3. Sea V, W e. normados, con V finito dimensional. Veamos que $T: V \to W$ lineal es continuo.

Como V es finito dimensional, $\exists v_i,\ i=1,\dots,n$ t.q. $\forall v \in V$,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

$$Tv = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i)$$

$$\|Tv\|_W = \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i)\right\|_W \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \|T(v_i)\|_W$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\|Tv\|_W \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \|T(v_i)\|_W^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)^{1/2} M$$

Define una norma en W.
Como las normas en espacios finito dimensionales son equivalentes

$$\|Tv\|_W \leq M \|v\|_V$$

4. V finito dimensional e.p.i
W subespacio de V
$T: V \to W$
$Tu = P_W u$
$W = \{w_j : j=1,\dots,m\}$ es una base ortonormal para W
con $\dim V = n \geq m = \dim W$.
$V = \{v_j : j=1,\dots,n\}$ base ortonorm para V.

Inyectividad:

Supongamos que $m < n$ y que $W = gen(\{v_j\}_{j\in J})$ y $|J| = m$

Luego, $P_W u = \sum_{j\in J} \langle u, v_j\rangle v_j$, $\forall u \in V$.

En particular, para $u = v_k$, $k \notin J$

$$P_W v_k = \sum_{j\in J} \langle v_k, v_j\rangle v_j$$

Como v_k es ortogonal a v_j $\forall j \in J$, $\langle v_k, v_j\rangle = 0$
Luego, $P_W v_k = 0$. $(*)$

Por otro lado, $P_W 0 = \sum_{j\in J} \langle 0, v_j\rangle v_j = \sum_{j\in J} 0 \cdot \langle 0, v_j\rangle v_j = 0$ $(**)$

De $(*)$ y $(**)$, $v_k = 0$

Luego, T no es inyectivo. $\Rightarrow$ No isomorfo.

Cuando $W = gen(\{v_j : j=1,\dots,n\})$ hay isomorfismo. (Operador identidad).