DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
ESCUELA DE CIENCIAS
Sistemas Lineales (CM0440)
Parcial 1 (20%)

Nombre: David Plazas Escudero Código: 201710006101 Nota: 4.2

Profesor(a): Carlos M. Vélez S. Grupo: ______ Fecha: 12 de marzo de 2019 **Duración: 1.5 horas**

Resolver los siguientes ejercicios. En la página 4 encontrará la ayuda necesaria. Trate de ser lo más ordenado posible para que la evaluación sea fácil y refleje la realidad. Si le hace falta espacio utilice las hojas en blanco al final.

1.0

1. (1.2) Obtener la ecuación de estado en variables de fase a partir de la siguiente ecuación en diferencias (observar la diferencia finita de la entrada). Dar la ecuación de estado de tiempo discreto en forma matricial $(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$. Incluir las condiciones iniciales del vector de estado: $\mathbf{x}(0)$.

$$\begin{cases} y(k+2)+0.3y(k+1)+0.02y(k)=u(k+1)-u(k) \\ y(0)=0,\ y(1)=1,\ u(0)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(k) = y(k) \\ x_2(k) = y(k+1) + \alpha u(k) \end{cases} \qquad x_1(0) = y(0) = 0$$

$$x_2(0) = y(1) - u(0) = y(1) = 1$$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) - \alpha u(k) \\ x_2(k+1) = -0.3x_2(k) - 0.02x_1(k) + u(k+1) - u(k) + \alpha u(k+1) \end{cases}$$

Faltó un término $-0.3\left[x_2(k) - \alpha u(k)\right]$

Luego, $\boxed{\alpha = -1}$ para eliminar el $u(k+1)$. Por lo tanto,

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = -0.3x_2(k) - 0.02x_1(k) - u(k) \end{cases}$$

Sea $\mathbb{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$. $\mathbb{x}(k+1) = \Phi \mathbb{x} + \Gamma u$

$$\begin{cases} \mathbb{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.02 & -0.3 \end{bmatrix} \mathbb{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(k) \\ \mathbb{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

2. (1.4) Obtener la forma canónica diagonal del siguiente sistema lineal. Etapas: (a) (0.2) Cálculo de los valores propios. (b) (0.2) Determinación por fórmula de la multiplicidad geométrica de las raíces múltiples. (c) (0.5) Cálculo de los vectores propios y la matriz de transformación. (d) (0.5) Cálculo del modelo diagonalizado.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

0.2.

a) $|A-\lambda I| = 0$ ← Valores propios :

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)[(-2-\lambda)(-2-\lambda)-0] = 0$$

$$(-3-\lambda)(-2-\lambda)(-2-\lambda) = 0$$

0.0.

$$\boxed{\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -2.}$$

λ_2 ← multiplicidad algebraica = 1.

b) $mg = n - \text{rank}(\ldots)$

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} +3+\lambda & 0 & 1 \\ 0 & +2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & +2+\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{+2+\lambda}F_2,\ \frac{1}{+2+\lambda}F_3]{\frac{1}{+3+\lambda}F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/(\lambda+3) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 + \frac{1}{\lambda+3}F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -2$
$\times$ no $\lambda = -3$

$\text{rank}(\lambda I - A) = 3$ $\quad$ ~~$mg = 3-3 = 0$~~

~~$mg < ma$~~

~~$0 < 1$~~

0.5.

c) $A v = \lambda v$ ← Vector propio.

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} -3v_1 + v_3 = -3v_1 \rightarrow v_1 \text{ libre} \\ -2v_2 = -3v_2 \rightarrow v_2 = 0 \\ -2v_3 = -3v_3 \rightarrow v_3 = 0 \end{array} \qquad p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} -3v_1 + v_3 = -2v_1 \rightarrow ? \\ -2v_2 = -2v_2 \rightarrow \text{libre} \rightarrow v_2 = 1 \\ -2v_3 = -2v_3 \rightarrow \text{libre} \rightarrow v_3 = 0 \end{array} \Bigg\}\ v_1 = 0 \qquad p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para p_3, se resuelve el mismo sistema de p_2.

