b) La norma de un operador se define como:

$$\|T\| = \sup_{\|u\|=1} \|Tu\| = \sup_{\|u\|=1} |\langle u, v_0\rangle|$$

Por ser acotado (*) se sabe que:

$$\|Tu\| \le \|v_0\|\,\|u\| \to \sup_{\|u\|=1} \|Tu\| \le \|v_0\|\,\|u\| = \|v_0\|$$

(con $\|u\| = 1$)

Luego, $\underline{\|T\| \le \|v_0\|}$ □

Por otro lado es claro que $\forall u \in V$ ocurre que:

$$|\langle u, v_0\rangle| = \|Tu\| \le \sup_{\|u\|=1} \|Tu\|$$

Luego, es cierto para $u = \frac{v_0}{\|v_0\|} \to \|u\| = \left\| \frac{v_0}{\|v_0\|} \right\| = \frac{1}{\|v_0\|}\|v_0\| = 1$

Así: $|\langle u, v_0\rangle| = \left|\left\langle \frac{v_0}{\|v_0\|}, v_0\right\rangle\right| = \frac{1}{\|v_0\|}\langle v_0, v_0\rangle = \underline{\|v_0\| \le \|T\|}$ Δ

Por Δ y □ se obtiene $\|T\| = \|v_0\|$ ✓