**UNIVERSIDAD EAFIT**

**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**
**ESCUELA DE CIENCIAS**
**Sistemas Lineales (CM0440)**
**Parcial 2 (20%)**

Nombre: David Plazas Escudero Código: 201710005101 Nota: 4.7.

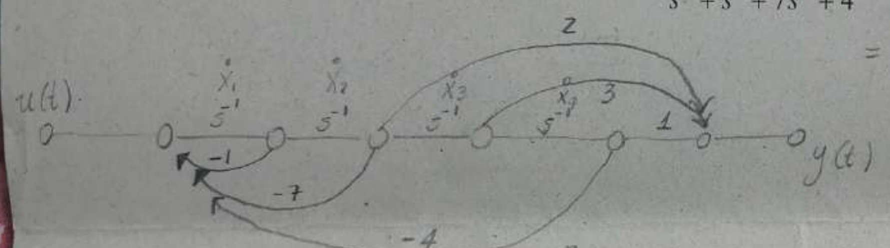
Profesor(a): Carlos M. Vélez S. Grupo: ______ Fecha: 30 de abril de 2019 Duración: 1.5 horas

Resolver los siguientes ejercicios. Trate de ser lo más ordenado posible para que la evaluación sea fácil y refleje la realidad. Si le hace falta espacio utilice las hojas en blanco al final.

1.0

1. (1.0) Dada la siguiente función de transferencia obtener el diagrama de estado y de ahí la ecuación de estado. Explique la idea del método a partir de la fórmula de Mason para la reducción de gráficos de flujo de señal (o diagramas de bloques). Observe que otra opción es convertir a una ecuación diferencial y de ahí a la ecuación de estado, pero en este caso no se pide eso y sería más tedioso, debido a la presencia de ceros (derivadas de la entrada).

$$G(s)=\frac{2s^2+3s+1}{s^4+s^3+7s^2+4} = \frac{2s^{-2}+3s^{-3}+s^{-4}}{1+s^{-1}+7s^{-2}+4s^{-4}} = \frac{2s^{-2}+3s^{-3}+s^{-4}}{1-(-s^{-1}-7s^{-2}-4s^{-4})}$$




$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 7x_2 - 4x_4 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = x_2 \\ \dot{x}_4 = x_3 \end{cases}$$ Ecuación de Estado

$y = x_4 + 3x_3 + 2x_2$ Ec. de Salida.

Fórmula de Mason: $G(s)=\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{n} P_i\Delta_i$

con $\Delta = 1-\sum L_i + \sum_{disj} L_iL_j - \ldots$

La idea del método es convertir la función de transferencia a una forma parecida a la fórmula de Mason. Se divide por la mayor potencia de $s$ para obtener algo de la forma $1-H(s)$ en el denominador y representar $H(s)$ como el término $\sum L_i$ del determinante en la fórmula de Mason, es decir, $H(s)$ son las sumas de las ganancias de los lazos y como no hay más términos, estos lazos serán disjuntos todos. El numerador de la función de transferencia es la suma de las ganancias de los caminos directos. Como hay 3 términos en este numerador, habrán 3 caminos directos a la salida. Como las ganancias son $s^{-1}$ (en algunos), se puede ver como un integrador de cada variable de estado, que al estar todas en serie, da la forma de ecuación de estado en variables de fase.

$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$

1.2. 2. (1.2) Dado el siguiente sistema de tiempo discreto (período de muestreo igual a 0.7 seg), dibujar la región de estabilidad en un plano $k_2 = f(k_1)$. Es decir, dibujar un plano cartesiano cuyos ejes son $k_1$ y $k_2$ y mostrar allí la región o conjunto de todas las soluciones posibles. Especifique, dos puntos no nulos de dicha región en los cuales el sistema es estable.

$\frac{1}{z+1.7}$

$$\begin{cases} y(k+2) + k_1 y(k+1) + k_2 y(k) = u(k+1) - 0.5u(k) \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{cases}$$

$Z\{y(k+2)\} + K_1 Z\{y(k+1)\} + K_2 Z\{y(k)\} = Z\{u(k+1)\} - 0.5 Z\{u(k)\}$

$z^2 Y(z) + K_1 z Y(z) + K_2 Y(z) = z U(z) - 0.5 U(z)$

$Y(z)(z^2 + K_1 z + K_2) = U(z)(z - 0.5) \rightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z - 0.5}{z^2 + K_1 z + K_2}$

