David Plazas Escudero - 201710005101

Punto 7, Sección 7.8.

Escriba una solución para $\begin{cases} \nabla^2 u(r,\theta) = 0 \ , & 0 \leq r \leq R, \ -\pi \leq \theta \leq \pi \\ \frac{\partial u}{\partial r}(R,\theta) = Cos(2\theta) \ , & -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$

Una condición necesaria para que el problema de Neumann tenga solución es

$$\int_{-\pi}^{\pi} Cos\, 2\theta \, d\theta = 0 \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} Cos\, 2\theta \, d\theta = \frac{Sin\, 2\theta}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{Sin\, 2\pi}{2} + \frac{Sin\, 2\pi}{2} = 0 \checkmark \text{ Cumple.}$$

Similarmente a un problema de Dirichlet en un disco, se consideran las funciones armónicas: $r^n Sin(n\theta), \ r^n Cos(n\theta), \ 1$

Para construir soluciones de la forma

$$U_n(r,\theta) = r^n\left[Cos(n\theta) + Sin(n\theta)\right]$$

Nótese que cuando $n=0$, se tiene la solución constante $U_0(r,\theta) = 1$

Como son funciones armónicas, estas soluciones satisfacen la ecuación de Laplace. Para que satisfagan la condición $\frac{\partial u}{\partial r}(R,\theta) = Cos(2\theta)$, consideremos la siguiente solución (por principio de superposición):

$$U(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(a_n Cos(n\theta) + b_n Sin(n\theta)\right)$$

Luego, $\frac{\partial u}{\partial r}(R,\theta) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1}\left(a_n Cos(n\theta) + b_n Sin(n\theta)\right) = Cos(2\theta)}$

Desarrollo en serie de Fourier para $Cos(2\theta)$ en $[-\pi,\pi]$.

Nótese que el término constante de esta serie debe ser $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Cos\, 2\theta \, d\theta$

Que es cero, pues la serie de Fourier para $\frac{\partial u}{\partial r}(R,\theta)$ no tiene término constante y es consistente con la condición necesaria para que el problema de Neuman tenga solución.

Para los a_n, se tiene $a_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}}\int_{-\pi}^{\pi} Cos(2\xi)Cos(n\xi)d\xi = \frac{1}{n\pi R^{n-1}}\underbrace{\left(\frac{2n Sin(n\pi)}{n^2-4}\right)}_{\Delta_n}$

Claramente $\Delta_n = 0$, $\forall n \neq 2$. Cuando $n \to 2$, $\lim_{n\to 2} \Delta_n$ es de la forma $0/0$.

Utilizando L'Hôpital

$$\lim_{n\to 2} \Delta_n = \lim_{n\to 2} \frac{2n Sin(n\pi)}{n^2-4} = \lim_{n\to 2} \frac{2Sin(n\pi) + 2n\pi Cos(n\pi)}{2n} = \pi$$

Luego, $a_n = \begin{cases} 0 \ , & n = 1, 3, 4, \ldots \\ \frac{1}{2R} \ , & n = 2 \end{cases}$

Para los b_n,

$$b_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} Cos(2\xi) Sin(n\xi)\, d\xi$$

Pero como $Cos(2\xi)Sin(n\xi)$ es una función impar $\rightarrow b_n = 0$.

Luego,

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \frac{r^2}{2R} Cos(2\theta)$$

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \frac{R}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 Cos(2\theta)$$

Que es la solución al problema de Neumann. El término $\frac{a_0}{2}$ es una constante arbitraria.