|

UNIVERSIDAD EAFIT®

ESCUELA DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Nombre de la materia :Ecuaciones diferenciales Parciales

Parcial 3

Nombre: David Plazas Escudero Código: 201710005101 Nota: 5.0

Profesor(a): Grupo: Fecha

Nota: Escriba su nombre y código con tinta en todas las páginas del tema. No se permite el uso del celular o tablet. El profesor no está autorizado para responder preguntas durante el examen.

1. Resolver el problema con valores en la frontera $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2x$ para $0 < x < 2$

   Sujeto a $y(0,t) = y(2,t) = 0$

   $y(x,0) = 0$, $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$

Supongamos una solución de la forma $y(x,t) = V(x,t) + \psi(x)$. Reemplazando,

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(V(x,t)+\psi(x)) = 3\frac{\partial^2}{\partial x^2}(V(x,t)+\psi(x)) + 2x \to \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 3\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 3\psi''(x) + 2x$

Para llevarlo a un problema conocido, se debe cumplir $3\psi''(x) + 2x = 0$

$\psi''(x) = -\frac{2}{3}x \to \psi'(x) = -\frac{x^2}{3} + C \to \psi(x) = -\frac{x^3}{9} + Cx + d$.

forma conocida

Se tiene que $y(0,t) = 0 \to y(0,t) = V(0,t) + \psi(0) = 0 \to \psi(0) = 0 \to \psi(0) = d = 0$

Para la otra condición de frontera $y(2,t) = 0 \to y(2,t) = V(2,t) + \psi(2) = 0$

$\to \psi(2) = 0$ para obtener la forma conocida: $\psi(2) = -\frac{8}{9} + 2C = 0$

$\psi(x) = -\frac{x^3}{9} + \frac{4}{9}x$ $C = \frac{4}{9}$

Si $y(x,t) = V(x,t) + \psi(x) \Longrightarrow V(x,t) = y(x,t) - \psi(x)$. Relacionemos las condiciones iniciales: $V(x,0) = y(x,0) - \psi(x) \to$

$$\begin{cases} V(x,0) = -\psi(x) = \frac{x^3}{9} - \frac{4}{9}x \\ \frac{\partial V(x,0)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

$\frac{\partial V(x,0)}{\partial t} = \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = 0 \to$

Por lo tanto, el problema a resolver es:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 3\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & 0 < x < 2 \\ & t > 0 \\ V(0,t) = V(2,t) = 0 \\ V(x,0) = \frac{x^3}{9} - \frac{4}{9}x \\ \frac{\partial V}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 3\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ $\quad 0<x<2 \quad t>0$ $\quad Y(0,t) = Y(2,t) = 0$

$Y(x,0) = \frac{x^3}{9} - \frac{4}{9}x$

$\frac{\partial Y}{\partial t}(x,0) = 0$

Por variables separables $Y(x,t) = X(x)T(t)$, se llega a las ecuaciones:

① $X'' + \lambda X = 0$ con $X(0) = X(2) = 0$

② $T'' + 3\lambda T = 0$ con $T'(0) = 0$

① - Si $\lambda = 0 \rightarrow X(x) = Cx + d \rightarrow X(0) = d = 0 \rightarrow X(2) = 2C = 0 \rightarrow C = 0$

$X(x) = 0 \longrightarrow$ No sirve

- $\lambda < 0$: $\lambda = K^2$ $\quad X(x) = C_1 e^{Kx} + C_2 e^{-Kx} \longrightarrow X(0) = C_1 + C_2 = 0$, $\quad X(2) = C_1 e^{2K} + C_2 e^{-2K} = 0$ } Que tiene única solución $C_1 = C_2 = 0$.

$X(x) = 0 \rightarrow$ No sirve.

- $\lambda > 0$: $X(x) = C_1 \sin(Kx) + C_2 \cos(Kx)$. $\quad X(0) = C_2 = 0$

$X(2) = C_1 \sin(K\cdot 2) = 0$

$\longrightarrow 2K = n\pi$

$K = \frac{n\pi}{2}$.

$X(x) = C \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$

Para cada n, $X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$

16.6

② Se sabe que $\lambda > 0$: $\lambda = K^2 = \frac{n^2\pi^2}{2^2}$

$T'' + \frac{3n^2\pi^2}{4}T = 0 \Longrightarrow T(t) = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}n\pi t}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}n\pi t}{2}\right)$

$T'(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}n\pi C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$.

$T(t) = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}n\pi t}{2}\right)$, que $\forall n$ se tiene $T_n(t) = C_n \cos\left(\frac{\sqrt{3}n\pi t}{2}\right)$,

$Y_n(x,t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}n\pi t}{2}\right)$ $\leftarrow$ Cumple la ecuación de onda y las condiciones de frontera. Además cumple $\frac{\partial Y}{\partial t}(x,0) = 0$.

