Taller Final: Economía Matemática

David Plazas Escudero
201710005101

1.a) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 3y_t = 4$. Parte homogénea: $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 3y_t = 0$

Se suponen soluciones de la forma $y_t = A\lambda^t$. Luego,

$A\lambda^{t+2} - 2A\lambda^{t+1} + 3A\lambda^t = 0$

$A\lambda^t[\lambda^2 - 2\lambda + 3] = 0 \longrightarrow \Delta = (-2)^2 - 4(1)(3) = 4 - 12 = -8.$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}i = \alpha \pm \beta i.$ $r = \|\alpha \pm \beta i\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{3}$

$\theta = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right) \approx 0.95$

La solución a la homogénea es:

$y_{ht} = (\sqrt{3})^t [A_1 \operatorname{Cos}(0.95t) + A_2 \operatorname{Sin}(0.95t)]$. Como $\|\lambda\| > 1$ diverge.

Particular: Claramente $a_1 + a_2 = -2 + 3 = 1 \neq -1$.

$y_{pt} = K = \dfrac{c}{1 + a_1 - a_2} = \dfrac{4}{1 - 2 + 3} = 2$

Luego la solución general es:

$\longrightarrow y_t = (\sqrt{3})^t [A_1 \operatorname{Cos}(0.95t) + A_2 \operatorname{Sin}(0.95t)] + 2.$

b) $y_{t+2} + \frac{1}{2}y_{t+1} - \frac{1}{2}y_t = 5$. Homogénea: $y_{t+2} + \frac{1}{2}y_{t+1} - \frac{1}{2}y_t = 0.$

De donde se tiene el polinomio auxiliar: $\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda = 0.$

$\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}.$ $\lambda_{1,2} = \dfrac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \dfrac{-\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}}{2}$

$\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -1$. La solución a la homogénea es:

$y_{ht} = A_1(0.5)^t + A_2(-1)^t \longrightarrow$ Críticamente estable.

Particular: $a_1 + a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \neq -1$. $y_{pt} = C = 5$.

La solución general es:

$\longrightarrow y_t = A_1(0.5)^t + A_2(-1)^t + 5.$

c) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 2y_t = 1$, $y_0 = 3$, $y_1 = 4$.

Homogénea: $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 2y_t = 0$. Se tiene el polinomio auxiliar:

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4(2) = -4$. $\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i = \alpha + \beta i$.

$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{2}$. $\theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{4}$.

La solución a la homogénea:

$$y_{ht} = (\sqrt{2})^t \left[A_1 \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi t}{4}\right) + A_2 \operatorname{Sin}\left(\frac{\pi t}{4}\right) \right]$$

Particular: $a_1 + a_2 = -2 + 2 = 0 \neq -1$. $y_{pt} = c = 1$.

Solución General: $y_t = (\sqrt{2}) \left[A_1 \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi t}{4}\right) + A_2 \operatorname{Sin}\left(\frac{\pi t}{4}\right) \right] + 1$

$y_0 = 3 = A_1 + 1 \rightarrow A_1 = 2$.

$y_1 = 4 = (\sqrt{2}) \left[2 \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{4}\right) + A_2 \operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] + 1$

$$4 = \sqrt{2} \left[\sqrt{2} + A_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \rightarrow A_2 = 1$$

$$y_t = (\sqrt{2})^t \left[2 \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \operatorname{Sin}\left(\frac{\pi t}{4}\right) \right] + 1.$$

2. a) $\begin{cases} x_{t+1} + x_t + 2y_t = 24, & x_0 = 10 \\ y_{t+1} + 2x_t - 2y_t = 9, & y_0 = 9. \end{cases}$

Sea $\vec{u}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$, $\vec{v}_0 = \begin{bmatrix} 24 \\ 9 \end{bmatrix}$. Luego, el sistema puede ser reescrito como:

$\vec{u}_{t+1} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{u}_t = \vec{v}_0$. Sea $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{u}_{t+1} + C\vec{u}_t = \vec{v}_0$

Parte homogénea: $\vec{u}_{t+1} + C\vec{u}_t = \vec{0}$. Se supone una solución $\vec{u}_t = \begin{bmatrix} m\lambda^t \\ n\lambda^t \end{bmatrix}$. Reemplazando:

$$\begin{bmatrix} m\lambda^{t+1} \\ n\lambda^{t+1} \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} m\lambda^t \\ n\lambda^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^t (\lambda \mathbb{I}_2 + C) \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Que es un sistema homogéneo. Para que tenga soluciones no triviales, se requiere que $\det(\lambda\mathbb{I}_2 + \mathbb{C}) = 0$.

