

Para el caso $\alpha \notin [0, 1]$ (No no siempre es métrica).
Es claro ver que si d_1 es métrica y d_2 es

$$d_2(x, y) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) d_1(x, y)$$

se observaría que, para $x \neq y$:

$$\begin{aligned} d_2(x, y) &= \alpha d_1(x, y) + (1 - \alpha) \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) d_1(x, y) \\ &= \alpha d_1(x, y) + (1 - \alpha) d_1 = \frac{1 - \alpha}{\alpha} d_1(x, y) \\ &= \underline{-d_1(x, y) < 0 \text{ (negative)}} \end{aligned}$$

De este modo, esto es un contraejemplo.