UNIVERSIDAD EAFIT

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Estadística 1 Ing Mat CM0418
parcial 1 (25%)

Nombre: David Plazas E. Código: 201710005101 Nota: 4.5

Profesor: Francisco Zuluaga Grupo: 001 Agosto 17 de 2018

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial t_1} & \frac{\partial h_2^{-1}}{\partial t_2} \\ \frac{\partial h_2^{-1}}{\partial t_1} & \frac{\partial h_2^{-1}}{\partial t_2} \end{vmatrix}$$

1. **Sean $z \sim N(0,1)$ y $w \sim \chi^2_v$ variables aletorias independientes.**

Método de transformación

a) **Demuestre que** $T = \frac{z}{\sqrt{\frac{w}{v}}} \sim t_v$

$$f_{T_1,T_2}(t_1,t_2) = f_{Z,W}(h_1^{-1}(t_1,t_2), h_2^{-1}(t_1,t_2))|J|$$

Para aplicar el método, se necesita otra transformación. Sea $T_2 = W$. (bivariante)

$$T_1 = \frac{\sqrt{v}\,Z}{\sqrt{W}} \rightarrow T_1 = \frac{\sqrt{v}\,Z}{\sqrt{T_2}} \rightarrow Z = T_1\sqrt{\frac{T_2}{v}} \Rightarrow z = t_1\sqrt{\frac{t_2}{v}} = h_1^{-1}(t_1,t_2)$$

Transformación creciente

$$T_2 = W \rightarrow W = T_2 \rightarrow w = t_2 = h_2^{-1}(t_1,t_2)$$

0.83

$$J = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{t_2}{v}} & \frac{t_1}{2\sqrt{t_2 v}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{t_2}{v}}$$

Como $Z \sim N(0,1) \rightarrow f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$

Como $W \sim \chi^2_v \rightarrow f(w) = \frac{1}{\Gamma(\frac{v}{2})2^{\frac{v}{2}}} w^{\frac{v}{2}-1} e^{-w/2}$

Como Z y W son independientes, la densidad conjunta

$$f_{Z,W}(z,w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \frac{1}{\Gamma(\frac{v}{2})2^{\frac{v}{2}}} w^{\frac{v}{2}-1} e^{-w/2}$$

Reemplazando en el método,

$$f_{T_1,T_2}(t_1,t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(t_1\sqrt{\frac{t_2}{v}}\right)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{v}{2})2^{\frac{v}{2}}} t_2^{\frac{v}{2}-1} e^{-t_2/2} \cdot \left|\sqrt{\frac{t_2}{v}}\right|$$

Para calcular la densidad de $T = \frac{Z}{\sqrt{W/V}}$, se debe sacar la marginal de $f_{T_1,T_2}(t_1,t_2)$ respecto a t_1.

Integramos en t_2.

$$f_{T_1}(t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}\,\Gamma(\frac{v}{2})2^{\frac{v}{2}}} \int_0^\infty t_2^{\frac{v+1}{2}-1} e^{-\frac{t_1^2 t_2}{2v} - \frac{t_2}{2}} dt_2$$

$$f_{T_1}(t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}\,\Gamma(\frac{v}{2})2^{\frac{v}{2}}} \int_0^\infty t_2^{\frac{v+1}{2}} e^{-t_2\left(\frac{1+\frac{t_1^2}{v}}{2}\right)} dt$$

Densidad distribución Gama

$$\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1} e^{-t/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} dt = 1$$

Luego, $\int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t/\beta} dt = \Gamma(\alpha)\beta^\alpha$ (*)

Con (*),

$$f_{T_1}(t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}\,\Gamma(\frac{v}{2})2^{\frac{v}{2}}} \Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)\left[\frac{2}{1+t_1^2/v}\right]^{\frac{v+1}{2}}$$

$$f_{T_1}(t_1) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{\pi v}\,\Gamma(\frac{v}{2})}\left[1+\frac{t_1^2}{v}\right]^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)}$$

Densidad distribución t_v.

b) Ecuentre E(T)

$$E(T) = E\left(\frac{Z}{\sqrt{W/V}}\right) \rightarrow \text{Def. } T.$$

$$= \sqrt{V}\, E\left(\frac{Z}{\sqrt{W}}\right) \rightarrow \text{Linealidad } E(\cdot)$$

$$= \sqrt{V}\, E(Z)\, E(W^{-1/2}) \rightarrow Z \text{ y } W \text{ son v.a. independientes.}$$

$$= 0$$

$$\rightarrow E(Z) = 0 \rightarrow Z \sim N(0,1).$$

$$E(W^{\alpha}) = \frac{\Gamma\left(\frac{v}{2} + \alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\, 2^{\alpha}$$