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 \\ 2 & \lambda-2 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda-3)(\lambda+2) = 0 \rightarrow \lambda = 3 \wedge \lambda = -2.$$

Luego la solución a la parte homogénea es de la forma:

$$\begin{bmatrix} x_{ht} \\ y_{ht} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 3^t + m_2(-2)^t \\ n_1 3^t + n_2(-2)^t \end{bmatrix} \quad (*)$$

Con $\lambda = 3 \Rightarrow (3\mathbb{I}_2 + \mathbb{C})\begin{bmatrix} m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} 4m_1 + 2n_1 = 0 \\ 2m_1 + n_1 = 0 \end{matrix}\right\} \; m_1 = -\frac{n_1}{2}$

Con $\lambda = -2 \Rightarrow (-2\mathbb{I}_2 + \mathbb{C})\begin{bmatrix} m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} -m_2 + 2n_2 = 0 \\ 2m_2 - 4n_2 = 0 \end{matrix}\right\} \; m_2 = 2n_2$

Reemplazando en (*) y haciendo $n_1 \equiv A_1$ y $n_2 \equiv A_2$:

$$\begin{bmatrix} x_{ht} \\ y_{ht} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5A_1 3^t + 2A_2(-2)^t \\ A_1 3^t + A_2(-2)^t \end{bmatrix}$$

Particular: $\vec{u}_{pt} = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix}$. Reemplazando,

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} + \mathbb{C}\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$(\mathbb{I}_2 + \mathbb{C})\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow$ Para que exista solución, $\det(\mathbb{I}_2 + \mathbb{C}) \neq 0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right) = -6 \neq 0 \; \checkmark.$$

Luego, $\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 24 \\ 9 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} -66 \\ -39 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5A_1(3^t) + 2A_2(-2)^t - 66 \\ A_1(3^t) + A_2(-2)^t - 39 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{matrix} x_0 = 10 \\ y_0 = 9 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -0.5A_1 + 2A_1 - 66 = 10 \\ A_1 + A_2 - 39 = 9 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -A_1 + 4A_2 = 152 \\ A_1 + A_2 = 48 \\ \hline 5A_2 = 200 \end{matrix} \rightarrow A_2 = 40 \rightarrow A_1 = 8.$$

$\longrightarrow \; x_t = -4(3^t) + 80(-2)^t - 66$

$y_t = 8(3^t) + 40(-2)^t - 39$

b) $\begin{cases} x_{t+1} - x_t - \frac{1}{3}y_t = -1, & x_0 = 5. \\ x_{t+1} + y_{t+1} - \frac{1}{6}y_t = \frac{17}{2}, & y_0 = 4 \end{cases}$ Sea $\vec{u}_t := \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$, $\vec{v}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 17/2 \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{u}_{t+1} + \begin{bmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/6 \end{bmatrix} \vec{u}_t = \vec{v}_0 \longrightarrow \mathbb{A}\vec{u}_{t+1} + \mathbb{B}\vec{u}_t = \vec{v}_0$

<u>Homogénea</u>, $\vec{u}_{ht} = \begin{bmatrix} m\lambda^t \\ n\lambda^t \end{bmatrix}$. Reemplazando,

$\mathbb{A}\begin{bmatrix} m\lambda^{t+1} \\ n\lambda^{t+1} \end{bmatrix} + \mathbb{B}\begin{bmatrix} m\lambda^t \\ n\lambda^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda^t(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B})\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Para soluciones no triviales: $\det(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B}) = 0$.

$\det\left(\begin{bmatrix} (\lambda - 1) & -1/3 \\ & (\lambda - 1/6) \end{bmatrix}\right) = (\lambda - 1)(\lambda - 1/6) + \;/3$

$= (2\lambda - 1)(3\lambda - 1)$

$\longrightarrow \lambda_1 = 1/2 \wedge \lambda = 1/3.$

La solución a la homogénea es de la forma

$\begin{bmatrix} x_{ht} \\ y_{ht} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1(1/2)^t + m_2(1/3)^t \\ n_1(1/2)^t + n_2(1/3)^t \end{bmatrix}.$

Para $\lambda = 1/2$: $\begin{bmatrix} (1/2 - 1) & -1/3 \\ 1/2 & (1/2 - 1/6) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow m_1 = -\frac{2}{3}n_1$

Sea $n_1 = -3A_1$, de donde $m_1 = 2A_1$.

