x 28

95/100

UNIVERSIDAD EAFIT

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

PARCIAL DE FUNDAMENTOS DE ANÁLISIS

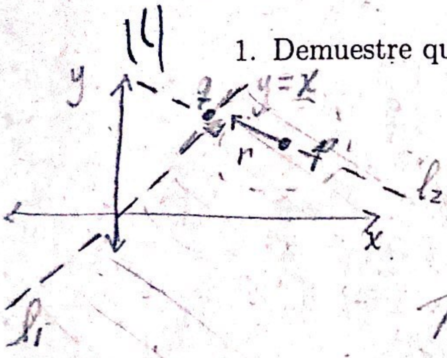
Nombre: David Plazas Escudero Código: 201710005101

Profesor: Orlando García Jaimes 10-09-2019 Calificación: 4.8

La duración de este examen es de 1.5 horas máximo y no se responderán preguntas durante su presentación.

14

1. Demuestre que el subconjunto de $\mathbf{E}^2$ dado por $S = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2) : x < y\}$ es abierto.



Sea $p=(\hat{x},\hat{y})\in E^2$. Para hallar que S es abierto, necesitamos probar que $\forall p\in E^2, \exists B(p,r)\subseteq S, r>0$. Para seleccionar el r, se utilizará la proyección ortogonal del punto p en la recta l_1.

Para que la proyección sea ortogonal, se quiere hallar una recta l_2 t.q. $\overline{pq}\subseteq l_2$ y que $l_1\perp l_2$. Luego, se tiene que esta recta está dada por la ecuación $y=-x+(\hat{x}+\hat{y})$, con esta se encuentra que $q=\left(\frac{\hat{x}+\hat{y}}{2},\frac{\hat{x}+\hat{y}}{2}\right)$. Ahora, el radio deseado es la mínima distancia del punto p a l_1. Utilizando la fórmula de distancia de un punto $p_0=(x_0,y_0)$ a una recta $ax+by=c$, dada por

$$L=\frac{|ax_0+by_0-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Se encuentra que $\overline{pq}=\frac{|\hat{x}_1-\hat{x}_2|}{\sqrt{2}}$, luego, cualquier radio menor a $\overline{pq}$ es suficiente para que $B(p,r)\subseteq S$.

15

Luego, $\forall p=(\hat{x},\hat{y})\in E^2$, $\exists B(p,r)$ t.q. $r=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\hat{x}_1-\hat{x}_2|$, con $\alpha\in(0,1)$.

Y por construcción de r, $B(p,r)\subseteq S$.

Luego S es abierto. ∎

Scanned with CamScanner

2. Demuestre que si una sucesión es convergente entonces, es acotada.

2P Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (Convergente). Para demostrar que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, tenemos que mostrar que existe una bola que contiene toda la sucesión. ✓

Como la sucesión es convergente, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. si $n \geq N$, $d(a_n, a) < \epsilon$, con $\epsilon > 0$. Esto implica que ϵ es un radio adecuado para que $\forall n \geq N$, $a_n \in B(a,\epsilon)$. Pero claramente si $n < N$, $a_n \notin B(a,\epsilon)$, para esto, sea $T := \{1, 2, \ldots, N\}$. sea $r_i := d(a_i, a)$, con $i \in T$. Construyamos $r := \max_{i\in T}\{r_i\}^{\epsilon}$ y esta construcción nos garantiza que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B(a, r)$.

Luego $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada. ✓

■

3. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ en un espacio métrico dado, entonces el conjunto $\{a, a_1, a_2 \dots\}$ es un conjunto cerrado.

2.0

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión t.q. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, en un esp. métrico (E,d).

Sea $S := \{a, a_1, a_2, \dots\}$, veamos que S es cerrado.

En clase se probó que cualquier sucesión convergente $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos en A cumple que $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in A$ si y sólo si A es cerrado.

Luego, si definimos una sucesión de puntos en S y probamos que el límite de la sucesión está en S, podemos concluir que S es cerrado. ✓

Sea $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos en S, claramente para cualquier sucesión de puntos en S, se tendrá que es una subsucesión de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ✓ luego, como $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente ✓ y $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, entonces $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Por lo tanto, como cualquier sucesión de puntos en S ✓ converge a un $a \in S$, entonces S es cerrado.

$\square$

2.5

4. Demuestre que dada una familia de cerrados $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entonces

C_n cerr.

(a) La intersección arbitraria de cerrados es cerrada

(b) La unión finita de cerrados es cerrada. (Si va a reducir el problema a conjuntos abiertos, realice las pruebas correspondientes para abiertos).

a) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es cerrado $\longleftrightarrow \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\right)^c$ es abierta.

Por ley D'Morgan $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\right)^c \equiv \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c$, como C_n es cerrado $\forall n\in\mathbb{N}$, entonces C_n^c es abierto $\forall n\in\mathbb{N}$. Probemos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c$ es abierto. Sea $p\in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c$, hay que probar que $\exists B(p,r) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c$, con $r>0$.

Como $p\in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c$, $\exists k\in\mathbb{N}$ t.q. $p\in C_k^c$. Como C_k^c es abierto, $\exists B(p,r)$ t.q. $B(p,r)\subseteq C_k^c$, y claramente $C_k^c \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c$, luego $B(p,r)\subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c$.

Por lo tanto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c$ es abierto $\Longrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es cerrado. ■

b) $\bigcup_{n=1}^{N} C_n$ es cerrado $\longleftrightarrow \bigcap_{n=1}^{N} C_n^c$ es abierto. (Por def y ley D'Morgan).

Como C_n es cerrado $\forall n\in\mathbb{N}$, entonces C_n^c es abierto $\forall n\in\mathbb{N}$, probemos que $\bigcap_{n=1}^{N} C_n^c$ es abierto. Sea $p\in \bigcap_{n=1}^{N} C_n^c$, luego $p\in C_k^c$, $\forall k=1,\dots,N$. Como los C_k^c son abiertos $\forall k=1,\dots,N$, $\exists B(p,r_k)\subseteq C_k^c$. Tomemos $r:=\min_{k=1,\dots,N}\{r_k\}$.

Por la construcción de r, $B(p,r)\subseteq C_k^c$, $\forall k=1,\dots,N$.

Luego $B(p,r)\subseteq \bigcap_{n=1}^{N} C_n^c \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{N} C_n^c$ es abierto

$\Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{N} C_n$ es cerrado ■

Scanned with CamScanner