1.2 长度与点积

1 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ 的"点积"为 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=(1)(4)+(2)(5)=4+10=\mathbf{14}$。

2 因为 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ 是 0：$(1)(4)+(3)(-4)+(2)(4)=\mathbf{0}$，所以 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}4\\-4\\4\end{bmatrix}$ 是垂直的。

3 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$ 长度的平方为 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=1+9+4=14$。**其长度为 $\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{14}$**。

4 于是 $\boldsymbol{u}=\dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}=\dfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{14}}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$ 的长度为 $\|\boldsymbol{u}\|=\mathbf{1}$。检验 $\dfrac{1}{14}+\dfrac{9}{14}+\dfrac{4}{14}=1$。

5 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的夹角 θ 有 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\ \|\boldsymbol{w}\|}$。

6 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 的夹角有 $\cos\theta=\dfrac{1}{(1)(\sqrt{2})}$。该角为 $\theta=45°$。

7 所有角都有 $|\cos\theta|\leq 1$。因此，所有向量都有 $\boxed{|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}|\leq\|\boldsymbol{v}\|\ \|\boldsymbol{w}\|}$。

第一节放弃了讲向量相乘。现在我们继续来定义 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的"点积"。这个乘法包含单独的积 v_1w_1 和 v_2w_2，但它并不止于此。这两个数加起来得出一个数 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$。

以下是几何部分（向量长度及它们夹角的余弦）。

$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$ 与 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2)$ 的**点积**或者说**内积**是数 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$：

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=v_1w_1+v_2w_2. \tag{1}$$

例 1 向量 $\boldsymbol{v}=(4,2)$ 与 $\boldsymbol{w}=(-1,2)$ 点积为零：

点积为 0
垂直向量
$$\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=-4+4=0。$$

在数学中，0 总是一个特别的数。对于点积，它意味着这两个向量是垂直的。它们的夹角是 90°。当我们在图 1.1 中画出它们时，我们见到了一个矩形（不仅仅是任一平行四边形）。垂直向量最清晰的例子是沿 x 轴的 $\boldsymbol{i}=(1,0)$ 与沿 y 轴向上的 $\boldsymbol{j}=(0,1)$。再一次地，点积为 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0+0=0$。向量 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$ 呈直角。

$\boldsymbol{v}=(1,2)$ 与 $\boldsymbol{w}=(3,1)$ 的点积是 5。马上，$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ 将揭露 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的夹角（非 $90°$）。请检验 $\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}$ 也是 5。

点积 $\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}$ 等于 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$。$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的顺序没有差别。

例 2 在点 $x=-1$（0 的左边）置权重 4 且在点 $x=2$（0 的右边）置权重 2。x 轴将在中点平衡（就像拉锯）。因为其点积为 $(4)(-1)+(2)(2)=0$，所以权重平衡。

这是一个典型工程与科学的例子。权重向量是 $(w_1,w_2)=(4,2)$。距中点的距离向量为 $(v_1,v_2)=(-1,2)$。权重乘以距离，w_1v_1 及 w_2v_2，得出“力矩”。跷跷板平衡的方程为 $w_1v_1+w_2v_2=0$。

例 3 点积投入到经济与商业中。我们有三种商品要购买与销售。它们的单价为 (p_1,p_2,p_3)——这是“价格向量” $\boldsymbol{p}$。我们购买或销售的数量为 (q_1,q_2,q_3)——当我们售出时为正、购入时为负。以价格 p_1 售出 q_1 个赚取 q_1p_1。总收益 (数量 q 乘以价格 p) 是**三维点积** $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$：

$$\textbf{收益}=(q_1,q_2,q_3)\cdot(p_1,p_2,p_3)=q_1p_1+q_2p_2+q_3p_3=\textbf{点积}。$$

零点积意味着“账目平衡”。若 $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}=0$ 则售出总计等于购入总计。于是 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 垂直（在三维空间）。一家有上千种商品的超市很快就进入高维度。

小注记：电子表格在管理中变得至关重要。它们计算线性组合与点积。你在屏幕上见到的是个矩阵。

重点 对于 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$，每个 v_i 乘以 w_i。因此 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=v_1w_1+\cdots+v_nw_n$。

长度与单位向量

一个重要实例是向量与它自己的点积。在此情况下 $\boldsymbol{v}$ 等于 $\boldsymbol{w}$。当向量是 $\boldsymbol{v}=(1,2,3)$ 时，与它自己的点积为 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=\|\boldsymbol{v}\|^2=14$：