Para $\lambda = 1/3$: $\begin{bmatrix} (1/3 - 1) & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 - 1/6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow m_2 = -\frac{1}{2}n_2$

Sea $n_2 = -2A_2$, de donde $m_2 = A_2$.

Luego, $\vec{u}_{ht} = \begin{bmatrix} 2A_1(1/2)^t + A_2(1/3)^t \\ -3A_2(1/2)^t - 2A_2(1/3)^t \end{bmatrix}$

Particular: $\vec{u}_{pt} = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} \longrightarrow (\mathbb{A}+\mathbb{B})\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} = \vec{r}_0$

Que tiene solución si y sólo si $\det(\mathbb{A}+\mathbb{B}) \neq 0$.

$\det(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & 5/6 \end{bmatrix}\right) = +1/3 \neq 0.$

Luego, $\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} = \dfrac{1}{1/3}\begin{bmatrix} 5/6 & 1/3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 17/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

La solución general es:

$x_t = 2A_1(1/2)^t + A_2(1/3)^t + 6 \qquad x_0 = 5$

$y_t = -3A_1(1/2)^t - 2A_2(1/3)^t + 3 \qquad y_0 = 4$

$x_0 = 2A_1 + A_2 + 6 = 5 \longrightarrow 2A_1 + A_2 = -1 \quad (2) \longrightarrow \quad 4A_1 + \cancel{2A_2} = -2$

$y_0 = -3A_1 - 2A_2 + 3 = 4 \longrightarrow -3A_1 - 2A_2 = 1 \qquad\qquad -3A_1 - \cancel{2A_2} = 1$

$A_1 = -1$

$A_2 = 1$

$\longrightarrow x_t = -2(1/2)^t + (1/3)^t + 6$

$y_t = 3(1/2)^t - 2(1/2)^t + 3.$

3.a) $\max J(t) = \displaystyle\int_0^1 -u^2(t)\,dt$

s.t.

$\dot{y}(t) = y(t) + u(t), \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$

$H[t, y(t), u(t), \lambda(t)] = -u^2(t) + \lambda(t)[y(t) + u(t)].$

Nótese que $\dfrac{\partial H}{\partial u} = -2u(t) + \lambda(t)$ y $\dfrac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2 < 0.$

Por lo tanto el Hamiltoniano es cóncavo en $u(t)$; tiene máximo respecto a $u(t)$.

i) Una condición necesaria para dicho máximo es $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$

$\dfrac{\partial H}{\partial u} = -2u(t) + \lambda(t) = 0$

$\longrightarrow u(t) = \dfrac{\lambda(t)}{2} \quad (1)$

iii) Coestado: $\dot{\lambda}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial y} = -\lambda(t) \longrightarrow \lambda(t) = Ae^{-t}$ (2)

(2) en (1): $u(t) = \dfrac{Ae^{-t}}{2}$ (3)

ii) Estado: $\dot{y}(t) = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = y(t) + u(t)$

Reemplazando (3): $\dot{y}(t) = y(t) + \dfrac{Ae^{-t}}{2}$

$\dot{y}(t) - y(t) = \dfrac{Ae^{-t}}{2}$. Sea $\mu(t) = e^{\int(-1)dt} = e^{-t}$.

$\dot{y}(t)e^{-t} - y(t)e^{-t} = \dfrac{Ae^{-2t}}{2} \rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(y(t)e^{-t}\right) = \dfrac{Ae^{-2t}}{2}$. Integrando

$y(t) = -\dfrac{Ae^{-t}}{4} + A_0e^{t}$. Se sabe que $y(0) = 1$ y $y(1) = 0$

$y(0) = 1 = -\dfrac{A}{4} + A_0$, $y(1) = 0 = -\dfrac{Ae^{-1}}{4} + A_0e$

$$\left.\begin{array}{l} -e = \dfrac{Ae}{4} - A_0e, \quad 0 = -\dfrac{Ae^{-1}}{4} + A_0e \end{array}\right\} -e = A\left(\dfrac{e-e^{-1}}{4}\right) \rightarrow A = \dfrac{-4e}{e-e^{-1}}$$

