UNIVERSIDAD EAFIT

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
ESCUELA DE CIENCIAS
<Nombre de la materia> <CM0422>
Parcial 4 (25%)

Nombre: David Plazas Escudero Código: 201710005101 Nota: 3.9+0.8

Profesor(a): Jorge Iván Grupo: ______ Fecha: ______ Duración: 1.5 horas

1. Aplique separación de variables para resolver el problema mixto con valores en la frontera
$\nabla^2(x,y)=0$ para $0<x<a$, $0<y<b$
$u(x,0)=0$, $u(x,b)=f(x)$ para $0\le x\le a$
$u(0,y)=\frac{\partial u}{\partial x}(a,y)=0$ para $0\le y\le b$

4.7

$u(x,0)=X(x)Y(0)=0$
$Y(0)=0$
$u(0,y)=X(0)Y(y)=0$
$X(0)=0$
$\frac{\partial u}{\partial x}(a,y)=X'(a)Y(y)=0$
$X'(a)=0$

Supongamos una solución de la forma $u(x,y)=X(x)Y(y)$

$\nabla^2 u(x,y)=X''Y+XY''=0$

$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda$

① $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=0;\ X'(a)=0\end{cases}$

② $\begin{cases} Y''-\lambda Y=0 \\ Y(0)=0\end{cases}$

Para ① $\to$ $\lambda\le 0$ no conduce a nada. $\lambda>0\to\lambda=\alpha^2 \Rightarrow X''+\alpha^2X=0$

$X(x)=a\cos(\alpha x)+b\sin(\alpha x)$

$X(0)=a=0 \to X(x)=b\sin(\alpha x)\to \frac{dX(x)}{dx}=b\cos(\alpha x)\to X'(a)=b\cos(\alpha a)=0$

$\alpha a=\frac{(2n-1)\pi}{2}\to \alpha=\frac{(2n-1)\pi}{2a}\to X(x)=b\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}x\right)$

Para ② $\to\lambda>0$. $\lambda>0\to\lambda=\alpha^2$. $Y''-\alpha^2Y=0$ con $\alpha=\frac{(2n-1)\pi}{2a}$

$Y''-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4a^2}Y=0 \to Y(y)=ce^{\frac{(2n-1)\pi}{2a}y}+de^{-\frac{(2n-1)\pi}{2a}y}$

$Y(0)=c+d=0\to d=-c$. $Y(y)=c\left(e^{\frac{(2n-1)\pi}{2a}y}-e^{-\frac{(2n-1)\pi}{2a}y}\right)=c\sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}y\right)$

$u_n(x,y)=b_n\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}x\right)\sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}y\right)$

Que son soluciones que satisfacen la ecuación de Laplace. Para satisfacer la condición $u(x,b)=f(x)$, consideremos (por principio de superposición) la solución

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}x\right)\sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}y\right)$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} x\right) \sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} y\right)$$

$$\underbrace{u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} x\right) \sinh\left(\frac{(2n-1)\pi b}{2a}\right)}_{} = f(x)$$

Desarrollo en serie de Fourier ~~en~~ senos para $f(x)$ en $[0,a]$, en términos impares.

luego,

$$\sinh\left(\frac{(2n-1)\pi b}{2a}\right) b_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(\xi) \sin\left(\cancel{\frac{(2n-1)\pi \xi}{a}}\right) d\xi$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{a}\int_0^a f(\xi) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{a}\xi\right) d\xi\right) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} x\right) \sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} y\right)$$

$$\nabla^2(r,\theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$r<2$

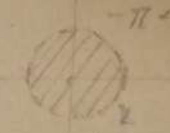
$-\pi<\theta<\pi$

2. Resolver el problema de Dirrichlet convirtiendo a cooordenadas polares

   $\nabla^2(x,y)=0$ para $x^2+y^2<4$

   $u(x,y)=x^2-y^2$ para $x^2+y^2=4$

$x^2+y^2=r^2$ $\quad x=r\cos\theta$, $\quad y=r\sin\theta$.



Sobre la frontera, $r=2$ y $u(2,\theta)=f(\theta)$

Transformando el problema a coordenadas polares:

$\nabla^2(x,y)=0 \longrightarrow \nabla^2(r,\theta)=0$ para $r<2$

$u(x,y)=x^2-y^2 \longrightarrow u(r,\theta)=(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2 = r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$u(r,\theta)=r^2\cos 2\theta$, para $r^2=4 \rightarrow r=2$.