点积 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$
长度平方
$$\|\boldsymbol{v}\|^2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=1+4+9=\mathbf{14}$$
向量夹角不是 $90°$ 而是 $0°$。因为 $\boldsymbol{v}$ 不与它自己垂直，所以答案不是 0。点积 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$ 得出 $\boldsymbol{v}$ 长度的平方。

定义 向量 $\boldsymbol{v}$ 的**长度** $\|\boldsymbol{v}\|$ 是 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$ 的平方根：

$$\textbf{长度}=\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}=(v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2)^{1/2}。$$

在二维中长度是 $\sqrt{v_1^2+v_2^2}$。在三维中它是 $\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$。通过上面的计算，$\boldsymbol{v}=(1,2,3)$ 的长度为 $\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{14}$。

这里 $\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}$ 就是表示向量的箭头的普通长度。假设分量为 1 和 2，则箭头是直角三角形的第 3 条边（图 1.6）。毕达哥拉斯定理 $a^2+b^2=c^2$ 关联着三条边：$1^2+2^2=\|\boldsymbol{v}\|^2$。

对于 $\boldsymbol{v}=(1,2,3)$ 的长度，我们两次运用直角定理。基向量 $(1,2,0)$ 的长度为 $\sqrt{5}$。这个基向量与直立向上的 $(0,0,3)$ 垂直。因此这个盒子的对角线长度为 $\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{5+9}=\sqrt{14}$。

四维向量的长度应当是 $\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2+v_4^2}$。于是向量 $(1,1,1,1)$ 长度为 $\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}=2$。这是四维空间中穿过单位立方体的对角线。n 维立方体的对角线长度为 $\sqrt{n}$。

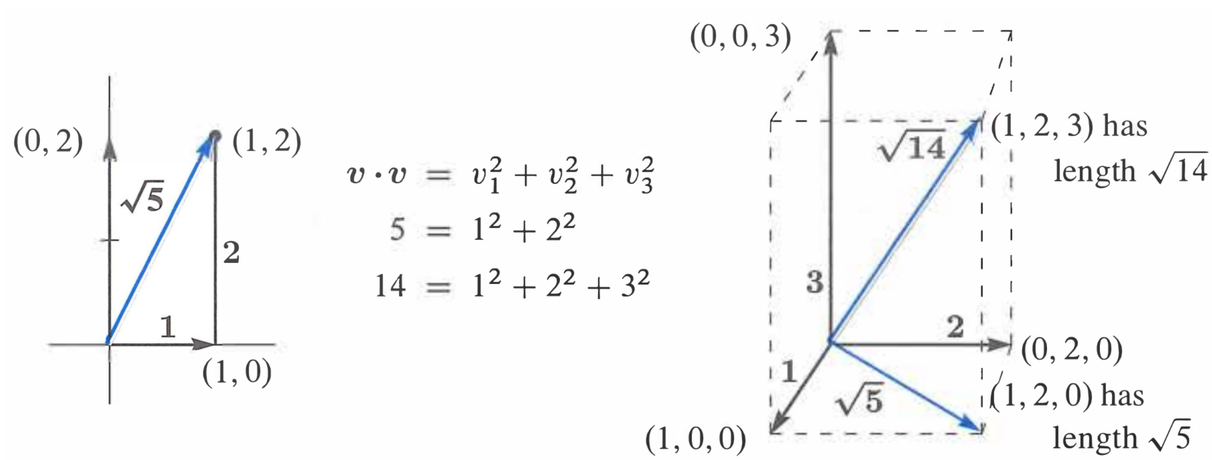

图 1.6：二维与三维向量长度 $\sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}$。

“**单位**”一词总是说明一些度量值等于“1”。单位价格是一件的价格。一个立方体的边长为 1。一个单位圆是半径为 1 的圆。现在我们理解了“单位向量”的含义。

定义　一个单位向量 $\boldsymbol{u}$ 是一个长度等于 1 的向量。因此 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=1$。

一个四维例子是 $\boldsymbol{u}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。于是 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}$ 是 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$。我们将 $\boldsymbol{v}=(1,1,1,1)$ 除以它的长度 $\|\boldsymbol{v}\|=2$ 以得出这个单位向量。

例 4 沿 x 轴和 y 轴的单位向量写为 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$。在 xy 平面，与 x 轴成“θ”角的单位向量是 $(\cos\theta,\sin\theta)$：

$$\textbf{单位向量}\quad \boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\quad 与\quad \boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\quad 与\quad \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}。$$

