Tarea 3: Economía Matemática.

1. (16.33) $p = \alpha - T - \beta U(t) + g\pi(t)$

(16.34) $\dot{\pi}(t) = j(p - \pi(t))$

Sea $U(t) = u \rightarrow$ exógena. (16.33) en (16.34): $\dot{\pi}(t) = j[\alpha - T - \beta u + g\pi(t) - \pi(t)]$

a) $\dot{\pi}(t) + j(1-g)\pi(t) = j(\alpha - T - \beta u)$. $\longrightarrow$ Ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea de 1er orden de coeficientes constantes.

b) Como es una EDO de primer orden, el polinomio característico de la EDO homogénea asociada es de orden $\underline{1}$; por lo tanto, se tiene $\underline{1}$ raíz característica. Por otra parte, como se tiene una sola raíz, no se pueden tener fluctuaciones, ya que, como todos los parámetros son reales, la raíz es real y no habría presencia de funciones periódicas.

2. (16.33) $p = \alpha - T - \beta u(t) + g\pi(t)$

(16.36) $\dot{\pi}(t) = j(\alpha - T - \beta u(t)) - j(1-g)\pi(t)$

(16.35) $\dot{u}(t) = -K(m - p)$

(16.33) en (16.35): $\dot{u}(t) = -K[m - \alpha + T + \beta u(t) - g\pi(t)]$

derivando respecto a t:

$\ddot{u}(t) = -K\beta\dot{u}(t) + gK\dot{\pi}(t) \quad (\Delta)$

Reemplazando (16.36) en (Δ): $\ddot{u}(t) = -K\beta\dot{u}(t) + gK[j(\alpha - T - \beta u(t)) - j(1-g)\pi(t)] \quad (\odot)$

De (16.33) se puede obtener: $\pi(t) = \dfrac{p - \alpha + T + \beta u(t)}{g} \quad (*)$

De (16.35) se obtiene: $p = \dfrac{mK + \dot{u}(t)}{K} \quad (**)$

De $(**)$ en $(*)$: $\pi(t) = \dfrac{mK + \dot{u}(t) - K(\alpha - T - \beta u(t))}{Kg} \quad (\square)$

Ahora, $(\square)$ en $(\odot)$:

$$\ddot{u}(t) = -K\beta\dot{u}(t) + gK\left[j(\alpha - T - \beta u(t)) - j(1-g)\left(\frac{mK + \dot{u}(t) - (\alpha - T - \beta u(t))K}{Kg}\right)\right]$$

$$\ddot{u}(t) = -K\beta\dot{u}(t) + jKg(\alpha - T - \beta u(t)) - j(1-g)[mK + \dot{u}(t) - (\alpha - T - \beta u(t))K]$$

$$\ddot{u}(t) = -K\beta\dot{u}(t) - jKg\beta u(t) + Kjg(\alpha - T) - j(1-g)\dot{u}(t) - j(1-g)\beta K u(t) - j(1-g)[mK - K(\alpha - T)]$$

$$\boxed{\ddot{u}(t) + [\beta K + j(1-g)]\dot{u}(t) + j\beta K u(t) = Kj[\alpha - T - (1-g)m]}$$

$\hookrightarrow$ EDO 2^{do} orden en $U(t)$.

3. $\pi = \rho$

(16.33) $\rho = \alpha - T - \beta u(t) + g\pi(t)$

(16.35) $\dot{u}(t) = -K(m-\rho)$

a) derivando (16.33) respecto a t:

$\dot{\rho} = -\beta \dot{u}(t) + g\dot{\rho}$ (Δ)

(16.35) en (Δ):

$\dot{\rho} = -\beta[-K(m-\rho)] + g\dot{\rho}$

$(1-g)\dot{\rho} = \beta K m - \beta K \rho$

$$\boxed{\dot{\rho} + \frac{\beta K}{1-g}\rho = \frac{\beta K m}{1-g}}$$

b) De (16.33) se puede obtener que

$$\rho = \frac{\alpha - T - \beta u(t)}{1-g} \quad (\square)$$

$(\square)$ en (16.35):

$$\dot{u}(t) = -K\left(m - \frac{\alpha - T - \beta u(t)}{1-g}\right) \longrightarrow \boxed{\dot{u}(t) + \frac{K\beta u(t)}{1-g} = -K\left(m - \frac{\alpha - T}{1-g}\right)}$$

c) En principio se tiene que el modelo que se obtiene bajo la hipótesis de expectativas adaptativas (16.34): $\dot{\pi}(t) = j(\rho - \pi(t))$, es de 2do orden. Por lo tanto, tiene 2 raíces características y pueden tener fluctuaciones. Por otra parte, los modelos obtenidos bajo la hipótesis perfecta ($\rho = \pi$), se llegan a modelos de orden 1. Luego, bajo la hipótesis perfecta se pierde la posibilidad de tener fluctuaciones.

d) Se debe imponer $g \neq 1$.