Con $\alpha = -1$ (*)

$$E(W^{-1}) = \frac{\Gamma\left(\frac{v}{2} - 1\right)\cdot 2^{-1}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} = \frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{v}{2} - 1\right)}\, 2^{-1}}{\left(\frac{v}{2} - 1\right)\cancel{\Gamma\left(\frac{v}{2} - 1\right)}} = \frac{1}{v - 2}, \quad v > 2.$$

c) Encuentre V(T)

Recordemos

$$V(T) = E(T^2) - E^2(T)$$

Como $E(T) = 0$

Luego $E^2(T) = 0$

$$V(T) = E(T^2)$$

$$E(T^2) = E\left(\frac{Z^2}{W/V}\right) \rightarrow \text{Def. } T$$

$$= V\, E\left(\frac{Z^2}{W}\right) \rightarrow \text{Linealidad } E(\cdot)$$

$$= V\, E(Z^2)\, E(W^{-1}) \rightarrow Z \text{ y } W \text{ indep.}$$

$$= V\, E(W^{-1}) \rightarrow Z \sim N(0,1) \rightarrow Z^2 \sim \chi^2_1 \rightarrow E(Z^2) = 1.$$

$$= \frac{V}{V - 2}, \quad V > 2 \rightarrow \text{Ver } (*)$$

UNIVERSIDAD EAFIT Abierta al mundo

$$(\Delta): J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial f_1} & \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial f_2} \\ \frac{\partial h_2^{-1}}{\partial f_1} & \frac{\partial h_2^{-1}}{\partial f_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{v_1}{v_2} f_2 & \frac{v_1}{v_2} f_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{v_1}{v_2} f_2$$

2. Sea $w_1 \sim \chi^2_{v_1}$ y $w_2 \sim \chi^2_{v_2}$ variables aleatorias independientes

a) Demuestre que $F = \dfrac{\frac{w_1}{v_1}}{\frac{w_2}{v_2}} \sim \mathbb{F}_{v_1, v_2}$

La densidad conjunta de W_1 y W_2 (como son independientes), es

$$f_{W_1,W_2}(w_1, w_2) = \frac{1}{\Gamma(\frac{v_1}{2}) 2^{\frac{v_1}{2}}} w_1^{\frac{v_1}{2}-1} e^{-w_1/2} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{v_2}{2}) 2^{\frac{v_2}{2}}} w_2^{\frac{v_2}{2}-1} e^{-w_2/2}$$

0.83

Definamos $F_2 = W_2 \rightarrow W_2 = F_2 \Rightarrow w_2 = f_2 = h_2^{-1}(f_1, f_2)$

y tenemos $F_1 = \frac{V_2 W_1}{V_1 W_2} \rightarrow F_1 = \frac{V_2 W_1}{V_1 F_2} \rightarrow W_1 = \frac{V_1}{V_2} F_1 F_2 \rightarrow w_1 = \frac{v_1}{v_2} f_1 f_2 = h_1^{-1}(f_1, f_2)$

Reemplazando en la fórmula del método, con (Δ), se tiene

$$f_{F_1,F_2}(f_1, f_2) = \frac{1}{\Gamma(\frac{v_1}{2})\Gamma(\frac{v_2}{2}) 2^{\frac{v_1+v_2}{2}}} \left(\frac{v_1 f_2 f_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}-1} (f_2)^{\frac{v_2}{2}-1} e^{-\frac{(\frac{v_1}{v_2} f_2 f_1 + f_2)}{2}} \left|\frac{v_1}{v_2} f_2\right|$$

$$f_{F_1,F_2}(f_1, f_2) = \frac{\frac{v_1}{v_2}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}-1} f_1^{\frac{v_1}{2}-1}}{\Gamma(\frac{v_1}{2})\Gamma(\frac{v_2}{2}) 2^{(\frac{v_1+v_2}{2})}} f_2^{(\frac{v_1+v_2}{2}-1)} e^{-\frac{f_2(\frac{v_1}{v_2} f_1 + 1)}{2}}$$

Distribución de F_1 marginal $F_1 \rightarrow$ Integro F_2

$$f_{F_1}(f_1) = \frac{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{V_1}{2}} f_1^{\frac{V_1}{2}-1}}{\Gamma(\frac{V_1}{2})\Gamma(\frac{V_2}{2}) 2^{(\frac{V_1+V_2}{2})}} \int_0^\infty f_2^{(\frac{V_1+V_2}{2}-1)} e^{-\frac{f_2(\frac{V_1}{V_2} f_1 + 1)}{2}} df_2$$

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t/\beta} dt = \Gamma(\alpha)\beta^\alpha \quad (\square)$$

