第 3 章

向量空间与子空间

3.1 向量空间

1 n 维标准空间 $\mathbf{R}^n$ 包含所有带 n 个分量的实列向量。

2 若 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 都在**向量空间** $\mathbf{S}$ 中，那么每个组合 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$ 一定在 $\mathbf{S}$ 中。

3 $\mathbf{S}$ 中的“向量”可以是矩阵或关于 x 的函数。单点空间 $\mathbf{Z}$ 由 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 组成。

4 $\mathbf{R}^n$ 的**子空间**是在 $\mathbf{R}^n$ 内的向量空间。例：直线 $y=3x$ 在 $\mathbf{R}^2$ 内。

5 A 的**列空间**包含 A 列的所有组合：$\mathbf{R}^m$ 的一个子空间。

6 列空间包含所有向量 $A\boldsymbol{x}$。因此当 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{C}(A)$ 中时，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 是可解的。

对于初学者来说，矩阵计算涉及许多数。对于你来说，它们涉及向量。$A\boldsymbol{x}$ 与 AB 的列都是 n 个向量（A 的列）的线性组合。本章从数字和向量转到第三层次的理解（最高层次）。我们着眼于向量的“空间”而不是单独的列。若看不出**向量空间**尤其是它们的**子空间**的话，你就无法理解关于 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一切。

由于本章有点深，看起来似乎有点难。这是正常的。我们正观察计算的内部，以找出当中的数学。作者的职责是使它变得清晰。本章以“线性代数基本定理”结束。

我们从最重要的向量空间开始。它们由 $\mathbf{R}^1$，$\mathbf{R}^2$，$\mathbf{R}^3$，$\mathbf{R}^4$，$\ldots$ 来表示。每个空间 $\mathbf{R}^n$ 由一整个向量集组成。$\mathbf{R}^5$ 囊括所有带 5 个分量的列向量。这就是所谓的“5 维空间”。

定义　空间 $\mathbf{R}^n$ 由所有带 n 个分量的列向量 $\boldsymbol{v}$ 组成。

$\boldsymbol{v}$ 的分量都是实数，这就是用字母 $\mathbf{R}$ 的原因。一个带 n 个复数分量的向量位于空间 $\mathbf{C}^n$ 中。

向量空间 $\mathbf{R}^2$ 由通常的 xy 平面表示。$\mathbf{R}^2$ 中的每个向量 $\boldsymbol{v}$ 都具有两个分量。“空间”一词要求我们要考虑所有这些向量——整个平面。每个向量给出平面中一点的 x 与 y 坐标：$\boldsymbol{v}=(x,y)$。

类似地，$\mathbf{R}^3$ 中的向量对应三维空间中的点 (x,y,z)。一维空间 $\mathbf{R}^1$ 是一条直线（像 x 轴）。和以前一样，我们用印刷体将向量写成方括号间的一列，或沿一行用逗号和括号写出：

$$\begin{bmatrix}4\\ \pi\end{bmatrix} \text{ 处于 } \mathbf{R}^2 \text{ 中，} (1,1,0,1,1) \text{ 处于 } \mathbf{R}^5 \text{ 中，} \begin{bmatrix}1+i\\ 1-i\end{bmatrix} \text{ 处于 } \mathbf{C}^2 \text{ 中。}$$

线性代数的伟大之处在于它能轻松处理 5 维空间。我们不画出向量来，我们只用到 5 个数（或 n 个数）。

要将 $\boldsymbol{v}$ 乘以，就将每个分量乘以 7。这里的 7 是一个“标量”。为在 $\mathbf{R}^5$ 中将向量相加，就依次将分量相加。两个基本向量运算发生在向量空间内部，且它们产生**线性组合**：

在 $\mathbf{R}^n$ 中，我们可以将任意向量相加，且我们可以将任意向量 $\boldsymbol{v}$ 乘以任一标量 c。

“在向量空间内”意味着**其结果依然在空间内**。若 $\boldsymbol{v}$ 是 $\mathbf{R}^4$ 中分量为 $1,0,0,1$ 的向量，那么 $\mathbf{2}\boldsymbol{v}$ 是 $\mathbf{R}^4$ 中分量为 $2,0,0,2$ 的向量。（此情况下 2 是标量。）整个向量序列的性质可在 $\mathbf{R}^n$ 中得以验证。交换律是 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$；分布律是 $c(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=c\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{w}$。有一独特的“零向量”满足 $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$。这是习题集开头列出的 8 个条件中的 3 个。

