UNIVERSIDAD EAFIT

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Estadística 1 CM0418
parcial 2 (25%)

Nombre: David Plazas Escudero Código: 201710005101 Nota: 4.8

Profesor: Francisco Zuluaga Grupo: 001 Septiembre 14 de 2018

1. Sea Y una variable aleatoria que tiene distribución binomial con parámetros n y p. dos estimadores propuestos para p son los siguientes:

$$p^* = \frac{Y}{n}, \ y \ \widetilde{p} = \frac{Y+1}{n+2}$$

(Valor 1.4)

a) Cual de los dos estimadores es sesgado(Verifiquelo)? Calcule el sesgo para el estimador sesgado.

$E(p^*) = E\left(\frac{Y}{n}\right)$ Def. p^*

$= \frac{1}{n}E(Y)$ linealidad

$= \frac{1}{\cancel{n}}(\cancel{n}p)$ Si $Y \sim bin(n,p) \Rightarrow E(Y) = np$

$E(p^*) = p$

Insesgado.

$E(\tilde{p}) = E\left(\frac{Y+1}{n+2}\right)$ Def. $\tilde{p}$

$= \frac{1}{n+2}[E(Y) + E(1)]$ linealidad

$= \frac{1}{n+2}[np+1]$ $E(Y) = np$ si $Y \sim Bin(n,p)$; $E(c) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

$= \frac{np+1}{n+2} \neq p$ Sesgado.

$B(\tilde{p}) = E(\tilde{p}) - p$

$= \frac{np+1}{n+2} - p$

$= \frac{np+1-np-2p}{n+2} = \frac{1-2p}{n+2}$

UNIVERSIDAD EAFIT Abierto al mundo

b) Para que valores de p, el sesgo es negativo

$\tilde{B}(\tilde{p}) < 0$?

$\frac{1-2p}{n+2} < 0 \Rightarrow -\frac{(n+1)}{2} < p$

$1-2p < n+2$

$-n-1 < 2p$

$P > 1/2$

c) Demuestre que el error cuadrático medio de $\tilde{p}$ se puede representar como $ECM(\tilde{p}) = \frac{np(1-p)+(1-2p)^2}{(n+2)^2}$

$ECM(\hat{\theta}) = V(\theta) + B^2(\theta)$

$V(\tilde{p}) = V\left(\frac{Y+1}{n+2}\right)$ Def. $\tilde{p}$

$= \frac{V(Y+1)}{(n+2)^2}$ $V(cX) = c^2V(X), \forall c \in \mathbb{R}$

$= \frac{V(Y)+\cancel{V(1)}^{0}}{(n+2)^2}$ $V(c) = 0, \forall c \in \mathbb{R}$

$= \frac{np(1-p)}{(n+2)^2}$ ... Si $Y \sim bin(n,p) \Rightarrow V(Y) = np(1-p)$

$ECM(\tilde{p}) = V(\tilde{p}) + B^2(\tilde{p})$

$= \frac{np(1-p)}{(n+2)^2} + \left(\frac{1-2p}{n+2}\right)^2$

$= \frac{np(1-p)+(1-2p)^2}{(n+2)^2}$

1.8

(valor 2.0)

UNIVERSIDAD EAFIT
Abierta al mundo

2) Sea $Y_1, \dots, Y_n$ una muestra aletoria que proviene de una población cuya distribucion tiene la siguiente función de densidad

$$f(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\log(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad y > 0$$

Demuestre que los estimadores de Maxima Verosimilitud para los parámetros poblacionales son los siguientes:

$\ln(\cdot) = \log(\cdot)$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \log(Y_i)}{n} \quad y \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\log(Y_i) - \frac{\sum_{i=1}^{n} \log(Y_i)}{n}\right)^2}{n}$$

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \prod_{i=1}^{n} y_i^{-1} \, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(\ln y_j - \mu)^2}$$

1.2

Trabajemos primero

$$\sum_{j=1}^{n}(\ln y_j - \mu)^2 = \sum_{j=1}^{n}(\ln^2 y_j - 2\mu \ln y_i + \mu^2) = \sum_{j=1}^{n} \ln^2 y_j - 2\mu \sum_{j=1}^{n} \ln y_j + n\mu^2$$

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \prod_{i=1}^{n} y_i^{-1} \, e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}} \, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{j=1}^{n} \ln^2 y_j - 2\mu \sum_{j=1}^{n} \ln y_j\right]}$$