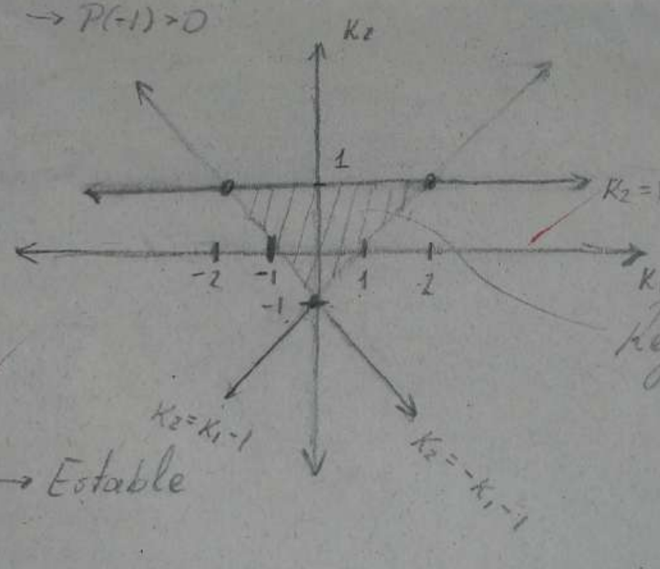
$P(z) = z^2 + K_1 z + K_2 \leftarrow$ Polinomio auxiliar.

Como el sistema es discreto, éste es estable si todos sus polos están en el círculo unitario. Para esto, utilicemos las condiciones necesarias (y suficientes, porque es de grado 2) de estabilidad de un sistema discreto.

Cond. Necesarias: (Suficientes)
1. $|a_0| > a_n \rightarrow |1| > K_2 \rightarrow K_2 < 1$
2. $P(1) > 0 \rightarrow P(1) = 1 + K_1 + K_2 > 0$
3. $(-1)^n P(-1) > 0 \rightarrow P(-1) = 1 - K_1 + K_2 > 0$

$n = 2$
$\rightarrow P(-1) > 0$

1. $K_2 < 1$
2. $K_1 + K_2 > -1$
3. $-K_1 + K_2 > -1$




2. $K_2 = -K_1 - 1$
3. $K_2 = K_1 - 1$
1. $K_2 = 1$

Región Estabilidad

2. Puntos:

a) $(K_1, K_2) = (0.5, 0)$
$P(z) = z^2 + 0.5z$
$\rightarrow z_1 = -0.5$
$z_2 = 0$
} Polos dentro círculo unitario $\rightarrow$ Estable

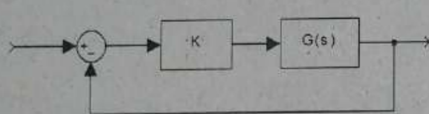
b) $(K_1, K_2) = (0; 0.5)$
$P(z) = z^2 + 0.5$
$\rightarrow z_1 = \sqrt{0.5}\, i$
$z_2 = -\sqrt{0.5}\, i$
} Polos en el círculo unitario. $\rightarrow$ Estable.

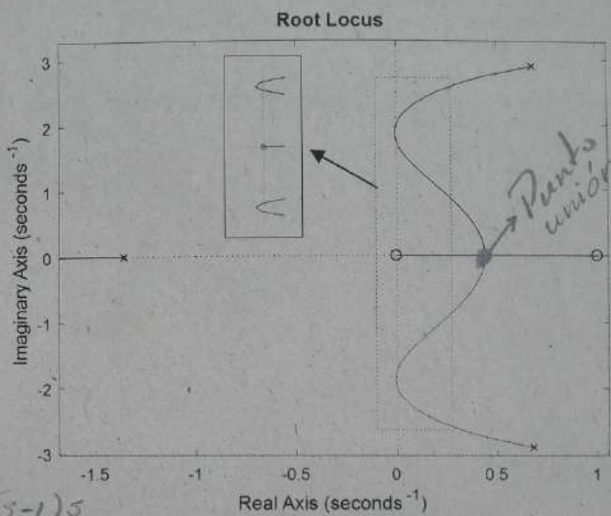
0.5 0.9

3. (1.6) Dada la siguiente función de transferencia continua de un sistema inestable, (a) (1.0) determinar el rango de valores de un controlador estático ( $G_c(s) = k$ ) en lazo cerrado que logre estabilizar el sistema. (b) (0.6) Explicar en lugar de las raíces de dicho sistema a la derecha (ceros, polos,

0.5

$$G(s) = \frac{s(s-1)}{s^3 + 7s + 12}$$




equivalente

$$G(s) = \frac{\frac{K(s-1)s}{s^3+7s+12}}{1+\frac{Ks(s-1)}{s^3+7s+12}} = \frac{\frac{K(s-1)s}{s^3+7s+12}}{\frac{s^3+7s+12+K(s^2-s)}{s^3+7s+12}} = \frac{K(s-1)s}{s^3+Ks^2+(7-K)s+12}$$

$$P(s) = s^3+Ks^2+(7-K)s+12$$

Estabilidad por Ruth-Hurwitz

Cond. Necesaria: todos los coef en $P(s)$, sean $>0$. $\Rightarrow \begin{cases} K>0 \\ 7-K>0 \end{cases}$

Arreglo R-H.

