David Plazas Escudero

Tarea 1 - Economía Matemática.

1. Sea $S(Y)+T(Y)=I(Y)+G_0$ la condición para el equilibrio del ingreso nacional, donde S, Y, T, I y G son los ahorros, el ingreso nacional, los impuestos, las inversiones y el gasto público del gobierno.

Se asume que $S', T', I' > 0$ y $S'+T' > I'$, además todas continuas.

a) Interprete el significado de S', T', I'.

Cada derivada significa cuánto es la tasa de cambio de cada variable, respecto a cambios en el ingreso nacional Y. Como se asume que S', T' y I' son todas positivas, significa que tanto los ahorros, los impuestos y la inversión crecen a medida que el ingreso nacional crece.

b) Verifique si se cumplen las condiciones para el teorema de la función implícita. Escriba la identidad de equilibrio.

En este caso, $F(Y; G_0) = S(Y)+T(Y)-I(Y)-G_0$. Por hipótesis se sabe que las derivadas son continuas. Por otra parte,

$$J = \left[\frac{dF}{dY}\right] = [S'(Y)+T'(Y)-I'(Y)]$$

También por hipótesis se sabe que $S'(Y)+T'(Y) > I'(Y)$ y son todas positivas, luego $\det(J) = S'(Y)+T'(Y)-I'(Y) \neq 0$. Por lo tanto se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita $\Rightarrow Y^* = Y^*(G_0)$

Identidad de Equilibrio: $S(Y^*)+T(Y^*)-I(Y^*)-G_0 \equiv 0$.

c) Calcule dY^*/dG_0 e interprete:

$$\frac{dY^*}{dG_0} = \frac{-\partial F/\partial G_0}{\partial F/\partial Y^*} = -\frac{-1}{S'(Y^*)+T'(Y^*)-I'(Y^*)} = \frac{1}{S'(Y^*)+T'(Y^*)-I'(Y^*)} > 0.$$

Como dY^*/dG_0 es positiva, se puede concluir que a incrementos en el gasto público del gobierno, el ingreso nacional también aumentará.

2. Sean $\begin{cases} Q_D = D(P, Y_0) \\ Q_S = S(P, T_0) \end{cases}$ funciones de demanda y oferta.

$Y_0 \rightarrow$ Ingresos. $T_0 \rightarrow$ Impuestos. Suponga que: $\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial D}{\partial P} < 0, \ \dfrac{\partial D}{\partial Y_0} > 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial P} > 0, \ \dfrac{\partial S}{\partial T_0} < 0 \end{matrix}\right\}$ Continuas

a) Escriba la condición de equilibrio en una ecuación.

Para el equilibrio $Q_D = Q_S = Q \Rightarrow \begin{cases} Q = D(P, Y_0) \\ Q = S(P, Y_0) \end{cases} \Rightarrow D(P, Y_0) = S(P, Y_0)$.

b) Verifique si se puede aplicar el teorema de la función implícita.

En este caso $F(P; Y_0, T_0) = D(P, Y_0) - S(P, T_0)$. Se sabe por hipótesis que las derivadas son continuas. Por otra parte

$$J = \left[\frac{\partial F}{\partial P}\right] = \left[\frac{\partial D(P, Y_0)}{\partial P} - \frac{\partial S(P, T_0)}{\partial P}\right] \Rightarrow \det(J) = \frac{\partial D}{\partial P} - \frac{\partial S}{\partial P}$$

Como $\partial D/\partial P < 0$ y $\partial S/\partial P > 0 \Rightarrow \det(J) < 0$.

Por lo que, entonces, se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita $\Longrightarrow P^* = P^*(Y_0, T_0)$

Identidad de equilibrio $D(P^*, Y_0) - S(P^*, T_0) \equiv 0$.

c) Calcule e interprete $\dfrac{\partial P^*}{\partial Y_0}$ y $\dfrac{\partial P^*}{\partial T_0}$.

$$\frac{\partial P^*}{\partial Y_0} = -\frac{\partial F/\partial Y_0}{\partial F/\partial P^*} = -\frac{\partial D/\partial Y_0}{\partial D/\partial P^* - \partial S/\partial P^*} > 0$$

Como la derivada es positiva, incrementos en los ingresos producen incrementos en el precio en el equilibrio.

$$\frac{\partial P^*}{\partial T_0} = -\frac{\partial F/\partial T_0}{\partial F/\partial P^*} = \frac{\partial S/\partial T_0}{\partial D/\partial P^* - \partial S/\partial P^*} < 0$$

