43. $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ t.q. $\forall j>1,\ \exists p\in(0,1)$

$$\|v_{j+1}-v_j\|\leq p\|v_j-v_{j-1}\|$$

Veamos que $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Sea $\epsilon>0$, sea $K=\begin{cases} 1, & \log_\rho\left(\frac{(1-\rho)\epsilon}{2\|V_2-V_1\|}\right)\leq -1 \\ \left\lceil \log_\rho\left(\frac{(1-\rho)\epsilon}{2\|V_2-V_1\|}\right)\right\rceil+1, & \text{—} \end{cases}$

Supóngase $m>n$.

$$\|V_m-V_n\|=\left\|\sum_{i=0}^{m-n-1}(V_{m-i}-V_{m-i-1})\right\|$$

$$\leq\sum_{i=0}^{m-n-1}\|V_{m-i}-V_{m-i-1}\| \quad (\Delta)$$

Por otro lado

$$\|V_{m-i}-V_{m-i-1}\|\leq\rho\|V_{m-i-1}-V_{m-i-2}\|$$

$$\|V_{m-i-1}-V_{m-i-2}\|\leq\rho\|V_{m-i-2}-V_{m-i-3}\|\rightarrow\rho\|V_{m-i-1}-V_{m-i-2}\|\leq\rho^2\|V_{m-i-2}-V_{m-i-3}\|$$

$$\|V_{m-i-2}-V_{m-i-3}\|\leq\rho\|V_{m-i-3}-V_{m-i-4}\|\rightarrow\rho^2\|V_{m-i-2}-V_{m-i-3}\|\leq\rho^3\|V_{m-i-3}-V_{m-i-4}\|$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\|V_3-V_2\|\leq\rho\|V_2-V_1\|\rightarrow\rho^{m-i-3}\|V_3-V_2\|\leq\rho^{m-i-2}\|V_2-V_1\|$$

Lema[2]: Asumiendo $m>n$

$$\sum_{i=0}^{m-n-1}(V_{m-i}-V_{m-i-1})=\sum_{i=0}^{m-n-1}V_{m-i}-\sum_{i=0}^{m-n-1}V_{m-i-1}$$

Sea $j=i+1$:

$$=\sum_{i=0}^{m-n-1}V_{m-i}-\sum_{j=1}^{m-n}V_{m-j}$$

$$=V_m+\cancel{\sum_{i=1}^{m-n-1}V_{m-i}}-\cancel{\sum_{j=1}^{m-n-1}V_{m-j}}-V_n$$

$$=V_m-V_n$$

Por transitividad, $\|V_{m-i}-V_{m-i-1}\|\leq\rho^{m-i-2}\|V_2-V_1\|$

En (Δ):

$$\|V_m-V_n\|\leq\sum_{i=0}^{m-n-1}\rho^{m-i-2}\|V_2-V_1\|$$

$$=\rho^{m-2}\|V_2-V_1\|\sum_{i=0}^{m-n-1}\rho^{-i}$$

$$=\rho^{m-2}\|V_2-V_1\|\,\frac{1-(\rho^{-1})^{m-n}}{1-\rho^{-1}}$$

$$=\frac{\rho^{m-2}-\rho^{n-2}}{1-\rho^{-1}}\|V_2-V_1\|$$

$$=\frac{\rho^{m-1}-\rho^{n-1}}{\rho-1}\|V_2-V_1\|$$

$$=\frac{\rho^{n-1}-\rho^{m-1}}{1-\rho}\|V_2-V_1\|\leq\frac{\rho^{K-1}-\rho^{m-1}}{1-\rho}\|V_2-V_1\|\leq\frac{\rho^{K-1}}{1-\rho}\|V_2-V_1\| \quad (*)$$

Supongamos $\log_\rho\left(\frac{(1-\rho)\epsilon}{2\|V_2-V_1\|}\right)>-1$

Luego, $K=\left\lceil\log_\rho\left(\frac{(1-\rho)\epsilon}{2\|V_2-V_1\|}\right)\right\rceil+1\geq\log_\rho\left(\frac{(1-\rho)\epsilon}{2\|V_2-V_1\|}\right)+1$

$$(*)\quad\frac{\rho^{K-1}}{1-\rho}\|V_2-V_1\|\leq\frac{\rho^{\log_\rho\left(\frac{(1-\rho)\epsilon}{2\|V_2-V_1\|}\right)\cancel{+1-1}}}{1-\rho}\|V_2-V_1\|$$

$$=\frac{\cancel{(1-\rho)}\epsilon\ \cancel{\|V_2-V_1\|}}{2\cancel{(1-\rho)}\cancel{\|V_2-V_1\|}}=\frac{\epsilon}{2}<\epsilon \qquad \square$$

Supongamos ahora que $\log_\rho\left(\frac{(1-\rho)\epsilon}{2\|V_2-V_1\|}\right)\leq -1$

En $(*)$:

$$\frac{\rho^0}{1-\rho}\|V_2-V_1\|=\frac{\|V_2-V_1\|}{1-\rho}$$

Como $\rho\in(0,1)\rightarrow\rho^{\log_\rho\left(\frac{(1-\rho)\epsilon}{2\|V_2-V_1\|}\right)}\geq\rho^{-1}$

$$\frac{(1-\rho)\epsilon}{2\|V_2-V_1\|}\geq\rho^{-1}$$

$$\epsilon>\frac{\epsilon}{2}\geq\rho^{-1}\frac{\|V_2-V_1\|}{1-\rho}\geq\frac{\|V_2-V_1\|}{1-\rho}$$

Luego $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.