David Plazas Escudero - 201710005101

Parcial 3: Economía Matemática

1. $A=\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$, $y'''-6y''+11y'-6y=0$

- $y(t)=e^x \rightarrow \dot{y}(t)=e^x \rightarrow \ddot{y}(t)=e^x \rightarrow \dddot{y}(t)=e^x$

$e^x-6e^x+11e^x-6e^x=0 \longrightarrow 0=0$ ✓

- $y(t)=e^{2x} \rightarrow \dot{y}(t)=2e^{2x} \rightarrow \ddot{y}(t)=4e^{2x} \rightarrow \dddot{y}(t)=8e^{2x}$

$8e^{2x}-6(4e^{2x})+11(2e^{2x})-6e^{2x}=0 \longrightarrow 0=0$ ✓

- $y(t)=e^{3x} \rightarrow \dot{y}(t)=3e^{3x} \rightarrow \ddot{y}(t)=9e^{3x} \rightarrow \dddot{y}(t)=27e^{3x}$

$27e^{3x}-6(9e^{3x})+11(3e^{3x})-6e^{3x}=0 \longrightarrow 0=0$ ✓

$$W(x)=\begin{bmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{bmatrix}$$

$$\det(W(x))=e^x(18e^{5x}-12e^{5x}) - e^{2x}(9e^{4x}-3e^{4x}) + e^{3x}(4e^{3x}-2e^{3x})$$
$$=6e^{6x}-6e^{6x}+2e^{6x}=2e^{6x}\neq 0$$

Luego A es un conjunto de soluciones LI.

<u>Sol general</u>: $y(t)=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}$.

2. a) $\dot{P}(t)=K[\alpha-\beta P+m\dot{P}+n\ddot{P}+\gamma-\delta P] \rightarrow Kn\ddot{P}(t)+(Km-1)\dot{P}(t)-K(\beta+\delta)P(t)=-K(\alpha+\gamma)$

$$\ddot{P}(t)+\left(\frac{Km-1}{Kn}\right)\dot{P}(t)-\frac{(\beta+\delta)}{n}P(t)=-\frac{(\alpha+\gamma)}{n}$$

b) Como $-\frac{(\alpha+\gamma)}{n}$ es constante, se propone $P_p(t)=\xi$, $\xi\in\mathbb{R}$.

$\dot{P}_p(t)=\ddot{P}_p(t)=0 \Rightarrow -\frac{(\beta+\delta)}{n}\xi=-\frac{(\alpha+\gamma)}{n} \Rightarrow \xi=\frac{\alpha+\gamma}{\delta+\beta}=P^*$. $P_p(t)=P^*$.

c) El polinomio característico es: $\lambda^2+\left(\frac{Km-1}{Kn}\right)\lambda-\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right)=0$

Se obtiene solución oscilatoria cuando $\Delta<0$:

$$\Delta=b^2-4ac=\left(\frac{Km-1}{Kn}\right)^2+4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right)<0 \rightarrow \frac{(Km-1)^2+4K^2n(\beta+\delta)}{K^2n^2}<0$$

$$\Rightarrow (Km-1)^2+4K^2n(\beta+\delta)<0 \rightarrow \boxed{n<\frac{-(Km-1)^2}{4K^2(\beta+\delta)}} \Longleftrightarrow \boxed{n>\frac{(Km-1)^2}{4K^2(\beta+\delta)}}$$

d) Se obtiene estabilidad oscilatoria cuando $-\frac{b}{2a}<0$

$$\frac{1-Km}{2Kn}<0 \Rightarrow \text{Si } n>0 \Rightarrow 1-Km<0$$
$$\Rightarrow 1<Km \Rightarrow \boxed{K>\frac{1}{m}}$$

3. $\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + y(t) = 2t^2$

Polinomio Característico

Homogénea: $\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+y(t)=0 \Rightarrow \lambda^2+4\lambda+1=0$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{3\cdot 4}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$

Solución de la homogénea $\boxed{y_h(t) = e^{-2t}\left[C_1 \cos(\sqrt{3}t) + C_2 \sin(\sqrt{3}t)\right]}$

Particular: Se tiene $f(t)=2t^2$, luego, se propone una solución $y_p(t)=A_0+A_1t+A_2t^2$.

