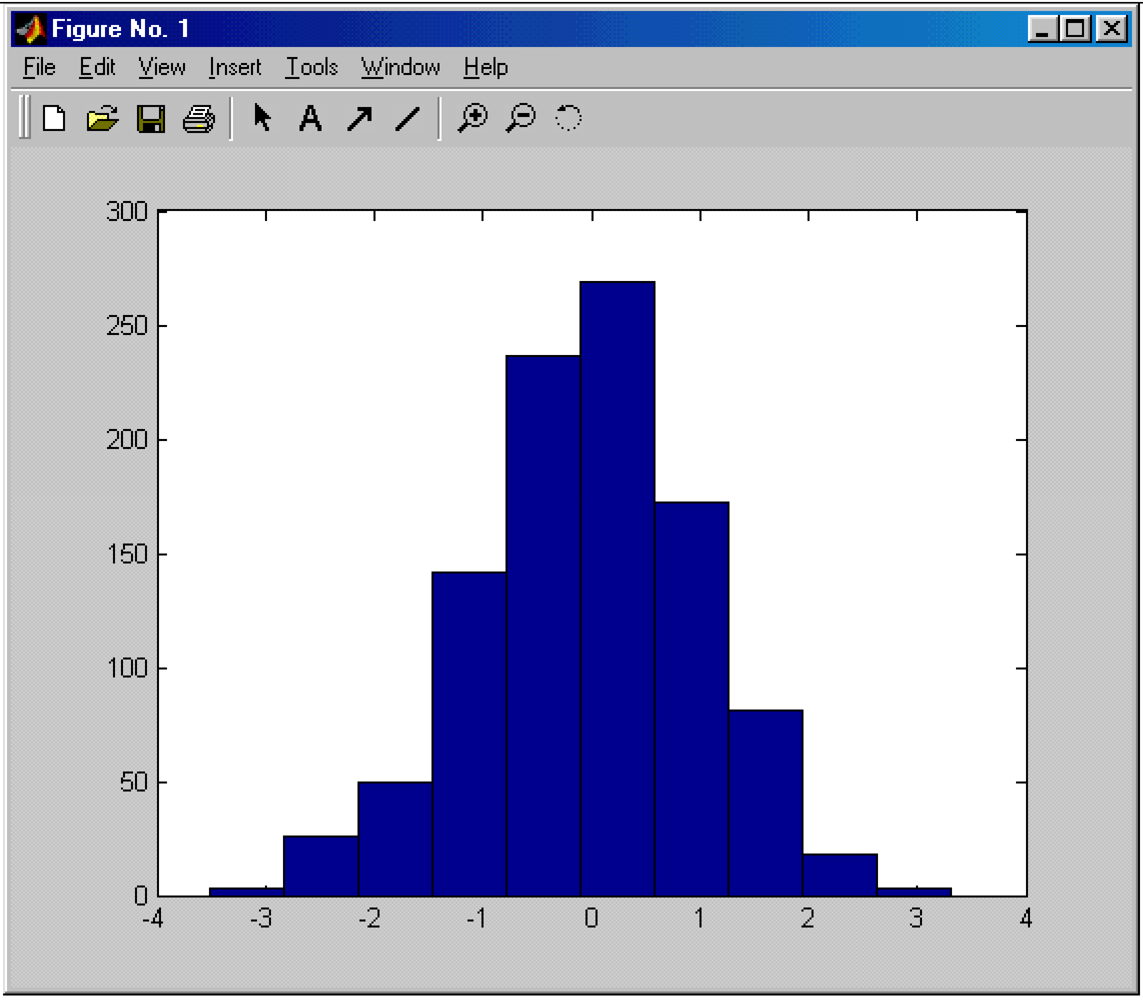
Estimación de Parámetros para la Distribución Uniforme

El máximo y el mínimo de la muestra son las MLE de *a* y *b* respectivamente.

Ejemplo y Gráfico de la Distribución Uniforme

El ejemplo ilustra el método de la inversión para generar números al azar con distribución normal utilizando `rand` y `norminv`
Nótese que la función MATLAB®, `randn`, no utiliza inversión porque en este caso no es eficiente.

```
u = rand(1000,1);
x = norminv(u,0,1);
hist(x)
```



Actualizado al 31/8/2.003
D:\INVESTIGACIÓN OPERATIVA\GESTIÓN ANEXO ESTADÍSTICA