Para $Y(x,0) = \frac{x^3}{9} - \frac{4}{9}x$, consideremos

$Y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}n\pi t\right) \rightarrow \underbrace{Y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) = \frac{x^3}{9} - \frac{4}{9}x}_{\text{S. de Fourier para } \frac{x^3}{9} - \frac{4}{9}x \text{ en } [0,2]}$

Luego, $b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 \left(\frac{\xi^3}{9} - \frac{4}{9}\xi\right)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{2}\right)d\xi$

$\therefore$

$\Longrightarrow y(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^2 \left(\frac{\xi^3}{9} - \frac{4}{9}\xi\right)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{2}\right)d\xi\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}n\pi t\right) + \frac{x^3}{9} - \frac{4}{9}x$

UNIVERSIDAD **EAFIT** Parcial 3 Abril 10 de 2019 Código________

2. Dada la ecuación de onda $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 144 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ con $-\infty < x < \infty$ sujeta a $y(x,0) = e^{-5|x|}$

$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$

a) Resolver el problema usando integral de Fourier
b) Resolver el problema usando transformada de Fourier

a) Supongamos una solución de la forma $y(x,t) = X(x)T(t)$. Luego, (*)

$$X(x)T''(t) = 144X''(x)T(t). \longrightarrow \frac{T''(t)}{144T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

De donde se obtienen los problemas: $\left\{ \begin{array}{l} ① \ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ ② \ T''(t) + 144\lambda T(t) = 0 \end{array} \right.$

Recordemos que para problemas infinitos, se desean soluciones acotadas.

① • Si $\lambda = 0$: $X'' = 0 \Longrightarrow X(x) = Cx + d$. Para que sea acotada, $C = 0. \to X(x) = d$.

• Si $\lambda < 0$: $\lambda = -\omega^2 \Longrightarrow X'' - \omega^2 X = 0. \to X(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$.

Para que sea acotada, si $x > 0 \to C_1 = 0$; y si $x < 0 \to C_2 = 0$. Por lo tanto, $X(x) = 0$ sería una solución nula que no es deseable.

• Si $\lambda > 0$: $\lambda = \omega^2 \to X'' + \omega^2 X = 0 \to X(x) = C\cos\omega x + d\sin\omega x$, que es una solución acotada e incluye el caso de $\lambda = 0$. Luego, $\forall \omega$ se tiene una solución: $X_\omega(x) = C_\omega \cos\omega x + d_\omega \sin\omega x$.

② Ya se sabe que $\lambda \geq 0$: $\lambda = \omega^2 \longrightarrow T'' + 144\omega^2 T = 0$, de donde

$T(t) = a\cos(12\omega t) + b\sin(12\omega t)$.

$\frac{\partial T}{\partial t} = -12\omega a\sin(12\omega t) + 12\omega b\cos(12\omega t)$

Como $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = X(x)T'(0) = 0 \longrightarrow T'(0) = 0$ porque $X(x) \neq 0$.

$\frac{\partial T}{\partial t}(0) = 12\omega b = 0 \to b = 0$. Luego $T(t) = a\cos(12\omega t)$; y que tiene un valor distinto para cada $\omega \longrightarrow T_\omega(t) = a_\omega \cos(12\omega t)$

En (*): $y_\omega(x,t) = [C_\omega \cos(\omega x) + d_\omega \sin(\omega x)]\cos(12\omega t)$, que son soluciones que satisfacen la ecuación de onda y la condición inicial $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$. Para que satisfaga $y(x,0) = e^{-5|x|}$, consideremos

$$y(x,t) = \int_0^\infty [C_\omega \cos(\omega x) + d_\omega \sin(\omega x)]\cos(12\omega t)\,d\omega$$

$$y(x,0) = \int_0^\infty [c_\omega \cos \omega x + d_\omega \sin \omega x]\, d\omega = e^{-5|x|}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}$ Representación en integral de Fourier de $e^{-5|x|}$ en $(-\infty, \infty)$

Por lo tanto, $c_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-5|\xi|} \cos \omega\xi \, d\xi$, $d_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-5|\xi|} \sin(\omega\xi)\, d\xi$

Nótese que $e^{-5|\xi|}$ es una función par y $e^{-5|\xi|}\sin(\omega\xi)$ es una función impar; por lo tanto, $d_\omega = 0$.

