• Para probar que d es métrica probemos que

• $d(x,y) \geq 0$; $x=(x_1, x_2)$; $y=(y_1, y_2)$
Como $d(x,y) = \alpha d_1(x_1, y_1) + (1-\alpha) d_2(x_2, y_2)$
y sabiendo que d_1 y d_2 son métricas
y que $\alpha \in [0,1]$, tanto $\alpha d_1(x_1, y_1) \geq 0$
y $(1-\alpha) d_2(x_2, y_2) \geq 0$, de lo que $d(x,y) \geq 0$

• $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x=y$
($\Rightarrow$) $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$
Esto es equivalente a que
$d_1(x_1, y_1) = d_1(x_2, y_2) = 0$ ya que d_1 y d_2
son no negativos y $\alpha \in [0,1]$. Esto implica
que $x_1 = y_1$ y $x_2 = y_2$ o de manera
equivalente $x=y$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $x=y$. Entonces
$x_1 = y_1 \Rightarrow d(x_1, y_1) = 0$ y
$x_2 = y_2 \Rightarrow d_2(x_2, y_2) = 0$
$\therefore$ $d(x,y) = \alpha d_1(x_1, y_1) + (1-\alpha) d_2(x_2, y_2)$

• $d(x,y) = d(y,x)$; $x = (x_1, y_1)$, $y = (x_2, y_2)$

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &= \alpha d_1(x_1, y_1) + (1-\alpha) d_2(x_2, y_2) \\
&= \alpha d_1(y_1, x_1) + (1-\alpha) d_2(y_2, x_2) \\
&= d(y,x)
\end{aligned}
$$

• Para probar la desigualdad triangular, consideremos un $z = (z_1, z_2)$. Luego, del hecho que d_1 y d_2 sean métricos

$$
\begin{aligned}
d_1(x_1, y_1) &\leq d_1(x_1, z_1) + d_1(z_1, y_1) \\
d_2(x_2, y_2) &\leq d_2(x_2, z_2) + d_2(z_2, y_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow d(x,y) &= \alpha d(x_1, y_1) + (1-\alpha) d_2(x_2, y_2) \\
&\leq \alpha [d_1(x_1, z_1) + d_1(z_1, y_1)] \\
&\quad + (1-\alpha)[d_2(x_2, z_2) + d_2(z_2, y_2)] \\
&\leq [\alpha d_1(x_1, z_1) + (1-\alpha) d_2(x_2, z_2)] \\
&\quad + [\alpha d_1(z_1, y_1) + (1-\alpha) d_2(z_2, y_2)] \\
&\leq \alpha d(x, z) + (1-\alpha) d(z, y)
\end{aligned}
$$

En $\mathbb{R}$, por ejemplo si $\alpha = 2$ y $x = 1$ ∧ $y = 2$

$$
\left.
\begin{aligned}
d_1(x,y) &= |x-y| = 1 \\
d_2(x,y) &= \sqrt{1+4} = \sqrt{5}
\end{aligned}
\right\}
\quad
\begin{aligned}
d(x,y) &= \alpha d_1(x,y) + (1-\alpha) d_2 \\
&= 2 - \sqrt{5} < 0
\end{aligned}
$$