UNIVERSIDAD EAFIT®

# ESCUELA DE CIENCIAS

## DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMATICAS

**Economía Matemática**

**Parcial 1 (20 %)**

Nota: 4,7

Nombre: David Plazas Escudero Código: 201710005101

Profesor: *Hector Quiceno E.* Grupo: 001 Duración: 1.5 horas Fecha: Febrero de 2020

10 (15 %) Para las siguientes funciones realize lo siguiente:

7 a. Determine los intervalos donde son crecientes y los intervalos donde son decrecientes.

3 b. Determine si la función es localmente convexa o cóncava en el punto para el cual $x = 2$.

(1)

$$(1)\, f(x) = \left(\frac{3x}{x^3+1}\right)^2 \tag{1}$$

$$(2)\, f(x) = \int_x^1 e^{t^2}\,dt \tag{2}$$

a. $f'(x) = 2\left(\frac{3x}{x^3+1}\right)\left[\frac{3(x^3+1)-(3x^2)(3x)}{(x^3+1)^2}\right] = \frac{6x(3x^3+3-9x^3)}{(x^3+1)^3} = \frac{18x-36x^4}{(x^3+1)^3}$

$f''(x) = \frac{(18-144x^3)(x^3+1)^3-3(x^3+1)(3x^2)(18x-36x^4)}{(x^3+1)^6} = \frac{(18-144x^3)(x^3+1)^2-9x^2(18x-36x^4)}{(x^3+1)^5}$

La función es creciente cuando $f'(x)>0$ y decreciente cuando $f'(x)<0$.

$f'(x) = \frac{18x-36x^4}{(x^3+1)^3}$

$x(18-36x^3)=0 \rightarrow x=0 \vee x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

$(x^3+1)^3=0 \rightarrow x=-1$

$+ \quad -1 \quad - \quad 0 \quad + \quad \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \quad -$

Luego, la función es creciente en $(-\infty,-1)\cup(0,\sqrt[3]{\frac{1}{2}})$ y decreciente en $(-1,0)\cup(\sqrt[3]{\frac{1}{2}},\infty)$.

b. Para $x=2$, $f''(x) = \left.\frac{(18-144x^3)(x^3+1)^2-9x^2(18x-36x^4)}{(x^3+1)^5}\right|_{x=2} = -\frac{298}{243} < 0$

Como $f''(x)<0$ para $x=2$, la función es localmente cóncava.

(2) a. $f(x) = \int_x^1 e^{t^2} dt$ $\quad \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$.

Por aplicación del teorema fundamental del cálculo, se sabe que la integral y la derivada son operaciones inversas. Luego,

$f(x) = \int_x^1 e^{t^2} dt - \int_1^x e^{t^2} dt \Rightarrow f'(x) = -e^{x^2}$

Se sabe que la exponencial es una función positiva, luego $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $f(x)$ es ~~creciente~~ $\forall x \in \mathbb{R}$.

b. $f''(x) = 2xe^{x^2}\Big|_{x=2} = 4e^4 > 0$. Luego $f''(2) > 0$ y se concluye que $f$ es ~~localmente~~ convexa, en una vecindad de $x=2$.

(15%) Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa. Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de una variable, creciente y convexa. Demuestre que la composición $h(x)=g(f(x))$ es una función convexa.

15

Dm/ Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa. Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función creciente y convexa. Veamos que $h:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(f(x))$ es convexa.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y sea $t\in[0,1]$. Como $f(\cdot)$ es convexa, cumple que

(1) $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$. Por otra parte, se sabe que $g(\cdot)$ es creciente, luego $(\forall z,w\in\mathbb{R})(z<w \Rightarrow g(z)<g(w))$, en otras palabras, $g(\cdot)$ conserva el sentido de la desigualdad.

