UNIVERSIDAD **EAFIT**

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Estadística 2 Ing Mat CM0423
parcial 3 (25%)

Nombre: David Plazas Escudero Código: 201710005101 Nota: 5.0

Profesor: Francisco Zuluaga Grupo: 001 Mayo 2 de 2019

1. A) Teorema: Si los eingenvectors $a_1, a_2, \ldots, a_p$ de S son escalados de modo que que $a_j'a_j = 1$ entonces el primer componente principal $Z_1 = a_1'Y$ tiene la varianza muestral más grande que otra cualquier combinación lineal y el segundo componente principal $Z_2 = a_2'Y$ tiene la varianza muestral más grande alcanzable por cualquier combinancion lineal qtal que $a_2'a_1 = 0$. En general $Z_j = a_j'Y$ tiene la varianza más grande a través de todas las combinaciones lineales ortogonales a $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{j-1}$

Bosquejo.

Prueba: Para componentes ppales se quiso hallar a_1 t.q. maximice la varianza. $\Rightarrow \max_{a_1} \lambda_1 = \frac{a_1'Sa_1}{a_1'a_1}$. (*)

$\lambda_1 = \frac{a_1'Sa_1}{a_1'a_1} = \frac{a_1'}{\sqrt{a_1'a_1}} S \frac{a_1}{\sqrt{a_1'a_1}}$, ← Equivale a normalizar el vector a_1

Luego, equivalente a (*) se puede escribir $\max_{a_1} \lambda_1 = a_1'Sa_1$ (Δ) sujeto a $a_1'a_1 = 1$

El Lagrangiano asociado al problema (Δ) es

$\mathcal{L}(a_1) = a_1'Sa_1 - \lambda[a_1'a_1 - 1]$

$d\mathcal{L}(a_1) = d(a_1'Sa_1) - \lambda d(a_1'a_1)$

$= 2a_1'S'da_1 - 2\lambda a_1'da_1 = 2(a_1'S' - \lambda a_1')da_1$

Nota: * $d(a_1'Sa_1) = 2a_1'S'da_1$ * $d(a_1'a_1) = 2a_1'da_1$

El gradiente sería $\frac{\partial \mathcal{L}(a_1)}{\partial a_1} = 2(a_1'S' - \lambda a_1')' = 0$ → Condición primer orden.

1.25

$(S' - \lambda I_p)a_1 = 0 \rightarrow \lambda = \lambda_1$ maximiza la varianza.

Para el segundo comp. ppal, se tiene el problema

$\max \lambda = a_2'Sa_2$
s.a $a_2'a_2 = 1$
$a_2'a_1 = 0$
→ ortogonal.

$\mathcal{L}(a_2) = a_2'Sa_2 - \lambda[a_2'a_2 - 1] - \gamma[a_2'a_1]$

$d\mathcal{L}(a_2) = d(a_2'Sa_2) - \lambda d(a_2'a_2) - \gamma da_2'a_1$

$= 2a_2'S'da_2 - 2\lambda a_2'da_2 - \gamma a_1 da_2$

$\frac{\partial \mathcal{L}(a_2)}{\partial a_2} = 2S'a_2 - 2\lambda a_2 - \gamma a_1$

$a_1' \frac{\partial \mathcal{L}(a_2)}{\partial a_2} = 2a_1'S'a_2 - 2\lambda a_1'a_2 - \gamma a_1'a_1$

$= (S' - \lambda I_p)a_2 = 0$

Scanned with CamScanner

UNIVERSIDAD EAFIT Abierta al mundo

Que debe cumplir que $\lambda_2 = \lambda$ y $\lambda_2 < \lambda_1$, porque es un problema de optimización con más restricciones y que deteriora el valor previo λ_1.
El proceso se puede continuar y hayar el resto de $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \ldots > \lambda_p$.

b) Demuestre que efectivamente las varianzas de los componentes , correspeonden a los repectivos valores propios.

$S_{z_i}^2 = a_i' S' a_i$, $i = 1, \ldots, p$. Donde a_i es el i-ésimo vector propio de S'.

Como a_i es vector propio de S', se cumple que $S a_i = \lambda_i a_i$ (1)

Luego, $S_{z_i}^2 = a_i'(S a_i) = a_i'(\lambda_i a_i) = \lambda_i (a_i' a_i) = \lambda_i$

Por (1). Porque λ_i es (1×1)

Porque los vectores propios son escalados i.e. $\|a_i\| = 1$
$\Rightarrow \sqrt{a_i' a_i} = 1$
$a_i' a_i = 1$

Luego, $\boxed{S_{z_i}^2 = \lambda_i}$ > i-ésimo valor propio de S'.

Scanned with CamScanner

UNIVERSIDAD EAFIT Abierta al mundo

2) Existe una situación en la cual un componente principal duplica una variable.lo cual ocurre cuando la variable esta incorrelacionada con otras variables.

En general si todos los p variables están incorrelacionadas, los componentes principales meramente reproducirán las variables.

Prueba: Si todas las p variables no están correlacionadas, se tendrá una matriz de covarianzas de la forma

$$\Sigma = \begin{bmatrix} S_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_p^2 \end{bmatrix}$$

Para hallar los componentes principales, se requieren de los valores propios.

Calculemos los valores propios de $\Sigma \rightarrow |\lambda \mathbb{I}_p - \Sigma| = 0$

$$|\lambda \mathbb{I}_p - \Sigma| = \begin{vmatrix} \lambda - S_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda - S_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda - S_p^2 \\ 0 & 0 & \cdots & \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{p} (\lambda - S_i^2) = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_i = S_i^2 \quad \forall i = 1, \ldots, p.$$

1.25

Para el vector propio se tiene $(\Sigma a_1 - \lambda_1 a_1) = 0$

$$\begin{bmatrix} S_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siendo λ_1 el mayor valor propio. Supongamos que $\lambda_1 = S_1^2$.

$$\begin{bmatrix} (S_1^2 - S_1^2) a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (S_2^2 - S_1^2) a_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & (S_p^2 - S_1^2) a_{p1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} (S_1^2 - S_1^2) a_{11} = 0 \rightarrow a_{11} \text{ libre} \\ (S_2^2 - S_1^2) a_{21} = 0 \\ \vdots \\ (S_p^2 - S_1^2) a_{p1} = 0 \end{array}$$

En general $S_i^2 - S_j^2 \neq 0 \quad i \neq j, \rightarrow a_{21} = 0, a_{31} = 0, \ldots, a_{p1} = 0$

Como se trabaja con a normalizado $\rightarrow a'a = 1$

$a_{11}^2 + a_{21}^2 + \ldots + a_{p1}^2 = 1 \longrightarrow a_{11}^2 = 1 \rightarrow a_{11} = 1$

Luego, el primer componente principal es $Z_1 = a_1' \mathbb{Y} = a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots$

$$\Longrightarrow Z_1 = y_1$$

Y así consecutivamente para los p componentes principales $Z_i = y_i \; \forall i = 1, \ldots, p$. Luego, es una copia de $\mathbb{Y}$.