5. V e.p.i y sea $v_0 \in V$.

$T: V \to \mathbb{R}$

$Tu = \langle u, v_0 \rangle$

a) Lineal: Sean $u, v \in V$ y $a, b \in \mathbb{R}$

$$T(au+bv) = \langle au+bv, v_0 \rangle = \langle au, v_0 \rangle + \langle bv, v_0 \rangle$$
$$= a\langle u, v_0 \rangle + b\langle v, v_0 \rangle$$
$$= aTu + bTv$$

Acotado: $\|Tu\|_{\mathbb{R}} = |\langle u, v_0 \rangle| = \left| \|u\|_V \|v_0\|_V \cos\theta \right|$

$$\leq \|u\|_V \|v_0\|_V$$
$$\leq M \|u\|_V, \quad M = \|v_0\|_V$$

b) $\|T\| = \sup\limits_{\|u\|=1} \|Tu\|$

Ya vimos que $\|Tu\| \leq \|v_0\|_V \|u\|_V$

Luego, $\sup\limits_{\|u\|=1} \|Tu\| \leq \sup\limits_{\|u\|=1} \|v_0\|_V \|u\|_V$
$$= \|v_0\|_V$$

Por otro lado, $\sup\limits_{\|u\|=1} \|Tu\| \geq \|Tv\| \quad \forall v \in V: \|v\|_V = 1.$

En particular para $\dfrac{v_0}{\|v_0\|_V}$. Luego, $\sup\limits_{\|u\|=1} \|Tu\| \geq \left\| T\left(\dfrac{v_0}{\|v_0\|}\right) \right\|$

$$= \left| \left\langle \frac{v_0}{\|v_0\|}, v_0 \right\rangle \right|$$
$$= \frac{1}{\|v_0\|} |\langle v_0, v_0 \rangle|$$
$$= \frac{\|v_0\|^2}{\|v_0\|} = \|v_0\|$$

Como $\|v_0\|_V \leq \sup\limits_{\|u\|=1} \|Tu\| \leq \|v_0\|_V$

$\Rightarrow \|T\| = \|v_0\|_V$.