3.2 A 的零空间：解出 $Ax = 0$ 与 $Rx = 0$

1 $\mathbf{R}^n$ 中的**零空间** $\boldsymbol{N}(A)$ 包含 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的所有解。这就包括 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$。

2 消元法（从 A 到 U 再到 R）不改变零空间：$\boldsymbol{N}(A) = \boldsymbol{N}(U) = \boldsymbol{N}(R)$。

3 **行最简阶梯形 $\boldsymbol{R} = \mathbf{rref}(\boldsymbol{A})$** 的所有主元 $= 1$，其上下元素为 0。

4 若 R 的列 j 是自由列（无主元），则 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 在 $x_j = 1$ 处有一个“专解”（即齐次解，原文无对应中文名词，本文译作“专解”）。

5 主元个数 $=$ R 中非零行个数 $=$ **秩 $\boldsymbol{r}$**。有 $n - r$ 个自由列。

6 每个 $m < n$ 的矩阵都在其零空间中有 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的非零解。

本节围绕包含 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 所有解的子空间。$m \times n$ 矩阵 A 可以是方形或矩形。右手边为 $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$。一个立马可得的解是 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$。对于可逆矩阵，这是其唯一解。对于其它的不可逆矩阵，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 有非零解。每个解 $\boldsymbol{x}$ 都属于 A 的零空间。

消元法将求出所有解并识别出这个非常重要的子空间。

零空间 $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A})$ 由 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的所有解组成。这些向量 x 都在 $\mathbf{R}^n$ 中。

检验解向量是否形成了一个子空间。假设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 都在零空间中（这意味着 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 及 $A\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$）。矩阵乘法规则给出 $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathbf{0} + \mathbf{0}$。该规则还给出 $A(c\boldsymbol{x}) = c\mathbf{0}$。右边依然是零。因此 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ 和 $c\boldsymbol{x}$ 也都在零空间 $\boldsymbol{N}(A)$ 中。因此我们可以做相加与相乘而不离开零空间，即它是一个子空间。

复述一遍：解向量 $\boldsymbol{x}$ 具有 n 个分量。它们都是 $\mathbf{R}^n$ 中的向量，因此零空间是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间。列空间 $\boldsymbol{C}(A)$ 是 $\mathbf{R}^m$ 的一个子空间。

例 1 描述 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ 的零空间。这个矩阵是奇异的！**解** 对线性方程 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 运用消元法：

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \to \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ \mathbf{0} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

实际上只有一个方程。第二个方程是第一个方程的 3 倍。在行图中，直线 $x_1 + 2x_2 = 0$ 与直线 $3x_1 + 6x_2 = 0$ 相同。那条线是零空间 $\boldsymbol{N}(A)$。它包含所有解 (x_1, x_2)。

为描述 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解，这里有个有效的方式。选择直线上的一点（一个“**专解**”）。那么直线上所有点都是该点的倍数。我们选择选择第二个分量为 $x_2 = 1$（一个特意选择）。解自方程 $x_1 + 2x_2 = 0$，第一个分量必须为 $x_1 = -2$。**专解为 $\boldsymbol{s}$** $= (-2, 1)$。

专解 $A\boldsymbol{s}=\mathbf{0}$ $\quad A=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}$ 的零空间包含 $\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$ 的所有倍数。

计算 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的专解是描述零空间最好的方式。**由于我们令自由变量为 $\boldsymbol{x_2}=\mathbf{1}$，因此该解是特设的**。

A的零空间由 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 专解的所有组合组成。

例 2 $x+2y+3z=0$ 源于 1×3 矩阵 $A=[1\ 2\ 3]$。于是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 产生了一个平面。该平面上的所有向量都垂直于 $(1,2,3)$。该平面是 A 的零空间。有两个自由变量 y 和 z：设为 0 和 1。

$$[1\ 2\ 3]\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0 \text{ 具有两个专解 } \boldsymbol{s_1}=\begin{bmatrix}-2\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{bmatrix} \text{ 和 } \boldsymbol{s_2}=\begin{bmatrix}-3\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{bmatrix}。$$

这些向量 $\boldsymbol{s_1}$ 和 $\boldsymbol{s_2}$ 位于平面 $x+2y+3z=0$ 中。平面上所有的向量都是 $\boldsymbol{s_1}$ 和 $\boldsymbol{s_2}$ 的组合。

注意 $\boldsymbol{s_1}$ 和 $\boldsymbol{s_2}$ 的特别之处。其最后两个分量是“自由的”，于是我们特意选为 1,0 和 0,1。因此第一个分量 -2 与 -3 都取决于方程 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$。

$x+2y+3z=\mathbf{6}$ 的解也在某个平面上，然而这个平面不是个子空间。仅当 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 时，向量 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 才是个解。3.3 节将展示 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$（假设有解）的解是如何从零移到一个特解上的。