La derivada negativa implica que hay una relación inversamente proporcional entre los impuestos y el precio en el equilibrio. Es decir, a más impuestos, se tendrá menos precio de equilibrio P^*

d) Calcule e interprete $\partial Q^*/\partial T_0$ y $\partial Q^*/\partial Y_0$

En el equilibrio, $Q^* = D(P^*, Y_0) = S(P^*, T_0)$. Se utilizará $Q^* = S(P^*, T_0)$ para calcular $\partial Q^*/\partial Y_0$, pues $P^* = P^*(Y_0, T_0)$ y se podrá calcular por aplicación directa de la regla de la cadena.

$$\frac{\partial Q^*}{\partial Y_0} = \frac{\partial S}{\partial P^*} \cdot \frac{\partial P^*}{\partial Y_0} = \frac{(\partial S/\partial P^*)(\partial D/\partial Y_0)}{\partial S/\partial P^* - \partial D/\partial P^*} > 0$$

Luego, Q^* es una función creciente en $Y_0 \rightarrow$ a más ingresos, más alta la cantidad del bien en el equilibrio.

Finalmente, $\partial Q^*/\partial T_0$ se calculará de $Q^* = D(P^*; Y_0)$.

$$\frac{\partial Q^*}{\partial T_0} = \frac{\partial D}{\partial P^*}\frac{\partial P^*}{\partial T_0} = \frac{(\partial D/\partial P^*)(\partial S/\partial T_0)}{\partial D/\partial P^* - \partial S/\partial P^*} > 0.$$

Por lo que se tiene una relación directamente proporcional entre los impuestos T_0 y la cantidad del bien en el equilibrio.

3. Resuelva el punto 2 por método de ecuaciones simultáneas.

En este caso $F_1(P, Q; Y_0, T_0) = D(P, Y_0) - Q$ donde $\underbrace{Q = Q_D = Q_S}_{\text{Equilibrio.}}$

$F_2(P, Q; Y_0, T_0) = S(P, T_0) - Q$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial P} & \frac{\partial F_1}{\partial Q} \\ \frac{\partial F_2}{\partial P} & \frac{\partial F_2}{\partial Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial P} & -1 \\ \frac{\partial S}{\partial P} & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(J) = \frac{\partial S}{\partial P} - \frac{\partial D}{\partial P} > 0$$

y como las derivadas son continuas $\Rightarrow$ se cumple el teorema de la función implícita. Luego, $\begin{cases} P^* = P^*(Y_0, T_0) \\ Q^* = Q^*(Y_0, T_0) \end{cases}$ y se tienen las identidades de equilibrio $\begin{cases} D(P^*; Y_0) - Q^* \equiv 0 \\ S(P^*; T_0) - Q^* \equiv 0 \end{cases}$

Ahora, se pueden obtener $\frac{\partial P^*}{\partial Y_0}$ y $\frac{\partial P^*}{\partial Y_0}$ con el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial P^*} & \frac{\partial F_1}{\partial Q^*} \\ \frac{\partial F_2}{\partial P^*} & \frac{\partial F_2}{\partial Q^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P^*}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial Q^*}{\partial Y_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_1}{\partial Y_0} \\ -\frac{\partial F_2}{\partial Y_0} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial P^*} & -1 \\ \frac{\partial S}{\partial P^*} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P^*}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial Q^*}{\partial Y_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial D}{\partial Y_0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por regla de Cramer

$$\frac{\partial P^*}{\partial Y_0} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial D}{\partial Y_0} & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{(\partial D/\partial Y_0)}{|J|} = \frac{(\partial D/\partial Y_0)}{\partial S/\partial P^* - \partial D/\partial P^*}$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial Y_0} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial D}{\partial P^*} & -\frac{\partial D}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial S}{\partial P^*} & 0 \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{(\partial D/\partial Y_0)(\partial S/\partial P^*)}{\partial S/\partial P^* - \partial D/\partial P^*}$$

