+2 hojas ✓

UNIVERSIDAD EAFIT

ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Optimización 1 Parcial 2 (20 %) Tem B 21 de septiembre de 2018

Nombre: David Plazas Escudero Nota: 4.4
201710005101

Indicaciones para realizar el examen:
No se permite el uso de ningún material de soporte en el examen. No se permite portar celulares en el acto del examen y deben estar guardados y apagados. Se debe responder solo lo que se pregunta. Se evalúa lo que se responde, no lo que se quiso decir.

- **Pregunta 1 (1 punto)**

a. Responda si la siguiente afirmación es Verdadera (V) ó Falsa (F) argumentando de forma concisa **el por qué** es Verdadera o Falsa:
Sean dos modelos primal (max z=cx) y dual respectivamente (min w=by) de un mismo problema. En un seminario el estudiante Mario resuelve correctamente el modelo primal y en la tabla óptima z*= 91. Otro estudiante Luis está resolviendo el modelo dual y en una iteración intermedia el valor de w le da 87. Mario le dice a Luis que revise pues tiene algo mal, y Luis le dice que sus resultados obtenidos hasta el momento son correctos.
¿Cuál de los dos tiene la razón? ¿Pudieran tener los dos la razón? Argumente su respuesta.

b. Usted terminó de resolver un problema de PL donde x, y son variables que indican la cantidad de kilogramos de dos productos a producir. Tiene 3 restricciones, cada una corresponde a limitaciones de un tipo de recurso diferente.

A partir de la tabla óptima obtenida que se muestra, y teniendo en cuenta que la persona que le pidió le ayudara a resolver el problema no sabe NADA de Optimización, diga de manera clara y concisa cuál sería la respuesta más amplia que le daría acorde a los resultados obtenidos, que podría ser beneficioso para el cliente.

	x	y	S_1	S_2	S_3	PD
S_1	2	0	1	-1	0	18
y	2/3	1	0	1/3	0	14
S_3	1	0	0	0	1	12
z_j-c_j	0	0	0	1	0	42

✓ **Pregunta 2 (2 puntos)**
Dado el siguiente modelo de PL

$$\max z=12x_1+4x_2$$
$$2x_1+x_2\leq 50$$
$$x_1+x_2\leq 34$$
$$x_1+2x_2\leq 60$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

a. Diga cuál sería la mejor forma de resolverlo, de acuerdo a la metodología revisada y ejercitada en clases. Justifique su respuesta.

b. Resuélvalo por el método que entienda conveniente (se debe resolver por un solo método) y dé su solución óptima, si existe.

Nota: Se tendrá en cuenta si usa el método más eficiente haciendo además el mínimo de cálculos necesarios para ello.

Pregunta 3 (2 puntos)
Responda en el orden que se pregunta (todo a partir de la tabla óptima dada, en ningún caso resolver un problema desde el inicio).
El inciso a) no influye en la respuesta que debe dar en b)
Evite hacer cálculos innecesarios, piense primero lo que va a hacer!

Dado el siguiente problema de PL:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a. } 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 25 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

y la tabla óptima obtenida:

VB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	PD
x_1	1	-1/3	0	1/3	-1/3	5/3
x_3	0	1	1	-1/5	2/5	3
z_j-c_j	0	2	0	1/5	3/5	17

a. En la tabla óptima hay **exactamente un solo dato** erróneo. Diga cuál es y justifique por qué.
b. Dé la solución óptima del modelo dual. Justifique su respuesta.
c. Diga cuál sería el recurso que propondría aumentar para mejorar el valor total de la ganancia ya obtenida, teniendo en cuenta el aumento producido por unidad de recurso aumentado. Dé el valor máximo permisible de aumentar ese recurso para no tener que reoptimizar.
d. Aumente a la máxima cantidad permisible el recurso adecuado según respuestas en c) y dé la nueva solución óptima con esta modificación.

