6. $\ell^2 = \left\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\} \to$ Hilbert

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$$

$T : \ell^2 \to \ell^2$

$T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$

a) Lineal

$$\begin{aligned} T\big(a(x_1, x_2, \ldots) + b(y_1, y_2, \ldots)\big) &= (0, ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, \ldots) \\ &= (0, ax_1, ax_2, \ldots) + (0, by_1, by_2, \ldots) \\ &= aT(x_1, x_2, \ldots) + bT(y_1, y_2, \ldots) \end{aligned}$$

Nulo:

$$\begin{aligned} N(T) &= \{ x \in \ell^2 : Tx = 0 \} \\ &= \{ x \in \ell^2 : T(x_1, x_2, \ldots) = (0, 0, \ldots) \} \\ &= \{ x \in \ell^2 : (0, x_1, x_2, \ldots) = (0, 0, \ldots) \} \\ &= \{0\}. \to \text{Suc. nula.} \end{aligned}$$

b) Inyectiva

Sean $x, y \in \ell^2 : Tx = Ty$

$Tx = (0, x_1, x_2, \ldots) = (0, y_1, y_2, \ldots) = Ty$

Luego, $x_i = y_i, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow x = y$.

Sobreyectiva

Obsérvese que $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene preimagen bajo T, pues el primer elemento es distinto de 0.

No es sobreyectivo.

c) $S : \ell^2 \to \ell^2$

$S(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$

$S(T(x_1, x_2, \ldots)) = S(0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$

Luego $S \circ T = I$

$T(S(x_1, x_2, \ldots)) = T(x_2, x_3, \ldots) = (0, x_2, x_3, \ldots)$

Cuando $x_1 \neq 0$, $T \circ S \neq I$.

d) $\|Tx\|_2 = \|(0, x_1, \ldots)\|_2$

$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \right)^{1/2} = \|x\|_2$$

Luego, $\|Tx\|_2 \leq M \|x\|_2$, $M = 1$.

$\|Sx\|_2 = \|(x_2, x_3, \ldots)\|_2$

$$= \left(\sum_{j=2}^{\infty} x_j^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \right)^{1/2} = \|x\|_2$$

$\|Sx\|_2 \leq M \|x\|_2$, $M = 1$.