

Reviews: Ambient Volume Scattering

主要论文作者: Marco Ament, Filip Sadlo, Daniel Weiskopf

指导老师: 汪云海

报告人: 徐大鹏

2017年7月5日

1 引言

全局光照(global illumination)被称为是计算机图形学等领域的“圣杯问题”。实际中,需要得到接近实际拍摄水平的情景有很多,因此全局光照是非常重要的一个问题。但是,由于其计算复杂度特别高,在本文关注的问题里,上世纪八九十年代提出的一些理论算法的时间复杂度甚至达到 $O(n^7)$ (Jarosz, 2008)。原因是仿真需要的参数数量多,参数之间的相关性没有一般的规律性,导致算法必须要在非常大的参数空间中搜索,实际中几乎不可能使用。

但是,如果具体到某一个特定的领域,实现实时可交互的全局光照是可能的。必须针对具体问题进行了优化。本文以Ament, Sadlo, and Weiskopf (2013)的论文Ambient Volume Scattering为中心,谈一谈它在体数据可视化方面的最新进展。

1.1 体数据可视化

包括天文学、生理学、化学等学科在内的科学数据,往往充满了整个三维空间,这种类型的数据被称为体数据。这些体数据通常用一些离散的采样点来表示,每个采样点上包含各种各样的信息,可以用采样点的属性来表示。这些点往往直接组成了整个体数据,尤其是那些点非常密集的情况。如何可视化这一类体数据,使得内部结构能够得以清晰地展现,成为了一个非常值得关注的问题。

1.2 散射仿真

在计算机图形学中,我们主要关注的问题通常是不带有介质(medium)的渲染问题。然而,因为体数据充满了整个空间,下面的一个例子说明,如果给这个空间增加一些光源(例子使用点光源),然后通过观察光线的散射效果,结合我们的主观经验,就可以非常容易地了解到体数据内部的结构。

图1给出了一个超新星数据的例子(Ament et al., 2013)。如果我们使用一般的可视化手段,很难观察到超新星形成的星云的内部细节。而借助Ament等人提出的方法,可以比较好地解决这个问题,让星云的内部层次分明便于观察。图中的结果是通过在中央位置放置一个点光源来实现的。

2 体光照模型

体光照模型(volumetric illumination model)不同于以往的无介质光照模型,

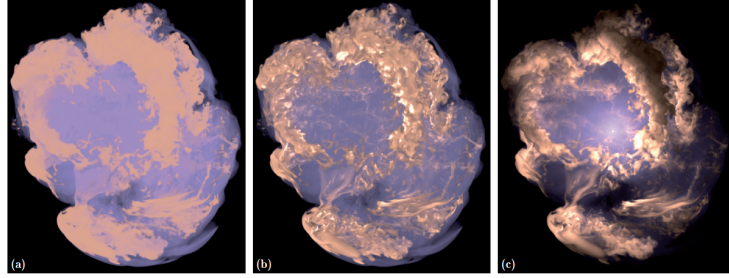


Figure 1: 超新星数据的三种可视化方式。左：标准发射——吸收模型(standard emission-absorption model)；中：体环境光遮蔽(ambient occlusion, 有时简写为AO)；右：环境光散射模型(ambient scattering)。

光线在通过介质时发生的各种相互作用都要被考虑在内。这种介质，从体数据可视化的角度，就是每一个数据采样点，而从图形的角度来说就是每一个粒子(particle)。当光线与一个粒子接触时，可以发生四种相互作用(见图2(Jarosz, 2008))：吸收、发射、外散射、内散射。

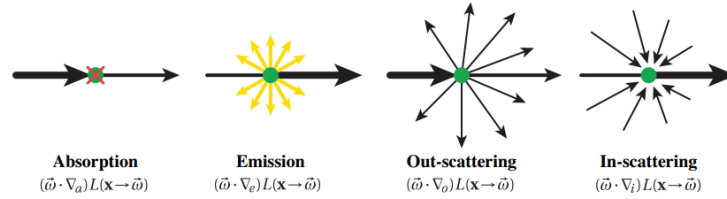


Figure 2: 四种类型的相互作用：吸收、发射、出散射、入散射

由这四种相互作用，我们可以很容易得出，

$$\begin{aligned} \Delta \#(\text{light}) = & -\#(\text{absorption}) - \#(\text{in-scattering}) \\ & + \#(\text{emission}) + \#(\text{out-scattering}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