Apliquemos $g(\cdot)$ en (1): $g(f(tx+(1-t)y)) \leq g(tf(x)+(1-t)f(y))$

Como $g(\cdot)$ es convexa, se cumple que $g(tf(x)+(1-t)f(y)) \leq tg(f(x))+(1-t)g(f(y))$

y por transitividad de la relación de orden, se tiene que

$g(f(tx+(1-t)y)) \leq tg(f(x))+(1-t)g(f(y))$

y por definición de $h(\cdot)$, se tiene que

$h(tx+(1-t)y) \leq th(x)+(1-t)h(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$ y $\forall t\in[0,1]$.

$\Longrightarrow h(\cdot)$ es convexa.

(20%) Considere la función

$$f(x,y,z) = ln(x^2+y^2+z^2)$$

20

- a Calcule el gradiente de la función, $\nabla f(x,y,z)$.
- b Calcule la derivada direccional de la función en la dirección del vector $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i}-\hat{j}-\hat{k})$.
- c Determine la máxima tasa de variación de la función en el punto $A(1,3,2)$.

a. $\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$

$= \frac{1}{x^2+y^2+z}\left[(2x)\hat{i} + (2y)\hat{j} + (2z)\hat{k}\right]$

b. $D_u(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \circ \hat{u}$ . $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}\right]$

$= \left\{\frac{2}{x^2+y^2+z^2}\left[x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right]\right\} \circ \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}\right]\right\}$

$= \frac{2}{\sqrt{3}(x^2+y^2+z^2)}\left[x-y-z\right]$

c. La máxima tasa de variación de la función en cualquier punto, es la magnitud del gradiente en dicho punto.

$\|\nabla f(x,y,z)\| = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2} = \frac{2}{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Para $A(1,3,2)$ · $\|\nabla f(1,3,2)\| = \frac{2}{\sqrt{1+9+4}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$ $\sqrt{14}$.



Scanned with CamScanner

(25 %) Considere las funciones de demanda $Q_d$ y oferta $Q_s$ para cierto producto, dadas por:

25

$$Q_d = D(P,Y_0); \quad \left(\frac{\partial D}{\partial P} < 0, \frac{\partial D}{\partial Y_0} > 0\right)$$
$$Q_s = S(P,T_0); \quad \left(\frac{\partial S}{\partial P} > 0, \frac{\partial S}{\partial T_0} < 0\right),$$

donde $Y_0$ es el ingreso y $T_0$ los impuestos sobre dicho producto.
Las funciones $D$ y $S$ tienen derivadas continuas. Asuma que en el equilibrio $Q = Q_d = Q_s$.

a. - Escriba el sistema de la forma

$$F^1(P,Q;Y_0,T_0) = 0$$
$$F^2(P,Q;Y_0,T_0) = 0$$

b. - Determine si el teorema de la función implícita es aplicable (Determinante Jacobiano).

c. - Calcule $\frac{\partial P^*}{\partial Y_0}$, $\frac{\partial P^*}{\partial T_0}$, $\frac{\partial Q^*}{\partial Y_0}$ y $\frac{\partial Q^*}{\partial T_0}$ e interprete dichos resultados del equilibrio.

a. En el equilibrio $Q = Q_s = Q_D$: $F_1(P,Q;Y_0,T_0) = D(P,Y_0) - Q = 0$
$F_2(P,Q;Y_0,T_0) = S(P,T_0) - Q = 0$.

b. Por hipótesis se sabe que $\frac{\partial D}{\partial P}, \frac{\partial D}{\partial Y_0}, \frac{\partial S}{\partial P}, \frac{\partial S}{\partial T_0}$ son todas continuas. Por otra parte, $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial P} & \frac{\partial F_1}{\partial Q} \\ \frac{\partial F_2}{\partial P} & \frac{\partial F_2}{\partial Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial P} & -1 \\ \frac{\partial S}{\partial P} & -1 \end{bmatrix}$, luego $|J| = -\frac{\partial D}{\partial P} + \frac{\partial S}{\partial P}$

