第 1 章

向量导论

线性代数的核心是两种运算——两种都是向量运算。我们将向量相加得 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$。我们将它们与数 c 和 d 相乘得 $c\boldsymbol{v}$ 和 $d\boldsymbol{w}$。将这两种运算结合（$c\boldsymbol{v}$ 加 $d\boldsymbol{w}$）得到**线性组合** $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$。

线性组合 $$c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}=c\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c+2d\\c+3d\end{bmatrix}$$

例 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ 是 $c=d=1$ 的组合。

线性组合在这个学科中非常重要！有时我们想要一个特定的组合，具体选择 $c=2$ 和 $d=1$ 来产生 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}=(4,5)$。其它时候我们想要 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 的所有组合（来自所有的 c 与 d）。

向量 $c\boldsymbol{v}$ 沿一条直线放置。当 $\boldsymbol{w}$ 不在那条直线上时，**组合 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$ 充满整个二维平面**。从四维空间中的 4 个向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}$ 开始，它们的组合 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}+f\boldsymbol{z}$ 可能充满整个空间——但并不总是这样。向量和它们的组合可能位于一个平面上或一条直线上。

第 1 章解释了这些中心思想，一切都建立在这些思想上。我们从能够合理绘制的二维向量与三维向量开始。然后我们移入更高的维度。线性代数真正令人印象深刻的特点是如何流畅地将这一步引入 n 维空间。即使不可能画出十维的向量，你脑海中的画面也会保持是正确的。

这是本书将要通往的地方（进入 n 维空间）。第一步是 1.1 节和 1.2 节的运算。然后是在 1.3 节概述了 3 个基本思想。

1.1 向量加法 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 与线性组合 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$。

1.2 两个向量的点乘 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ 与长度 $\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}$。

1.3 矩阵 A，线性方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，解 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$。

1.1 向量与线性组合

1 $3\boldsymbol{v}+5\boldsymbol{w}$ 是向量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的一个典型**线性组合**。

2 对于 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$，那个组合为 $3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+10\\3+15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\18\end{bmatrix}$。

3 在 xy 平面中，向量 $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$ 横向走到 $x=2$ 然后向上走到 $y=3$。

4 组合 $c\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ 充满整个 xy 平面。它们产生每个 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$。

5 组合 $c\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$ 充满 xyz 空间的一个**平面**。$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$ 对应相同的平面。

6 然而 $\begin{matrix}c+2d=1\\c+3d=0\\c+4d=0\end{matrix}$ 无解，是因为它的右边 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ 不在那个平面内。

“你不能将苹果与桔子相加。”虽用了一种奇怪的方式，但这就是向量的原因。我们有两个单独的数 v_1 和 v_2。这一对产生一个**二维向量** $\boldsymbol{v}$：

$$\textbf{列向量 } \boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} \qquad \begin{matrix}v_1=\boldsymbol{v}\text{的第一个分量}\\ v_2=\boldsymbol{v}\text{的第二个分量}\end{matrix}$$

我们将 $\boldsymbol{v}$ 写成了一**列**，而非一行。到目前为止的要点是，将这对数 v_1 和 v_2(用细斜体) 表示成一个字母 $\boldsymbol{v}$(用**黑斜体**)。

虽然我们不将 v_1 与 v_2 相加，但我们还是将**向量相加**。$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的第一个分量与第二个分量分开计算：

$$\begin{matrix}\text{向量}\\\text{加法}\end{matrix} \qquad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} \quad \text{与} \quad \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\end{bmatrix} \quad \text{相加为} \quad \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}v_1+w_1\\v_2+w_2\end{bmatrix}。$$

减法遵循相同的思想：$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$ 的分量为 v_1-w_1 和 v_2-w_2。

另一个基本运算是数乘。向量可以乘以 2 或 -1 或任意数 c。为了求 $2\boldsymbol{v}$，将 $\boldsymbol{v}$ 的每个分量乘以 2：

$$\text{数乘} \qquad 2\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2v_1\\2v_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v} \qquad -\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-v_1\\-v_2\end{bmatrix}$$

