Parcial final: Economía Matemática
David Plazas Escudero - 201710005101

a) $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 16y_t = 3$. Trabajemos primero con la homogénea.

$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 16y_t = 0$. Se supone una solución de la forma $y_t = A\lambda^t$. Reemplazando: $A\lambda^{t+2} - 4A\lambda^{t+1} + 16A\lambda^t = 0$

$A\lambda^t[\lambda^2 - 4\lambda + 16] = 0$. Se tiene el polinomio auxiliar.

$\lambda^2 - 4\lambda + 16 = 0$, cuyo discriminante es $\Delta = (-4)^2 - 4(16) = 16 - 64$

$\Delta = -48 \rightarrow$ Soluciones complejas conjugadas.

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-48}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{48}i}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{16 \cdot 3}\,i}{2} = 2 \pm 2\sqrt{3}i = \alpha + \beta i$$

Cuyo módulo es $\|2 \pm 2\sqrt{3}i\| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$. Y fase

$$\theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = \operatorname{Arctan}(\sqrt{3}) = \pi/3.$$

Luego, la solución a la homogénea es:

$$y_{ht} = (4^t)\left[A_1 \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi t}{3}\right) + A_2 \operatorname{Sin}\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right]$$

Y claramente como $\|\lambda_i\| > 1$, y_t será divergente.

Particular: Supongamos una solución $y_{pt} = K$. Reemplazando

$$K - 4K + 16K = 3 \longrightarrow K = \frac{3}{1-4+16} = \frac{3}{13}.$$

La solución general es:

$$y_t = (4^t)\left[A_1 \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi t}{3}\right) + A_2 \operatorname{Sin}\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right] + 3/13.$$

2. $\begin{cases} x_{t+1} + x_t + 2y_t = 24, & x_0 = 10 \\ y_{t+1} + 2x_t - 2y_t = 9, & y_0 = 9 \end{cases}$

Sea $\vec{u_t} = (x_t, y_t)^T$. Reescribiendo el sistema; con $\vec{v_0} = (24, 9)^T$.

$\vec{u_{t+1}} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{u_t} = \vec{v_0}$. Trabajemos con la homogénea:

$\vec{u_{t+1}} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{u_t} = \vec{0}$. Supongamos una solución

$\vec{u_t} = (m\lambda^t, n\lambda^t)^T$. Reemplazando, se tiene

$$\begin{bmatrix} m\lambda^{t+1} \\ n\lambda^{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m\lambda^t \\ n\lambda^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda^t\left(\lambda \mathbb{I}_2 + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El cual es un sistema homogéneo para m y n. Para tener soluciones no triviales se pide que $\det\left(\lambda \mathbb{I}_2 + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right) = 0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 \\ 2 & \lambda-2 \end{bmatrix}\right) = (\lambda+1)(\lambda-2) - 4$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 2 - 4 = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda-3)(\lambda+2) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 3 \wedge \lambda_2 = -2.$$

Si $\lambda = 3$; se llega al sistema $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, de donde $m_1 = -\frac{n_1}{2}$. Si $\lambda = -2$, se llega al sistema $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, de donde $m_2 = 2n_2$. Llamando $n_{1,2} := A_{1,2}$, se tiene

$$\vec{u_{ht}} = \begin{bmatrix} -\frac{A_1}{2}(3^t) + 2A_2(-2)^t \\ A_1(3^t) + A_2(-2)^t \end{bmatrix}$$

Particular: Se supone una solución $\vec{U_{pt}} = (K_x, K_y)^T$, con $K_x, K_y \in \mathbb{R}$. Reemplazando:

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 9 \end{bmatrix} \longrightarrow \left(\mathbb{I}_2 + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Que es un sistema de ecuaciones lineal no homogéneo.