本节的两个关键步骤是 (**1**) 将 A 消减为其**行阶梯形 $\boldsymbol{R}$**
(**2**) 求出 **$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的专解**

第 137 页的图列展示了具有 3 个主元的 4×5 矩阵 A 与 R。
方程 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 和 $R\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有 $5-3=2$ 个专解 $\boldsymbol{s_1}$ 和 $\boldsymbol{s_2}$。

主元列与自由列

A 的第一列包含唯一一个主元，于是 $\boldsymbol{x}$ 的第一个分量不是自由变量。**自由分量对应于无主元列**。特意选择（1 或 0）仅适用于专解中的自由变量。

例 3 求出 A,B,C 的零空间及 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的两个专解。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\3&8\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}A\\2A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\3&8\\2&4\\6&16\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=[A\ 2A]=\begin{bmatrix}1&2&2&4\\3&8&6&16\end{bmatrix}。$$

解 方程 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有唯一的零解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$。其零空间为 $\mathbf{Z}$。它仅包含 $\mathbf{R}^2$ 中的单点 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$。这个事实源于消元法：

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&2\\3&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \text{ 得 } \begin{bmatrix}1&2\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \text{ 于是 } \begin{bmatrix}\boldsymbol{x_1}=\mathbf{0}\\\boldsymbol{x_2}=\mathbf{0}\end{bmatrix}。$$

A 是可逆的。没有专解。该矩阵两列都有主元。

矩形矩阵 B 具有相同的零空间 $\mathbf{Z}$。$B\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的前两个方程再次要求 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$。最后两个方程也迫使 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$。当我们添加两个额外的方程时（提供额外的行），零空间肯定不会变大。额外行对零空间中的向量 $\boldsymbol{x}$ 强行添加了更多的条件。

矩形矩阵 C 是不同的。它具有额外的列而不是行。其解向量具有四个分量。消元法将在 C 的前两列产生主元，而 **C 与 U 的最后两列都是"自由列"。它们不具有主元**：

从 C 的行 2
减去 3(行 1)

$$C=\begin{bmatrix}1&2&2&4\\3&8&6&16\end{bmatrix}\text{ 变为 }U=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}\mathbf{1}&2&2&4\\0&\mathbf{2}&0&4\end{bmatrix}\\ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow\\ \textbf{主元列 自由列}\end{array}$$

对于自由变量 x_3 和 x_4，我们特意选为 1 和 0。先是 $x_3=1$，$x_4=0$，其次 $x_3=0$，$x_4=1$。主元变量 x_1 和 x_2 取决于方程 $U\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$（或 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 或 $R\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$）。我们得出 C 的零空间中的两个专解。这也是 U 的零空间：消元不改变解。

专解
$\boldsymbol{Cs}=\mathbf{0}$
$\boldsymbol{Us}=\mathbf{0}$

$$\boldsymbol{s_1}=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}\text{ 和 }\boldsymbol{s_2}=\begin{bmatrix}0\\-2\\0\\1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\leftarrow\ \textbf{主元}\\ \leftarrow\ \textbf{变量}\\ \leftarrow\ \textbf{自由}\\ \leftarrow\ \textbf{变量}\end{array}$$

行最简阶梯形 $\boldsymbol{R}$

当 A 是矩形时，消元法将不会在上三角 U 处停止。我们可以通过两种方式继续使这个矩阵更简单些。这些步骤将为我们带来最合适的矩阵 R：

1. 在主元上方构造零。利用主元行向上消元，接近 $\boldsymbol{R}$。
2. 主元制成 1。整个主元行除以主元。

这些步骤不改变方程右边的零向量。零空间保持相同：$\boldsymbol{N}(A)=\boldsymbol{N}(U)=\boldsymbol{N}(R)$。当我们达成**行最简阶梯形 $\boldsymbol{R}=\mathrm{\mathbf{rref}}(\boldsymbol{A})$** 时，此零空间就变得可以轻易看出来。**$\boldsymbol{R}$ 的主元列包含 $\boldsymbol{I}$**。

最简
形 $\boldsymbol{R}$

$$U=\begin{bmatrix}1&2&2&4\\0&2&0&4\end{bmatrix}\text{ 变成 }R=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&2&0\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&0&2\end{bmatrix}\\ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \ \ \ \ \ \ \end{array}。$$

我从 U 的行 1 减去行 2。接着将行 2 乘以 $\frac{1}{2}$ 以得出主元 $=1$。

现在 (**自由列 3**) $=\mathbf{2}$ (**主元列 1**)，因此 -2 出现在 $\boldsymbol{s_1}=(-2,0,-1,0)$ 中。从简化了的方程组 $R\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 求专解要简单的多。在 R 的每个自由列中，我转变了所有符号以求 $\boldsymbol{s}$。第二个专解为 $\boldsymbol{s_2}=(0,-2,0,1)$。

