UNIVERSIDAD EAFIT

ESCUELA DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Nombre de la materia :Ecuaciones diferenciales Parciales

Parcial 2

Nombre: David Plazas Escudero Código: 201710005101 Nota: 4.5

Profesor(a): Grupo: Fecha

Nota: Escriba su nombre y código con tinta en todas las páginas del tema. No se permite el uso del celular o tablet. El profesor no está autorizado para responder preguntas durante el examen.

1. Hallar la serie de Fourier compleja para $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } 0\le x<1 \\ 2-x & \text{si } 1\le x<2 \end{cases}$

siendo f una función periódica con periodo 2 $P=2 \quad \omega_0=\frac{2\pi}{P}=\pi$

$$d_0=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 x\,dx+\int_1^2(2-x)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\left(2-\frac{3}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}$$

$$d_n=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 x e^{-in\pi x}dx+\int_1^2(2-x)e^{-in\pi x}dx\right]$$

$u=x$, $du=dx$, $dv=e^{-in\pi x}dx$, $v=-\frac{e^{-in\pi x}}{in\pi}$

$u=2-x$, $du=-dx$, $dv=e^{-in\pi x}dx$, $v=-\frac{e^{-in\pi x}}{in\pi}$??

$$d_n=\frac{1}{2}\left[\frac{-xe^{-in\pi x}}{in\pi}\Big|_0^1+\frac{1}{in\pi}\int_0^1 e^{-in\pi x}dx\right.$$

13

$$\left.+\frac{(x-2)e^{-in\pi x}}{in\pi}\Big|_1^2-\frac{1}{in\pi}\int_1^2 e^{-in\pi x}dx\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{-e^{-in\pi}}{in\pi}+\frac{1}{in\pi}\left(\frac{-e^{-in\pi x}}{in\pi}\right)\Big|_0^1-\frac{e^{-in\pi}}{in\pi}-\frac{1}{in\pi}\left[\frac{-e^{-in\pi x}}{in\pi}\right]_1^2\right]$$

$$=\frac{-e^{-in\pi}}{in\pi}+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{n^2\pi^2}\left(1-e^{-in\pi}\right)-\frac{1}{n^2\pi^2}\left(e^{-2ni\pi}-e^{-ni\pi}\right)\right]=\frac{-e^{-in\pi}}{in\pi}-\frac{1}{2n^2\pi^2}+\frac{e^{-in\pi}}{n^2\pi^2}-\frac{1}{2n^2\pi^2}e^{-2ni\pi}$$

La serie compleja de Fourier para f está dada por no

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{-in\pi}}{n^2\pi^2}-\frac{e^{-in\pi}}{in\pi}-\frac{1}{2n^2\pi^2}-\frac{1}{2n^2\pi^2}e^{-2ni\pi}\right)e^{-in\pi x}$$

ojo $d_n=\frac{1}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}0 & \text{Si } n \text{ es par}\\ \frac{1}{n^2\pi^2} & \text{Si } n \text{ es impar}\end{cases}$

UNIVERSIDAD EAFIT

Parcial 2 marzo 11 de 2019 Código ____________

2. Encuentre la representación en integral de Fourier en cosenos para la función $f(x) = e^{-x}\cos(x)$ para $x \geq 0$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty A(\omega)\,Cos(\omega x)\,d\omega \qquad A(\omega) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-\xi}Cos(\xi)}_{f(\xi)}(Cos(\omega\xi))\,d\xi$$

$$A(\omega) = \int_0^\infty e^{-\xi}\left(\frac{1}{2}\left[Cos((\omega+1)\xi) + Cos((\omega-1)\xi)\right]\right)d\xi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\xi}Cos((\omega+1)\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\xi}Cos((\omega-1)\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{e^{-\xi}}{1+(\omega+1)^2}\left[Cos((\omega+1)\xi) + (\omega+1)Sin((\omega+1)\xi)\right] + \frac{e^{-\xi}}{1+(\omega-1)^2}\left[Cos((\omega-1)\xi) + (\omega-1)Sin((\omega-1)\xi)\right]\right\}\Bigg|_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(\omega+1)^2}\left[Cos(0) + (\omega+1)\underbrace{Sin(0)}_{0}\right] + \frac{1}{1+(\omega-1)^2}\left[Cos(0) + (\omega-1)\underbrace{Sin(0)}_{0}\right]\right)$$

Cuando $\xi \to \infty$, $A(\omega) \to 0$.

$$= (-)\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+(\omega+1)^2} + \frac{1}{1+(\omega-1)^2}\right]$$

La integral de Fourier de $f(x)$ en cosenos es

$$(-)\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{1}{1+(\omega+1)^2} + \frac{1}{1+(\omega-1)^2}\right]Cos(\omega x)\,d\omega$$

UNIVERSIDAD EAFIT

Parcial 2 marzo 11 de 2019 Código__________

3. Calcular las siguientes transformadas de Fourier:

a) $F^{-1}\left\{\dfrac{1+iw}{6-w^2+5iw}\right\}$. Factorice el denominador y use fracciones parciales

b) $F\left\{3t\,e^{-9t^2}\right\}$

c) $F^{-1}\left\{\dfrac{1}{(1+iw)^2}\right\}$

$3i\dfrac{d}{d\omega}\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{9}}e^{-\omega^2/36}\right)$

b) $\mathcal{F}\{3te^{-9t^2}\} = 3i^1\dfrac{d}{d\omega}\left(\mathcal{F}\{e^{-9t^2}\}\right)$ 5

$= 3i\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{9}}e^{-\omega^2/36}\right)' = i\sqrt{\pi}\left(e^{-\omega^2/36}\right)' = i\sqrt{\pi}\left(-\dfrac{2\omega}{36}e^{-\omega^2/36}\right)$

$= \dfrac{-i\sqrt{\pi}}{18}\omega e^{-\omega^2/36}$

c) $\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(1+i\omega)^2}\right\}$

16

$(1+i\omega)^2$

Nótese que $i.\dfrac{d}{d\omega}\left(\dfrac{1}{1+i\omega}\right) = \left(\dfrac{-i}{(1+i\omega)^2}\right)i = \dfrac{1}{1+i\omega}$

Luego, $\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{1}{1+i\omega}\right\} = t\,\mathcal{F}\left\{\dfrac{1}{1+i\omega}\right\} = tH(t)e^{-t}$

a) $6-\omega^2+5i\omega = (i\omega+2)(i\omega+3)$

$\dfrac{1+i\omega}{(i\omega+2)(i\omega+3)} = \dfrac{A}{(i\omega+2)} + \dfrac{B}{(i\omega+3)} \rightarrow 1+i\omega = A(i\omega+3) + B(i\omega+2)$

$\omega = 3i: \quad 1-3 = B(-1)$

$-2 = -B \rightarrow B = 2$

$\omega = 2i: \quad 1-2 = A$

$A = -1$

$= \dfrac{2}{i\omega+3} - \dfrac{1}{i\omega+2}$

$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{2}{i\omega+3} - \dfrac{1}{i\omega+2}\right\} = 2H(t)e^{-3t} - H(t)e^{-2t}$