2.2 消元法概念

1 对于 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{n}=3$，有三个方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 和三个未知数 x_1,x_2,x_3。

2 前两个方程为 $a_{11}x_1+\cdots=b_1$ 与 $a_{21}x_1+\cdots=b_2$。

3 将第一个方程乘上 a_{21}/a_{11} 再由第二个方程减去：那么 x_1 **被消去**。

4 角上的元素 a_{11} 是第一个“主元”且比值 a_{21}/a_{11} 是第一个“乘数”。

5 剩余的每个方程 i 通过减去 a_{i1}/a_{11} 倍的第一个方程来消去 x_1。

6 现在末尾 $n-1$ 个方程含有 $n-1$ 个未知数 $x_2,\cdots,x_n$。重复步骤以消去 x_2。

7 若 0 出现在主元上，则消元失败。交换两个方程可能会挽救一下。

本章阐述一个解线性方程的系统方法。该方法称为**“消元法”**，你可马上在我们的 2×2 例子中见到它。在消元之前，x 和 y 在两个方程中均有出现。消元之后，第一个未知数 x 从第二个方程 $8y=8$ 中消失了：

$$\textbf{之前}\quad \begin{aligned} x-2y&=1\\ 3x+2y&=11 \end{aligned} \qquad \textbf{之后}\quad \begin{aligned} x-2y&=1 &&\text{（方程 1 乘以 3）}\\ 8y&=8 &&\text{（减去以消去 } 3x\text{）} \end{aligned}$$

新方程 $8y=8$ 立马得出 $y=1$。将 $y=1$ 带回到第一个方程中留下 $x-2=1$。因此 $x=3$，求解 $(x,y)=(3,1)$ 就完成了。

消元法产生了一个**上三角方程组**——这是目标。非零系数 $1,-2,8$ 来自一个三角形。这个方程组从底向上求解——首先 $y=1$ 然后 $x=3$。这个快速过程被称作**回代**。它用于任何大小的上三角方程组，经过消元得出一个三角形。

重点：原先的方程具有相同的解 $x=3$ 与 $y=1$。图 2.5 揭示了每个方程组都是一对直线，在解点 $(3,1)$ 处相交。经过消元，直线依然相交于同一点。每一步都运用了合适的方程。

我们是如何从第一对线过渡到第二对线的？我们从第二个方程减去 3 倍的第一个方程。这个从方程 2 消去 x 的步骤是本章的基本运算。我们经常使用它，因此我们要仔细观察它：

为消去 x：从方程 2 中减去方程 1 的倍数。

3 乘以 $x-2y=1$ 得 $3x-6y=3$。当从 $3x+2y=11$ 减去此式时，方程右边变成 8。重点是 $3x$ 消掉 $3x$。左边留下 $2y-(-6y)$ 或者说是 $8y$，于是 x 被消去了。**该方程组变为三角形**。

问问你自己那个乘数 $l=3$ 是怎么求出来的。第一个方程包含 $\mathbf{1}x$。**因此第一个主元为 1**（x 的系数）。第二个方程包含 $\mathbf{3}x$，**因此乘数为 3**。那么减法 $3x-3x$ 得出 0 与三角形。

若我将第一个方程改为 $4x-8y=4$，那么你将悟到乘数法则。（同一直线只是第一个主元变为 4。）正确的乘数现在是 $l=\frac{3}{4}$。为了求出乘数，将系数“**3**”除以主元“**4**”来做消除：

$$\begin{array}{lll} \mathbf{4}x - 8y = 4 & & \textbf{方程 1 乘以 } \tfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \\ \mathbf{3}x + 2y = 11 & & \textbf{从方程 2 减去} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4x - 8y & = 4 \\ 8y & = 8 \end{array}$$

最终方程组是三角的且最后的方程依然得出 $y = 1$。回代得出 $4x - 8 = 4$ 就是 $4x = 12$ 也就是 $x = 3$。我们改变了数而没有改变直线与解。**除以主元以求出乘数 $\boldsymbol{l = \frac{3}{4}}$**：