每个向量空间都依赖这 8 个条件。有不同于列向量的其它向量，且有不同于 $\mathbf{R}^n$ 的其它向量空间，而所有向量空间都必须服从那 8 个合理的规则。

实向量空间是“向量”连同向量加法及与实数相乘规则的组合。加法与乘法必产生空间中的向量。还有必须满足那 8 个条件（这通常是没有问题的）。以下是不同于 $\mathbf{R}^n$ 的三个向量空间：

M **所有实 2×2 矩阵**的向量空间。
F **所有实函数** $f(x)$ 的向量空间。
Z 仅由一个**零向量**组成的向量空间。

在 $\mathbf{M}$ 中，“向量”实际上是矩阵。在 $\mathbf{F}$ 中，向量都是函数。在 $\mathbf{Z}$ 中，唯一的加法是 $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$。在每种情况下我们都可以计算加和：矩阵到矩阵，函数到函数，零向量到零向量。我们可以将一个矩阵、一个函数或者零向量乘以 4。其结果依然在 $\mathbf{M}$、$\mathbf{F}$ 或 $\mathbf{Z}$ 中。那 8 个条件都很容易检验。

函数空间 $\mathbf{F}$ 是一个无穷维空间。一个较小的函数空间是 $\mathbf{P}$ 或 $\mathbf{P}_n$，其包含所有 n 阶多项式 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$。

空间 $\mathbf{Z}$ 是 0 维的（根据维度的任何合理定义）。$\mathbf{Z}$ 是最小可能的向量空间。我们不愿称它 $\mathbf{R}^0$，它表示没有分量——你可能会认为没有向量。向量空间 $\mathbf{Z}$ 恰好包含一个向量（零向量）。没有空间可以没有零向量。每个空间都有它自己的零向量——零矩阵，零函数，$\mathbf{R}^3$ 中的向量 $(0,0,0)$。

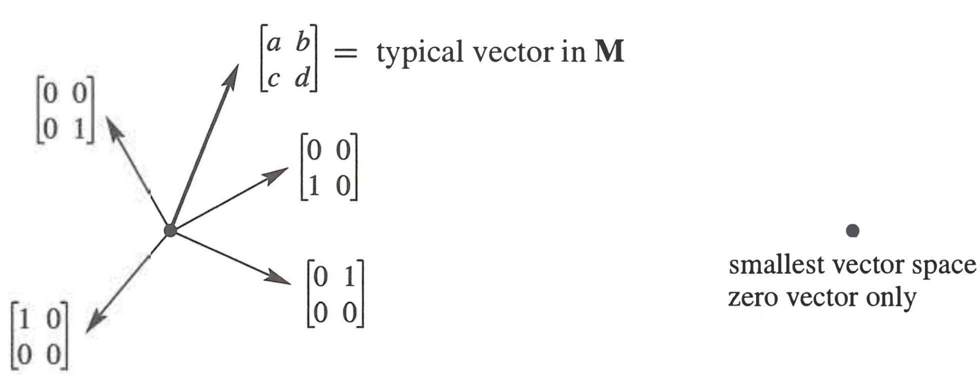

图 3.1：“4 维”矩阵空间 $\mathbf{M}$。“0 维”空间 $\mathbf{Z}$。

子空间

在不同时期，我们会要求你把矩阵和函数视作向量。但始终以来，我们需要的大多数向量都是普通的列向量。它们是带 n 个分量的向量——但或许并非所有向量都有 n 个分量。它们是 $\mathbf{R}^n$ **内**重要的向量空间。它们是 $\mathbf{R}^n$ 的**子空间**。

从寻常的三维空间 $\mathbf{R}^3$ 开始。选择一个过原点 $(0,0,0)$ 的平面。**这个平面本身就是个向量空间**。若我们在该平面中将两个向量相加，那它们的和在该平面中。若我们将一个平面内的向量乘上 2 或 -5，则它仍然在该平面中。三维空间中的某个平面并不是 $\mathbf{R}^2$（即使它看起来像 $\mathbf{R}^2$）。其向量具有三个分量于是它们属于 $\mathbf{R}^3$。该平面是 $\mathbf{R}^3$ **内**的向量空间。

这解释了线性代数的其中一个最基本的思想。过 $(0,0,0)$ 的平面是完整向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一个**子空间**。

定义 一个向量空间的**子空间**是一个满足两个要求的向量集（包含 $\mathbf{0}$）：**假设 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 都是子空间中的向量并且 c 为任一标量，则**

（**i**） $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 在子空间中　　　　（**ii**） $c\boldsymbol{v}$ 在子空间中

