UNIVERSIDAD EAFIT®

ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Nombre de la materia : Ecuaciones diferenciales Parciales
Parcial 1

Nombre: David Plazas Escudero Código: 201710005101 Nota: 39
Profesor(a): Grupo: ______ Fecha 13 Feb 2019

Nota: Escriba su nombre y código con tinta en todas las páginas del tema. No se permite el uso del celular o tablet. El profesor no está autorizado para responder preguntas durante el examen.

1. Sea $f(x)=\frac{x^2}{2}$ para $-\pi \le x \le \pi$
   a) Encuentre la serie de Fourier para $f(x)=\frac{x^2}{2}$
   b) Determine donde converge esta serie de Fourier
   c) Encontrar la suma $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

a)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{2}\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos(nx)dx \qquad \left.\begin{aligned} u&=x^2 \\ du&=2x\,dx \\ dv&=\cos(nx)\,dx \\ v&=\frac{1}{n}\sin(nx).\end{aligned}\right\} uv-\int v\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\cancel{\frac{x^2}{n}\sin(nx)\Big|_0^{\pi}}^{\,0} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\sin(nx)dx\right] \qquad \begin{aligned} u&=x & dv&=\sin(nx)dx \\ du&=dx & v&=\frac{-1}{n}\cos(nx)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-2}{n}\left(\frac{-x}{n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}dx\right)\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-2}{n}\left(\frac{-\pi}{n}(-1)^n + \cancel{\frac{\sin(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi}}^{\,0}\right)\right]$$

$$= \frac{2(-1)^n}{n^2} \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{2}\sin(nx)dx = 0 \leftarrow \text{Impar.}$$

La Serie de Fourier de f en $[-\pi,\pi]$ es

$$\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

$\downarrow$

b) Convergencia: f es continua en $[-\pi, \pi]$.

f' es continua en $[-\pi, \pi]$.

En particular, f es suave a tramos. Por el primer teorema de convergencia de series de Fourier, la serie de Fourier de f en $[-\pi, \pi]$ converge a $f(x)$ $\forall x \in (-\pi, \pi)$

Extremos: f es continua. Además $f_R'(-L) = \frac{2(-L)}{2} = -L$

$$f_L'(L) = \frac{2(L)}{2} = L$$

Como $f_R'(-L)$ y $f_L'(L)$ existen y son finitos, la serie de Fourier de f en $[-\pi, \pi]$ converge a $\frac{f(L^-) + f(-L^+)}{2}$ en $x = \pm L$

Luego, $\frac{f(L^-) + f(-L^+)}{2} = \frac{\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2}}{2} = \frac{\pi^2}{2}$

1,66

Nótese que la S.F. converge a $f(x)$ en los extremos. ($f(\pi) = f(-\pi) = \frac{\pi^2}{2}$)

Luego,
$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

c) Cuando $x = \pi$

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(n\pi)}{n^2}$$

ok

$$\Longrightarrow \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{6} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{3} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

UNIVERSIDAD EAFIT

Parcial 1 CMO422 febrero de 2019 Código____________

2. Sea $f(x)=\begin{cases} x & \text{para } 0 \le x \le 2 \\ 2-x & \text{para } 2 < x \le 3 \end{cases}$

   a) Halle la serie de Fourier en cosenos para f

   b) Determine dónde coverge esta serie

a) $a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{2}{3}\left[\int_0^2 x\,dx + \int_2^3 (2-x)\,dx\right]$

$= \frac{2}{3}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_2^3\right]$

$= \frac{2}{3}\left[2 + \left(6 - \frac{9}{2}\right) - (4-2)\right]$

$= \frac{2}{3}\left[\cancel{2}+6-\frac{9}{2}-\cancel{4}+\cancel{2}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{3}{2}\right] = 1.$

$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{3}\left[\overset{(1)}{\int_0^2 x\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx} + \overset{(2)}{\int_2^3 (2-x)\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx}\right]$