> **主元 = 行中执行消元的第一个非零元素**
>
> **乘数 = (要消去的元素) 除以 (主元)** $= \dfrac{3}{4}$。

新第二个方程从第二个主元开始，即 8。如果有的话，我们会利用它来从第三个方程消去 y。为了解出 n 个方程我们需要 n 个主元。**主元都在消元后的三角形对角线上。**

你在不看本书的情况下也能够解出这些关于 x 和 y 的方程。它是一个极为简单的问题，然而我们持续研究了很长时间。即便是一个 2×2 的方程组，消元法也可能会失败。通过了解可能的失败（当我们不能找到一整套主元时），你将理解消元法的整个过程。

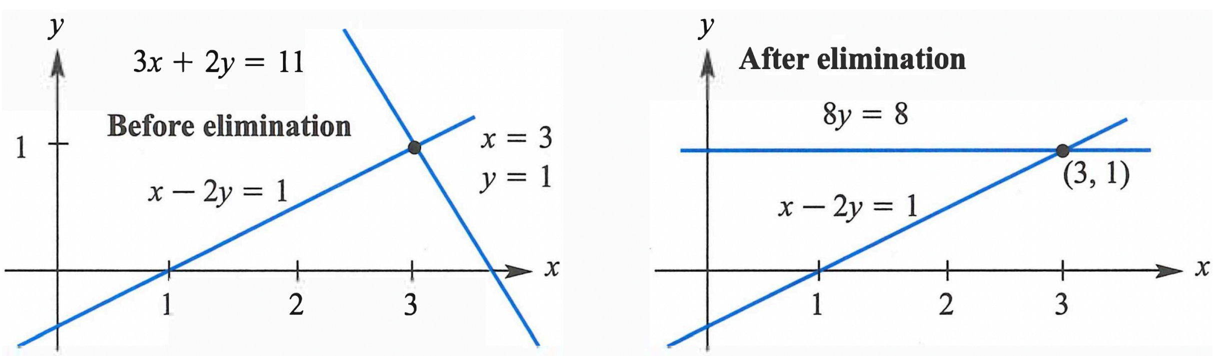

图 2.5：消去 x 会使第二条直线水平。接着 $8y = 8$ 得 $y = 1$。

消元失败

通常，消元会产生带我们到解那里的主元。然而有可能会失败。在有些时候，该方法会要求我们*除以 0*。我们做不到。消元过程不得不停止。或许有种方法可以调整并继续下去——要不然失败可能无法避免。例 1 因为 $0y = 8$ **无解**而失败。例 2 因为 $0y = 0$ **有太多解**而失败。例 3 通过交换方程而成功。