换句话说，该向量集对加法 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 和乘法 $c\boldsymbol{v}$（及 $d\boldsymbol{w}$）“封闭”。这些运算使我们处在子空间中。我们还可以做减法，是因为 $-\boldsymbol{w}$ 在子空间中接着它与 $\boldsymbol{v}$ 的和为 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$。简言之，**所有的线性组合都呆在子空间中**。

所有运算都遵循主空间的规则，因此它自动依赖那 8 个条件。我们只需要检验子空间线性组合的必要条件。

第一个事实：**每个子空间都包含零向量**。$\mathbf{R}^3$ 中的平面一定得过 $(0,0,0)$。为重点强调，我们单独来提这一点，它仅仅直接遵循了规则 (**ii**)。选择 $c=0$，然后规则要求 $0\boldsymbol{v}$ 位于子空间中。

不包含原点的平面无法通过这些检验。这些平面都不是子空间。

过原点的直线也都是子空间。当我们在线上做倍乘 5 或将两个向量相加时，我们会继续留在线上。但是该线必须得过 $(0,0,0)$。

另一个子空间是全部 $\mathbf{R}^3$。整个空间是一个子空间（它自己的）。以下是 $\mathbf{R}^3$ 所有可能子空间的列表：

(**L**) 任意过 $(0,0,0)$ 的直线	($\mathbf{R}^3$) 整个空间
(**P**) 任意过 $(0,0,0)$ 的平面	(**Z**) 单向量 $(0,0,0)$

如果我们试图只保留平面或直线的一部分，那么子空间的必要条件就不成立了。看看这些 $\mathbf{R}^2$ 中的例子——它们都不是子空间。

例 1 仅保有分量全正或为 0 的向量 (x,y)（这是一个四分之一平面）。包含向量 $(2,3)$ 但不包含 $(-2,-3)$。因此当我们试图乘以 $c=-1$ 时，违反了规则 (**ii**)。**该四分之一平面不是一个子空间**。

例 2 此外包含上分量全为负的向量。现在我们具有两个四分之一平面。必要条件 (**ii**) 是满足的；我们可以乘上任一 c。但是现在规则 (**i**) 不满足了。$\boldsymbol{v}=(2,3)$ 与 $\boldsymbol{w}=(-3,-2)$ 的和为 $(-1,1)$，它在四分之一平面外边。**两个四分之一平面不构成一个子空间**。

规则 (**i**) 和 (**ii**) 涉及向量加法 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 及 c 和 d 的数乘。这些规则可以合并为一个单一必要条件——子空间的规则：

一个包含 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的子空间一定包含所有线性组合 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$。

例 3 在所有 2×2 矩阵的向量空间 $\mathbf{M}$ 中，有两个子空间：

$$(\mathbf{U})\ \text{所有上三角矩阵}\begin{bmatrix}a & b\\0 & d\end{bmatrix}\qquad(\mathbf{D})\ \text{所有对角矩阵}\begin{bmatrix}a & 0\\0 & d\end{bmatrix}。$$

将 $\mathbf{U}$ 中的任意两个矩阵相加，其和在 $\mathbf{U}$ 中。将对角矩阵相加，其和为对角矩阵。在此情况下 $\mathbf{D}$ 也是 $\mathbf{U}$ 的一个子空间！当然，零矩阵在这些子空间内，即 a,b,d 全等于 0 时。$\mathbf{Z}$ 总是个子空间。

单位矩阵的倍数也形成一个子空间。$2I+3I$ 在这个子空间内，3 乘以 $4I$ 也是。矩阵 cI 形成一个在 $\mathbf{M}$、$\mathbf{U}$ 及 $\mathbf{D}$ 内的“矩阵直线”。矩阵 I 本身是一个子空间么？当然不是。只有零矩阵才是。你的大脑会创造出更多的 2×2 矩阵子空间——写下问题 5 的答案。

A 的列空间

最重要的子空间直接与矩阵 A 联系在一起。我们试图求解 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$。若 A 不可逆，则方程组对有的 $\boldsymbol{b}$ 可解对其余 $\boldsymbol{b}$ 不可解。我们想要描述可解的右边 $\boldsymbol{b}$——向量可以写成 A 乘以某个向量 $\boldsymbol{x}$。这些 $\boldsymbol{b}$ 形成 A 的“列空间”。记住 $A\boldsymbol{x}$ 是 A 的一个列组合。为了得出所有可能的 $\boldsymbol{b}$，我们使用所有可能的 $\boldsymbol{x}$。从 A 的列开始**取它们的所有线性组合。这产生 A 的列空间。它是由列向量构成的向量空间。**

