8. a) $\langle f,g\rangle = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$

i) $\langle f+h,g\rangle = \sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)+h\left(\frac{k}{n}\right)\right]g\left(\frac{k}{n}\right)$

$= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k}{n}\right) + \sum_{i=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)h\left(\frac{k}{n}\right)$

$= \langle f,g\rangle + \langle h,g\rangle$

ii) $\langle af,g\rangle = a\langle f,g\rangle$ ✓

iii) $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$ ✓

iv) $\langle f,f\rangle = \sum_{k=0}^{n} f^2\left(\frac{k}{n}\right) \geq 0$

$(\rightarrow)$ $f=0$, $\langle f,f\rangle = 0$

$(\leftarrow)$ $\langle f,f\rangle = 0 = \sum_{k=0}^{n} f^2\left(\frac{k}{n}\right)$ $(*)$

Como P_n es esp. de polinomios de grado a lo sumo n, $(*)$ implica que tengo $n+1$ raíces para dichos polinomios de donde $f=0$.

b) Calcular $\langle f,g\rangle$

$f(t)=t$, $g(t)=at+b$

$\langle f,g\rangle = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{ak}{n}+b\right)$

$\langle f,g\rangle = \frac{a}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k^2 + \frac{b}{n}\sum_{k=0}^{n} k$

$= \frac{a}{n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{b}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$

$= \frac{a}{6n}(n+1)(2n+1) + \frac{b}{2}(n+1)$

$= (n+1)\left[\frac{a}{6n}(2n+1) + \frac{b}{2}\right]$

c) $f(t)=t$

$\langle f,g\rangle = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{ak}{n}+b\right)$

$= (n+1)\left[\frac{a}{6n}(2n+1) + \frac{b}{2}\right] = 0$

$\frac{a(2n+1)}{6n} = -\frac{b}{2}$

$a = \frac{-3nb}{2n+1}$

9. a) Cerrado? Slide 42.

b) $V=\mathbb{R}^3$, $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}: 4x-y+6z=0\}$

$H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}: 4x+6z=y\}$

$=\{(x,4x+6z,z): x,z\in\mathbb{R}\}$

$=\{x(1,4,0)+z(0,6,1): x,z\in\mathbb{R}\}$

$=\text{gen}\{\overset{u_1}{(1,4,0)},\overset{u_2}{(0,6,1)}\}$

Sea $h\in H^\perp$, luego $\langle h,u_1\rangle=0 \rightarrow a+4b=0 \rightarrow a=-4b$
$h=(a,b,c)$ $\quad\langle h,u_2\rangle=0 \rightarrow 6b+c=0 \rightarrow c=-6b$

Luego, $h=(-4b,b,-6b)$
$h=b(-4,1,-6)$

$\Longrightarrow H^\perp=\text{gen}\{(-4,1,-6)\}$

c) Sea $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$.

Veamos que $(\alpha,\beta,\gamma)=h+h'$, con $h\in H$, $h'\in H^\perp$

$(\alpha,\beta,\gamma) = \lambda(1,4,0)+\omega(0,6,1)+\tau(-4,1,-6)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&-4\\4&6&1\\0&1&-6\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}\lambda\\\omega\\\tau\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}$$

Veamos que $\det(A)\neq 0$

$\det(A)=1(-36-1)-0(\ldots)-4(4)=-53\neq 0$

Luego, el sistema tiene solución única

$\Rightarrow \mathbb{R}^3=H+H^\perp$

Ahora veamos $H\cap H^\perp=\{0\}$

Veamos que $0\in H$, $(0,0,0)=\lambda(1,4,0)+\omega(0,6,1)$ de donde $\lambda=0=\omega$.

Veamos que $0\in H^\perp$, $(0,0,0)=\tau(-4,1,-6)$ $\Longrightarrow \tau=0$.

Luego $0\in H\cap H^\perp$.

Veamos que si $x\in H\cap H^\perp \Rightarrow x=0$.

Como $x\in H\cap H^\perp \rightarrow x\in H \wedge x\in H^\perp$

Como $x\in H^\perp \Rightarrow \forall h\in H$, $\langle x,h\rangle=0$

y como $x\in H$, $\langle x,x\rangle=0$

Como $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es p.i. $\Rightarrow x=0$

Luego, $\mathbb{R}^3=H\oplus H^\perp$.

10. $V=C[-1,1]$, $H=\{f(\cdot)\in V: f(-t)=f(t),\ \forall t\in[-1,1]\}$

$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$.

a) Sea $g\in V$, $f\in H$

$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt \overset{!}{=} 0$

$=\int_{-1}^{0} f(t)g(t)\,dt+\int_{0}^{1} f(t)g(t)\,dt=0$

$=\int_{0}^{1} f(-t)g(-t)\,dt+\int_{0}^{1} f(t)g(t)\,dt=0$

$=\int_{0}^{1} f(t)g(-t)\,dt+\int_{0}^{1} f(t)g(t)\,dt=0$

$=\int_{0}^{1} f(t)[g(-t)+g(t)]\,dt=0$

$\int_{0}^{1} f(t)g(-t)\,dt=-\int_{0}^{1} f(t)g(t)\,dt$

$\int_{0}^{1} f(t)g(-t)\,dt=\int_{0}^{1} f(t)[-g(t)]\,dt$.

Como esta igualdad debe cumplirse $\forall f\in H$,

$\longrightarrow g(-t)+g(t)=0 \Rightarrow g(-t)=-g(t)$, $\forall t\in[-1,1]$ — Luego $H^\perp$ son las funciones impares.

b) Veamos que $V=H+H^\perp$.

Sea $h\in H$ y $h'\in H^\perp$, sea $f\in V$.

Veamos que $f(t)=h(t)+h'(t)$ $\forall t\in[-1,1]$

$\Rightarrow f(t)=h(t)+h'(t)$, $\forall t\in[0,1]$ (1)

$f(-t)=h(-t)+h'(-t)$, $\forall t\in[0,1]$

$\hookrightarrow f(-t)=h(t)-h'(t)$, $\forall t\in[0,1]$ (2)

(1)+(2): $f(t)+f(-t)=2h(t)$

$\hookrightarrow h(t)=\frac{f(t)+f(-t)}{2}$

$h(-t)=\frac{f(-t)+f(t)}{2}=h(t)$

$\hookrightarrow$ par.

(1)−(2): $f(t)-f(-t)=2h'(t)$

$\hookrightarrow h'(t)=\frac{f(t)-f(-t)}{2}$

$h'(-t)=\frac{f(-t)-f(t)}{2}=-\frac{f(t)-f(-t)}{2}=-h'(t)$

$\hookrightarrow$ impar.

Luego, $\exists h\in H$ y $\exists h'\in H^\perp$ t.q. $\forall f\in V$, $\forall t\in[-1,1]$, $f(t)=h(t)+h'(t)$.

$\Longrightarrow \mathbb{R}^3=H+H^\perp$.

Veamos ahora que $H\cap H^\perp=\{0\}$

Claramente, $f(t)=0=f(-t)=-f(t)$

$\Rightarrow f\in H$ y $f\in H^\perp \Rightarrow f\in H\cap H^\perp$

Sea $g\in H\cap H^\perp \Rightarrow g\in H$ y $g\in H^\perp$

Como $g\in H^\perp$, $\Rightarrow \forall h\in H$, $\langle g,h\rangle=0$

Como $g\in H \rightarrow \langle g,g\rangle=0$

$\Longrightarrow g(t)=0$ $\forall t\in[-1,1]$