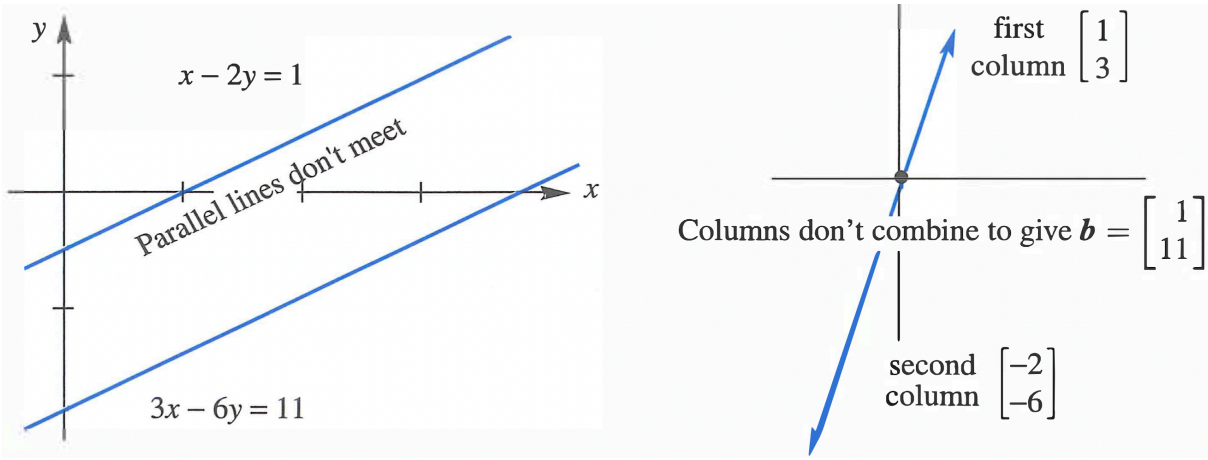

图 2.6：例 1 的行图与列图：**无解**。

例 1　永远失败，无解。消元使这变得清晰：

$$\begin{aligned} x-2y&=1 \\ 3x-6y&=11 \end{aligned} \qquad \begin{matrix}\text{方程 2 减去} \\ \text{3 倍的方程 1}\end{matrix} \qquad \boxed{\begin{aligned} x-2y&=1 \\ \mathbf{0}y&=8 \end{aligned}}$$

$0y=8$ 无解。通常我们用第二个主元除以右边的 8，但是*这个方程组没有第二个主元*。（**0 不允许做主元！**）图 2.6 中的行图与列图表明了为何失败是不可避免的。如果无解，则消元将会发现达成了像 $0y=8$ 这样的方程。

失败的行图显示为平行线——即永不相交。解必须位于两条线上。由于没有交点，方程就无解。

列图显示了同方向的两列 $(1,3)$ 和 $(-2,-6)$。*所有的列组合都沿同一直线*。然而来自右边的列是不同方向的 $(1,11)$。没有列组合能够产生右边——因此无解。

当我们把右边改成 $(1,3)$ 时，失败表现为有一整条线的解点。接下来是有无穷多解而非无解的例 2。

例 2　失败于有无穷多解。将 $\boldsymbol{b}=(1,11)$ **改成** $(1,3)$。

$$\begin{aligned} x-2y&=1 \\ 3x-6y&=3 \end{aligned} \qquad \begin{matrix}\text{方程 2 减去} \\ \text{3 倍的方程 1}\end{matrix} \qquad \boxed{\begin{aligned} x-2y&=1 \\ \mathbf{0}y&=\mathbf{0} \end{aligned}} \qquad \begin{matrix}\text{仍然只有} \\ \textbf{一个主元}\end{matrix}$$

每个 y 都满足 $0y=0$。实际上只有一个方程 $x-2y=1$。未知数 y 是"**自由变量**"。自由选择 y 后，x 按 $x=1+2y$ 决定。

在行图中，平行线变成了同一条直线。线上的每个点都满足两个方程。在图 2.7 中我们有一整条线的解。

在列图中，$b=(1,3)$ 现在与列 1 相同。于是我们可以选择 $x=1$ 和 $y=0$。我们也可以选择 $x=0$ 和 $y=-\frac{1}{2}$；列 2 乘以 $-\frac{1}{2}$ 等于 $\boldsymbol{b}$。每个解出行问题的 (x,y) 也都解出了列问题。