$u(2,\theta)=4\cos 2\theta$.

$\therefore$ El nuevo problema a resolver es $\begin{cases}\nabla^2(r,\theta)=0, & r<2\\ u(2,\theta)=4\cos 2\theta\end{cases}$

Se puede verificar que las funciones $\{r^n\sin(n\theta), r^n\cos(n\theta), 1\}$ con $\forall n=0,1,\dots$, que son soluciones a la ecuación de Laplace en coordenadas polares.

funciones armónicas en coordenadas polares, luego para cada n

Se tiene una solución de la forma $u_n(r,\theta)=r^n(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta))$

Para que se cumpla la condición de frontera $u(2,\theta)=4\cos 2\theta$ consideremos la solución

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)) \qquad (*)$$

$$u(2,\theta)=\underbrace{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} 2^n(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta))}_{\text{Desarrollo en Serie de Fourier de } 4\cos 2\theta \text{ en } [-\pi,\pi]} = 4\cos 2\theta$$

Luego, $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}4\cos(2\xi)\,d\xi = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin(2\xi)}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin\sin$
$+\cos(A-B)$ $\qquad +\sin\sin$

$$2^n a_n=\frac{4}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\xi)\cos(n\xi)\,d\xi=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos((n+2)\xi)+\cos((n-2)\xi))\,d\xi.$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin((n+2)\xi)}{n+2}+\frac{\sin((n-2)\xi)}{n-2}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{4}{\pi}\left[\underbrace{\frac{\sin((n+2)\pi)}{n+2}}_{=0\ \forall n\geq 1}+\frac{\sin((n-2)\pi)}{n-2}\right]=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin((n-2)\pi)}{n-2}\right)$$

este término es 0 $\forall n\neq 2$.

$$2^n a_n = \frac{4}{\pi}\underbrace{\left(\frac{\sin((n-2)\pi)}{n-2}\right)}_{\Delta_n}$$

tiene forma $\frac{0}{0}$. $\Rightarrow$ L'Hôpital

$$\lim_{n\to 2}\Delta_n = \lim_{n\to 2}\frac{\sin((n-2)\pi)}{n-2} = \lim_{n\to 2}\left[\frac{\sin(n\pi)\overset{1}{\cos(2\pi)} - \overset{0}{\sin(2\pi)}\cos(n\pi)}{n-2}\right]$$

$$= \lim_{n\to 2}\left(\frac{\sin(n\pi)}{n-2}\right) \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{n\to 2}\left(\frac{\pi\cos(n\pi)}{1}\right) = \pi$$

13

Luego,

$$a_n = \begin{cases} 0, & \forall n \neq 2 \\ \frac{4}{2^n}, & n = 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & n \neq 2 \\ 1, & n = 2 \end{cases}$$

Para b_n, $2^n b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\xi)\sin(n\xi)\,d\xi = 0$

porque es función impar.

Reemplazando en (*),

$$u(r,\theta) = r^2\cos(2\theta)$$

$u(r,\theta) = \frac{1}{4}r^2\cos 2\theta$.

Que es la solución al problema de Dirichlet en polares.

En cartesianas:

$$u(r,\theta) = r^2\cos(2\theta) = r^2(2\cos^2\theta - 1)$$
$$= 2r^2\cos^2\theta - r^2$$

$x = r\cos\theta$

$x^2 = r^2\cos^2\theta$

Luego, $u(x,y) = 2x^2 - (x^2+y^2) = x^2 - y^2$

3. Resolver el problema $\nabla^2(x,y) = -h$ con h una constante positiva, para la banda finita $0 < x < \pi$, $y > 0$ y con valores en la frontera
$u(0,y) = 0$, $u(\pi,y) = 0$ para $y > 0$ → Por transformada en Senos. en x
$u(x,0) = B\,sen(x)$ para $0 < x < \pi$

$$\tilde{S}_x[f](n) = \int_0^{\pi} f(\xi)\sin(n\xi)\,d\xi = \tilde{f}_s(n)$$

$$\nabla^2(x,y) = -h \quad \rightarrow \quad \tilde{S}_x\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] + \tilde{S}_x\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] = \tilde{S}_x[-h]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -h \qquad \text{Sea } \tilde{S}_x[u(x,y)] = \tilde{u}_s(n,y)$$