并且熄灭系数 $\sigma_t(x')$ (extinction coefficient)是吸收系数 $\sigma_a(x')$ (absorption coefficient)和散射系数 $\sigma_s(x')$ (scattering coefficient)两者的和。

$$\sigma_t(x') = \sigma_s(x') + \sigma_a(x') \quad (2.2)$$

下面定量地考察一束光在传播过程中和粒子发生的相互作用(Max, 1995)。假设光的方向和某一理想圆柱的对称轴平行，并且光的强度发生变化原因，都是光与粒子发生了相互作用。我们还假设每个粒子都是大小相同的球体。

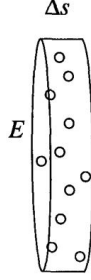


Figure 3: 单位体积的遮光粒子，用于推导辐射量

设 $\rho(x)$ 为一个由单位体积内遮光粒子数定义的密度，自变量 x 是光从进入理想圆柱之时起，经过路径的长度。因为每个粒子的半径都是相同的，并且 r 为这一半径值，若 A 表示在圆片 E 上一个粒子的面积，可以得到

$$\rho(x) = \frac{N(x)}{E \cdot \Delta s}$$

以及

$$A = \pi r^2$$

为方便起见，定义光进入这一理想圆柱之前的强度(intensity)为 $I(x_1)$ ，离开此圆柱体之后的强度为 $I(x_2)$ 。根据模型容易推导出，从这一理想圆柱离开的

$$\begin{aligned} I(x_2) &= I(x_1) \cdot \left(1 - \frac{\sum_i A}{E}\right) \\ &= I(x_1) - \frac{N(x_1, x_2)A}{E} \cdot I(x_1) \end{aligned}$$

移项 $I(x_1)$,

$$\frac{I(x_2) - I(x_1)}{\Delta x} = -\frac{N(x_1, x_2)AI(x_1)}{E \cdot \Delta x}$$

取极限 $\Delta x \rightarrow 0$ ，得

$$x = x_1 \approx x_2$$

于是，

$$\frac{dI(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{I(x_2) - I(x_1)}{\Delta x} = -\frac{N(x)A \cdot I(x)}{E \cdot \Delta x} = -\rho(x)A \cdot I(x)$$

通过定义熄灭系数

$$\sigma_t = \rho(x)A \quad (2.3)$$

上述方程可以写成

$$\frac{dI(x)}{dx} = -\sigma_t \cdot I(x)$$

解常微分方程，得

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\int_0^x \sigma_t(x) dx} \quad (2.4)$$

替换变量得到

$$T(x_1, x_2) = e^{-\int_{x_1}^{x_2} \sigma_t(x') dx'} \quad (2.5)$$

其中 $T(x_1, x_2)$ 代表从 x_1 到 x_2 的传播(transmittance)。

简单分析可知，发射函数 $T(x_1, x_2)$ 有如下的两个性质：

1. $0 < T(x_1, x_2) < 1$
2. $T(x_1, x_3) = T(x_1, x_2)T(x_2, x_3)$

第二个性质很重要，尤其是在考虑光在多个节点之间传播的时候。在体光照模型中，介质本身就可以作为发光的光源。对于发光的介质，可以定义一个辐射函数 $L_m(x, \omega)$ ，其中 ω 是光传播的方向。

$$L_m(x, \omega) = \frac{\sigma_a}{\sigma_s + \sigma_a} L_e(x, \omega) + \frac{\sigma_s}{\sigma_s + \sigma_a} L_i(x, \omega) \quad (2.6)$$

这里， L_e 是发射光的强度(从输入数据可知)，而 L_i 则是入散射光的强度，可以通过一个类似概率密度函数的积分的形式给出。需要强调的是，这里的发光，指的是自发光(emission)和入散射(in-scattering)两种情况。为什么是入散射而不是出散射呢？根据图2，出散射会使当前主要光路上的光的强度变小，而入散射会使当前主要光路上的光的强度变大。我们关注的恰恰就是当前主要光路上的光的强度。

$$L_i(x, \omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} P(\omega', \omega) L(x, \omega') d\omega' \quad (2.7)$$

其中 Ω 是固体角， $P(\omega', \omega)/4\pi$ 是相函数(phase function)。在这里，相函数还必须满足光路可逆的性质

$$P(\omega', \omega) = P(\omega, \omega'), \quad \forall \omega, \omega' \quad (2.8)$$