Luego,
$$\left.\begin{array}{l} -3v_1 + v_3 = -2v_1 \\ -2v_2 = -2v_2 \rightarrow v_2 \text{ libre} \\ -2v_3 = -2v_3 \rightarrow v_3 \text{ libre} \end{array}\right\} \text{Sea } \left.\begin{array}{l} v_2 = 0 \\ v_3 = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -3v_1 + 1 = -2v_1 \\ v_1 = 1 \end{array}\right\} p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T = [p_1\ p_2\ p_3]^{-1} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_1 - f_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

T matriz de transformación.

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark \quad \mathbb{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbb{A}^* = \mathbb{T}\mathbb{A}\mathbb{T}^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A}^* = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \checkmark$$

d) 0.5.

$\mathbb{B} = 0 = \mathbb{B}^*$ ✓

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\mathbb{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \checkmark$$

$\mathbb{D} = 0 = \mathbb{D}^*$

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x^* \\ y^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} x^* \checkmark \end{cases}$$

Modelo diagonalizado

$$z^{-a}\left(\frac{z}{z-1}\right) \xrightarrow{z^{-1}} u(k-a)$$

3. (2.4) Aplicar la transformada z a la solución de la siguiente ecuación en diferencias y comprobar la solución resolviendo la ecuación iterativamente. La entrada es un **escalón unitario** con un retardo de 2. Etapas:

(a) (0.6) Cálculo de $Y(z)$.

(b) (1.0) Cálculo de $y(k)$ a partir de la transformada inversa z.

(c) (0.6) Cálculo de la solución hasta $y(4)$ a partir de la solución analítica del paso anterior y por la solución iterativa de la ecuación en diferencias.

(d) (0.2) Probar los teoremas de valor inicial y valor final a partir de los resultados en (a) y (b)

$$\begin{cases} y(k+1)+0.2y(k)=u(k) \\ y(0)=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{step}} \quad u(k)=u(k-2)=\begin{cases} 0 & k<2 \\ 1 & k\geq 2 \end{cases}$$

$0.2 = \frac{1}{5}$

0.6

a) $y(k+1)+0.2y(k)=u(k-2) \rightarrow Z\{y(k+1)+0.2y(k)\}=Z\{u(k-2)\}$

$1.2 = \frac{12}{10}$

$\rightarrow (zY(z)-zy(0))+0.2Y(z) = z^{-2}\left(\frac{z}{z-1}\right) \rightarrow Y(z)(z+0.2)=\frac{1}{z(z-1)}$

$-0.2-1$
-1.2

$\rightarrow \boxed{Y(z)=\frac{1}{z(z-1)(z+0.2)}} = \frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z+0.2} \implies 1=A(z-1)(z+0.2)+Bz(z+0.2)+Cz(z-1)$

Si $z=1$: $1=(1+0.2)B$
$1=1.2B$
$\frac{5}{6}=B$

Si $z=-0.2$: $1=(-0.2)(-1.2)C$
$1=\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{6}{5}\right)C$
$C=\frac{25}{6}$

Si $z=0$: $1=(-1)(0.2)A$
$A=-5$

$Y(z)=-\frac{5}{z}+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{z-1}\right)+\frac{25}{6}\left(\frac{1}{z+0.2}\right)$

$Y(z)=-5z^{-1}+\frac{5}{6}\left[z^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right)\right]+\frac{25}{6}\left[z^{-1}\left(\frac{z}{z+0.2}\right)\right]$

b) 1.0

$Z^{-1}\{Y(z)\}=Z^{-1}\left\{-5z^{-1}+\frac{5}{6}\left[z^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right)\right]+\frac{25}{6}\left[z^{-1}\left(\frac{z}{z+0.2}\right)\right]\right\}$

$y(k)=-5\delta(k-1)+\frac{5}{6}u(k-1)+\frac{25}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1}u(k-1)$

c) 0.2 $y(k)$ analítico

$y(0)=0$

$y(1)=-5+\frac{5}{6}+\frac{25}{6}$
$=-\frac{30}{6}+\frac{5}{6}+\frac{25}{6}$
$=0$

$y(2)=-5\delta(1)+\frac{5}{6}u(1)+\frac{25}{6}\left(\frac{-1}{5}\right)u(1)$
$=\frac{5}{6}-1$