Anexos sin explicaciones de los mismos:

RELACIÓN PRIMAL-DUAL		
max	⟺	min
restricción i ≤	⟺	variable i ≥ 0
restricción i =	⟺	variable i no restringida
restricción i ≥	⟺	variable i ≤ 0
variable i ≥ 0	⟺	restricción i ≥
variable i no restringida	⟺	restricción i =
variable i ≤ 0	⟺	restricción i ≤

B^{-1}

$B^{-1}A$

$c_B B^{-1}$

$c_B B^{-1}A - c$

$B^{-1}b$

$c_B B^{-1}b$

TD

David Plazas E. 201710005101 Nasdwscrea adhula

1\. a) $\max z = cX$ $\qquad$ $\min W = by$

$z^* = 91$ $\qquad$ $W = 87$

Mario $\qquad$ Luis.

Por lo tanto Mario tiene la razón y Luis tiene un error en alguna de sus iteraciones.

Error(3)

Como Luis está resolviendo el dual del modelo de Mario, por el principio fundamental de dualidad, ambos deben llegar al mismo valor de la f.o..
No obstante, como Luis está resolviendo un problema de minimizar, su valor de la f.o. no podrá aumentar de $W=87$ a 91 para obtener la misma solución que obtuvo Mario.

b) $x \rightarrow$ Kg a producir de A.
$y \rightarrow$ Kg a producir de B.

3 restricciones =

	x	y	S_1	S_2	S_3	b	
S_1	2	0	1	-1	0	18	9
y	2/3	1	0	1/3	0	14	$\frac{14}{2/3}$ 21
S_3	1	0	0	0	1	12	
$Z_j - C_j$	0	0	0	1	0	42	

	x	y	S_1	S_2	S_3	b
x	1	0	1/2	-1/2	0	9
y	0	1			0	8
S_3	0	0			1	3
$Z_j - C_j$	0	0	0	1	0	42

Respuesta: Con las limitaciones entregadas de recursos disponibles, lo máximo que puede ganar son 42 unidades monetarias. Ésto se obtuvo a partir de producir sólo Kilogramos del producto B; en este caso, 14 Kilogramos de B.

¿Porqué? Hasta cuánto puede aumentarlo?

Además, si se aumenta el segundo recurso, usted podrá aumentar sus ganancias en 1 unidad monetaria, por cada unidad de recurso aumentado.

$P = (0,14)$

$Q = (9,8)$

$S = (0,14)(1-t) + (9,8)t$

$0 \le t \le 1$

$\Rightarrow$ Infinitas soluciones.

Por otra parte, si desea puedo otorgar tantas soluciones como usted desee y siempre usted obtendrá el máximo posible de ganancias. Por ejemplo, si produce 9Kg de A y 8Kg de B, también podrá obtener 42 unidades monetarias.

$18 - \Delta b_2 \ge 0$

$14 + \frac{\Delta b_2}{3} \ge 0$

$18 \ge \Delta b_2$

$-42 \le \Delta b_2$

$-42 \le \Delta b_2 \le 18$

Pero cuidado, sólo puede aumentar hasta 18 $\rightarrow$ más de lo que se tiene el recurso 2 para que se cumpla lo dicho.

2. $\max Z = 12x_1 + 4x_2$

s.t. $2x_1 + x_2 \leq 50$

$x_1 + x_2 \leq 31$

$x_1 + 2x_2 \leq 60$

$x_1, x_2 \geq 0$

$\xrightarrow{\text{dual}}$

$\min W = 50y_1 + 31y_2 + 60y_3$

s.t. $2y_1 + y_2 + y_3 \geq 12$

$y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4$

$y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0 \quad y_3 \geq 0$

Método	# Var.	# Restricc.	# Var. Artif.	Modelo
Simplex básico	5	3	0	Primal
Gran M / Dos fases	7	2	2	Dual
Dual Simplex	5	2	0	Dual