以及正规性

$$\int_{\Omega} P(\omega', \omega) d\omega' = 1, \quad \forall \omega \quad (2.9)$$

在一个实际的计算任务当中， x 、 x_b 和 ω 通常都是已知量。 $L_b(x_b, \omega)$ 可以从边界条件或者当前最后一步迭代得到。因此，对于上述渲染方程来说， σ_t 和 L_m 等还是未知量，参数空间维数高，并且方程很难解。Ament et al. (2013)的论文就是从体散射光的角度解决了这个问题。

3 环境光传递

下面来考虑环境光传递(ambient light transfer)。先是给出了辐射传播方程(radiative transfer equation, 也称渲染方程)的一般形式, 然后联立方程组得到解决特定问题的方程。

根据式2.1在一个有着熄灭系数 $\sigma_t(x)$ 的介质中, 从上一个位置 x_b 到当前位置 x 的光的强度衰减量是 $T(x_b, x)L_b(x_b, \omega)$, 光的传播可以使用辐射传播方程来描述:

$$L(x, \omega) = T(x_b, x)L_b(x_b, \omega) + \int_{x_b}^x T(x', x)\sigma_t(x')L_m(x', \omega)dx' \quad (3.1)$$

联立方程3.1, 2.5, 2.6, 2.7可以得到

$$\begin{aligned} L(x, \omega) = & e^{-\int_{x_b}^x \sigma_t(x')dx'} L_b(x_b, \omega) \\ & + \int_{x_b}^x e^{-\int_{x'}^x \sigma_t(x'')dx''} \sigma_t(x') \\ & \left[\frac{\sigma_a}{\sigma_t} L_e(x, \omega) + \frac{\sigma_s}{4\pi\sigma_t} \int_{\Omega} P(\omega', \omega) L(x, \omega') d\omega' \right] dx' \end{aligned}$$

观察和分析:

1. 在上述积分方程中, $L(x, \omega)$ 是未知量。因为它既出现在积分外面, 又出现在积分变量里面, 所以很难求出。
2. 必须要在整个球的所有方向上进行积分(任意的固体角 Ω), 计算复杂度很高。
3. 相函数 $P(\omega', \omega)$ 和系数 σ_t 、 σ_s 、 σ_a , 它们要么是未知的, 要么是难以计算的。
4. 衰减(attenuation)是随着距离的增长而指数递减的, 这是因为吸收和出散射积分的性质。

$$T(x_1, x_2) = e^{-\int_{x_1}^{x_2} \sigma_t(x')dx'}$$

一个简单而朴素的想法就是, 我们指定一个阈值 r , 对于到采样点的距离超出阈值 r 的所有光线, 不考虑他们的多次散射。

5. 环境光遮蔽的计算和采样技术不能用于环境光散射。

在Ament et al. (2013)的论文里, 基于体路径追踪的方式, 使用蒙特卡洛方法求预积分, 然后将预积分的结果存放在外部存储器上, 然后在运行时直接读取预积分的结果来加速计算, 实现实时交互的环境光散射。

4 环境光散射以及近似处理的策略

Ament et al. (2013)的最大贡献在于，提出并解决了环境光散射(Ambient Scattering, 也是论文的题目)的问题。熄灭系数(extinction coefficient)的在球体内部的空间分布并不会显著地影响最终的结果。在局部，使用熄灭系数的平均值就足够了：

$$\sigma_t(x) \rightarrow \tilde{\sigma}_t = \frac{3}{4\pi r^3} \int_V \sigma_t(x') dV, \quad x' \in V \quad (4.1)$$

对于一个球形区域，向外发散的辐射量 $L_o(x_o, \omega_o)$ 可以表示为

$$\tilde{L}_o(x_o, \omega_o) = \tilde{T}(x_q, x_o) \tilde{L}_s(x_q, \omega_o) + \int_{x_q}^{x_o} \tilde{T}(x', x_o) \tilde{\sigma}_t(x') \tilde{L}_m(x', \omega_o) dx' \quad (4.2)$$

