12. (Del libro)

Sea $\varphi_a(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{a^2}{x^2-a^2}\right), & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}$

Es bien sabido que $\boxed{\varphi_a \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).}$

Supongamos que $\exists \psi \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$
t.q. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\langle \psi, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$

$$\int_{[-a,a]} \psi(x)\varphi_a(x)\,dx \leq \sup_{x\in[-a,a]} \varphi_a(x) \int_{[-a,a]} \psi(x)\,dx$$

Se puede ver que $\sup_{x\in[-a,a]} \varphi_a(x) = e^{-1}$, $\forall a$

Por otra parte $\int_{[-a,a]} \psi(x)\varphi_a(x)\,dx = \int_{[-a,a]} \delta(x)\varphi_a(x)\,dx = \varphi_a(0)$

Luego, $\varphi_a(0) = e^{-1} \leq e^{-1} \int_{[-a,a]} \psi(x)\,dx$

Tomando límite,

$$\lim_{a\to 0} 1 \leq \lim_{a\to 0} \int_{-a}^{a} \psi(x)\,dx = 0$$

$$1 \leq 0 \quad (\rightarrow\leftarrow)$$

Luego, δ es singular.