$\boldsymbol{C}(A)$ 不仅包含 A 的 n 个列，还包含它们的所有组合 $A\boldsymbol{x}$。

定义 **列空间**由**列的所有线性组合**组成。该组合为所有可能的向量 $A\boldsymbol{x}$。它们充满列空间 $\boldsymbol{C}(A)$。

这个列空间对整本书至关重要，原因如下。**要求解 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 就是要将 $\boldsymbol{b}$ 表示为一个列组合。**右边的 $\boldsymbol{b}$ 必须得在由左边产生的**列空间**之中，要不然无解！

当且仅当 $\boldsymbol{b}$ 在 A 的列空间中时，方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 可解。

当 $\boldsymbol{b}$ 位于列空间中时，它是列的一个组合。该组合中的系数向我们提供了方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个解。

假设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵。它的列具有 m 个分量（不是 n 个）。于是其列属于 $\mathbf{R}^m$。**A 的列空间是 $\mathbf{R}^m$（不是 $\mathbf{R}^n$）的一个子空间**。所有列组合 $A\boldsymbol{x}$ 的集合满足子空间规则 (i) 和 (ii)：当我们加入线性组合及数乘时，我们依然得出列组合。“子空间”一词是通过取所有线性组合来证明的。

以下是一个 3×2 矩阵 A，其列空间是 $\mathbf{R}^3$ 的一个子空间。A 的列空间是图 3.2 中的一个平面。因为只有 2 列，所以 $\boldsymbol{C}(A)$ 不会是 $\mathbf{R}^3$ 的全部。

例 4

$$A\boldsymbol{x}\ \text{是}\ \begin{bmatrix}1 & 0\\4 & 3\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\ \text{即}\ x_1\begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\3\\3\end{bmatrix}。$$

两列所有组合的列空间占满 $\mathbf{R}^3$ 中的一个平面。我们专门画了一个 $\boldsymbol{b}$（一个列组合）。这个 $\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{x}$ 位于该平面上。该平面厚度为 0，因此在 $\mathbf{R}^3$ 中多数右边的 $\boldsymbol{b}$ 都不在列空间中。关于大多数 $\boldsymbol{b}$，我们的 3 方程 2 未知数式子无解。

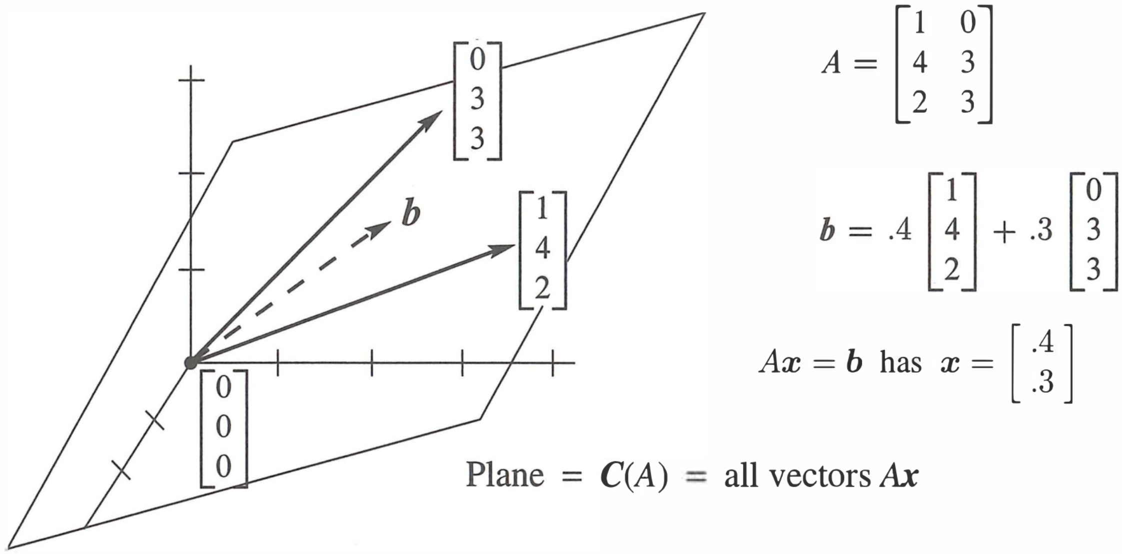

图 3.2：列空间 $\boldsymbol{C}(A)$ 是一个包含两列的平面。当 $\boldsymbol{b}$ 在这平面上时，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 是可解的。那时 $\boldsymbol{b}$ 是一个列组合。

