2a) Claramente, u es continua en todo punto $x \neq 1/2$ dado que los polinomios son continuos. En $x = 1/2$ ocurre que:

$$\lim_{x \to 1/2^-} u(x) = \lim_{x \to 1/2^-} \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{24}$$

$$\lim_{x \to 1/2^+} u(x) = \lim_{x \to 1/2^+} \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} - \frac{1}{24} = \frac{1}{24}$$

Luego, $u(x)$ es continua en todo punto en Ω. Luego $u^2(x)$ es continua en todo Ω. Así como u^2 está definida en Ω y continua

$$\int_\Omega u^2(x)\,dx < \infty,$$

Luego, $u \in L_2(\Omega)$. (*)

Se tiene que:

$$u'(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}, & 0 < x \leq 1/2 \\ \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

Obsérvese que:

$$\lim_{x \to 1/2^-} u'(x) = \lim_{x \to 1/2^-} \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\lim_{x \to 1/2^+} u'(x) = \lim_{x \to 1/2^+} \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Luego $u'(x)$ es continua. Por (*) se tiene que $u'(x) \in L_2(\Omega)$

Se tiene que:

$$u''(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ x - \frac{1}{2}, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

Es claro que $u''(x)$ es continua. Por (*), $u''(x) \in L_2(\Omega)$