(1)	(2)
$u = x$	$u = (2-x)$
$du = dx$	$du = -dx$
$dv = \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx$	$dv = \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx$
$v = \frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$	$v = \frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$

$= \frac{2}{3}\left[\frac{3x}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx\right]$

$+ \frac{2}{3}\left[\frac{3(2-x)}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Big|_2^3 + \frac{3}{n\pi}\int_2^3 \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx\right]$

$= \frac{2}{3}\left[\frac{6}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - \frac{3}{n\pi}\left(\frac{3}{n\pi} - \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right)\Big|_0^2\right] + \frac{2}{3}\left[\frac{3}{n\pi}\left(\frac{-3}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right)\Big|_2^3\right]$

$= \frac{4}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{6}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - \frac{6}{n^2\pi^2} - \frac{6}{n^2\pi^2}\cos(n\pi) + \frac{6}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$

$= \frac{4}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{12}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - \frac{6}{n^2\pi^2}\left(1+(-1)^n\right)$

$\Longrightarrow$ S.F. en cosenos para f es

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{12}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - \frac{6}{n^2\pi^2}\left(1+(-1)^n\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$

b) Convergencia:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 2-x, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

- f es continua a tramos (x continua y $2-x$ continua y $f(2^-) = 2$ y $f(2^+) = 0$ existen y son finitos).

166

- En $0 < x < 2$, la función f es continua $\Rightarrow$ la S.F. en cosenos para f en $[0,3]$ coverge a x, $\forall x \in (0,2)$
- En $x = 2$, $f_L'(2) = 1$ y $f_R'(2) = -1$ existen y son finitos. Luego, la S.F. en cosenos para f en $[0,3]$ converge a
$$\frac{f(2^+) + f(2^-)}{2} = \frac{0+2}{2} = 1. \quad \text{para } x = 2.$$
- En $2 < x < 3$, la función f es continua $\Rightarrow$ la S.F. en cosenos para f en $[0,3]$ converge a $2-x$, $\forall x \in (2,3)$
- En los extremos, $f_L'(3) = -1$ y $f_R'(0) = 1$ existen y son finitos, la S.F. en cosenos para f en $[0,3]$ converge a
  $f(0^+) = 0$ para $x = 0$
  $f(3^-) = -1$ para $x = 3$

3/3

UNIVERSIDAD EAFIT

Parcial 1 CMO422 febrero de 2019 Código____________

3. a) Dermine los valores, en cada caso, para los cuales la ecuación diferencial $\cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos x \cos(x+y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = sen^2(x+y)$ es parabólica, hiperbólica y elíptica.

b) Obtener la ecuación diferencial parcial de menor orden eliminando las funciones arbitrarias en la relación dada:
$u(x,y) = x^2\phi(y) + 3xy$

a)

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fx + Gy = H$$

$B^2 - 4AC > 0 \rightarrow$ Parabólica

$B^2 - 4AC = 0 \rightarrow$ Elíptica

$B^2 - 4AC < 0 \rightarrow$ Hiperbólica

0.5

Parabolica si $B^2-4AC=0$

eliptica si $B^2-4AC>0$

hiperbolica si $B^2-4AC<0$

$B^2 - 4AC = 4\cos^2 x \cos^2(x+y) + 4\cos^2(x)$

$4\cos^2 x(\cos^2(x+y)+1) > 0 \quad \forall x,y \Rightarrow$ Parabólica.

b) $u(x,y) = x^2\phi(y) + 3xy$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\phi(y) + 3y$ ①

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\phi(y) \rightarrow \phi(y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

esto NO

$u(x,y) = \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3xy$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2}{x^2}u + \frac{6y}{x} = 0$

$\phi(y) = \frac{u(x,y) - 3xy}{x^2}$ ②

② en ① $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\left[\frac{u - 3xy}{x^2}\right] + 3y$. OK