$-\dfrac{e^{-1}}{4}\left(\dfrac{-4e}{e-e^{-1}}\right) + A_0e \longrightarrow A_0 = \dfrac{e^{-1}}{e^{-1}-e}$

La solución al problema es:

$y^{opt}(t) = \left(\dfrac{e}{e-e^{-1}}\right)e^{-t} + \left(\dfrac{e^{-1}}{e^{-1}-e}\right)e^{t}$

$\lambda^{opt}(t) = \left(\dfrac{-4e}{e-e^{-1}}\right)e^{-t}$

$u^{opt}(t) = \left(\dfrac{-2e}{e-e^{-1}}\right)e^{-t}$

b) $\max J(z) := \int_0^2 (2y(t) - 3u(t) - au^2(t))\,dt$
s.t.
$\dot{y}(t) = y(t) + u(t)$, $y(0) = 5$, $y(2)$ libre.

$H(t, y(t), u(t), \lambda(t)) = (2y(t) - 3u(t) - au^2(t)) + \lambda(t)[y(t) + u(t)]$

i) $\frac{\partial H}{\partial u} = -3 - 2au(t) + \lambda(t)$, $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2a$.

Suponiendo que $a > 0$, H es cóncavo respecto a $u(t)$.
Una condición necesaria para el máximo es $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$.

$\frac{\partial H}{\partial u} = -3 - 2au(t) + \lambda(t) = 0$
$\longrightarrow u(t) = \frac{\lambda(t) - 3}{2a}$ (1)

iii) Coestado: $\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = -2 - \lambda(t) \longrightarrow \lambda(t) = Ae^{-t} - 2$. (2)

iv) Como $y(2)$ es libre, se pone la condición de transversalidad $\lambda(2) = 0$. En (2): $\lambda(2) = Ae^{-2} - 2 \longrightarrow A = 2e^2$. Luego
$\lambda(t) = 2e^{2-t} - 2$ (3). Ahora, (3) en (1) $\longrightarrow u(t) = \frac{2e^{2-t} - 5}{2a}$ (4)

ii) Estado, $\dot{y}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = y(t) + u(t)$. Reemplazando (4)

$\dot{y}(t) - y(t) = \frac{2e^{2-t} - 5}{2a}$. Con $\mu(t) = e^{-t}$

$\frac{d}{dt}\left(y(t)e^{-t}\right) = \frac{2e^{2(1-t)} - 5e^{-t}}{2a} \longrightarrow y(t) = \frac{5 - e^{2-t}}{2a} + A_0 e^t$

Con $y(0) = 5 = \frac{5 - e^2}{2a} + A_0 \longrightarrow A_0 = \frac{10a - 5 - e^2}{2a}$

$$y(t) = \frac{5 - e^{2-t}}{2a} + \left(\frac{10a - 5 - e^2}{2a}\right)e^t$$

Las trayectorias óptimas son

$$y^{opt}(t) = \frac{5-e^{2-t}+(10a-5+e^{2})e^{t}}{2a}.$$

$$\lambda^{opt}(t) = 2e^{2-t}-2$$

$$u^{opt}(t) = \frac{2e^{2-t}-5}{2a}.$$

c) $\max_{s.t.} J(T) = \int_0^T [y(t)u(t)-u^2(t)-y^2(t)]dt.$

$\dot{y}(t) = u(t), \; y(0) = y_0, \; y(T)$ libre.

$H(t, y(t), u(t), \lambda(t)) = [y(t)u(t)-u^2(t)-y^2(t)] + \lambda(t)[u(t)].$

Es claro que $\frac{\partial H}{\partial u} = y(t)-2u(t)+\lambda(t)$. $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2 < 0.$

i) Debe ocurrir que $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$. $u(t) = \frac{y(t)+\lambda(t)}{2}$ (1)

iii) Coestado: $\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = 2y(t)-u(t)$ (2)

ii) Estado: $\dot{y}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u(t).$ (3)

iv) Transversalidad: $\lambda(T) = 0.$

Reemplazar (1) en (2), (3): $\dot{\lambda}(t) = 2y(t) - \left(\frac{y(t)}{2}+\frac{\lambda(t)}{2}\right) = \frac{3}{2}y(t) - \frac{\lambda(t)}{2}$

$\dot{y}(t) = \frac{y(t)}{2}+\frac{\lambda(t)}{2}$

Luego, $\begin{bmatrix} \dot{\lambda}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$

