8. Sea $T: U \to V$ un operador lineal acotado inferiormente

Esto es:

$$\exists K > 0 : \|Tu\|_V \geq K\|u\|_U, \quad u \in U$$

1-a-1:

Veamos que $N(T) = \{0\}$.

Es claro que $0 \in N(T)$ (linealidad)

Probemos unicidad

Sea $x \in N(T)$

Como $x \in N(T) \Rightarrow Tx = 0$

Asimismo, sabemos que Tx es acotado inferiormente.

Luego,

$$\|Tx\|_V \geq K\|x\|_U$$

Como $\|x\|_U \geq 0 \Rightarrow K\|x\|_U \geq 0$

$$0 \leq K\|x\|_U \leq \|Tx\|_V = \|0\|_V = 0$$

$$0 \leq K\|x\|_U \leq 0$$

$$\to K\|x\|_U = 0$$

Luego, $x = 0$.

$\therefore N(T) = \{0\}$

Como $N(T) = \{0\} \Rightarrow T$ es inyectivo

Teorema:

"Un operador lineal T es inyectivo $\longleftrightarrow N(T) = \{0\}$.

"$\Longrightarrow$" Supongamos que T es inyectivo.

Es claro que $T(0) = 0$

luego, $0 \in N(T)$.

Además, supongamos que $x \in N(T)$

Luego $Tx = 0 = T0$

Como T es inyectivo $x = 0$.

Luego $N(T) = \{0\}$.

"$\Longleftarrow$" Supongamos que $N(T) = \{0\}$ y que T no es inyectivo:

$$\exists x, y : Tx = Ty \text{ y } x \neq y.$$

Luego, $T(x-y) = Tx - Ty = 0$

Luego $x - y \in N(T) \Rightarrow x - y = 0$

$x = y$ $(\rightarrow\leftarrow)$

Luego, T inyectivo.

Veamos ahora que $T^{-1}: R(T) \to U$ es acotado.

$$T(T^{-1}u) = u \longrightarrow \|T(T^{-1}u)\|_V \geq K\|T^{-1}u\|_U$$

$$\|u\|_V \geq K\|T^{-1}u\|_U$$

$$\|T^{-1}u\|_U \leq \frac{1}{K}\|u\|_V$$

Luego T^{-1} es acotado con $M = 1/K$