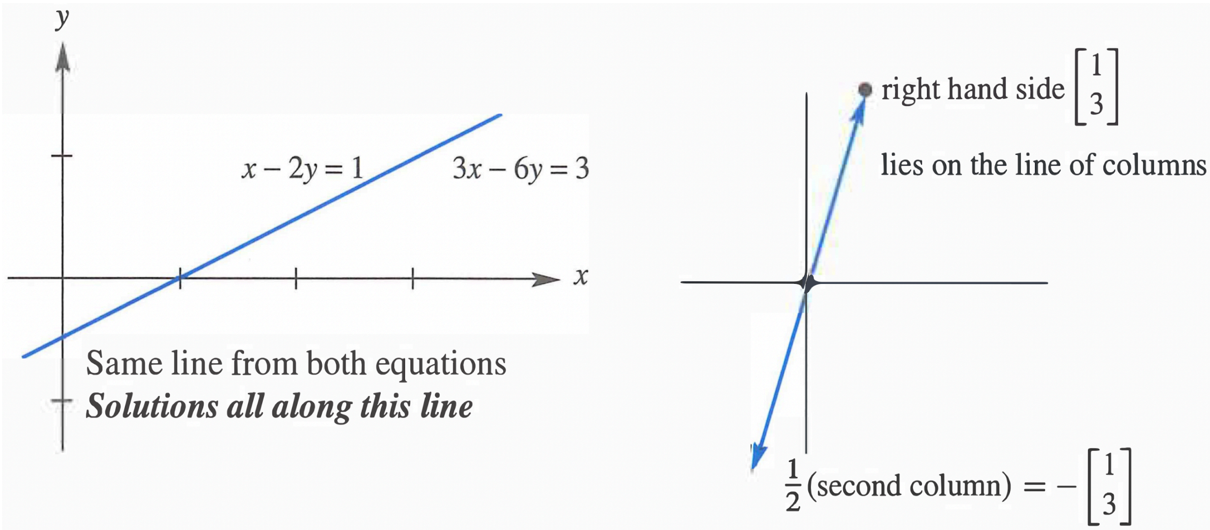

图 2.7：例 2 的行图与列图：*无穷多解*。

失败 对于 n 个方程我们没有得到 n 个主元。**消元法导出一个方程 $\mathbf{0} \neq \mathbf{0}$**（无解）或 **$\mathbf{0} = \mathbf{0}$**（多个解）

成功与 n 个主元相伴。但我们也许要交换 n 个方程。

消元可能会以第三种方式出错——但这次它可以被修正。*假设第一个主元位含 0*。我们拒绝允许 0 作为主元。当第一个方程不包含 x 项时，我们可以将它与下面的方程交换：

例 3 暂时失败（0 在主元位上）。行交换产生两个主元：

$$\textbf{置换}\quad \begin{aligned} 0x + 2y &= 4 \\ 3x - 2y &= 5 \end{aligned} \qquad \text{交换两个方程} \qquad \boxed{\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ 2y &= 4 \end{aligned}}$$

新方程组已是三角形的。这个小例子是为回代做准备。最后的方程得出 $y = 2$，然后第一个方程得出 $x = 3$。行图是正常的（两条相交线）。列图也是正常的（列向量不同方向）。主元 3 和 2 都正常——只是需要**行交换**。

例 1 和例 2 都是**奇异的**——没有第二个主元。例 3 是**非奇异的**——有一整套主元且只有一个解。奇异方程无解或有无穷多解。因为我们要除以主元，因此主元必须是非零的。

含仨未知数的三个方程

为了理解高斯消元法，你必须跳出 2×2 的方程组。3×3 足以理解该方法。现在矩阵都是方阵——行数与列数相等。以下是一个 3×3 方程组，它是特别构造出来的以便所有消元步骤得出整数而不是分数：

$$\begin{aligned} \mathbf{2}x + 4y - 2z &= 2 \\ 4x + 9y - 3z &= 8 \\ -2x - 3y + 7z &= 10 \end{aligned} \tag{1}$$

有哪些步骤呢？第一个主元是粗体的 $\mathbf{2}$（左上角）。我们想消去主元下面的 4。*第一个乘数是比值* $4/2 = 2$。将主元方程与 $l_{21} = 2$ 相乘然后减去它。减法从第二个方程中移除了 $4x$：

步骤 1 从方程 2 减去 2 倍的方程 1。这就留下了 $y+z=4$。

我们还从方程 3 消去了 $-2x$——还是用第一个主元。快速的方法是将方程 1 与方程 3 相加。于是 $2x$ 消掉 $-2x$。我们就是这么做的，只是本书的法则是*减法而不是加法*。系统的方法为求乘数 $l_{31}=-2/2=-1$。减去 -1 倍的方程 1 与相加是一样的：

步骤 2 从方程 3 减去 -1 倍的方程 1。这就留下了 $y+5y=12$。

两个新方程只包含 y 和 z。第二个主元（用粗体）为 1：

$$\boldsymbol{x}\ \textbf{消去了} \qquad \begin{aligned} \mathbf{1}y+1z&=4 \\ 1y+5z&=12 \end{aligned}$$