Suponiendo una solución $\begin{bmatrix}\lambda(t)\\ y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}me^{rt}\\ ne^{rt}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\dot{\lambda}(t)\\ \dot{y}(t)\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}\lambda(t)\\ y(t)\end{bmatrix}$

$\rightarrow r\begin{bmatrix}me^{rt}\\ ne^{rt}\end{bmatrix}-\mathbb{A}\begin{bmatrix}me^{rt}\\ ne^{rt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\rightarrow(r\mathbb{I}_2-\mathbb{A})\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

luego, $\det(r\mathbb{I}_2-\mathbb{A})=0\rightarrow\det\left(\begin{bmatrix}r+1/2 & -3/2\\ -1/2 & r-1/2\end{bmatrix}\right)=r^2-1$

$\hookrightarrow r_1=1,\ r_2=-1.$

Para $r=1$: $(\mathbb{I}_2-\mathbb{A})\begin{bmatrix}m_1\\ n_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3/2 & -3/2\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_1\\ n_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

$-\frac{m_1}{2}+\frac{n_1}{2}=0\longrightarrow m_1=n_1$

Para $r=-1$: $(-\mathbb{I}_2-\mathbb{A})\begin{bmatrix}m_2\\ n_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-1/2 & -3/2\\ -1/2 & -3/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_2\\ n_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

$-\frac{m_2}{2}-\frac{3n_2}{2}=0\longrightarrow m_2=-3n_2.$

Haciendo $n_{1,2}=A_{1,2}$.

$\begin{bmatrix}\lambda(t)\\ y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1e^{t}-3A_2e^{-t}\\ A_1e^{t}+A_2e^{-t}\end{bmatrix}$. $\quad\lambda(T)=0$

$y(0)=y_0$

$y(0)=y_0=A_1+A_2\longrightarrow A_2=y_0-A_1$

$\lambda(T)=A_1e^{T}-3A_2e^{-T}=0.$

$A_1e^{T}=3(y_0-A_1)e^{-T}\rightarrow A_1=\frac{3y_0}{e^{T}+3e^{-T}},\ A_2=y_0-\frac{3y_0}{e^{T}-3e^{-T}}$

Sol:

$$y^{opt}(t)=\left(\frac{3y_0}{e^{T}+3e^{-T}}\right)e^{t}+\left(y_0-\frac{3y_0}{e^{T}+3e^{-T}}\right)e^{-t}$$

$$\lambda^{opt}(t)=\left(\frac{3y_0}{e^{T}+3e^{-T}}\right)e^{t}-3\left(y_0-\frac{3y_0}{e^{T}+3e^{-T}}\right)e^{-t}$$

$$u^{opt}(t)=\left(\frac{3y_0}{e^{T}+3e^{-T}}\right)e^{t}-\left(y_0-\frac{3y_0}{e^{T}+3e^{-T}}\right)e^{-t}$$

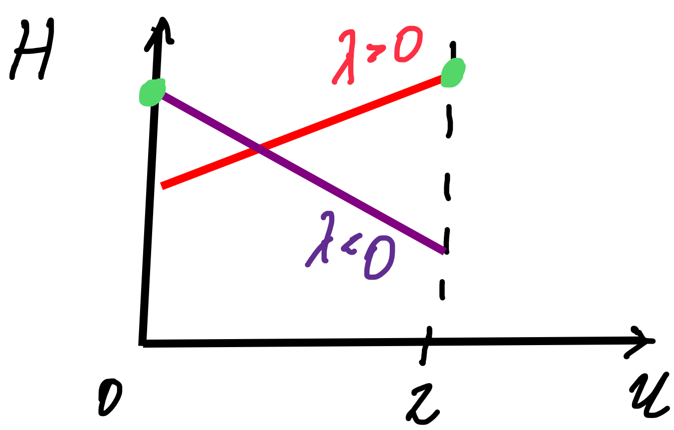
d) $\max J(4) = \int_0^4 (3y(t))\,dt$

s.t.

$\dot{y}(t) = y(t) + u(t), \quad y(0)=5, \quad \underbrace{y(4) \geq 300}_{\text{Condición Vertical truncada.}}, \quad 0 \leq u(t) \leq 2$

$$H(t, y(t), u(t), \lambda(t)) = 3y(t) + \lambda(t)[y(t)+u(t)]$$
$$= \lambda(t)u(t) + y(t)[3+\lambda(t)]$$

Luego, el Hamiltoniano es lineal en $u(t)$, donde $\lambda(t)$ determina la pendiente de dicha recta.