Log - Verosimilitud

$$\ln(\mathcal{L}(\mu, \sigma^2)) = -\frac{n}{2}[\ln(2\pi) + \ln(\sigma^2)] + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} y_i^{-1}\right) - \frac{n\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{j=1}^{n} \ln^2 y_j - 2\mu \sum_{j=1}^{n} \ln y_j\right]$$

$$\frac{\partial[\ln(\mathcal{L}(\mu, \sigma^2))]}{\partial\mu} = -\frac{2n\hat{\mu}}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{2}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{j=1}^{n} \ln y_i = 0$$

Para $\hat{\mu}$

$$\frac{2}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{j=1}^{n} \ln y_i = \frac{2n\hat{\mu}}{2\hat{\sigma}^2}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln y_i = \hat{\mu}$$

$$(\sigma^2)^{-1} = -\frac{1}{\sigma^4}$$

$$\ln(\mathcal{L}(\mu,\sigma^2)) = -\frac{n}{2}\left[\ln(2\pi)+\ln(\sigma^2)\right] + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} y_i^{-1}\right) - \frac{n\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{j=1}^{n}\ln^2 y_j - 2\mu\sum_{j=1}^{n}\ln y_j\right]$$

$$\frac{\partial[\ln(\mathcal{L}(\mu,\sigma^2))]}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{n\hat{\mu}^2}{2\hat{\sigma}^4} + \frac{1}{2\hat{\sigma}^4}\left[\sum_{j=1}^{n}\ln^2 y_j - 2\hat{\mu}\sum_{j=1}^{n}\ln y_j\right] = 0$$

$$-\frac{n}{2} + \frac{n\hat{\mu}^2}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\left[\sum_{j=1}^{n}\ln^2 y_j - 2\hat{\mu}\sum_{j=1}^{n}\ln y_j\right] = 0$$

$$-\frac{n}{2} + \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\left[\sum_{j=1}^{n}(\ln y_j - \hat{\mu})^2\right] = 0$$

$$\frac{n}{2} = \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{j=1}^{n}(\ln y_j - \hat{\mu})^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\ln y_j - \hat{\mu})^2 \longleftarrow \text{Pero } \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln y_j$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\ln y_i - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln y_i\right)\right]^2$$

Valor (1.2)

3) Suponga que $Y_1, \ldots, Y_n$ *constituye una muestra aleatoria de una distribucion de Poisson* Parámetro $\lambda > 0$.

$Y \sim Poisson(\lambda) \Rightarrow E(Y) = \lambda, \; V(Y) = \lambda$

a) Encuentre el estimador del método de los momentos para λ

$m_1' = \mu_1'$, $\mu_1' = E(Y)$

$\mu_1' = \lambda$

$m_1' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i' = \bar{Y}$

1.8

$\boxed{\hat{\lambda} = \bar{Y}}$

$P(Y=y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}$

UNIVERSIDAD EAFIT
Abierta al mundo

731516

b) Encuentre el estimador de Maxima Verosimilitud para λ

$$\mathcal{L}(\lambda) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} y_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^{n} y_i!} \rightarrow \ln(\mathcal{L}(\lambda)) = \sum_{i=1}^{n} y_i \ln\lambda - n\lambda - \prod_{i=1}^{n} y_i!$$

$$\frac{\partial[\ln(\mathcal{L}(\lambda))]}{\partial\lambda} = \frac{1}{\hat{\lambda}'}\sum_{i=1}^{n} y_i - n = 0$$

$$\frac{\lambda^{n\bar{Y}} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^{n} y_i!}$$

$$\hat{\lambda}' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{Y}$$

$$\left.\begin{aligned} f(\bar{Y},\lambda) &= \lambda^{n\bar{Y}} e^{-\lambda n} \\ h(\circ) &= \left(\prod_{i=1}^{n} y_i!\right)^{-1} \end{aligned}\right\}$$ Criterio de factorización implica $\bar{Y}$ es suficiente para λ. (*)

c) El estimador encontrado en el numeral (b) es insesgado y de varianza minima? Justifique su respuesta

Insesgado: $E(\hat{\lambda}') = E(\bar{Y})$ Def $\hat{\lambda}'$

$= \mu \rightarrow$ Debido a que $\bar{Y} \sim (\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$= \lambda \rightarrow \mu = \lambda$ si $Y \sim Poisson(\lambda)$

Como el estimador fue encontrado por máxima verosimilitud, el estimador es suficiente para λ. Como es, además, insesgado, por el teorema de Rao-Blackwell, es el de mínima varianza

(Valor 1.8)

Formulas .

Ver (*) para suficiencia

Sesgo del estimador $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$

Error cuadrático Medio del estimador $ECM(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + B(\hat{\theta})^2$