对于其余的公式，在环境光散射的情况下的形式与其原本散射光的形式基本

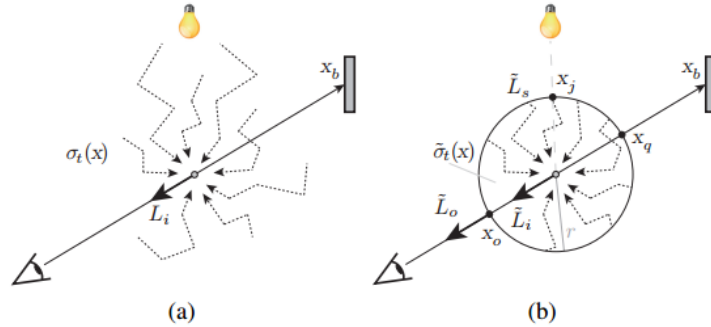


Figure 4: 散射效果被限制在一个球形区域内

一致。

5 Tube Marching

回顾前面几节，对于每一个采样点，我们只在以那个采样点为球心的特定球体内部计算环境光散射，并且将这个球体的半径记为 r 。对于距离大于 r 的光线，我们不需要计算他们的多重散射。这样，从光源开始到另一个位置的光的路径上，可以划分为一个个相切的球体(图5)，在球体的切点处是我们要计算的离开球体的辐射量 $L_o(x_i, \omega_l)$ ，其中 ω_l 是光线传播的方向。计算的方法是从光源出发，由 $L_o(x_i, \omega_l)$ 依次迭代计算得到 $L_o(x_{i+1}, \omega_l)$ ，这里的 $L_o(x_i, \omega_l)$ 可以看做是边界的约束条件。

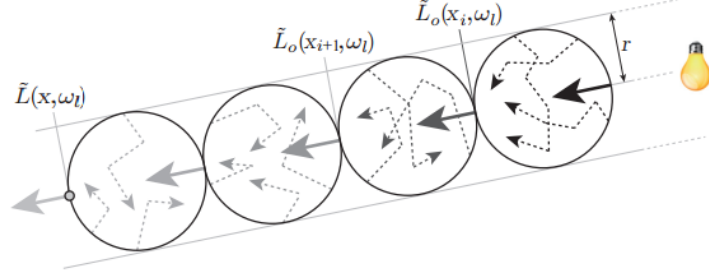


Figure 5: 在路径上的迭代计算

因为每一步都是迭代地计算光线传播，正如Kajiya (1986)指出的那样，可以通过指定一些参数，例如 σ_t 等，实现漫反射、内部反射、散射光等一系列复杂效果的模拟。

6 预积分光线传播(Preintegrated Light Transport)

6.1 相函数

在论文中，作者使用了Henyey-Greenstein(HG)相函数，该相函数首先由Henyey and Greenstein (1941)提出：

$$P_{HG}(\alpha, g) = \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

这里 g 是控制各向异性的参数。在Jarosz (2008)中指出，HG相函数也适用于模拟计算其他各种具有散射特性的材料。例如海洋、云、皮肤等。

当然，还有很多其他各种形式的相函数，例如：

$$\text{Schlick: } p_S(k, \theta) = \frac{1 - k^2}{4\pi(1 + k \cos \theta)^2}$$

以及

$$\text{Rayleigh Scattering: } p_R(\theta) = \frac{3}{16\pi}(1 + \cos^2 \theta)$$

所有这些形式的相函数，他们的参数列表都非常简单，具有很好的对称性，特别适于预积分计算，以加速实时渲染。

但是是不是所有类型的体数据都能够得到具有这么好的对称性的相函数呢？显然不一定。这是近似的代价。

6.2 参数空间和降维

现在有至少6个自由参数：

- 球半径 r
- 熄灭系数 $\tilde{\sigma}_t$
- 相函数 P
- 边界条件 \tilde{L}_s (图6)
- 观察者的方位 (ϕ, θ) (图6, \tilde{L}_o 指示的方向)

通过消去参数的方法降维：

1. 在 $e^{-r\tilde{\sigma}_t}$ 里, r 与 $\tilde{\sigma}_t$ 总是同时出现, 因此可以直接处理一个整体 $(r\tilde{\sigma}_t)$ 。这样空间就降了一维。
2. 取一个相函数的恰当的表达式, 通常可以降维。文中取HG相函数。
3. 观察图6, 所有的参数、一个用深色表示的光源平面、一个球都是关于 z 轴对称的, 因此可以用一个角 θ 来表示, 而不是球坐标系中的二元组 (ϕ, θ) 来表示。这样, 观察者的方位被降维了一个维度, 最终只用 θ 表示。

根据图示, 可以写出边界条件的函数表达式：

$$L_s(x_s, \omega) = \frac{1}{4\pi} e^{-\tilde{\sigma}_t \cdot d} \tilde{L}(x_f, \omega) \cdot P_{HG}(\arccos(\omega \cdot \omega_z), g) \quad (6.1)$$

