Tarea ✓

UNIVERSIDAD EAFIT	DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS PARCIAL DE ANÁLISIS I
Nombre: David Plazas E.	Código: 201710005101
Profesor: Orlando García Jaimes 15-10-2019	Calificación: 5.0

La duración de este examen es de 1.5 horas máximo y no se responderán preguntas durante su presentación.

1. Demostrar que cualquier sucesión de puntos en un espacio métrico compacto tiene una subsucesión convergente.

2.0

Sea (E,d) un espacio métrico compacto. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en E. Se tienen dos casos:

1) La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es finita. Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es finita, $\exists m\in\mathbb{N}$ a partir del cual $a_m = a_{m+1} = \dots$, luego $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, cualquier subsucesión será convergente y converge al mismo punto.

2) La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es infinita. En este caso, el conjunto $A=\{a_1,a_2,\dots\}$ es un subconjunto infinito de un espacio métrico compacto, por lo tanto, tiene al menos un punto de acumulación, dígase a.
Como a es p. de acumulación, $\forall \epsilon>0$, $B(a,\epsilon)$ contiene infinitos puntos de A. En particular, se puede construir la subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $d(a,a_{n_k}) < 1/k$. Por construcción, la subsucesión será convergente al punto de acumulación a.

$\Longrightarrow$ Cualquier sucesión de puntos de (E,d) (E compacto), tiene una subsucesión convergente. ∎

Scanned with CamScanner

2. Demuestre que los subconjuntos cerrados de espacios métricos completos son completos

2P Sea (E,d) un espacio métrico completo. Sea $S \subseteq E$ un conjunto cerrado.
Veamos que S es completo.

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en S. Como $S \subseteq E$ y E es
completo, se tiene que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a $x \in E$. Veamos que
$x \in S$. Como S es cerrado, los límites de las sucesiones convergentes
definidas en puntos de S pertenecen a S. Luego, $\exists y \in S$ tal
que $\lim_{n\to\infty} a_n = y \in S$. Por unicidad del límite de una sucesión convergente
$x = y$. Además, como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en E y está definida en
puntos de S $\rightarrow$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en S.

Luego, toda sucesión de Cauchy en S converge a un punto límite
dentro de S $\Rightarrow$ S es completo.

$\square$

3. Consideremos una sucesión de conjuntos cerrados y no vacíos $S_1, S_2, S_3, \dots$ de un espacio métrico compacto E, tales que $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \dots$, entonces existe al menos un punto que pertenece a cada unos de los subconjuntos $S_1, S_2, S_3, \dots$

2°

Sea (E,d) un espacio métrico compacto. Sean $S_1, S_2, \dots$ conjuntos cerrados no vacíos tales que $S_1 \supset S_2 \supset \dots$ y $S_i \subset E$.

Supongamos que no existe un punto que pertenece a todos los $\{S_i\}_{i\in I}$

En otras palabras $\bigcap_{i\in I} S_i = \phi$

Luego, $E = \left(\bigcap_{i\in I} S_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} S_i^c$. Por lo tanto $\{S_i^c\}_{i\in I}$ es una cubierta infinita de E. Como E es compacto, existe una subcubierta finita tal que $E = \bigcup_{i=1}^{n} S_{n_i}^c$. Luego, $E^c = \phi = \bigcap_{i=1}^{n} S_{n_i}$

Como $S_i \supset S_j$, $\forall i<j$, en particular, tomemos

Si $S_{n_1} \supset S_{n_2}$ y $S_{n_1} \cap S_{n_2} = \phi \Rightarrow S_{n_1} = \phi$ ó $S_{n_2} = \phi$, luego se puede justificar que $\exists i$ al menos entre 1 y n tal que $S_{n_i} = \phi$.

Pero esto es contradicción con que $S_i \neq \phi$, $\forall i \in I$.

Luego $\bigcap_{i\in I} S_i \neq \phi$.

4. Demuestre que la unión de un numero finito de subconjuntos compactos de un espacio métrico es compacto.

20

Sea (E,d) un espacio métrico compacto. Sean $\{S_i\}_{i=1}^{n}$ una colección de subconjuntos de E, todos compactos. Veamos que $\bigcup_{i=1}^{n} S_i$ es tambien compacto.

Como cada S_i es compacto, existe una subcubierta finita de abiertos $\{U_j^i\}_{j=1}^{k_i}$, para cada S_i, $i=1,\ldots,n$.

Sea $U_i = \{U_j^i\}_{j=1}^{k_i}$ la cubierta finita del S_i.

Como $\{S_i\}_{i=1}^{n}$ es finito, las uniones de sus subcubiertas finitas darán como resultado otra cubierta finita para la union de los S_i, como sigue

$$\bigcup_{i=1}^{n} S_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{u \in U_i} u$$

Que claramente es finita $\Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ es compacto. ∎