Calculemos $\tilde{S}_x[-h] = \int_0^{\pi} -h\sin(n\xi)\,d\xi = -h\left(-\frac{\cos(n\xi)}{n}\right)\Big|_0^{\pi} = \pm h\left(\frac{\cos(n\pi) - \cos(0)}{n}\right)$

$$= h\left(\frac{1 - (-1)^n}{n}\right) \quad \text{ojo}$$

ojo

Luego, $-n^2\tilde{u}_s(n,y) - n\,\overset{0}{u(0,y)} - n(-1)^n \overset{0}{u(\pi,y)} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_s(n,y)}{\partial y^2} = -h\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)$

$$-n^2\tilde{u}_s(n,y) + \frac{\partial^2\tilde{u}_s(n,y)}{\partial y^2} = h\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)$$

Ecuación diferencial ordinaria en y. $\frac{\partial^2\tilde{u}_s(n,y)}{\partial y^2} - n^2\tilde{u}_s(n,y) = h\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)$

Sujeta a $u(x,0) = B\sin(x) \rightarrow \tilde{u}_s(n,0) = \int_0^{\pi} B\sin(x)\sin(nx)\,dx = \frac{B}{2}\int_0^{\pi}\left(\cos((n-1)x) - \cos((n+1)x)\right)dx$

$$\tilde{u}_s(n,0) = \frac{B}{2}\left[\frac{\sin((n-1)x)}{n-1} - \frac{\sin((n+1)x)}{n+1}\right]_0^{\pi} = \frac{B}{2}\left[\frac{\sin((n-1)\pi)}{n-1} - \underbrace{\frac{\sin((n+1)\pi)}{n+1}}_{0,\ \forall n \approx 1}\right]$$

$$\tilde{u}_s(n,0) = \frac{B}{2}\left(\frac{\sin((n-1)\pi)}{n-1}\right) = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ a, & n = 1\end{cases}$$

$$a = \lim_{n\to 1}\frac{B}{2}\left(\frac{\sin((n-1)\pi)}{n-1}\right) \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{B}{2}\left(\frac{\pi\cos((n-1)\pi)}{1}\right) = \frac{B\pi}{2}$$

$$\tilde{u}_s(n,0) = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ \frac{B\pi}{2}, & n = 1\end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\tilde{u}_s(n,y)}{\partial y^2} - n^2\tilde{u}_s(n,y) = -h\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right) \\ \tilde{u}_s(n,0) = \begin{cases} 0, & n\neq 1 \\ \frac{B\pi}{2}, & n=1\end{cases}\end{cases}$$

Sea $g(n) = \tilde{u}_s(n,0)$

Solución homogénea

$$\tilde{U}_{sh}(n,y) = c e^{ny} + d e^{-ny}$$

Para que la solución sea acotada, se hace $c=0$, porque $y>0$.

$$\tilde{U}_{sh}(n,y) = d e^{-ny}$$

$$\tilde{U}_{sh}(n,0) = d = g(n) = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ \frac{B\pi}{2}, & n=1 \end{cases}$$

Solución Particular: Se supone una solución particular constante, ya que el conjunto fundamental de soluciones es una constante.

$$\tilde{U}_{sp}(n,y) = K \longrightarrow \frac{\partial^2 \tilde{U}_{sp}(n,y)}{\partial y^2} = 0$$

$\longrightarrow$ En la ec. diferencial: $0 - n^2 K = \frac{h(1-(-1)^n)}{n}$

La solución general es 12 $\longrightarrow K = -\frac{h(1-(-1)^n)}{n^3}$

$$\tilde{U}_s(n,y) = \tilde{U}_{sh}(n,y) + \tilde{U}_{p}(n,y) = g(n)e^{-ny} - \frac{h(1-(-1)^n)}{n^3}$$

Aplicando transformada inversa:

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(g(n)e^{-ny} - \frac{h(1-(-1)^n)}{n^3} \right) \sin(nx)$$

donde $g(n) = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ \frac{B\pi}{2}, & n=1 \end{cases}$