Como $\frac{\partial D}{\partial P} < 0 \rightarrow -\frac{\partial D}{\partial P} > 0$ y se sabe que $\frac{\partial S}{\partial P} > 0$, luego $|J| > 0$. Por lo tanto, el teorema de la función implícita es aplicable.

c. Hallemos $\frac{\partial P^*}{\partial Y_0}$, $\frac{\partial Q^*}{\partial Y_0}$: $J \begin{bmatrix} \frac{\partial P^*}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial Q^*}{\partial Y_0} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial F_2}{\partial Y_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial D}{\partial Y_0} \\ 0 \end{bmatrix}$

Por Cramer, $\frac{\partial P^*}{\partial Y_0} = \frac{|J_1|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial D}{\partial Y_0} & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{\partial D/\partial Y_0}{\partial S/\partial P^* - \partial D/\partial P^*} > 0$ → El precio en el equilibrio $P^*$ crece cuando crecen los ingresos.

$\frac{\partial Q^*}{\partial Y_0} = \frac{|J_2|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} \partial D/\partial P^* & -\frac{\partial D}{\partial Y_0} \\ \partial S/\partial P^* & 0 \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{(\partial S/\partial P^*)(\partial D/\partial Y_0)}{\partial S/\partial P^* - \partial D/\partial P^*} > 0$ → La cantidad de oferta/demanda en el equilibrio $Q$ aumenta cuando los ingresos aumentan

Calculemos $\frac{\partial P^*}{\partial T_0}$ y $\frac{\partial Q^*}{\partial T_0}$: $J \begin{bmatrix} \frac{\partial P^*}{\partial T_0} \\ \frac{\partial Q^*}{\partial T_0} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial T_0} \\ \frac{\partial F_2}{\partial T_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\partial S}{\partial T_0} \end{bmatrix}$

Por Cramer, $\frac{\partial P^*}{\partial T_0} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{\partial S}{\partial T_0} & -1 \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{-\partial S/\partial T_0}{\partial S/\partial P^* - \partial D/\partial P^*} > 0$ → El precio en el equilibrio aumenta cuando el impuesto aumenta.

$$\frac{\partial Q^*}{\partial T_0} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial D}{\partial P^*} & 0 \\ \frac{\partial S}{\partial P^*} & -\frac{\partial S}{\partial T_0} \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{(-\partial S/\partial T_0)(\partial D/\partial P^*)}{\partial S/\partial P^* - \partial D/\partial P^*} < 0$$

→ la demanda en el equilibrio decrece cuando los impuestos crecen.

23

(25% Suponga que una compañía produce un artículo para tres diferentes mercados con funciones de ingreso y costo totales dados por:

$$
\begin{aligned}
R(Q) &= R_1(Q_1)+R_2(Q_2)+R_3(Q_3) \\
C &= C(Q), \quad \text{donde } Q = Q_1+Q_2+Q_3.
\end{aligned}
$$

Determine las condiciones de primer (necesarias) y segundo orden (suficientes) para obtener valores máximos de utilidad. *En términos de las funciones* $C$, $R_1$, $R_2$, $R_3$ *y sus derivadas.*

Función de Utilidad: $U(Q)=R_1(Q_1)+R_2(Q_2)+R_3(Q_3)-C(Q_1+Q_2+Q_3)$

→ Primer orden: Nótese que $U(Q)\equiv U(Q_1,Q_2,Q_3)$

$$
\nabla U(Q_1,Q_2,Q_3)\overset{!}{=}0 \Rightarrow
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial Q_1} &\overset{!}{=} 0 \\
\frac{\partial U}{\partial Q_2} &\overset{!}{=} 0 \\
\frac{\partial U}{\partial Q_3} &\overset{!}{=} 0
\end{aligned}\right\}
\left.\begin{aligned}
\frac{dR_1}{dQ_1}-\frac{\partial C}{\partial Q_1} &= 0 \\
\frac{dR_2}{dQ_2}-\frac{\partial C}{\partial Q_2} &= 0 \\
\frac{dR_3}{dQ_3}-\frac{\partial C}{\partial Q_3} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (0)
$$

Condiciones de primer orden (existencia de extremos).