Luego, el máximo del Hamiltoniano está en $u(t)=2$ ó $u(t)=0$.

$H_{max} \leftarrow$ Si $\lambda(t)>0$, $u(t)=2$
Si $\lambda(t)<0$, $u(t)=0$.

iii) Coestado: $\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = -3-\lambda(t) \rightarrow \lambda(t) = Ae^{-t}-3$ (1)

ii) Estado: $\dot{y}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = y(t)+u(t)$ (2)

iv) Como se tiene una condición Vertical truncada, se introducen: $\cdot\ \lambda(4) \geq 0$

$\cdot\cdot\ y(4) \geq 300$

$\therefore\ \lambda(4)[y(4)-300] = 0.$

Caso 1: $y(4) = 300$.

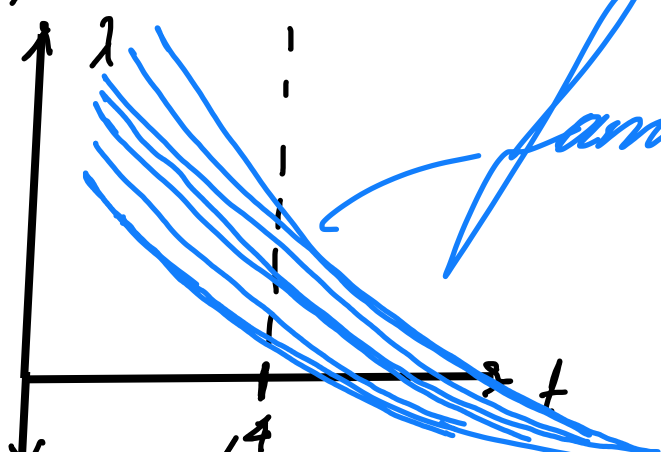
Como la trayectoria $\lambda(t)$ es independiente de las funciones $u(t)$ y $y(t)$, no se tienen condiciones suficientes para determinar A en (1), por lo que no se sabe directamente si $u(t) = 0$ ó $u(t) = 2$.

Analicemos la familia de trayectorias

$$\lambda(t) = Ae^{-t} - 3 \quad \text{sujeta a } \lambda(4) > 0$$

De $\lambda(4) > 0$ se tiene: $Ae^{-4} - 3 > 0 \longrightarrow A > 3e^{4} > 0$.

Luego, se tienen soluciones



Como $A > 0$, $\lambda(t) > 0$, $\forall t \in [0, 4]$.

Luego, $u(t) = 2$, $\forall t \in [0, 4]$.

De (2) se tiene $y'(t) - y(t) = 2$. De donde $y(t) = A_0 e^{t} - 2$. (3)

Y se tienen 2 condiciones para $y(t)$:

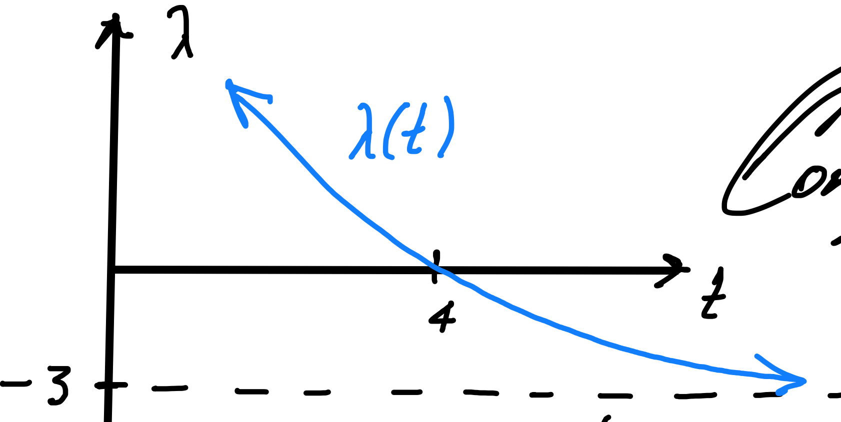
$$\left.\begin{array}{ll} y(0) = 5 = A_0 - 2 \longrightarrow & A_0 = 7 \\ y(4) = 300 = A_0 e^{4} - 2 & A_0 = 302e^{-4} \approx 5.53 \end{array}\right\} (\rightarrow\leftarrow)$$

Luego, no existe trayectoria $y(t)$ que satisfaga que

$$\begin{cases} y(t) = A_0 e^{t} - 2 \\ y(0) = 5 \\ y(4) = 300 \end{cases}$$

Caso 2: $\lambda(4) = 300$. De (1): $\lambda(t) = Ae^{-t} - 3$. $\lambda(4) = 0 = Ae^{-4} - 3$

$\longrightarrow A = 3e^{4}$. $\lambda(t) = 3e^{4-t} - 3$.



