11. Veamos que $|x|$ es localmente integrable

Sea $K \subset \mathbb{R}$ un compacto

$$\int_K ||x|| dx = \int_K |x| dx$$

Como K es compacto, $\exists a, b \in \mathbb{R} : K \subset [a,b]$

$$\int_K |x| dx \leq \int_{[a,b]} |x| dx.$$

Como $[a,b]$ es compacto, $|x|$ tiene máximo en $[a,b]$.

Sea $M = \max_{a \leq x \leq b} |x|$

Luego, $\int_{[a,b]} |x| dx \leq \int_{[a,b]} M dx = M(b-a) < \infty$

Luego, $|x| \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$

Por el teorema (#), f define una distribución regular.

Teorema: (#)

Si $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ entonces $\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) dx$ define una distribución regular, con $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

a) Lineal: Sean $\varphi, \psi \in D(\mathbb{R})$ y $a, b \in \mathbb{R}$

$$\langle f, a\varphi + b\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\big(a\varphi(x) + b\psi(x)\big) dx$$

$$= a \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) dx + b \int_{\mathbb{R}} \psi(x) f(x) dx$$

$$= a\langle f, \varphi \rangle + b\langle f, \psi \rangle$$

Continuidad: Sea $K \subset \mathbb{R}$ compacto.

Sea $\varphi \in D_K(\mathbb{R})$

$$|\langle f, \varphi \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)\varphi(x)| dx$$

$$= \int_K |f(x)||\varphi(x)| dx$$

$$\leq C_K \sup_{x \in K} |\varphi(x)|$$

Con $C_K = \int_K |f(x)| dx$.

Como $C_K < \infty$ (dado que $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$) entonces es continua.

$\therefore f$ es una distribución.

Como $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, f es una distribución regular.

Derivada: Sea $\varphi \in D(\mathbb{R})$ con sop $\varphi \subset [-a, a]$ con $a > 0$.

$$\left\langle \frac{df}{dx}, \varphi \right\rangle = (-1)^1 \left\langle f, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} |x| \varphi'(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x) dx - \int_0^{\infty} x\varphi'(x) dx$$

$u = x \quad dv = \varphi'(x)dx$

$du = dx \quad v = \varphi(x)$

Como φ es de soporte compacto: $\exists a > 0$: sop $\varphi \subset [-a, a]$

Luego, $\forall x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$ $\varphi(x) = 0$

Luego, $\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$

$$= \underbrace{\cancel{x\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0}}}_{0} - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x) dx - \underbrace{\cancel{x\varphi(x)\Big|_0^{\infty}}}_{0} + \int_0^{\infty} \varphi(x) dx$$

$$= - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x) dx + \int_0^{\infty} \varphi(x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Sgn} x \, \varphi(x) dx = \langle \operatorname{Sgn}, \varphi \rangle$$

Luego, $f' = \operatorname{Sgn}$.