$c\boldsymbol{v}$ 的分量为 cv_1 和 cv_2。数 c 称为“标量”。

注意 $-\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的和为零向量。这个是 $\mathbf{0}$，和数 0 不一样！向量 $\mathbf{0}$ 具有分量 0 和 0。原谅我再一次强调向量与它分量间的不同。线性代数是建立在 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$、$c\boldsymbol{v}$ 及 $d\boldsymbol{w}$ 这些运算上的——**向量相加与乘以标量**。

现在我们结合加法与数乘来构造 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的“线性组合”。$\boldsymbol{v}$ 乘上 c 且 $\boldsymbol{w}$ 乘上 d。然后加起来 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$。

$c\boldsymbol{v}$ 与 $d\boldsymbol{w}$ 的和是一个线性组合 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$。

4 个特殊线性组合为：和，差，零及数乘 $c\boldsymbol{v}$：

$$\begin{aligned}1\boldsymbol{v}+1\boldsymbol{w} &= \text{图 1.1a 中的向量之和}\\ 1\boldsymbol{v}-1\boldsymbol{w} &= \text{图 1.1b 中的向量之差}\\ 0\boldsymbol{v}+0\boldsymbol{w} &= \textbf{零向量}\\ c\boldsymbol{v}+0\boldsymbol{w} &= \text{在}\boldsymbol{v}\text{方向上的向量}c\boldsymbol{v}\end{aligned}$$

零向量一直是个潜在的组合（它的系数为 0）。每次我们看到向量的“空间”时，这个零向量就会包含在内。在这个大视图下，$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的所有组合都唾手可得，是线性代数在运转。

图像向你演示了怎样可视化向量。对于代数，我们仅需要其元素（像 4 和 2）。向量 $\boldsymbol{v}$ 表示为一个箭头。箭头向右 $v_1=4$ 个单元然后向上 $v_2=2$ 个单元。它在坐标为 4，2 的点处终止。这个点是向量的另一种表示——于是我们有三种描述 $\boldsymbol{v}$ 的方法：

表示向量 $\boldsymbol{v}$　　两个数　始于 $(0,0)$ 的箭头　平面中的点

相加用数。可视化 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 用箭头：

向量相加（由头至尾）　**将 w 的头放在 v 的尾上**。

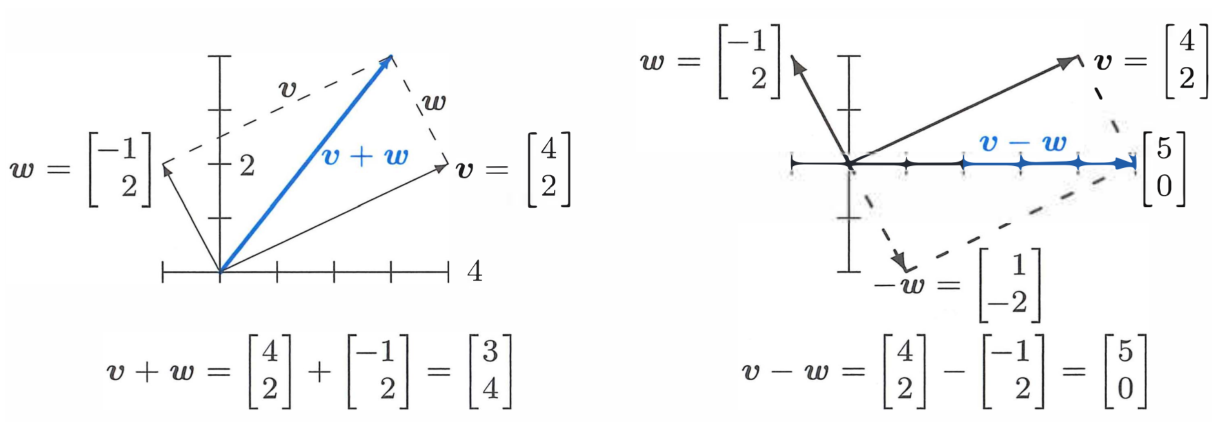

图 1.1：向量加法 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=(3,4)$ 产生平行四边形的对角线。$\boldsymbol{w}$ 颠倒过来是 $-\boldsymbol{w}$。右边的线性组合是 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}=(5,0)$。

