11. Sean H, K subespacios de $\mathbb{R}^n$

a) Supongamos $H \subset K$.

Sea $x \in K^\perp$, veamos q $x \in H^\perp$

Como $x \in K^\perp \Rightarrow \forall y \in K,\ \langle x, y\rangle = 0$ (1)

Como $H \subset K$ entonces $\forall z \in H \Rightarrow z \in K$ (2)

Por (1) y (2), $\forall z \in H,\ \langle x, z\rangle = 0$

Luego, $x \in H^\perp \Rightarrow K^\perp \subset H^\perp$.

b) $(\subseteq)$

Supongamos que $(H+K)^\perp \not\subseteq H^\perp \cap K^\perp$

$\exists x \in (H+K)^\perp$ t.q. $x \notin H^\perp$ ó $x \notin K^\perp$

Supongamos $x \in H^\perp$ y $x \notin K^\perp$.

Como $x \in (H+K)^\perp \Rightarrow \forall h \in H$ y $\forall k \in K$

$\langle h+k, x\rangle = 0$.

$\langle h, x\rangle + \langle k, x\rangle = 0$.

Como $x \in H^\perp \Rightarrow \langle h, x\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle k, x\rangle = 0$.

Luego $x \in K^\perp$ $(\rightarrow\leftarrow)$.

El caso $x \in K^\perp$ y $x \notin H^\perp$ es análogo.

Supongamos que $x \notin H^\perp$, $x \notin K^\perp$

Luego, $\forall h \in H$ y $\forall k \in K$ $\langle x, h\rangle + \langle x, k\rangle = 0,\ \forall h \in H, \forall k \in K$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Como } x \notin H^\perp \Rightarrow x \in H \\ x \notin K^\perp \Rightarrow x \in K\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\langle x, x\rangle + \langle x, x\rangle = 0 \\ \langle x, x\rangle = 0\end{array}$$

Luego $x = 0$.

Pero $0 \in H^\perp$ $(\rightarrow\leftarrow)$.

Luego, $(H+K)^\perp \subseteq K^\perp \cap H^\perp$.

$(\supseteq)$

Sea $x \in K^\perp$ y $x \in H^\perp$.

Luego, $\forall k \in K,\ \langle x, k\rangle = 0$

$\forall h \in H,\ \langle x, h\rangle = 0$

$\forall h \in H, \forall k \in K$ $\langle x, h\rangle + \langle x, k\rangle = 0$

$\langle x, h+k\rangle = 0$

Luego $x \in (H+K)^\perp$.

Luego $(H+K)^\perp \supseteq H^\perp \cap K^\perp$.

$\Longrightarrow (H+K)^\perp = H^\perp \cap K^\perp$.

c) $(\subseteq)$

Supongamos $H^{\perp\perp} \not\subseteq H$

$\exists x \in H^{\perp\perp}$ t.q. $x \notin H$

Como $x \notin H \rightarrow x \in H^\perp$.

Como $x \in H^{\perp\perp} \rightarrow \forall h' \in H^\perp,\ \langle x, h'\rangle = 0$

en particular $\langle x, x\rangle = 0$, luego $x = 0 \in H$

$(\longrightarrow\longleftarrow)$.

De donde, $H^{\perp\perp} \subseteq H$

$(\supseteq)$

Sea $x \in H$.

Como $x \in H \rightarrow \forall h' \in H^\perp,\ \langle x, h'\rangle = 0$

Luego $x \in H^{\perp\perp}$.

$\Longrightarrow H^{\perp\perp} = H$.

12. $V = \mathcal{M}_{nn}$

a) Veamos que

$\langle A, B\rangle = tr(AB^T)$

es p.i. en $\mathcal{M}_{nn}$.

i) $\langle A+B, C\rangle = tr([A+B]C^T)$

$= tr(AC^T + BC^T)$

$= tr(AC^T) + tr(BC^T)$

$= \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle$.

ii) $\langle aA, B\rangle = a\langle A, B\rangle$

iii) $\langle A, B\rangle = tr(AB^T)$

$= tr[(AB^T)^T]$

$= tr(BA^T)$

$= \langle B, A\rangle$

iv) $\langle A, A\rangle = tr(AA^T)$

Sea $y = A^T x$, $x \in \mathbb{R}^n$

Luego, $x^T A A^T x = y^T y = \sum_{i=1}^n y_i^2 \geq 0$

De donde AA^T es semidefinida positiva.

Como AA^T es semidefinida positiva, sus valores propios $\lambda_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Se sabe que $tr(AA^T) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$.

$(\rightarrow)$ Sea $A = 0$, $tr(AA^T) = tr(0) = 0$

$(\leftarrow)$ $\langle A, A\rangle = 0 = tr(AA^T) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

Como $\lambda_i \geq 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$

Como $\lambda_i = 0, \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow A = 0$.

b) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} b_{i1} & & & \\ & \sum_{i=1}^n a_{2i} b_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{i=1}^n a_{ni} b_{in} \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n b_{1j} a_{j1} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \sum_{j=1}^n b_{nj} a_{jn} \end{bmatrix}$$

$$tr(AB) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} b_{ij} \quad = \quad tr(BA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} a_{ji}$$

c) $tr(P^{-1}AP) = tr(APP^{-1}) = tr(AI_n)$

$= tr(A)$ $\square$