在转到 $m\times n$ 矩阵 A 及其零空间 $\boldsymbol{N}(A)$ 与专解之前，请允许我重复一句。对于许多矩阵，$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的唯一解是 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$。它们的零空间 $\boldsymbol{N}(A)=\mathbf{Z}$ 仅含有零向量：没有专解。产生 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 的唯一列组合就是“零组合”。$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解并不重要（就是 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$），但是其中的思想可不是微不足道的。

零零空间 $\mathbf{Z}$ 这种情况是最重要的。它表明 A 的列是 **(线性) 无关的**。没有列组合可得出零向量（除了零组合）。所有列都有主元，没有列是自由列。你将再次见到这种无关的思想⋯⋯

阶梯矩阵 $\boldsymbol{R}$ 中的主元变量与自由变量

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} p & p & f & p & f \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & a & 0 & c \\ 0 & \mathbf{1} & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{s_1}=\begin{bmatrix} -a \\ -b \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{s_2}=\begin{bmatrix} -c \\ -d \\ \mathbf{0} \\ -e \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

由 R 反映出	I 在主元列中	专解 $R\boldsymbol{s_1}=\mathbf{0}$ 及 $R\boldsymbol{s_2}=\mathbf{0}$
3 个主元列 p	F 在自由列中	从 R 取 $-a$ 和 $-e$
2 个自由列 f	3 个主元：秩 $r=3$	$R\boldsymbol{s}=\mathbf{0}$ 意味着 $A\boldsymbol{s}=\mathbf{0}$

R 清楚地表明：列$3=a$列$1+b$列2。A 也必须如此。

其专解 $\boldsymbol{s_1}$ 重现了该组合，于是 $(\boldsymbol{-a},\boldsymbol{-b},\mathbf{1},0,0)$ 使 $R\boldsymbol{s_1}=\mathbf{0}$。

A 的零空间 $=R$ 的零空间 $=\boldsymbol{s_1}$ 和 $\boldsymbol{s_2}$ 的所有组合

以下是这些步骤针对于带三个主元的 4×7 **行最简阶梯形矩阵 $\boldsymbol{R}$** 的过程：

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & x & x & x & \mathbf{0} & x \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & x & x & x & \mathbf{0} & x \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad \begin{array}{l} \textbf{三个主元变量 } x_1,x_2,x_6 \\ \textbf{四个自由变量 } x_3,x_4,x_5,x_7 \\ \boldsymbol{N}(\boldsymbol{R})\textbf{ 中含四个专解 } \boldsymbol{s} \\ \textbf{主元行与主元列包含 } \boldsymbol{I} \end{array}$$

问 这个矩阵的列空间与零空间是什么？

答 R 的列具有 4 个分量，因此它们位于 $\mathbf{R}^4$。（不在 $\mathbf{R}$ 中！）每列第四个分量为 0。列的每个组合——列空间中的每个向量——第四个分量为 0。其列空间 $\boldsymbol{C}(R)$ 由所有形如 $(b_1,b_2,b_3,0)$ 的向量组成。对于这些向量我们可以解出 $R\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$。

零空间 $\boldsymbol{N}(R)$ 是 $\mathbf{R}^7$ 的一个子空间。$R\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解都是那四个专解的组合——自由变量各自为 *1*：

1. 列 $3,4,5,7$ 没有主元。于是其四个自由变量为 x_3,x_4,x_5,x_7。

2. 令一个自由变量为 1 再令其它三个自由变量为 0。

3. 为求 $\boldsymbol{s}$，解 $R\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 求出主元变量 x_1,x_2,x_6。

计算主元的个数引出了一个极其重要的定理。假设 A 的列数多于行数。**当 $\boldsymbol{n>m}$ 时，有至少一个自由变量**。方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 至少有一个专解。这个解非零！

假设 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的未知数个数多于方程数（$\boldsymbol{n>m}$，列数多于行数）。那么肯定至少有一个自由列。**因此 $\boldsymbol{A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}}$ 有非零解**。

矮胖矩阵（$n>m$）在它的零空间中总有非零向量。由于主元数没超过 m，因此一定有至少 $n-m$ 个自由变量。（该矩阵仅有 m 行，且一行绝不会有俩主元。）当然一行可能没有主元——这意味着额外的自由变量。但这里就是关键所在：当有一个自由变量时，它可以设为 1。于是方程 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 至少有一整条非零解。