(10.37'') $\ddot{\pi}(t)+[\beta K+j(1-g)]\dot{\pi}(t)+[j\beta K]\pi(t)=j\beta K m$.

donde $\dot{\pi}(t)=\frac{3}{4}[p(t)-\pi(t)]$, $\dot{u}(t)=\frac{-1}{2}[m-p(t)]$ y $p(t)=\frac{1}{6}-3u(t)+\frac{\pi(t)}{3}$.

Luego, $\beta=3$; $g=\frac{1}{3}$; $j=\frac{3}{4}$; $K=1/2 \Rightarrow \beta K+j(1-g)=\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\left[1-\frac{1}{3}\right]=2$. $j\beta K=\frac{9}{8}$ y $j\beta K m = (9/8)m$

$\Rightarrow \ddot{\pi}(t)+2\dot{\pi}(t)+\frac{9}{8}\pi(t)=\frac{9}{8}m. \quad (\Delta)$ Homogénea: $\ddot{\pi}(t)+2\dot{\pi}(t)+\frac{9}{8}\pi(t)=0$.

$\lambda^2+2\lambda+\frac{9}{8}=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left[-2\pm\sqrt{4-\frac{9}{2}}\right] \Rightarrow \lambda_{1,2}=-1\pm\frac{\sqrt{2}}{4}i$

Luego, $\pi_h(t)=e^{-t}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)\right]$

Particular: Se propone $\pi_p(t)=m \rightarrow \dot{\pi}(t)=0$ y $\ddot{\pi}(t)=0$. En (Δ): $\frac{9}{8}m=\frac{9}{8}m$ ✓

Solución general: $\boxed{\pi(t)=e^{-t}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{2}t}{4}\right)\right]+m.}$

Ahora, $p(t)=\frac{4}{3}\dot{\pi}(t)+\pi(t)$

$\dot{\pi}(t)=-e^{-t}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)\right]+e^{-t}\left[-\frac{C_1\sqrt{2}}{4}\sin\left(\frac{\sqrt{2}t}{4}\right)+\frac{C_2\sqrt{2}}{4}\cos\left(\frac{\sqrt{2}t}{4}\right)\right]$

$\frac{4\dot{\pi}(t)}{3}+\pi(t)=-e^{-t}\left[\frac{4C_1}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{2}t}{4}\right)+\frac{4C_2}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{2}t}{4}\right)\right]+e^{-t}\left[-\frac{C_1\sqrt{2}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{2}t}{4}\right)+\frac{C_2\sqrt{2}}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{2}t}{4}\right)\right]$

$+e^{-t}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{2}t}{4}\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{2}t}{4}\right)\right]+m$

$p(t)=e^{-t}\left[\left(-\frac{C_1}{3}+\frac{C_2\sqrt{2}}{3}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{2}t}{4}\right)+\left(-\frac{C_2}{3}-\frac{C_1\sqrt{2}}{3}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{2}t}{4}\right)\right]+m.$

Finalmente $p(t)=\frac{1}{6}-3u(t)+\frac{1}{3}\pi(t) \Rightarrow u(t)=\frac{1}{18}+\frac{\pi(t)}{9}-\frac{p(t)}{3}$

$u(t)=\frac{1}{18}+\frac{1}{9}\left\{e^{-t}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{2}t}{4}\right)\right]+m\right\}-\frac{1}{3}\left\{e^{-t}\left[\left(\frac{-C_1+C_2\sqrt{2}}{3}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{2}t}{4}\right)+\left(\frac{-C_2-C_1\sqrt{2}}{3}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{2}t}{4}\right)\right]+m\right\}$

$u(t)=\frac{1}{18}+e^{-t}\left[\left(\frac{2C_1-C_2\sqrt{2}}{9}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{2}t}{4}\right)+\left(\frac{2C_2+C_1\sqrt{2}}{9}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{2}t}{4}\right)\right]-\frac{2}{9}m.$

b) Todavía fluctúan y son convergentes. c) $\bar{u}=\lim_{t\to\infty}u(t)=\frac{1}{18}-\frac{2}{9}m$. $\bar{p}=\lim_{t\to\infty}p(t)=m$.

d) Como $\bar{u}=\frac{1}{18}-\frac{2}{9}m$ y $\bar{p}=m \Rightarrow \bar{u}=\frac{1}{18}-\frac{2}{9}\bar{p}$. Luego, $\bar{u}$ y $\bar{p}$ están funcionalmente relacionados. En la curva de Phillips no se tendría la línea vertical, ya que hay una dependencia funcional (lineal) con pendiente negativa. La suposición que permite tener la línea vertical es $g=1$.