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} K>0 \\ 7>K \end{matrix}\right\} 0<K<7.$

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | 1 | $7-K$ |
| $s^2$ | $K$ | 12 |
| $s$ | $b_1$ | |
| 1 | 12 | |

$>0$

$$b_1 = \frac{12-(7K-K^2)}{-K} = \frac{K^2-7K+12}{-K} = \frac{(K-3)(K-4)}{-K}$$

Cond. Suficiente:

$* K \geq 0$ ($\Delta$)

$* \frac{(K-3)(K-4)}{-K} \geq 0 \rightarrow K \in (-\infty, 0) \cup [3, 4]$

$-\infty \quad + \quad 0 \quad - \quad 3 \quad + \quad 4 \quad - \quad \infty$

Con ($\Delta$) $K \in (3, 4)$

El sistema es ~~estable~~ cuando $K \in [3, 4]$.

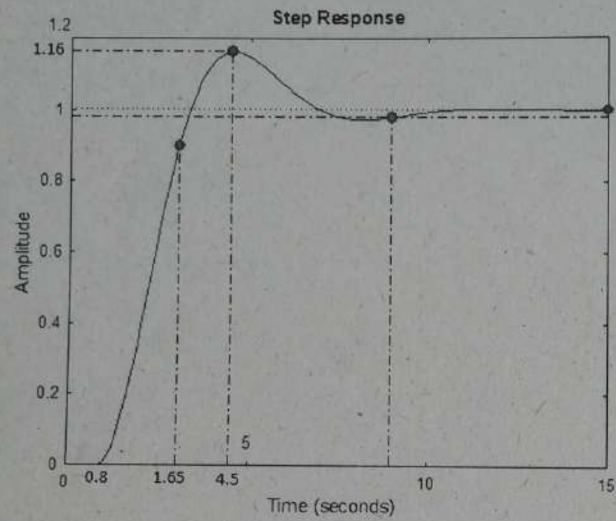
La expresión del root locus sería $0 = 1 + K\frac{s(s-1)}{s^3+7s+12} \rightarrow G(s) = \frac{s(s-1)}{s^3+7s+12}$

El root locus comienza en los polos de G(s), que son 2 complejos y 1 real en el semiplano derecho. El root locus termina en los ceros de G(s), que son fáciles de obtener: $s=0$ y $s=1$. Como eran complejos, hay un punto de unión, donde se vuelven estrictamente reales. La otra rama acaba en un cero infinito ($-\infty$).

Nótese que hay un rango "pequeño" de valores K que hacen que el root locus esté en el semiplano izquierdo $\rightarrow$ Sistema estable. ¿Cuál? $K \in (3,4)$

1.1

4. (1.2) La gráfica de la respuesta temporal de un sistema de orden 3 a una entrada **escalón unitario** se muestra abajo. Utilice dicha gráfica para obtener (identificar) un modelo aproximado de orden 2. $A=1$




$$t_p = \frac{\pi}{\omega_o\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$M_p = \frac{y_{max} - y_{ss}}{y_{ss}} = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$t_p = 4.5s$
$-0.8s$

$\tau = 0.8s$

$t_p = 3.7s$

$$M_p = \frac{1.16-1}{1} = 0.16$$

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$AK = 1$

$A = 1 \Rightarrow K = 1$

$$\ln M_p = \frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\ln^2 M_p = \frac{\pi^2\zeta^2}{1-\zeta^2}$$

$$(1-\zeta^2)\ln^2 M_p = \pi^2\zeta^2$$

$$\ln^2 M_p - (\ln^2 M_p)\zeta^2 = \pi^2\zeta^2$$

$$\ln^2 M_p = \pi^2\zeta^2 + (\ln^2 M_p)\zeta^2$$

$$\zeta^2 = \frac{\ln^2 M_p}{\pi^2 + \ln^2 M_p}$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{\ln^2 M_p}{\pi^2 + \ln^2 M_p}}$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{\ln^2 0.16}{\pi^2 + \ln^2 0.16}} = 0.50$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$3.7s = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-0.5^2}}$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{t_p\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\omega_0 = 0.98 \frac{rad}{s}$$

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2 e^{-\tau s}}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{0.98^2 e^{-0.8s}}{s^2 + 0.98s + 0.96}}$$