零空间是一个子空间。它的“维度”是自由变量的个数。该中心思想——子空间的**维度**——已在本章中定义和解释了。

矩阵的秩

数 m 和 n 给出了矩阵的大小——但不一定是线性方程组的真实大小。一个像 $0=0$ 的方程不应算在其内。若 A 中有两个完全一样的行，那么第二个行会在消元法中消失。同样，若行 3 是行 1 和行 2 的组合，那么行 3 将变成三角 U 及最简阶梯形 R 中的全零行。我们不想计算零行的总数。**$\boldsymbol{A}$ 的真实大小由它的秩给出**。

秩的定义　$\boldsymbol{A}$ 的秩是主元的个数。此数为 $\boldsymbol{r}$。

这个定义是计算性的，我想进一步表述秩 r。最终的矩阵 R 将有 r 个非零行。从一个秩为 $r=2$ 的 3×4 例子开始：

$$\begin{array}{l}\textbf{四列}\\ \textbf{两个主元}\end{array}\qquad \begin{bmatrix}1&1&2&4\\1&2&2&5\\1&3&2&6\end{bmatrix}\qquad R=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&2&3\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}。$$

A 的前两列为 $(1,1,1)$ 和 $(1,2,3)$，方向不同。这些将是主元列（由 R 显示出）。第三列 $(2,2,2)$ 是第一列的倍数。我们将不会在第三列见到主元。第四列 $(4,5,6)$ 是前三列的和。第四列也将不含主元。A 和 R 的秩为 $\mathbf{2}$。

每个“自由列”都是之前主元列的组合。就是这些组合告诉了我们专解 s：

$$\begin{aligned}&\text{列}3=\mathbf{2}(\text{列}1)+\mathbf{0}(\text{列 }2)\qquad \boldsymbol{s_1}=(\mathbf{-2,-0},1,0)\\&\text{列}4=\mathbf{3}(\text{列}1)+\mathbf{1}(\text{列 }2)\qquad \boldsymbol{s_2}=(\mathbf{-3,-1},0,1)\end{aligned}$$

R 的列 3 中的数 2,0 出现在 $\boldsymbol{s_1}$ 中（其中符号反转）。还有 R 的列 4 中的数 3,1 出现在 $\boldsymbol{s_1}$ 中（其中符号反转后为 $-3,-1$）。

单秩

单秩矩阵仅有一个主元。当消元法在第一列产生 0 时，它同时就在所有列产生了 0。每一行都是主元行的倍数。同时，每一列都是主元列的倍数！

$$\textbf{单秩矩阵} \quad A=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&3&10\\\mathbf{2}&6&20\\\mathbf{3}&9&30\end{bmatrix} \quad\longrightarrow\quad R=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&3&10\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}。$$

单秩矩阵的零空间是“一维”的。这里的所有列都在过 $\boldsymbol{u}=(1,2,3)$ 的直线上。A 的列为 $\boldsymbol{u}$、$3\boldsymbol{u}$ 及 $10\boldsymbol{u}$。将这些数置于行 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}=[1\ 3\ 10]$ 中然后你就拥有了特殊的单秩形式 $A=\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$：

$$\boldsymbol{A}=\textbf{列乘以行}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \qquad \begin{bmatrix}1&3&10\\2&6&20\\3&9&30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\\\mathbf{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{3}&\mathbf{10}\end{bmatrix}$$

例 4 当所有行都是一个主元行的倍数时，其秩为 $r=1$：

$$\begin{bmatrix}1&3&4\\2&6&8\end{bmatrix}、\begin{bmatrix}0&3\\0&\mathbf{5}\end{bmatrix}、\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} \text{ 及 } [6] \text{ 都为秩 } 1。$$

对于这些矩阵，其最简阶梯形 $R=\mathbf{rref}(A)$ 可通过眼睛来检查：

$$R=\begin{bmatrix}1&3&4\\0&0&0\end{bmatrix}、\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}、\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \text{ 及 } [1] \text{ 只有一个主元。}$$

我们对秩的第二种定义将是高层次的。它处理整个行与整个列——向量而不仅仅是数。三个矩阵 A、U 和 R 都有 r 个**无关行**。

A、U 和 R 也具有 $\boldsymbol{r}$ **个无关列**（主元列）。3.4 节表述了行或列无关的含义。

秩的第三种定义是在线性代数的最顶层，我们将处理向量空间。**秩** r **是列空间的“维度”。它也是行空间的维度**。重要的是 $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}$ **为零空间的维度**。

■ 复习关键点 ■

1. 零空间 $\boldsymbol{N}(A)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间。它包含 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的所有解。
2. 对 A 消元产生一个带主元列和自由列的行最简 R。
3. 每个自由列都导出一个专解。该自由变量为 1，其余的为 0。
4. A 的秩 r 为主元的个数。在 $R=\mathrm{rref}(A)$ 中所有主元为 1。
5. $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的全解为 $n-r$ 个专解的组合。
6. 若 $n>m$，则 A 总是有自由列，它得出 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的非零解。