最后自由参数只有三个：观察者角度 θ 、熄灭系数 $\tilde{\sigma}_t$ 、跟相函数有关的参数 g 。

6.3 预积分

预积分的步骤如下：

1. 取图6中深色的平面 $z + r = 0$, 设定它与光源的方向垂直, 并且假设这个平面上的光的强度 $\tilde{L}_f(x_f, \omega_z) = 1$ 。实际中光的强度不为1, 只需在结果上乘以一个强度(作为系数)。
2. 建立一个三维的表, 存放外散射的计算结果 $\tilde{L}_o(\theta, \tilde{\sigma}_t, g)$ 。将采用网格遍历的方法进行计算, 并将计算结果存放到这个表中。
3. 直接遍历三元组 $(\theta, \tilde{\sigma}_t, g)$, 对于每一个三元组, 使用路径追踪。路径追踪需要选择起始点, 从图6所示的深色平面上选择起始点。还需要确定终止条件。其中涉及到蒙特卡洛积分, 将在下一节中简单介绍。

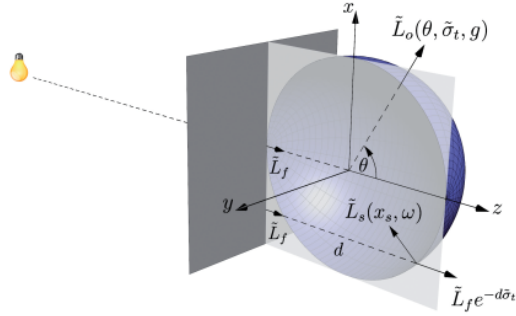


Fig. 4. Spherical geometry for preintegration of light transport. The dark shaded plane denotes a light front of approximately constant radiance \tilde{L}_f from a far distant light source. The boundary condition $\tilde{L}_s(x_s, \omega)$ on the sphere surface is derived from \tilde{L}_f . Due to symmetry around the local z-axis, \tilde{L}_o depends only on θ and the medium inside the sphere.

Figure 6: 预积分的分析及降维策略

7 体路径追踪

路径追踪(path tracing)与一般所说的光线追踪(ray tracing)的主要不同在于，前者多指Kajiya (1986)提出的一般形式的渲染方程(rendering equation)和在同一篇论文里提到的蒙特卡洛方法求解渲染方程的方法。蒙特卡洛方法的具体应用是在处理一个点的时候，使用随机游走和重要性采样的技术(Lafortune & Willems, 1996)。当然，路径追踪也使用了和光线追踪类似的手段进行递归计算(Whitted, 1979)。

对于体数据渲染，需要使用体路径追踪，也就是在光线的路径上依次计算发射、吸收、入散射、出散射对光线的影响(图5)。

```

1 for each pixel (x,y) on the image plane:
2    $\omega$  = ray from the eyepoint  $E$  to (x, y)
3   result = 0
4   repeat  $N$  times:
5     result += estimate of  $L(E, -\omega)$ 
6   pixel[x][y] = result/ $N$ ;

```

Figure 7: 顶层代码

一种结合蒙特卡洛方法的路径追踪实现如图7, 8(Hughes & Foley, 2014)。

```

1 // Single-sample estimate of radiance through a point C
2 // in direction  $\omega$ .
3 define estimateL(C,  $\omega$ ):
4      $P = \text{raycast}(C, -\omega)$  // find the surface this light came from
5      $u = \text{uniform}(0, 1)$ 
6     if ( $u < 0.5$ ):
7         return  $L^e(P, \omega)/0.5$ 
8     else:
9          $\omega_i = \text{randsphere}()$  // unit vector chosen uniformly
10         $\text{integrand} = \text{estimateL}(P, -\omega_i) \cdot f_s(P, \omega_i, \omega)|\omega_i \cdot \mathbf{n}_P|$ 
11         $\text{density} = \frac{1}{4\pi}$ 
12        return  $\text{integrand} / (0.5 * \text{density})$ 