我们达成了一个 2×2 方程组。最后一步是消去 y 以使它为 1×1：

步骤 3 从 3_{new} 减去 2_{new}。其乘数为 $1/1=1$。接着为 $4z=8$。原先的 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 被转换为一个上三角的 $U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$：

$$\begin{aligned} 2x+4y-2z&=2 \\ 4x+9y-3z&=8 \\ -2x-3y+7z&=10 \end{aligned} \qquad \begin{array}{c} A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ \text{变为} \\ U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c} \end{array} \qquad \begin{aligned} \mathbf{2}x+4y-2z&=2 \\ \mathbf{1}y+1z&=4 \\ \mathbf{4}z&=8 \end{aligned} \tag{2}$$

目标已完成——从 A 到 U 的前向消元完成。**注意主元 $\mathbf{2,1,4}$ 沿 U 的对角线**。主元 1 和 4 隐藏在原先方程组中。消元使它们显现出来。$U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ 已准备好**回代**，这个很快：

$$(4z=8 \text{ 得 } z=2) \quad (y+z=4 \text{ 得 } y=2) \quad (\text{方程 1 得 } x=-1)$$

解为 $(x,y,z)=(-1,2,2)$。行图有来自三个方程的三个平面。所有平面都经过这个解。原先平面是倾斜的，然而经过消元最后的平面 $4z=8$ 是水平的。

列图展示了产生右边 $\boldsymbol{b}$ 的列组合 $A\boldsymbol{x}$。在该组合中系数为 $-1,2,2$(解)：

$$A\boldsymbol{x}=(\mathbf{-1})\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}+\mathbf{2}\begin{bmatrix}4\\9\\-3\end{bmatrix}+\mathbf{2}\begin{bmatrix}-2\\-3\\7\end{bmatrix} \ \text{等于}\ \begin{bmatrix}2\\8\\10\end{bmatrix}=\boldsymbol{b} \tag{3}$$

在 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 中，数 x,y,z 乘以列 $1,2,3$，在三角形中的 $U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ 也是如此。

从 A 到 U 的消元

对于一个 4×4 问题，或者一个 $n\times n$ 问题，消元都以相同的方式进行。以下是整个思想，当高斯消元法成功时，可逐列地从 A 变到 U。

列 1. 利用第一个方程来创造出第一个主元下面的 0。

列 2. 利用新的方程 2 来创造出第二个主元下面的 0。

列 3 到列 n. 继续以求出所有 n 个主元以及上三角阵 $\boldsymbol{U}$。

$$\text{经过列 2 我们有}\quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} & x & x & x \\ 0 & \boldsymbol{x} & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}\text{。}\quad \text{我们想要}\quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} & x & x & x \\ & \boldsymbol{x} & x & x \\ & & \boldsymbol{x} & x \\ & & & \boldsymbol{x} \end{bmatrix}\text{。} \tag{4}$$

前向消元的结果是一个上三角方程组。若它有一整套 n 个主元（绝不为 0!），则它是非奇异的。**问**：左边的哪个 x 因为主元已知而不会在消元中改变? 以下是演示原先 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的最后一个例子，其三角方程组为 $U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$，以及从回代求出的解 (x,y,z):

$$\begin{aligned} x+y+z&=6 \\ x+2y+2z&=9 \quad \textbf{前向} \\ x+2y+3z&=10 \quad \textbf{前向} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y+z&=6 \\ y+z&=3 \\ z&=1 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \textbf{回代} \\ \textbf{回代} \\ \end{matrix}$$

所有的乘数都是 1。所有主元都是 1。所有平面交于解 $(3,2,1)$ 处。A 的列按 $3,2,1$ 组合得出 $\boldsymbol{b}=(6,9,10)$。三角表示 $U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}=(6,3,1)$。

■ 复习关键点 ■

1. 一个线性方程组（$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$）经过消元变成**上三角形**（$U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$）。
2. 我们从方程 i **减去** l_{ij} 倍的方程 j，来使 (i,j) 元素为 0。
3. **乘数** $l_{ij}=\dfrac{\text{行 } i \text{ 要消去的元素}}{\text{行 } j \text{ 的主元}}$。**主元**不能为 0!
4. 当 0 在主元位置时，若下面有非零元素，则**交换行**。
5. 上三角形的 $U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ 通过**回代**（从底开始）求解。
6. 当消元永远**失败**时，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解或有无穷多解。