我们沿着 $\boldsymbol{v}$ 行进然后沿着 $\boldsymbol{w}$ 行进。或者我们沿着对角线捷径 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$。我们也可以先沿着 $\boldsymbol{w}$ 行进再沿着 $\boldsymbol{v}$。换句话说，**$\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$ 得出与 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 相同的答案**。这些是沿平行四边形不同的方式（此例中是个矩形）。

一个带俩分量的向量对应 xy 平面中的一点。$\boldsymbol{v}$ 的分量都是点的坐标：$x = v_1$ 与 $y = v_2$。当箭头从 $(0,0,)$ 出发时，在点 (v_1,v_2) 处终止。现在我们允许向量具有三个分量 (v_1,v_2,v_3)。

xy 平面更换为三维 xyz 空间。以下是典型的向量（依然是列向量只是带了仨分量）：

$$\boldsymbol{v}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} \quad 与 \quad \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} \quad 与 \quad \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}。$$

向量 $\boldsymbol{v}$ 对应 3 维中的一个箭头。通常箭头始于“原点”，就是 xyz 轴相交的地方且其坐标为 $(0,0,0)$。箭头在坐标为 v_1,v_2,v_3 的点处终止。**列向量**与**从原点至其终点的箭头**完美相配。

平面中的向量 (x,y) 与 3 维空间中的 $(x,y,0)$ 不同！

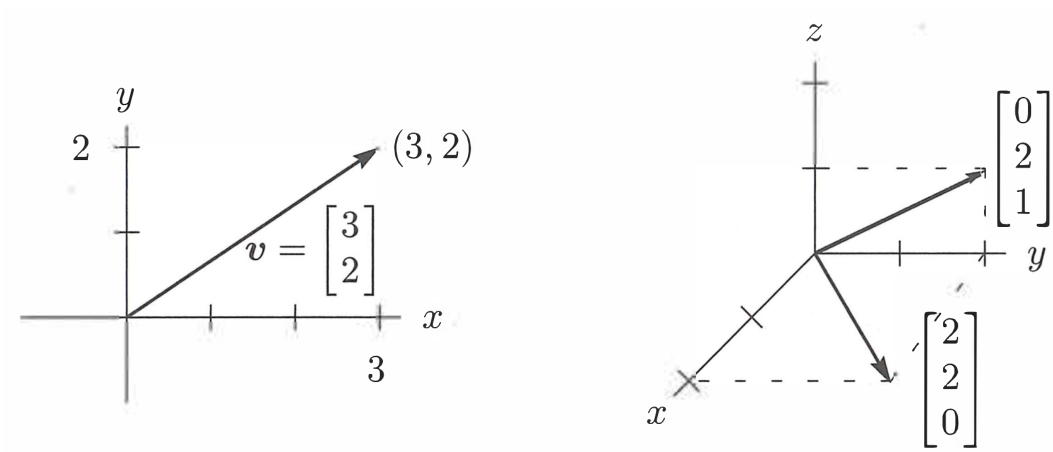

图 1.2：向量 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ 对应点 (x,y) 与 (x,y,z)。

从现在起 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ **也写作** $\boldsymbol{v}=(1,1,-1)$。

写成行形式（在括号里）的原因是为了节省空间。但 $\boldsymbol{v}=(1,1,-1)$ 可不是一个行向量！它实际是个列向量，只是暂时躺下。行向量 $[1\ 1\ \ -1]$ 是完全不同的，尽管它有相同的三个分量。那个 1×3 行向量是 3×1 列向量 $\boldsymbol{v}$ 的“转置”。

在三维中，$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 依然是每次求一个分量。其和的分量有 v_1+w_1 和 v_2+w_2 和 v_3+w_3。你将理解如何在 4 或 5 或 n 维空间中将向量相加。当 $\boldsymbol{w}$ 从 $\boldsymbol{v}$ 的尾开始时，第三条边就是 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$。反方向绕平行四边形的是 $\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$。问：四条边都位于同一平面？是的。并且和 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$ 绕一整圈得出零向量。

