• Supóngase $|x_j| \neq 0$. Luego:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \cdot \frac{|x_j|}{|x_j|}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{x_i}{x_j}\right|^p\right)^{1/p} |x_j|$$

Sea $K = \{i : |x_i| < |x_j|\}$, Luego:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i\in K} \left|\frac{x_i}{x_j}\right|^p + |||K^c|||\right)^{1/p}$$

Con $|||\cdot|||$ siendo la cardinalidad del conjunto y $(\cdot)^c$ el complemento,

Como $|x_i| < |x_j| \rightarrow \left|\frac{x_i}{x_j}\right| < 1 \rightarrow \left|\frac{x_i}{x_j}\right|^p < 1$, luego:

$$\lim_{p\to\infty} \left|\frac{x_i}{x_j}\right|^p = 0 \rightarrow \lim_{p\to\infty} \sum_{i\in K} \left|\frac{x_i}{x_j}\right|^p = 0,$$ Así:

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \lim_{p\to\infty} |x_j| \left(\sum_{i\in K} \left|\frac{x_i}{x_j}\right|^p + C(K^c)\right)$$

$$= \lim_{p\to\infty} |x_j| \, C(K^c)^{1/p}$$

$$= |x_j| \lim_{p\to\infty} (C(K^c))^{1/p}$$

$$= |x_j| = \|x\|_\infty \vee (2)$$

Por (1) y (2) concluimos que $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ ✓