- Para que exista solución, $\det\left(\mathbb{I}_2 + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right) \neq 0$.

$$\det\left(\mathbb{I}_2 + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right) = (-2) - (4) = -6 \neq 0 \checkmark.$$

Luego, $\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} = \left(\mathbb{I}_2 + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 24 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{-6}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 24 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$

La solución general es $x_t = -\frac{A_1}{2}(3^t) + 2A_2(-2)^t + 7$

$$y_t = A_1(3^t) + A_2(-2)^t + 5$$

$$x_0 = -\frac{A_1}{2} + 2A_2 + 7 = 10 \longrightarrow -\frac{A_1}{2} + 2A_2 = 3 \rightarrow -A_1 + 4A_2 = 6$$

$$y_0 = A_1 + A_2 + 5 = 9 \longrightarrow A_1 + A_2 = 4 \qquad A_1 + A_2 = 4$$

$$\hookrightarrow A_1 = 2 \qquad 5A_2 = 10 \longrightarrow A_2 = 2.$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_t &= -(3^t) + 4(-2)^t + 7 \\ y_t &= 2(3^t) + 2(-2)^t + 5 \end{aligned}}$$

3. $Y_t = C_t + I_t + G_0 \qquad (1)$

$C_t = \gamma Y_{t-1}, \quad \gamma \in (0,1) \qquad (2)$

$I_t = \alpha(C_t - C_{t-1}), \quad \alpha > 0. \qquad (3)$

(2) en (3): $I_t = \alpha(\gamma Y_{t-1} - \gamma Y_{t-2})$ (4)

(2)(4) en (1): $Y_t = \gamma Y_{t-1} + \alpha(\gamma Y_{t-1} - \gamma Y_{t-2}) + G_0$

a) $Y_t = \gamma Y_{t-1} + \alpha\gamma Y_{t-1} - \alpha\gamma Y_{t-2} + G_0$

$$Y_t = (1+\alpha)\gamma Y_{t-1} - \alpha\gamma Y_{t-2} + G_0 \longrightarrow \boxed{Y_t - (1+\alpha)\gamma Y_{t-1} + \alpha\gamma Y_{t-2} = G_0}$$

b) Se supone $Y_t = K$ como solución particular. Reemplazando: $K - (1+\alpha)\gamma K + \alpha\gamma K = G_0 \longrightarrow K = \dfrac{G_0}{1-(1+\alpha)\gamma+\alpha\gamma} = \dfrac{G_0}{1-\gamma}$. Claramente $1-\gamma \neq 0$, ya que $\gamma \in (0,1)$. Luego, $\boxed{Y_{pt} = \dfrac{G_0}{1-\gamma}}$

c) Se tiene $\lambda^2 - (1+\alpha)\gamma\lambda + \alpha\gamma = 0$ como polinomio auxiliar. El discriminante es: $\Delta = [(1+\alpha)\gamma]^2 - 4\alpha\gamma$. Para tener raíces complejas, $\Delta < 0$. Luego, $(1+\alpha)^2\gamma^2 - 4\alpha\gamma < 0$. De donde

$\gamma < \dfrac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$ para tener raíces complejas.

d) Tomemos un polinomio $x^2 + bx + c = 0$. Las raíces son $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4c}}{2}$. Luego, $x_1 x_2 = \left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}\right)\left(\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}\right)$ $= \dfrac{1}{4}\left(b^2 - (b^2-4c)\right) = c$. En nuestro caso, $c = \alpha\gamma$. Por lo tanto,

(b) $\boxed{\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \alpha\gamma}$. Para el mismo polinomio $x^2+bx+c=0$, se tiene $x_1 + x_2 = \left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}\right) + \left(\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}\right) = -b$. En nuestro caso $b = -(1+\alpha)\gamma$. De donde $\boxed{\lambda_1 + \lambda_2 = (1+\alpha)\gamma}$ (a)

(c) $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) = 1 - (\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_1\lambda_2$. Si reemplazamos (a), (b)

Se tiene entonces que $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) = 1-(1+\alpha)\gamma + \alpha\gamma$

$\Longrightarrow (1-\lambda_1)(1-\lambda_2) = 1-\gamma$. Como $\gamma \in (0,1) \rightarrow 1-\gamma \in (0,1)$.

Luego, $0 < (1-\lambda_1)(1-\lambda_2) < 1$.