a) Mejor forma: Algoritmo dual del Simplex al modelo dual

$\min W = 50y_1 + 31y_2 + 60y_3$

$2y_1 + y_2 + y_3 - S_1 = 12 \rightarrow -2y_1 - y_2 - y_3 + S_1 = -12$

$y_1 + y_2 + 2y_3 - S_2 = 4 \rightarrow -y_1 - y_2 - 2y_3 + S_2 = -4$

X_B	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	b
S_1	-2	-1	-1	1	0	-12 →
S_2	-1	-1	-2	0	1	-4
$Z_j - C_j$	-50 ↑	-34	-60	0	0	0

$\text{Min}\left(\left|\frac{-50}{-2}\right|, \left|\frac{-34}{-1}\right|, \left|\frac{-60}{-1}\right|\right) = 25$

X_B	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	b
y_1	1	1/2	1/2	-1/2	0	6
S_2	0				1	2
$Z_j - C_j$	0	-9	-35	-25	0	300

$-4 - \frac{(-12)(-1)}{-2} = -4 + 6 = 2$

$-31 - \frac{(-1)(-50)}{-2} = -9$

$-60 - \frac{(-1)(-50)}{-2} = -35$

$0 - \frac{(-50)(1)}{-2} = -25$

Solución al primal: $Z = 300$

$x_1 = 25 \quad S_1 = 0$

$x_2 = 0 \quad S_2 = 9$

$S_3 = 35$

...id Plazas E. 201710005101 Muchísimo cálculo innecesario!

a) $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$

$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 3 \end{bmatrix}$ ✓

Prueba Adicional.

$C_B(B^{-1}b) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5/3 \\ 3 \end{bmatrix} = 17$ ✓

$C_B(B^{-1}A) - C =$

$C_B B^{-1} = \underset{1\times2}{\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}}\underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1/5 & 3/5 \end{bmatrix}$ ✓

$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$(C_B B^{-1})A - C = \underset{1\times2}{\begin{bmatrix} 1/5 & 3/5 \end{bmatrix}}\underset{2\times3}{\begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad \frac{3}{5} - \frac{4}{3} = -1/3$

$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ✓

→ Dato erróneo. Era 1/3

$B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

✓

b) Tabla óptima correcta:

X_B	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	b
X_1	1	-1/3	0	1/3	1/3	5/3
X_3	0	1	1	-1/5	2/5	3
$Z_j - C_j$	0	2	0	1/5	3/5	17

Solución al problema dual, se debe observar los $Z_j - C_j$ de la tabla óptima del primal.

Luego, $W = 17$

$Y_1 = 1/5 \quad S_1 = 0$

$Y_2 = 3/5 \quad S_2 = 2$

$S_3 = 0$

c) Recurso a aumentar:

Restricción 2, ya que tiene el precio sombra mayor. Por cada unidad aumentada de este recurso, el valor de la f.o. aumentará en $\frac{3}{5}$.

Para no tener que reoptimizar, debe cumplirse:

$\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\Delta b_2 \geq 0 \rightarrow 5 \geq \Delta b_2$

$\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\Delta b_2 \geq 0 \rightarrow -1 \leq \Delta b_2$

$-1 \leq \Delta b_2 \leq 5.$ $\quad b_2 = \Delta b_2 + 20$

$-1 \leq b_2 - 20 \leq 5 \leftarrow b_2 - 20 = \Delta b_2$

$19 \leq b_2 \leq 25$

Valor máximo para no reoptimizar $b_2 = 25$

d) $b = \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{b} = \begin{bmatrix} 25 \\ 25 \end{bmatrix}$ $b^* = B^{-1}\bar{b} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 25 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

Solución óptima nueva: $x_1 = 0$ $\quad s_1 = 0$

$z^* = 20$ $\quad x_3 = 5$ $\quad s_2 = 0$

$x_2 = 0$