当 $\theta=0$ 时，水平向量 $\boldsymbol{u}$ 为 $\boldsymbol{i}$。当 $\theta=90^\circ$ 时，竖直向量为 $\boldsymbol{j}$。因为 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，所以在任何角度，其分量 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 都得出 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=1$。这些向量延伸为图 1.7 中的单位圆。因此 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 仅仅是单位圆在 θ 角上的坐标。

由于 $(2,2,1)$ 长度为 3，向量 $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ 长度为 1。检验 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=1$。为了得单位向量，**将任意非零向量 $\boldsymbol{v}$ 除以它的长度 $\|\boldsymbol{v}\|$**。

单位向量　　$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|$ 是与 $\boldsymbol{v}$ 同方向的单位向量。

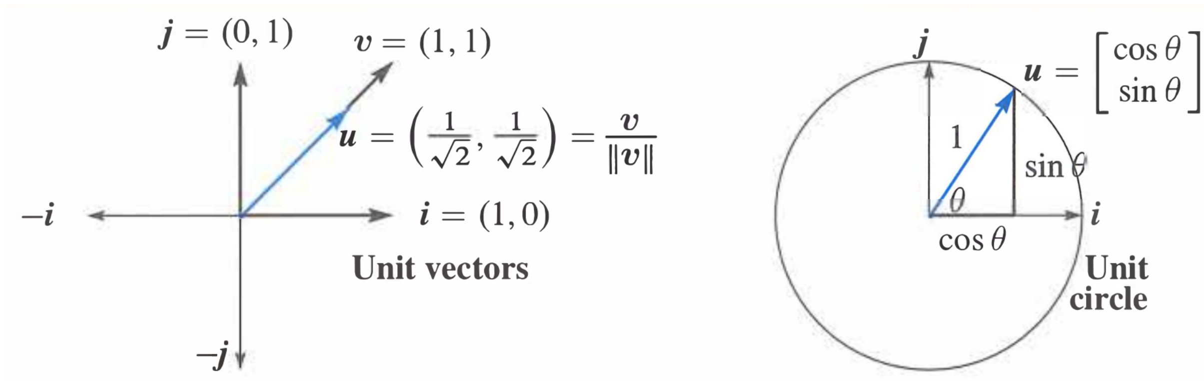

图 1.7：坐标向量 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$。$\boldsymbol{v} = (1,1)$ 除以它的长度 $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2}$ 为（左边）45° 角处的单位向量 $\boldsymbol{u}$。单位向量 $\boldsymbol{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ 在角 θ 处。

两向量的夹角

我们阐明了垂直向量具有 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$。当夹角为 90° 时，其点积为 0。为了解释这一点，我们得将角度与点积联系起来。然后我们演示 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ 如何求出任意两非零向量的夹角。

直角　　**当 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 垂直时，其点积为 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$。**

证明　当 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 垂直时，它们构成直角三角形的两条边。第三条边为 $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$（图 1.8 中横跨着的斜边）。关于直角三角形边的毕达哥拉斯定理是 $a^2 + b^2 = c^2$：

$$\textbf{垂直向量}\quad \|\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|^2 \tag{2}$$

在二维中写出这些长度的公式，此方程为

$$\textbf{毕达哥拉斯}\qquad (v_1^2 + v_2^2) + (w_1^2 + w_2^2) = (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2. \tag{3}$$

右边以 $v_1^2 - 2v_1w_1 + w_1^2$ 开始。于是方程两边都有 v_1^2 与 w_1^2 然后它们消去了，剩下 $-2v_1w_1$。v_2^2 与 w_2^2 也消去了，剩下 $-2v_2w_2$。(在三维中应当有 $-2v_3w_3$。) 立即除以-2 来看出 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$（原书此处有误!）：

$$0 = -2v_1w_1 - 2v_2w_2 \quad \text{推出} \quad \boldsymbol{v_1w_1 + v_2w_2 = 0} \tag{4}$$

结论　直角产生 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$。当夹角为 $\theta = 90°$ 时，点积为 0。那时 $\cos\theta = 0$。因为 $\boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{w}$ 总是 0，所以零向量 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ 与每个向量 $\boldsymbol{w}$ 都垂直。

现假设 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ **非零**。它可能是正的也可能是负的。$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ 的符号会立即向我们表明是小于直角还是大于直角。当 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ 为正时，夹角小于 90°。当 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ 为负时，夹角大于 90°。图 1.8 的右边展示了一个典型的向量 $\boldsymbol{v} = (3,1)$。因为 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 6$ 为正，所以其与 $\boldsymbol{w} = (1,3)$ 的夹角小于 90°。