Teniendo en cuenta $(\square)$ $\alpha = \frac{V_1+V_2}{2}$, $\beta = \frac{2}{\frac{V_1}{V_2} f_1 + 1}$

$$f_{F_1}(f_1) = \frac{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{V_1}{2}} f_1^{\frac{V_1}{2}-1}}{\Gamma(\frac{V_1}{2})\Gamma(\frac{V_2}{2}) 2^{(\frac{V_1+V_2}{2})}} \Gamma\left(\frac{V_1+V_2}{2}\right)\left[\frac{2}{\frac{V_1}{V_2} f_1 + 1}\right]^{\frac{V_1+V_2}{2}}$$

$$f_{F_1}(f_1) = \frac{\Gamma(\frac{V_1+V_2}{2})\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{V_1}{2}}}{\Gamma(\frac{V_1}{2})\Gamma(\frac{V_2}{2})} f_1^{\frac{V_1}{2}-1} \left[1 + \frac{V_1}{V_2} f_1\right]^{-\left(\frac{V_1+V_2}{2}\right)} \rightarrow \text{Densidad Distribución } \mathbb{F}_{(V_1, V_2)}$$

5

UNIVERSIDAD EAFIT Abierta al mundo

De la prueba de $E(T)$ se sabe $E(W^{-1}) = \frac{1}{v-2}$, $v>2$ si $W \sim \chi^2_v$. (0)

b)Encuentre E(F)

$$E(F) = E\left(\frac{v_2 W_1}{v_1 W_2}\right) \rightarrow \text{Def. } F.$$
$$= \frac{v_2}{v_1} E\left(\frac{W_1}{W_2}\right) \rightarrow \text{linealidad } E(\cdot)$$
$$= \frac{v_2}{v_1} E(W_1)E(W_2^{-1}) \rightarrow \text{Indep. } W_1, W_2$$
$$= \frac{v_2 \cancel{v_1}}{\cancel{v_1}} E(W_2^{-1}) \rightarrow W_1 \sim \chi^2_{v_1} \rightarrow E(W_1) = v_1$$
$$= \frac{v_2}{v_2 - 2}, \; v_2 > 0 \rightarrow \text{Por (0). prueba pasada.}$$

$$E(W_1^2) = \frac{\Gamma(\frac{v_1}{2}+2)2^2}{\Gamma(\frac{v_1}{2})}$$
$$= \frac{(\frac{v_1}{2}+1)\Gamma(\frac{v_1}{2}+1)2^2}{\Gamma(\frac{v_1}{2})}$$
$$= \frac{\frac{v_1}{2}(\frac{v_1}{2}+1)\cancel{\Gamma(\frac{v_1}{2})}}{\cancel{\Gamma(\frac{v_1}{2})}} \cdot 2^2$$
$$= v_1(v_1+2) \quad (1.)$$

$$E(W_2^{-2}) = \frac{\Gamma(\frac{v_2}{2}-2)}{\Gamma(\frac{v_2}{2})} \cdot 2^{-2} = \frac{\cancel{\Gamma(\frac{v_2}{2}-2)} \cdot 2^{-2}}{(\frac{v_2}{2}-1)(\frac{v_2}{2}-2)\cancel{\Gamma(\frac{v_2}{2}-2)}} = \frac{1}{(v_2-2)(v_2-4)}$$

C) Encuentre V(F)

$$V(F) = E(F^2) - E^2(F)$$

Primero

$$E(F^2) = E\left(\frac{V_2^2 W_1^2}{V_1^2 W_2^2}\right)$$
$$= \frac{V_2^2}{V_1^2} E(W_1^2)E(W_2^{-2})$$
$$= \frac{V_2^2}{V_1^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{V_1}(V_1+2)}{(V_2-2)(V_2-4)}$$
$$= \frac{V_2^2(V_1+2)}{V_1(V_2-2)(V_2-4)}$$

$$V(F) = \frac{V_2^2(V_1+2)}{V_1(V_2-2)(V_2-4)} - \frac{V_2^2}{(V_2-2)^2}$$
$$= V_2^2\left(\frac{V_1V_2 - 2V_1 + 2V_2 - 4 - (V_1V_2 - 4V_1)}{V_1(V_2-2)^2(V_2-4)}\right)$$
$$= \frac{2V_2^2(V_1+V_2-2)}{V_1(V_2-2)^2(V_2-4)}$$

UNIVERSIDAD EAFIT
Abierta al mundo

3. A) La eficiencia en lúmenes por watt de los focos de ciero tipo tiene una media poblacional de 9.5 y una desviación estándar de 0.5 , de acuerdo con especificaciones de producción.Las especificaciones para un cuarto en el que 8 de estos focos se han de instalar exigen que el promedio de eficiencia de los mismos sea mayor que 10.Encuentre la probabilidad de que se satisfaga esta especificación para el cuarto,suponiendo que las mediciones de eficiencia están distribuidas normalmente.