$(0,0,0)$ 当然在列空间中。平面过原点。$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 当然有一个解。该解随时可得，为 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$。

复述一遍，可解的右边的 $\boldsymbol{b}$ 都恰好是列空间中的向量。一种可能性是第一列本身——取 $x_1=1$ 和 $x_2=0$。另一个组合是第二列——取 $x_1=0$ 和 $x_2=1$。新的理解层次是去设想所有组合——整个子空间由这两列生成。

符号 A 的列空间用 $\boldsymbol{C}(A)$ 表示。从列开始取其所有线性组合。我们可以得到整个 $\mathbf{R}^m$ 或者只是一个子空间。

重要 我们可以从某个向量空间 $\mathbf{V}$ 中的任一向量集 $\mathbf{S}$ 开始，而不是 $\mathbf{R}^m$ 的列。为得出 $\mathbf{V}$ 的一个子空间 $\mathbf{SS}$，我们在那个集合中取向量的所有组合：

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \mathbf{V}\text{ 中的向量集（可能不是个子空间）}\\ \mathbf{SS} &= \mathbf{S}\text{ 中所有向量组合（当然是个子空间）}\end{aligned}$$

$$\mathbf{SS}=\text{所有}c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_N\boldsymbol{v}_N=\text{由 }\mathbf{S}\text{“张成”的}\textbf{子空间 }\mathbf{V}$$

当 $\mathbf{S}$ 是列的集合时，$\mathbf{SS}$ 是其列空间。当 $\mathbf{S}$ 中只有一个非零向量 $\boldsymbol{v}$ 时，子空间 $\mathbf{SS}$ 为通过 $\boldsymbol{v}$ 的直线。$\mathbf{SS}$ 总是包含 $\mathbf{S}$ 的最小子空间。这是创建子空间的基本方式，我们将还会回到这里来。

复述一遍：列“张成”列空间。

子空间 SS 由 S 张成，包含 S 中向量的所有组合。

例 5 描述

$$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}\quad\text{及 }B=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&4\end{bmatrix}$$

的列空间（它们都是 $\mathbf{R}^2$ 的子空间）。

解 I 的列空间是整个空间 $\mathbf{R}^2$。每个向量是 I 列的一个组合。用向量空间语言说，$\boldsymbol{C}(I)$ 是 $\mathbf{R}^2$。

A 的列空间仅是一条直线。第二列 $(2,4)$ 是第一列 $(1,2)$ 的倍数。这些向量是不同的，但是我们关注的是向量**空间**。该列空间包含 $(1,2)$ 和 $(2,4)$ 及其它所有沿该直线的向量 $(c,2c)$。仅当 $\boldsymbol{b}$ 在该直线上时，方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 才可解。

对于第三个矩阵（有三个列），其列空间 $\boldsymbol{C}(B)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的全部。每个 $\boldsymbol{b}$ 都是可解的。向量 $\boldsymbol{b}=(5,4)$ 为列 2 加列 3，因此 $\boldsymbol{x}$ 可以是 $(0,1,1)$。同一向量 $(5,4)$ 也是 $2(\text{列}1)+\text{列}3$，因此另一个可能的 $\boldsymbol{x}$ 为 $(2,0,1)$。这个矩阵与 I 有相同的列空间——容许所有 $\boldsymbol{b}$。但现在 $\boldsymbol{x}$ 具有额外的分量，于是就有更多的解——更多得出 $\boldsymbol{b}$ 的组合。

下一章创建向量空间 $\boldsymbol{N}(A)$，来描述 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的所有解。本章创建了列空间 $\boldsymbol{C}(A)$，来描述所有右边可解的 $\boldsymbol{b}$。

■ 复习关键点 ■

1. $\mathbf{R}^n$ 囊括所有带 n 个实分量的列向量。

2. $\mathbf{M}$（2×2 矩阵）、$\mathbf{F}$（函数）及 $\mathbf{Z}$（只有零向量）都是向量空间。

3. 包含 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的子空间必包含它们的所有组合 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$。

4. A 的列组合形成**列空间** $\boldsymbol{C}(A)$。于是该列空间由列“张成”。

5. 当 $\boldsymbol{b}$ 在 A 的列空间中时，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 确有解。

$$\boldsymbol{C}(A)=\textbf{列的所有组合}=\textbf{所有向量}A\boldsymbol{x}\text{。}$$