→ Segundo Orden: Para que exista máximo, $H(Q)$ ← definido negativo.

$$
H(Q_1,Q_2,Q_3)=\begin{bmatrix}
\frac{\partial^2 U}{\partial Q_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial Q_2\partial Q_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial Q_3\partial Q_1} \\
\frac{\partial^2 U}{\partial Q_1\partial Q_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial Q_2^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial Q_3\partial Q_2} \\
\frac{\partial^2 U}{\partial Q_1\partial Q_3} & \frac{\partial^2 U}{\partial Q_2\partial Q_3} & \frac{\partial^2 U}{\partial Q_3^2}
\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}
\frac{d^2R_1}{dQ_1^2}-\frac{\partial^2 C}{\partial Q_1^2} & -\frac{\partial^2 C}{\partial Q_2\partial Q_1} & -\frac{\partial^2 C}{\partial Q_3\partial Q_1} \\
-\frac{\partial^2 C}{\partial Q_1\partial Q_2} & \frac{d^2R_2}{dQ_2^2}-\frac{\partial^2 C}{\partial Q_2^2} & -\frac{\partial^2 C}{\partial Q_3\partial Q_2} \\
-\frac{\partial^2 C}{\partial Q_1\partial Q_3} & -\frac{\partial^2 C}{\partial Q_2\partial Q_3} & \frac{d^2R_3}{dQ_3^2}-\frac{\partial^2 C}{\partial Q_3^2}
\end{bmatrix}
$$

Para que sea definido negativo: $|D_1|<0 \to \frac{d^2R_1}{dQ_1^2}-\frac{\partial^2 C}{\partial Q_1^2}<0$ (1)

$$
|D_2|>0 \Rightarrow \left[\frac{d^2R_1}{dQ_1^2}-\frac{\partial^2 C}{\partial Q_1^2}\right]\left[\frac{d^2R_2}{dQ_2^2}-\frac{\partial^2 C}{\partial Q_2^2}\right]-\left(\frac{\partial^2 C}{\partial Q_1\partial Q_2}\right)^2>0 \quad (2)
$$

$|D_3|<0$

$$
\begin{aligned}
\to &\left(\frac{d^2R_1}{dQ_1^2}-\frac{\partial^2 C}{\partial Q_1^2}\right)\left[\left(\frac{d^2R_2}{dQ_2^2}-\frac{\partial^2 C}{\partial Q_2^2}\right)\left(\frac{d^2R_3}{dQ_3^2}-\frac{\partial^2 C}{\partial Q_3^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 C}{\partial Q_2\partial Q_3}\right)^2\right] \\
&-\left(\frac{\partial^2 C}{\partial Q_2\partial Q_1}\right)\left[-\frac{\partial^2 C}{\partial Q_1\partial Q_2}\left(\frac{d^2R_3}{dQ_3^2}-\frac{\partial^2 C}{\partial Q_3^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 C}{\partial Q_1\partial Q_3}\right)\left(\frac{\partial^2 C}{\partial Q_3\partial Q_2}\right)\right] \\
&-\left(\frac{\partial^2 C}{\partial Q_3\partial Q_1}\right)\left[\left(\frac{\partial^2 C}{\partial Q_1\partial Q_2}\right)\left(\frac{\partial^2 C}{\partial Q_2\partial Q_3}\right)+\left(\frac{\partial^2 C}{\partial Q_1\partial Q_3}\right)\left(\frac{d^2R_2}{dQ_2^2}-\frac{\partial^2 C}{\partial Q_2^2}\right)\right]<0 \quad (3)
\end{aligned}
$$



Scanned with CamScanner