Análogamente, $\frac{\partial P^*}{\partial T_0}$ y $\frac{\partial Q^*}{\partial T_0}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial P^*} & \frac{\partial F_1}{\partial Q^*} \\ \frac{\partial F_2}{\partial P^*} & \frac{\partial F_2}{\partial Q^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P^*}{\partial T_0} \\ \frac{\partial Q^*}{\partial T_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_1}{\partial T_0} \\ -\frac{\partial F_2}{\partial T_0} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial P^*} & -1 \\ \frac{\partial S}{\partial P^*} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P^*}{\partial T_0} \\ \frac{\partial Q^*}{\partial T_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\partial S}{\partial T_0} \end{bmatrix}$$

Por regla de Cramer:

$$\frac{\partial P^*}{\partial T_0} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \frac{\partial S}{\partial T_0} & -1 \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{-(\partial S/\partial T_0)}{\partial S/\partial P^* - \partial D/\partial P^*}$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial T_0} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial D}{\partial P^*} & 0 \\ \frac{\partial S}{\partial P^*} & -\frac{\partial S}{\partial T_0} \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{(-\partial D/\partial P^*)(\partial S/\partial T_0)}{\partial S/\partial P^* - \partial D/\partial P^*}$$

4. Sea la demanda y oferta de un producto $Q_D = D(\underset{-}{P}, \underset{+}{t_0})$ $Q_S = Q_{S_0}$, donde t_0 es el gusto del consumidor del bien, y donde ambas derivadas son continuas.

a) ¿Qué significan los $-$ y $+$ bajo las variables?

Significa que $D(\cdot,\cdot)$ es una función estrictamente decreciente en P y creciente para t_0. Es decir: $\frac{\partial D}{\partial P} < 0$ y $\frac{\partial D}{\partial t_0} > 0$.

b) Escriba la condición de equilibrio en una ecuación.

Para el equilibrio $Q_D = Q_S \Rightarrow D(P, t_0) = Q_{S_0}$

c) ¿Es aplicable el teorema de la función implícita?

Por hipótesis se sabe que las derivadas de D son continuas y como Q_{S_0} es una función lineal, su derivada es continua.

Por otra parte, $F(P; t_0, Q_{S_0}) = D(P, t_0) - Q_{S_0}$

$J = [\partial F/\partial P] = \left[\frac{\partial D}{\partial P}\right]$ y sabemos que $\frac{\partial D}{\partial P} < 0 \Rightarrow \det(J) \neq 0$.

Luego, el teorema de la función implícita es aplicable.

$\Longrightarrow P^* = P^*(t_0, Q_{S_0}) \Rightarrow D(P^*, t_0) - Q_{S_0} \equiv 0$.

d) ¿Cómo varía el precio en el equilibrio respecto al gusto del consumidor?

$\frac{\partial P^*}{\partial t_0} = -\frac{\partial F/\partial t_0}{\partial F/\partial P^*} = -\frac{\partial D/\partial t_0}{\partial D/\partial P^*} > 0$. Como $\frac{\partial P^*}{\partial t_0} > 0 \Rightarrow$ a mayor gusto del consumidor, mayor será el precio en el equilibrio.

5. Considere el siguiente modelo de ingreso nacional:

$$Y - C(Y) - I(i) - G_0 = 0 \qquad 0 < C' < 1;\ I' < 0$$

$$KY + L(i) - M_{s0} = 0 \qquad K \in \mathbb{R}_+,\ L' < 0.$$

a) ¿Está la primera ecuación en forma de una condición de equilibrio?

Sí, ya que descompone los ingresos Y en sus componentes, en este caso C-consumo, I-inversión y G-gastos.

b) ¿Cuál es la cantidad de dinero demandado en el modelo?

$$L(i) = M_{s0} - KY.$$

c) Analice la estática comparativa para cambios en M_{s0} y G_0.

Se sabe que las derivadas son continuas.

Ahora, $F_1(Y, i; G_0, M_{s0}) = Y - C(Y) - I(i) - G_0$

$F_2(Y, i; G_0, M_{s0}) = KY + L(i) - M_{s0}$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Y} & \frac{\partial F_1}{\partial i} \\ \frac{\partial F_2}{\partial Y} & \frac{\partial F_2}{\partial i} \end{bmatrix} \Rightarrow |J| = \begin{vmatrix} 1 - \frac{dC}{dY} & -\frac{dI}{di} \\ K & \frac{dL}{di} \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{dC}{dY}\right)\frac{dL}{di} + K\frac{dI}{di}$$

Como $0 < \frac{dC}{dY} < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \frac{dC}{dY} < 1$, además $\frac{dL}{di} < 0$ y $\frac{dI}{di} < 0 \Rightarrow |J| < 0$.