$$y \quad c_\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-5\xi}\cos \omega\xi\, d\xi = \frac{2}{\pi}\left[\frac{e^{-5\xi}}{25+\omega^2}\left(-5\cos(\omega\xi) + \omega \sin(\omega\xi)\right)\right]_0^\infty$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{e^{-\infty}}{25+\omega^2}(\dots) - \frac{e^{0}}{25+\omega^2}\left[-5\cos(0) + \omega\sin(0)\right]\right] = \frac{10}{\pi}\left(\frac{1}{25+\omega^2}\right)$$

$$\to y(x,t) = \int_0^\infty \left[\frac{10}{\pi}\left(\frac{1}{25+\omega^2}\right)\cos(\omega x)\right]\cos(12\omega t)\, d\omega$$

b) Por transformada: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 144\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ $\quad -\infty < x < \infty$, $t > 0$ $\quad y(x,0) = e^{-5|x|}$

Se puede hacer transformada en $\underline{x}$. $\quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$

$$F\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right\} = F\left\{144\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right\}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{y}(\omega,t) = 144(i\omega)^2\hat{y}(\omega,t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{y}(\omega,t) + 144\omega^2\hat{y}(\omega,t) = 0$$

Ecuación diferencial en t. con condiciones:

$$y(x,0) = e^{-5|x|} \to \hat{y}(\omega,0) = \frac{10}{25+\omega^2}$$

$$\frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = 0 \to \frac{\partial \hat{y}(\omega,0)}{\partial t} = 0$$

$$\to \hat{y}(\omega,t) = c\cos(12\omega t) + d\sin(12\omega t)$$

$$\frac{\partial \hat{y}(\omega,t)}{\partial t} = -c\,12\omega\sin(12\omega t) + 12 d\omega\cos(12\omega t) \to \frac{\partial \hat{y}(\omega,0)}{\partial t} = 12 d\omega = 0 \to d = 0.$$

$$\hat{y}(\omega,t) = c\cos(12\omega t) \longrightarrow \hat{y}(\omega,0) = c = \frac{10}{25+\omega^2}$$

$$\Longrightarrow \hat{y}(\omega,t) = \frac{10}{25+\omega^2}\cos(12\omega t).$$

T. Inversa:

$$y(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{10}{25+\omega^2}\cos(12\omega t)\right)}_{\text{función par}} e^{i\omega x}\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{10}{25+\omega^2}\right)\cos 12\omega t\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

Tomando la parte real

$$y(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{10}{25+\omega^2}\right)\cos\omega x\cos 12\omega t\, d\omega \quad \longleftarrow \text{La misma solución}$$

$$\xi - 5\eta = x - 5t \quad \begin{cases} \xi = x - 5t + 5\eta \\ \xi = x + 5t - 5\eta \end{cases}$$
$$\xi + 5\eta = x + 5t$$

UNIVERSIDAD EAFIT

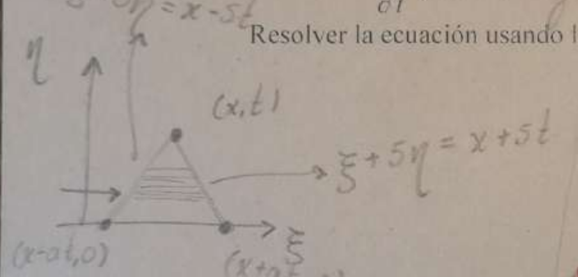
Parcial 3 Abril 10 de 2019 Código__________

3. Dada la ecuación diferencial $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 25\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^2 t^2$ para $-\infty < x < \infty$, $t > 0$

Sujeta a $y(x,0) = x\cos(x) - f(x)$ Características $\begin{cases} x + 5t = k_1 \\ x - 5t = k_2 \end{cases}$

$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = e^{-x} - g(x)$

Resolver la ecuación usando las cracteristicas de la ecuación de onda :



La solución de la ecuación de onda no homogénea está dada por

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+at) + f(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a}\iint_{\Delta} F(\xi,t)\,dA .$$

$\frac{1}{10}$

$a^3 - b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Calculemos $\iint_{\Delta} F(\xi,\eta)\,dA$; con $F(x,t) = x^2t^2$

$$\iint_{\Delta} \xi^2\eta^2\,dA = \int_0^t \int_{x-5t+5\eta}^{x+5t-5\eta} \xi^2\eta^2\,d\xi\,d\eta = \int_0^t \eta^2 \left.\frac{\xi^3}{3}\right|_{x-5t+5\eta}^{x+5t-5\eta} d\eta = \int_0^t \eta^2\left[(x+5t-5\eta)^3 - (x-5t+\eta)^3\right]d\eta$$

* Calculemos $\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi = \int_{x-5t}^{x+5t} e^{-\xi}\,d\xi = e^{-(x-5t)} - e^{-(x+5t)}$

Luego, $y(x,t) = \frac{1}{2}\left[(x+5t)\cos(x+5t) + (x-5t)\cos(x-5t)\right] + \frac{1}{10}\left(e^{-(x-5t)} - e^{-(x+5t)}\right)$

$$+ \frac{1}{10}\int_0^t \eta^2\left[(x+5t-5\eta)^3 - (x-5t+\eta)^3\right]d\eta$$