$y(k)$ en diferencias

$y(k+1)=-0.2y(k)+u(k-2)$

$0.2=\frac{1}{5}$, $0.8=\frac{4}{5}$ $\Big\}$ $-\frac{4}{25}$

$k=0$ $y(1)=-0.2y(0)+u(-2)=0$

$k=1$ $y(2)=-0.2y(1)+u(-1)=\cancel{1}$

$y(3)=-0.2y(2)+u(1)=0.8$

$y(4)=-0.2y(3)+u(2)$
$=\left(-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)+1=-\frac{4}{25}+1=-\frac{4}{25}+\frac{25}{25}=\frac{21}{25}$

$y(4)=\frac{21}{25}$

$y(3)=\frac{5}{6}+\frac{25}{6}\left(\frac{-1}{5}\right)^2=\frac{5}{6}+\frac{25}{6}($

0.2

d) $Y(z) = \frac{1}{z(z-1)(z+0.5)}$ $\quad y(k) = -5\delta(k-1) + \frac{5}{6}u(k-1) + \frac{25}{6}\left(\frac{-1}{5}\right)^{k-1}u(k-1)$

$$\lim_{k\to 0} y(k) = \lim_{z\to\infty} Y(z)$$

$$\lim_{k\to 0}\left(-5\delta(k-1) + \frac{5}{6}u(k-1) + \frac{25}{6}\left(\frac{-1}{5}\right)^{k-1}u(k-1)\right) = \lim_{z\to\infty}\left(\frac{1}{z(z-1)(z+0.5)}\right)$$

$$-5\delta(-1)^{0} + \frac{5}{6}u(-1)^{0} + \frac{25}{6}\left(\frac{-1}{5}\right)^{-1}u(-1)^{0} = 0$$

$0 = 0$ ✓ Cumple teorema valor inicial.

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}\left(Y(z)(z-1)\right)$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(-5\delta(k-1)^{0} + \frac{5}{6}u(k-1)^{1} + \frac{25}{6}\left(\frac{-1}{5}\right)^{k-1}u(k-1)\right) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z(z-1)(z+0.2)}$$

$$0 + \frac{5}{6} + 0 = \frac{1}{1.2} \qquad 1.2 = \frac{6}{5}$$

$$= \frac{5}{6}$$ ✓

$\frac{5}{6} = \frac{5}{6}$ ✓ Cumple teorema valor final.

Ayudas:

$$\begin{cases}\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{\Phi x}(k)+\mathbf{\Gamma u}(k)\\ \mathbf{y}(k)=\mathbf{Cx}(k)+\mathbf{Du}(k)\end{cases}\quad \begin{cases}\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{Ax}+\mathbf{Bu}\\ \mathbf{y}=\mathbf{Cx}+\mathbf{Du}\end{cases}\quad \mathbf{x}^*(t)=\mathbf{Tx}(t)\quad \mathbf{x}(t)=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}^*(t)\quad \begin{cases}\dot{\mathbf{x}}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{x}^*+\mathbf{B}^*\mathbf{u}\\ \mathbf{y}=\mathbf{C}^*\mathbf{x}^*+\mathbf{D}^*\mathbf{u}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathbf{A}^*=\mathbf{TAT}^{-1}\\ \mathbf{B}^*=\mathbf{TB}\\ \mathbf{C}^*=\mathbf{CT}^{-1}\\ \mathbf{D}^*=\mathbf{D}\end{cases}\quad \mathbf{T}=\begin{bmatrix}\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n\end{bmatrix}^{-1}\quad \lambda_i\mathbf{p}_i=\mathbf{Ap}_i\quad mg=n-\operatorname{rank}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})\le ma$$

$$\mathbf{M}\to\left[\mathbf{M}\mid\mathbf{I}\right]\to\left[\mathbf{I}\mid\mathbf{M}^{-1}\right]\quad a^k\leftrightarrow\frac{z}{z-a}\quad x(k-n)u(k-n)\leftrightarrow z^{-n}X(z)$$

$$x(k+n)\leftrightarrow z^n\left[X(z)-\sum_{k=0}^{n-1}x(k)z^{-k}\right]\quad \lim_{k\to0}x(k)=\lim_{z\to\infty}X(z)\quad \lim_{k\to\infty}x(k)=\lim_{z\to1}\left[(z-1)X(z)\right]$$