UNIVERSIDAD EAFIT®

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

PARCIAL DE FUNDAMENTOS DE ANÁLISIS

$80 \times 20 = \frac{100}{100}$

Nombre: David Plazas Escudero Código: 201710005101

Profesor: Orlando García Jaimes 06-08-2019 Calificación: 5.0

La duración de este examen es de 1.5 horas máximo y no se responderán preguntas durante su presentación.

1. Sean A y B dos conjuntos de números reales tales que $x \leq y$ para todo $x \in A$ y $y \in B$. Demostrar que si B tiene supremo entonces A tiene supremo y además $\sup A \leq \sup B$

20

Sea $b = \sup B$. Como b es el supremo de B, por definición del supremo, $\forall y \in B$ debe ocurrir que $y \leq b$. Por hipótesis se sabe que $\forall x \in A$ y $\forall y \in B$ se tiene $x \leq y$. Luego $x \leq y \leq b$, y en particular $x \leq b$, $\forall x \in A$. Por lo tanto, b es una cota superior para A. Como A está acotado superiormente y $A \neq \phi$, entonces $\exists a \in \mathbb{R}$ t.q. $a = \sup A$. Como b es cota superior de A, debe pasar que $a \leq b$ (por definición de cota superior). Luego, $\sup A \leq \sup B$.

2. Demostrar que para cualquier par de números reales $|a+b| \leq |a| + |b|$

Por la definición del operador valor absoluto, se tiene que
$\forall x \in \mathbb{R}, \; -|x| \leq x \leq |x|$.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Por lo anterior, $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \leq b \leq |b|$. ✓ ✓

Sumando desigualdades

$$-|a| - |b| \leq a+b \leq |a| + |b|$$

$$-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b| \quad \text{(Distributiva)}$$ ✓

$$\Longrightarrow |a+b| \leq |a|+|b| \quad \text{(Prop. Valor absoluto)}$$

2.0

3. Demostrar que para $x \in \mathbb{R}$ y un entero positivo N, existe un entero n tal que

$$\frac{n}{N} \leq x < \frac{n+1}{N}$$

Sea $x \in \mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{Z}_+$. Sea el número $z = Nx \in \mathbb{R}$ (cerradura).
Como $\underbrace{Nx \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } n \leq Nx < n+1}_{*}$. Luego, $\frac{n}{N} \leq \frac{Nx}{N} < \frac{n+1}{N}$ ✓

20

$\frac{n}{N} \leq x < \frac{n+1}{N}$ (Elemento Inverso) ✓ ▨

Teorema auxiliar *: Dado $x \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{Z}$ t.q $n \leq x < n+1$.
Prueba: Sea $x \in \mathbb{R}$. Sea el número $N = \underbrace{|x|}_{\text{no}}$ $x \in \mathbb{R}$. y definamos el conjunto $S = \{-N, \dots, x, \dots, N\}$, y definamos el número entero

$$n = \max\{y \in S \mid y \leq x\}.$$

Con la construcción de n, se puede afirmar que $n \leq x < n+1$ ■

4. Demostrar que si a, b, x, y son números reales tales que $a < x < b$ y $a < y < b$ entonces $|y - x| < b - a$

Sean $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ t.q. $a<x<b$ y $a<y<b$.

Como $a<x<b$, entonces $a<x$ y $x<b$. Por definición de $<$, se tiene

$a<x \longleftrightarrow -a>-x \longleftrightarrow -x<-a$

$x<b \longleftrightarrow -x>-b \longleftrightarrow -b<-x$

Por otro lado, $a<y<b \rightarrow (a<y) \wedge (y<b)$.

Sumando las desigualdades: Distributiva

$$\begin{array}{r} -x<-a \\ y<b \\ \hline y-x<b-a \end{array} \qquad \begin{array}{r} -b<-x \\ a<y \\ \hline a-b<y-x \end{array} \longleftrightarrow -(b-a)<y-x$$

Luego, como $(y-x<b-a) \wedge [-(b-a)<y-x] \Rightarrow -(b-a)<y-x<b-a$.

Por propiedades del valor absoluto $|\cdot|$, se tiene

$-(b-a)<y-x<b-a \longleftrightarrow |y-x|<b-a$ $\blacksquare$