4. $$\max_{s.t.} J(T) = \int_0^T [y(t)u(t) - u^2(t) - y^2(t)]\,dt$$

$$\dot{y}(t) = u(t),\quad y(0) = y_0,\quad y(T) \text{ libre.}$$

El Hamiltoniano del problema es:

$H(t, y(t), u(t), \lambda(t)) = y(t)u(t) - u^2(t) - y^2(t) + \lambda(t)[u(t)]$.

Notemos que $\frac{\partial H}{\partial u} = y(t) - 2u(t) + \lambda(t)$ y $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2 < 0$.

Luego, el Hamiltoniano es cóncavo respecto a $u(t)$

$\Longrightarrow$ tiene máximo. Una condición necesaria para dicho máximo es: $\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \longrightarrow u(t) = \frac{y(t) + \lambda(t)}{2}$ (1)

La ecuación de estado es: $\dot{y}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u(t)$. Reemplazando (1) se tiene $\dot{y}(t) = \frac{y(t) + \lambda(t)}{2}$ (2).

Por otra parte, la ecuación de coestado es:

$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = 2y(t) - u(t)$. Reemplazando (1):

$\dot{\lambda}(t) = 2y(t) - \left(\frac{y(t)}{2} + \frac{\lambda(t)}{2}\right) = \frac{3}{2}y(t) - \frac{\lambda(t)}{2}$ (3)

Y como $y(T)$ libre $\Rightarrow$ Condición de transversalidad: $\lambda(T)=0$.

Luego, (2) y (3) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = 0.5\,y(t) + 0.5\,\lambda(t) , & y(0) = y_0 \\ \dot{\lambda}(t) = 1.5\,y(t) - 0.5\,\lambda(t) , & \lambda(T) = 0 \end{cases}$$

Que puede ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}$$

Supongamos $\begin{bmatrix} y(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} me^{rt} \\ ne^{rt} \end{bmatrix}$

$$\longrightarrow r \begin{bmatrix} me^{rt} \\ ne^{rt} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} me^{rt} \\ ne^{rt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow e^{rt}\left(r\mathbb{I}_2 - \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Para que tenga soluciones no triviales: $\det\left(r\mathbb{I}_2 - \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}\right) = 0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} r-0.5 & -0.5 \\ -1.5 & r+0.5 \end{bmatrix}\right) = (r-0.5)(r+0.5) - (0.5)(1.5) = r^2 - 0.25 - 0.75$$

$$= r^2 - 1 = 0 \longrightarrow r_1 = 1 \wedge r_2 = -1.$$

Si $r = 1$: $\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -1.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow m_1 = n_1$

Si $r = -1$: $\begin{bmatrix} -1.5 & -0.5 \\ -1.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow m_2 = -\dfrac{n_2}{3}$

Renombrando $n_{1,2} := A_{1,2}$, la solución general es:

$$y(t) = A_1 e^{t} - \frac{A_2}{3} e^{-t}$$

$$\lambda(t) = A_1 e^{t} + A_2 e^{-t}$$

Aplicando condiciones de frontera:

$$y(0) = A_1 - \frac{A_2}{3} = y_0$$

$$\lambda(T) = A_1 e^{T} + A_2 e^{-T} = 0 \longrightarrow A_2 = -A_1 e^{2T}$$

$$A_1 + \frac{A_1 e^{2T}}{3} = y_0 \longrightarrow A_1 = \frac{3y_0}{(3+e^{2T})}$$

$$A_2 = -\frac{3y_0 e^{2T}}{(3+e^{2T})} = -\frac{3y_0}{(3e^{-2T}+1)}$$

Las trayectorias óptimas son:

$$\boxed{\begin{aligned} y^{opt}(t) &= \left(\frac{3y_0}{3+e^{2T}}\right)e^{t} + \left(\frac{y_0}{3e^{-2T}+1}\right)e^{-t} \\ \lambda^{opt}(t) &= \left(\frac{3y_0}{3+e^{2T}}\right)e^{t} - \left(\frac{3y_0}{3e^{-2T}+1}\right)e^{-t} \\ u^{opt}(t) &= \left(\frac{3y_0}{3+e^{2T}}\right)e^{t} - \left(\frac{y_0}{3e^{-2T}+1}\right)e^{-t} \end{aligned}}$$