$\mu = 9.5 \quad n=8$

$\sigma = 0.5$

$P(\bar{Y} > 10.) = P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{Y}-\mu)}{\sigma} > \frac{\sqrt{8}(10-9.5)}{0.5}\right)$

$= P(Z > 2\sqrt{2}) \longleftarrow \frac{\sqrt{n}(\bar{Y}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1) = Z.$

$= P(Z > 2.828)$

$= 0.024$

$\hookrightarrow 0$

0,0023

0.7

b) Consultando el numerla anterior anterior,¿ Cual debe ser la eficiencia media por foco si debe satifacerse la especificación para el cuarto con una probabilidad de aproximadamente de 0.80.?(Suponga que la varianza de las mediciones de eficiencia sigue siendo la misma del ejercicio 1.

$P(\bar{Y} > 10) = 0.80$

$P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{Y}-\mu)}{\sigma} > \frac{\sqrt{8}(10-\mu)}{0.5}\right) = 0.8$

$P\left(Z > \frac{\sqrt{8}(10-\mu)}{0.5}\right) = 0.8$

$\frac{\sqrt{8}(10-\mu)}{0.5} = -0.84$

$\mu = 10 + \frac{(0.84 \cdot 0.5)}{\sqrt{8}}$

$\mu = ?$

$P(Z > a) = 0.8$

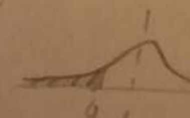
$P(a \le Z \le 0) + P(Z \geq 0) = 0.8$

$P(a < Z \le 0) + 0.5 = 0.8$

$P(a \le Z \le 0) = 0.3$

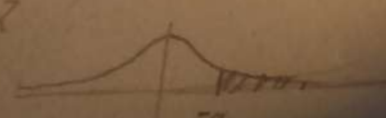
$0.5 - P(Z \le a) = 0.3$

$P(Z \le a) = 0.2$



$P(Z > -a) = 0.2$

$-a = 0.84$



$a = -0.84$

UNIVERSIDAD EAFIT
Abierta al mundo

$$\frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 - (\mu_{Y_1} - \mu_{Y_2})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

4. De cada una de dos poblaciones normales con medias idénticas y con desviaciones estándar de 6.40 y 7.20 se toman muestras aleatorias independientes de 64 observaciones. Encuentre la probabilidad de que la diferencia entre las medias de las muestras exceda de 0.6 en valor absoluto.

$\mu_1 = \mu_2 = 6.40$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 7.20$

$n_1 = n_2 = 64$

$\mu_1 - \mu_2 = 0$

$$P(|\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2| > 0.6) = ? \quad = 1 - P(\quad)$$

$$= P(-0.6 < \bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 < 0.6)$$

$$= P\left(\frac{-0.6}{\sqrt{\frac{2(7.20)}{64}}} < \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} < \frac{0.6}{\sqrt{\frac{2(7.2)^2}{64}}}\right)$$

$$= P(-0.47 < Z < 0.47)$$

$$= 1 - 2P(Z > 0.47) \longleftarrow \text{Simetría}$$

$$= 0.3616$$

0,5

Abierta al mundo

$\frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}$

5. Un Ingeniero esta interesado en asignar presupuesto a los costos semanales de reparaciones para cierto tipo de maquina. Los resgitros de años pasados indican que estos costos de reparación tienen una distribución exponencial con una media de 20 para cada maquina estudiada. Denote con $Y_1, \dots Y_5$ los costos de reparación para 5 de estas maquinas durante la semana siguiente. Suponiendo que las maquinas operan de manera independiente encuentre un numero c tal que $P(\sum_{i=1}^{5} Y_i > c) = 0.05$

Nota tenga presente que $\sum_{i=1}^{5} 0.1Y_i \sim \chi^2_{10}$

Interprete el resultado.

Como $Y \sim exp(\beta) = gama(1, \beta)$

$E(Y) = \beta = 20$

$V(Y) = \beta^2 = 400$

$P\left(\sum_{i=1}^{5} Y_i > c\right) = 0.05.$

0,83

$P\left(\sum_{i=1}^{5} 0.1Y_i > 0.1c\right) = 0.05$

Como $\sum_{i=1}^{5} 0.1Y_i \sim \chi^2_{10}$

$0.1c = 18.3070$

$c = 183.070$

La probabilidad de que el costo total de reparación supere los 183 $ unidades monetarias es del 5%..