c) Para ver que esta norma no proviene de un producto interno, miremos que no cumple la ley del paralelogramo.

Sean $f(t) = t^4$ y $g(t) = 1 - t^4$ luego

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \{t^4\} = 1 \qquad \|g\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \{1-t^4\} = 1$$

Además:

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \{t^4 + 1 - t^4\} = \sup_{t\in[0,1]} \{1\} = 1$$

$$\|f-g\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \{2t^4 - 1\} = 1,$$ Pero:

$$2\|f\|_\infty^2 + 2\|g\|_\infty^2 \neq \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2$$

$$2(1) + 2(1) \neq 1 + 1$$

$\underline{4 \neq 2}$, luego la norma $\|f\|_\infty$ No proviene de producto interno.