```

Figure 8: 调用的Tracer

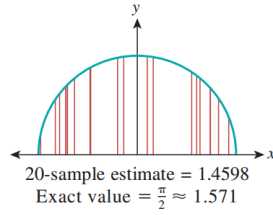


Figure 9: 重要性采样：接近均匀分布的

7.1 计算手段：重要性采样

重要性采样(importance sampling)是一种非均匀采样，通过一种与被采样函数尽可能相近的分布函数生成随机数，然后以这些随机数为自变量，算出的函数值的平均值将会比较接近函数的积分。或者说，假设选取了一个函数 g ，使得 g 尽可能近似地(有时可以不遵守)随 f 的增大而增大，那么这些带权采样的方差(图10)就会比一般的均匀采样(图9)对应的方差更小。这种选取 g 然后采样的方式称为重要性采样。

关于重要性采样的正确性，有一个定理可以说明：

如果函数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个实值函数，并且 X 是一个在区间 $[a, b]$ 上服从 g 分布的随机变量，那么

$$E\left(\frac{f(X)}{g(X)}\right) = \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

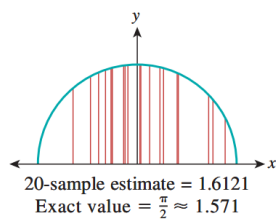


Figure 10: 重要性采样：更加接近函数 f 的分布的

8 交互式体渲染(Interactive Volume Rendering)

8.1 熄灭系数的计算

熄灭系数 $\tilde{\sigma}_t$ 满足可加性，为了求一个小球体内部的熄灭系数的平均值，需要计算

$$\tilde{\sigma}_t(x) \approx \frac{1}{V_{sphere}} \sum_{i=1}^m \sigma_t(x'_i) \Delta V, \quad x'_i \in \text{sphere with a center } x \quad (8.1)$$

这涉及到区域求和问题：通过将球体离散化，然后使用区域求和表来解决。

8.2 计算手段：三维空间形式的区域求和表

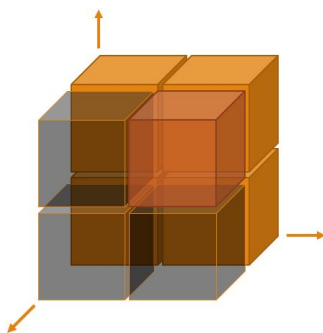


Figure 11: 区域求和表

将区域求和表(summed-area table, SAT), 推广到三维空间, 将可以在 $O(1)$ 的时间内计算是如图11中所示的给出的红色立方体的体积 V_{111} ,

$$\begin{aligned} V_{111} = & S_{111} - S_{110} - S_{101} - S_{001} \\ & + S_{100} + S_{010} + S_{001} - S_{000} \end{aligned} \quad (8.2)$$

SAT方法由Crow (1984)首次提出, 它的效率很高, 并且非常适用于预积分问题, Ament et al. (2013)充分利用这种方法加速计算。

8.3 光线分布的计算

按照Tube Marching一节的递推模型, 以及出散射的公式

$$\tilde{L}_o(\theta, \tilde{\sigma}_t, g, \tilde{L}_f, r) = \tilde{L}_f \cdot \tilde{L}_o(\theta, r\tilde{\sigma}_t, g) \quad (8.3)$$

用 L_l 表示初始光源的强度, 可以写出递推公式:

$$\begin{cases} \tilde{L}_f(x_0, \omega_l) := L_l \\ \tilde{L}_f(x_i, \omega_l) := \tilde{L}_f(x_{i-1}, \omega_l) \cdot \tilde{L}_o(0, r\tilde{\sigma}_t(x_{i-1}), g) \end{cases} \quad (8.4)$$

定义分布辐射(distributed radiance)的强度为相邻两个递推项的线性插值:

$$\tilde{L}_d(x, \omega_l) = (1 - \eta)\tilde{L}_f(x_k, \omega_l) + \eta\tilde{L}_f(x_{k+1}, \omega_l) \quad (8.5)$$

$$\eta = \frac{\|x - x_k\|}{\|x_{k+1} - x_k\|}$$

分布辐射的重要性在于加速计算, 避免实时交互时不必要的计算。

8.4 光线投射

交互体数据渲染的最后一步, 是使用光线追踪算法, 计算从相机投射到体数据的光线。

设相机的位置是 x_c , 将方程3.1近似替代为

$$L(x_c, \omega) \approx T(x_b, x_c)L_b(x_b, \omega) + J_e(x_b, x_c, \omega) + \tilde{J}_i(x_b, x_c, \omega) \quad (8.6)$$