三个三维向量的一个典型线性组合是 $\boldsymbol{u}+4\boldsymbol{v}-2\boldsymbol{w}$：

线性组合
乘上 1, 4, 2
然后加起来

$$\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\9\end{bmatrix}。$$

对于一个向量 $\boldsymbol{u}$，其唯一的线性组合是倍数 $c\boldsymbol{u}$。对于两个向量，其组合都是 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$。对于三个向量，其组合都是 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$。你能从一个组合迈出一大步到**所有组合**么？允许每个 c、d 及 e。假设向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 都在三维空间：

1. 所有组合 $c\boldsymbol{u}$ 的图是什么？
2. 所有组合 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$ 的图是什么？
3. 所有组合 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$ 的图是什么？

答案取决于特别的向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{w}$。若它们是零向量（一个极端情况），则每个组合都会是零。若它们是典型的非零向量（随机选择分量），以下是三个答案。这是我们课程的关键：

1. 组合 $c\boldsymbol{u}$ 充满一条**过 $(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})$ 的直线**。
2. 组合 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$ 充满一个**过 $(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})$ 的平面**。
3. 组合 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$ 充满**三维空间**。

因为 c 可以是 0，所以零向量 $(0,0,0)$ 在线上。它也在平面上是因为 c 和 d 都可为 0。向量 $c\boldsymbol{u}$ 组成的直线无限长（向前和向后）。我特别要求你考虑所有 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$ 组成的平面（三维空间中组合两个向量）。

在图 1.3 中，一条线上的所有 $c\boldsymbol{u}$ 加上另一条线上的所有 $d\boldsymbol{v}$ 就充满平面。

当我们在其中包含第三个向量 $\boldsymbol{w}$ 时，其倍数 $e\boldsymbol{w}$ 给出了第三条线。**假设第三条线不在 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的平面里**。那么组合所有的 $e\boldsymbol{w}$ 和所有的 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$ 就充满整个三维空间。

这是典型情况！**直线**，然后是**平面**，再次是**空间**。但是存在其它可能性。当 $\boldsymbol{w}$ 碰巧为 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$ 时，那第三个向量 $\boldsymbol{w}$ 在前两个向量的平面中。$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 的组合将无法走出那个 $\boldsymbol{uv}$ 平面。我们得不出整个三维平面。请考虑习题 1 中的特殊情况。

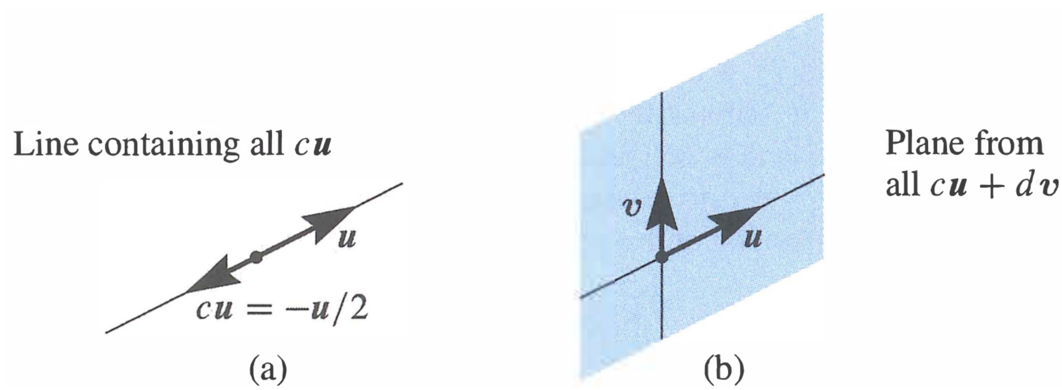

图 1.3：（a）过 $\boldsymbol{u}$ 的直线。（b）包含过 $\boldsymbol{u}$ 和过 $\boldsymbol{v}$ 直线的平面。

■ 复习关键点 ■

1. 二维空间中的向量 $\boldsymbol{v}$ 具有两个分量 v_1 和 v_2。
2. $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=(v_1+w_1, v_2+w_2)$ 与 $c\boldsymbol{v}=(cv_1, cv_2)$ 都是一次求一个分量。
3. 三个向量 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{w}$ 的线性组合是 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$。
4. 取 $\boldsymbol{u}$ 或 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 或 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 的所有线性组合。在三维中，这些组合通常充满一条直线，然后是一个平面，再然后是整个 $\mathbf{R}^3$ 空间。