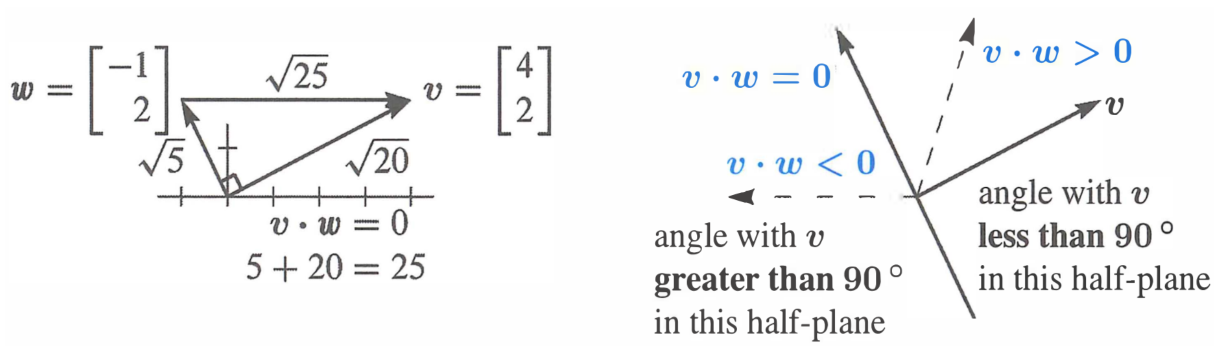

图 1.8：垂直向量具有 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$。因此 $\|\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|^2$。

分界线就是与 $\boldsymbol{v}$ 垂直的地方。在介于正和负之间的分界线上，$(1, -3)$ 与 $(3, 1)$ 垂直。其点积为 0。

点积反应了精确夹角 $\boldsymbol{\theta}$。对于单位向量 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{U}$ 的符号表明是 $\theta < 90°$ 还是 $\theta > 90°$。不仅如此，**点积 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{U}$ 还是 θ 的余弦**。这在 n 维中仍然正确。

单位向量 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{U}$ 夹角为 θ，有 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{U} = \cos\theta$。无疑地，$|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{U}| \leq 1$。

记住 $\cos\theta$ 绝不会大于 1。绝不会小于-1。单位向量的点积介于*-1* 和 *1* 之间。**θ 的余弦由 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{U}$ 显示出**。

图 1.9 清晰展示了向量为 $\boldsymbol{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ 与 $\boldsymbol{i} = (1, 0)$ 时的情况。其点积为 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{i} = \cos\theta$。这是它们夹角的余弦。

旋转任意 α 角之后，它们依然是单位向量。向量 $\boldsymbol{i} = (1, 0)$ 旋转至 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$。向量 $\boldsymbol{u}$ 旋转至 $(\cos\beta, \sin\beta)$，其中 $\beta = \alpha + \theta$。它们的点积为 $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$。这在三角学中是 $\cos(\beta - \alpha) = \cos\theta$。

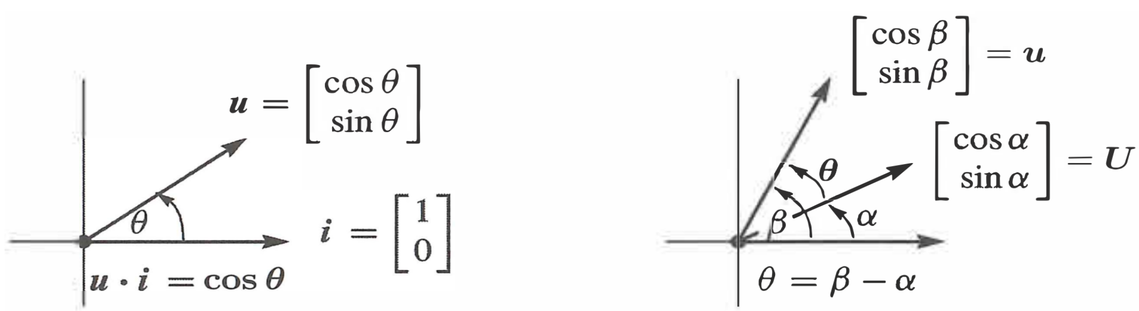

图 1.9：单位向量：$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{U}$ 是 θ（夹角）的余弦。