Con lo que $\lambda(t) > 0, \ \forall t \in [0,4)$

Por lo que $u(t) = 2, \ \forall t \in [0,4)$

De (3): $y(t) = A_0 e^{t} - 2$. $y(0) = 5 = A_0 - 2 \longrightarrow A_0 = 7$.

$y(t) = 7e^{t} - 2$. $\longrightarrow$ Cumple $y(4) = 7e^{4} - 2 \approx 380 \geq 300$.

Las trayectorias óptimas son

$$y^{opt}(t) = 7e^{t} - 2$$

$$\longrightarrow \lambda^{opt}(t) = 3e^{4-t} - 3$$

$$u^{opt}(t) = 2$$

e) $\max J(T) = \int_0^T \ln(q(t)) e^{-\delta t} \, dt$

s.t.

$\dot{S}(t) = -q(t)$; $S(0) = S_0$; $\underbrace{S(T) \geq 0}$ Condición Vertical Truncada.

$$H(t, S(t), q(t), \lambda(t)) = \ln(q(t)) e^{-\delta t} - \lambda(t) q(t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{e^{-\delta t}}{q(t)} - \lambda(t), \quad \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = -\frac{e^{-\delta t}}{q^2(t)} < 0, \ \forall t \in [0,T]$$

Con lo que el Hamiltoniano es cóncavo respecto a $u(t)$.

i) Debe ocurrir que $\frac{\partial H}{\partial q} = 0 = \frac{e^{-\delta t}}{q(t)} - \lambda(t)$

$$\longrightarrow q(t) = \frac{e^{-\delta t}}{\lambda(t)} \quad (1)$$

iii) Coestado: $\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial S} = 0 \longrightarrow \lambda(t) = A$ (2)

Reemplazando (2) en (1): $q(t) = \frac{e^{-\delta t}}{A}$ (3)

ii) Estado: $\dot{S}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = -q(t)$ (4)

(3) en (4): $\dot{S}(t) = -\frac{e^{-\delta t}}{A} \longrightarrow S(t) = \frac{e^{-\delta t}}{A\delta} + A_0$

iv) Como se tiene una condición vertical truncada, se tienen las condiciones

$\cdot\ \lambda(T) \geq 0$

$\cdot\cdot\ S(T) \geq 0$

$\therefore\ \lambda(T)S(T) = 0$

Es claro que $\lambda(T) = A$. Además, de (3) se puede obtener que $A \neq 0$. Con lo que $\lambda(T) \neq 0$. Luego, $S(T) = 0$.

$$S(t) = \frac{e^{-\delta t}}{A\delta} + A_0, \quad S(0) = S_0, \quad S(T) = 0$$

$$S(0) = S_0 = \frac{1}{A\delta} + A_0$$

$$S(T) = 0 = \frac{e^{-\delta T}}{A\delta} + A_0 \longrightarrow A_0 = -\frac{e^{-\delta T}}{A\delta}$$

Luego, $\frac{1}{A\delta} - \frac{e^{-\delta T}}{A\delta} = S_0 \longrightarrow A = \frac{1-e^{-\delta T}}{S_0\delta}$

Finalmente, $A_0 = -\frac{e^{-\delta T}}{\left(\frac{1-e^{-\delta T}}{S_0\delta}\right)\delta} = \frac{S_0 e^{-\delta T}}{e^{-\delta T}-1} = \frac{S_0}{1-e^{\delta T}}$

Las trayectorias óptimas son

$$\longrightarrow \quad S^{opt}(t) = \frac{S_0\left(e^{-\delta t} - e^{-\delta T}\right)}{1-e^{-\delta T}}$$

$$q^{opt}(t) = \frac{S_0\delta e^{-\delta t}}{1-e^{-\delta T}}$$

$$\lambda^{opt}(t) = \frac{1-e^{-\delta T}}{S_0\delta}$$

$\square$.