其中, J_e 是发射、吸收的积分,

$$J_e(x_b, x_c, \omega) := \int_{x_b}^{x_c} T(x', x_c)\sigma_a(x')L_e(x', \omega)dx' \quad (8.7)$$

\tilde{J}_i 是入散射的积分,

$$\tilde{J}_i(x_b, x_c, \omega) := \int_{x_b}^{x_c} T(x_o, x_c)\sigma_s(x')\tilde{L}(x', \omega, r)dx' \quad (8.8)$$

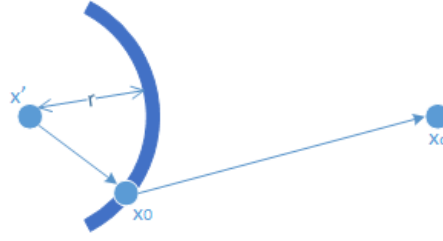


Figure 12: 选择 x_c 到 x_0 而不是 x_c 到 x'

对于方程8.8，为了防止在球内部的多次衰减，涉及到入散射的那一项的衰减 $T(\cdot, \cdot)$ ，需要从 $x_0 = x' + r\omega$ 开始计算，即 $T(x_0, x_c)$ 。

并且，方程8.8的 $\tilde{L}(x', \omega, r)$ 是所有 l 个光源造成的入散射的总和

$$\tilde{L}(x', \omega, r) = \sum_{j=1}^l \tilde{L}_{d,j}(x_j) \tilde{L}_o(\theta_j, r\tilde{\theta}_t(x'), g) \quad (8.9)$$

其中 $\tilde{L}_{d,j}(x_j)$ 是由分布辐射方程8.5所定义。

9 结论

Ament et al. (2013)提出了一种非常新颖的角度处理环境光散射，最大的优点是实现了实时交互，并且效果较一般的发射吸收模型等相对较好(图1)。

文中所述方法的优势：

1. 实现了高质量的渲染效果、半透明和软阴影效果，使用各向异性的散射，不借助其他特殊的技术就可以表达出体数据的细节。
2. 反走样性能更加强大。
3. 实时交互性好，适合于和时间相关的数据集。
4. 对于特定的数据集，不需要初始化，适合对于时间要求很高的场合。

局限性在于：

1. 远距离的光照效果比较差。
2. 不适用于基于面的光照渲染。

10 致谢和感想

感谢汪云海老师对我的支持!

既然作为一名学生，做的东西都还是最浅显的，更没有什么理由去隐瞒，因此在这里我略谈一下过程和感想。

说实在的并没有“做”东西，很惭愧，只是读了些论文。基于以前写的笔记和理解，整理出了这篇报告，并且力图不是在翻译论文，而是写自己的理解。

起初觉得这篇论文很难。但是难应该是相对的，我想我现在应该理解这篇论文的内容了，可要说深入理解，当然还是“纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行”。背后的数学原理固然复杂，甚至于说很多内容鄙人要多年以后才能明白。但是呢？做软件需要抽象，做科研也是如此，不能强求一下子全懂，不懂的可以先跳过去。我们为了前行就不能关注所有的细节，就必须有所抛弃；否则，在可视化这一新兴的、交叉的、日新月异的领域上，我们就会被时间所抛弃。

这大概是我最大的收获吧。

References

- Ament, M., Sadlo, F., & Weiskopf, D. (2013). Ambient volume scattering. *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, 19(12), 2936–2945.
- Crow, F. C. (1984). Summed-area tables for texture mapping. *ACM SIGGRAPH computer graphics*, 18(3), 207–212.
- Henye, L. G., & Greenstein, J. L. (1941). Diffuse radiation in the galaxy. *The Astrophysical Journal*, 93, 70–83.
- Hughes, J. F., & Foley, J. D. (2014). *Computer graphics: principles and practice*. Pearson Education.
- Jarosz, W. (2008). *Efficient monte carlo methods for light transport in scattering media*. University Of California, San Diego.
- Kajiya, J. T. (1986). The rendering equation. In *Acm siggraph computer graphics* (Vol. 20, pp. 143–150).
- Lafortune, E. P., & Willems, Y. D. (1996). Rendering participating media with bidirectional path tracing. In *Rendering techniques' 96 (proceedings of the seventh eurographics workshop on rendering)* (pp. 91–100).
- Max, N. (1995). Optical models for direct volume rendering. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 1(2), 99–108.

Whitted, T. (1979). An improved illumination model for shaded display. In
Acm siggraph computer graphics (Vol. 13, p. 14).