17. $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^3}{6}, & 0 < x \leq 1/2 \\ \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{24}, & \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} u(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} \right) = \frac{1}{24}$$

$$\lim_{x \to 1/2^+} u(x) = \lim_{x \to 1/2^+} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} - \frac{1}{24} \right) = \frac{1}{24}$$

Claramente los polinomios son continuos y en $x = 1/2$ es continua.

Además, como $u(x)$ continua $\to$ $u^2(x)$ es continua, y como está definida en $[0,1]$, su integral de Lebesgue existe. Luego, $\int_{\mathbb{R}} |u^2(x)|\, dx < \infty$ $\Big\}$ (*)

$$u'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{2}, & 0 < x \leq 1/2 \\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1/2^-} u'(x) = \lim_{x \to 1/2^-} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \right) = \frac{1}{8}$$

$$\lim_{x \to 1/2^+} u'(x) = \lim_{x \to 1/2^+} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8}$$

Luego $u'(x)$ continua y por (*) $u' \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ $\to u \in \mathbb{L}^2(\Omega)$

$$u''(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - x, & 0 < x \leq 1/2 \\ x - \dfrac{1}{2}, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1/2^-} u''(x) = 0 = \lim_{x \to 1/2^+} u''(x)$$

$u''(x)$ continua $\Rightarrow$ por (*) $u'' \in \mathbb{L}^2(\Omega)$

$$u'''(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x \leq 1/2 \\ 1, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

Claramente $u'''(x)$ no es continua. No obstante, $[u'''(x)]^2$ sí es continua y por (*) $u''' \in \mathbb{L}^2(\Omega)$

Ahora, $u'''(x) = 1 - 2H(x - 1/2)$

luego, $u^{(4)}(x) = -2\delta(x - 1/2)$

Veamos que $\delta \notin \mathbb{L}^2(\Omega)$.

Supongamos que $\delta \in \mathbb{L}^1(\Omega)$

Luego, $\delta(x - 1/2) = 0$ a.e. Ω

$\therefore \int_\Omega |\delta|\, d\mu = 0.$

Pero por definición $\int_\Omega \delta(x - 1/2)\, dx = 1$

$(\rightarrow\leftarrow)$

Luego, $\delta \notin \mathbb{L}^1(\Omega)$ y como $\mu(\Omega) = 1 < \infty$, $\mathbb{L}^2(\Omega) \subset \mathbb{L}^1(\Omega)$

$\delta \notin \mathbb{L}^2(\Omega)$.

Por lo tanto $u \in \mathcal{H}^3(\Omega)$