倘若 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 不是单位向量呢？除以它们的长度来得出 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|$ 和 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{w}/\|\boldsymbol{w}\|$。于是这些单位向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 的点积得出 $\cos\theta$。

余弦公式　若 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 为非零向量，则 $\dfrac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{w}\|} = \cos\theta.$ (5)

不论夹角多大，这个 $\boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|$ 与 $\boldsymbol{w}/\|\boldsymbol{w}\|$ 的点积绝不会超过 1。这就是关于点积的“**施瓦茨不等式**” $|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}|\leq\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|$——或者更准确地称为柯西—施瓦茨—布尼亚科夫斯基不等式。它在法国、德国及俄罗斯（可能还有其它地方——它是数学中最重要的不等式）。

由于 $|\cos\theta|$ 一定不会超过 1，则余弦公式给出了两个重要不等式：

施瓦茨不等式 $\quad |\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}|\leq\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|$

三角不等式 $\quad \|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|\leq\|\boldsymbol{v}\|+\|\boldsymbol{w}\|$

例 5 对 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 求 $\cos\theta$ 并检验两个不等式。

解 其点积为 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=4$。$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的长度都是 $\sqrt{5}$。其夹角余弦是 $4/5$。

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|}=\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{4}{5}.$$

由施瓦茨不等式，$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=4$ 小于 $\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|=5$。由三角不等式，边 $3=\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|$ 小于边 1+ 边 2。因为 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=(3,3)$，则三条边为 $\sqrt{18}<\sqrt{5}+\sqrt{5}$。将这个三角不等式平方得出 $18<20$。

例 6 $\boldsymbol{v}=(a,b)$ 与 $\boldsymbol{w}=(b,a)$ 的点积为 $2ab$。两个向量长度都是 $\sqrt{a^2+b^2}$。施瓦茨不等式 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}\leq\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|$ 说明 $\boldsymbol{2ad\leq a^2+b^2}$。

如果我们写成 $x=a^2$ 与 $y=b^2$，那这就更著名了。“几何平均” $\sqrt{\boldsymbol{xy}}$ 不大于“代数平均” = 平均数$\boldsymbol{\frac{1}{2}(x+y)}$。

$$\textbf{几何平均}\ \leq\ \textbf{代数平均}\quad ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}\ \text{变为}\ \sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}.$$

例 5 有 $a=2$ 和 $b=1$。于是 $x=4$ 且 $y=1$。其几何平均 $\sqrt{xy}=2$ 小于其代数平均 $\frac{1}{2}(1+4)=2.5$。

计算说明

MATLAB，Python 及 Julia 直接处理整个向量，而不是它们的分量。当 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 被定义出来时，会立即获悉 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$。按行输入 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$——$'$ 将它们转置为列向量以做准备。$2\boldsymbol{v}+3\boldsymbol{w}$ 变成 $2*\boldsymbol{v}+3*\boldsymbol{w}$。除非该行以分号结束，否则将会打印出结果。

$$\textbf{MATLAB}\qquad \boldsymbol{v}=[2\ 3\ 4]'\ ;\ \boldsymbol{w}=[1\ 1\ 1]'\ ;\ \boldsymbol{u=2*v+3*w}$$

点积 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ 是**一个行向量乘以一个列向量（用 $*$ 而不是 $\cdot$）**：

我们经常见到 $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ 或 $\boldsymbol{v'*w}$ 而不是 $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{v}$ 的长度被 MATLAB 称为 norm($\boldsymbol{v}$)。这也是 sqrt($\boldsymbol{v'*v}$)。然后从点积 $\boldsymbol{v'*w}$ 求出余弦及具有此余弦的夹角（弧度）：

余弦公式	余弦 $= \boldsymbol{v}' * \boldsymbol{w}/(\mathrm{norm}(\boldsymbol{v}) * \mathrm{norm}(\boldsymbol{w}))$
反余弦	夹角 $= \mathrm{acos}($余弦$)$

M 文件将创建一个新函数 **cosine**$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$。Python 和 Julia 都是开源的。

■ 复习关键点 ■

1. 点积 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ 将每个分量 v_i 与 w_i 相乘然后将所有 $v_i w_i$ 加起来。
2. $\|\boldsymbol{v}\|$ 的长度是 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$ 的平方根。因此 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|$ 是个**单位向量**：长度为 1。
3. 当向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 垂直时，其点积为 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$。
4. θ（任意非零 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的夹角）的余弦决不超过 1：

   余弦 $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{w}\|}$ **施瓦茨不等式** $|\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}| \le \|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{w}\|$。