$\Rightarrow \dot{y}_p(t) = A_1 + 2A_2t \Rightarrow \ddot{y}_p(t) = 2A_2$. Reemplazando:

$2A_2 + 4(A_1+2A_2t)+(A_0+A_1t+A_2t^2) = 2t^2 \Rightarrow A_2t^2+(8A_2+A_1)t+(2A_2+4A_1+A_0)=2t^2$

Igualando coeficientes: $\begin{cases} \boxed{A_2 = 2} \\ 8A_2+A_1=0 \Rightarrow 16+A_1=0 \Rightarrow \boxed{A_1=-16} \\ 2A_2+4A_1+A_0=0 \Rightarrow -60+A_0=0 \Rightarrow \boxed{A_0=60} \end{cases}$

Luego, $\boxed{y_p(t) = 2t^2-16t+60}$

$\Rightarrow$ Solución general: $\boxed{y(t)=e^{-2t}\left[C_1\cos(\sqrt{3}t)+C_2\sin(\sqrt{3}t)\right]+2t^2-16t+60}$

4. $P_{t+1} = P_t - 0.3[-3+6P_t-21+2P_t]$

$P_{t+1} = P_t - 0.3[-24+8P_t] \Rightarrow P_{t+1} = P_t + 7.2 - 2.4P_t \Rightarrow \boxed{P_{t+1} + 1.4P_t = 7.2.}$

Homogénea: $P_{t+1} + 1.4P_t = 0$. Se propone $P_t = Ab^t$ como solución:

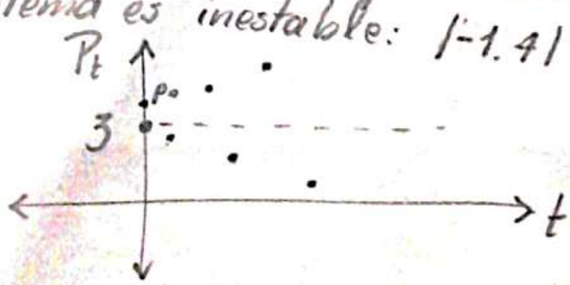
$Ab^{t+1} + 1.4Ab^t = 0 \longrightarrow Ab^t[b+1.4]=0 \Rightarrow b=-1.4 \quad P_{ht} = A(-1.4)^t$

Particular: $P_{pt} = K$, $K \in \mathbb{R}$. $\rightarrow K+1.4K = 7.2 \rightarrow K = \dfrac{7.2}{2.4} = 3$

Solución: $P_t = A(-1.4)^t + 3$. Si se tiene $P_0 = p_0$ fijo (Cond. inicial)

Se tendría $P_t = (p_0-3)(-1.4)^t + 3$.

Como la base de exponenciación es mayor a 1 (en magnitud), el sistema es inestable: $|-1.4| > 1$.



4. a) $Qd_t = \alpha - \beta P_t$

$Qs_t = K, \ K \in \mathbb{R}$

$P_{t+1} = P_t - 0.3[Qs_t - Qd_t]$

$P_{t+1} = P_t - 0.3[K - \alpha + \beta P_t]$

$P_{t+1} = P_t - 0.3[K - \alpha] - 0.3\beta P_t$

$P_{t+1} = (1 - 0.3\beta)P_t - 0.3[K - \alpha]$

$\boxed{P_{t+1} + (0.3\beta - 1)P_t = 0.3(\alpha - K)}$

Homogénea: $P_{t+1} + (0.3\beta - 1)P_t = 0$. Se propone $P_t = Ab^t$

$Ab^t[b + (0.3\beta - 1)] = 0 \Rightarrow \boxed{b = 1 - 0.3\beta}$ $P_{ht} = A(1 - 0.3\beta)^t$

Particular: Si $0.3\beta - 1 \neq -1 \Rightarrow \beta \neq 0$ ✓. Se propone $P_{pt} = L, \ L \in \mathbb{R}$.

$L + (0.3\beta - 1)L = 0.3(\alpha - K)$

$L[0.3\beta - \cancel{1} + \cancel{1}] = 0.3(\alpha - K) \Rightarrow L = \dfrac{\alpha - K}{\beta}$

Solución: $P_t = A(1 - 0.3\beta)^t + \dfrac{\alpha - K}{\beta}$

Para que tenga relevancia económica, se impone $K > 0$ como oferta positiva. En particular, $K < \alpha$, para obtener precios positivos (en general si es estable.

b) Para que sea estable $|1 - 0.3\beta| < 1 \Rightarrow -1 < 1 - 0.3\beta < 1$

$\Rightarrow -2 < -0.3\beta < 0 \Rightarrow 0 < 0.3\beta < 2 \Rightarrow \boxed{0 < \beta < \dfrac{20}{3}}$

Scanned with CamScanner