$\Rightarrow$ Se cumple el teorema de la función implícita.

Luego, $Y = Y(G_0, M_{s0})$ y $i = i(G_0, M_{s0})$

$$\Rightarrow J \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G_0} \\ \frac{\partial i}{\partial G_0} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial G_0} \\ \frac{\partial F_2}{\partial G_0} \end{bmatrix} \Rightarrow J \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G_0} \\ \frac{\partial i}{\partial G_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando Cramer,

$$\frac{\partial Y}{\partial G_0} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{dI}{di} \\ 0 & \frac{dL}{di} \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{\frac{dL}{di}}{\left[\left(1 - \frac{dC}{dY}\right)\frac{dL}{di} + K\frac{dI}{di}\right]} > 0$$

Luego, la política fiscal tiene efectos positivos sobre los ingresos, la relación es directamente proporcional.

$$\frac{\partial i}{\partial G_0} = \frac{\begin{vmatrix} 1-\frac{dC}{dY} & 1 \\ k & 0 \end{vmatrix}}{|J|} = -k \Big/ \left[\left(1-\frac{dC}{dY}\right)\frac{dL}{di} + k\frac{dI}{di}\right] > 0$$

Un aumento en los gastos del gobierno (política fiscal expansiva) produce un aumento en la tasa de interés.

Para M_{s_0},

$$J\begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial M_{s_0}} \\ \frac{\partial i}{\partial M_{s_0}} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial M_{s_0}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial M_{s_0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\frac{\partial Y}{\partial M_{s_0}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\frac{dI}{di} \\ 1 & \frac{dL}{di} \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{dI}{di} \Big/ \left[\left(1-\frac{dC}{dY}\right)\frac{dL}{di} + k\frac{dI}{di}\right] > 0.$$

Un aumento en la oferta monetaria (política monetaria expansiva) produce un aumento en los ingresos nacionales.

$$\frac{\partial i}{\partial M_{s_0}} = \frac{\begin{vmatrix} 1-\frac{dC}{dY} & 0 \\ k & 1 \end{vmatrix}}{|J|} = \left(1-\frac{dC}{dY}\right) \Big/ \left[\left(1-\frac{dC}{dY}\right)\frac{dL}{di} + k\frac{dI}{di}\right] < 0$$

Un aumento en la oferta monetaria implica un decrecimiento en la tasa de interés.

6. Considere que el modelo del problema 5; suponga que mientras la demanda de dinero todavía depende de Y, ya no es afectado por la tasa de interés.

a) $Y - C(Y) - I(i) - G_0 = 0 = F_1(Y, i; G_0, M_{s_0}, L)$

$kY + L - M_{s_0} = 0 \longrightarrow$ la liquidez es una cantidad dada $= F_2(Y, i; G_0, M_{s_0}, L)$

b)

$$|J|' = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Y} & \frac{\partial F_1}{\partial i} \\ \frac{\partial F_2}{\partial Y} & \frac{\partial F_2}{\partial i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\frac{dC}{dY} & -\frac{dI}{di} \\ k & 0 \end{vmatrix} = k\frac{dI}{di} < 0.$$

$$\big||J'|\big| < \big||J|\big|$$

c) El teorema de la función implícita es aún aplicable.

d)

$$\frac{\partial Y}{\partial G_0} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{dI}{di} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{|J|} = 0$$

$\Rightarrow$ Si se supone que la tasa de interés no afecta la liquidez L, la política fiscal no tendría relevancia.

$$\frac{\partial i}{\partial G_0} = \frac{\begin{vmatrix} 1-\frac{dC}{dY} & 1 \\ k & 0 \end{vmatrix}}{|J|} = k \Big/ k\frac{dI}{di} = \left(\frac{dI}{di}\right)^{-1} < 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M_0} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\frac{dI}{di} \\ & 0 \end{vmatrix}}{|J|} = +\frac{dI}{di} \Big/ k\frac{dI}{di} = \frac{1}{k} > 0$$

$$\frac{\partial i}{\partial M_0} = \frac{\begin{vmatrix} 1-\frac{dC}{dY} & 0 \\ k & 1 \end{vmatrix}}{|J|} = \left(1-\frac{dC}{dY}\right) \Big/ k\frac{dI}{di} < 0$$

e) En este caso, como $\frac{\partial Y}{\partial G_0} = 0$, la política fiscal no tiene efecto alguno sobre los