Demostrar: $K_c = \mathbb{H} \mathbb{K} \mathbb{H}$; $\mathbb{H} = I - \frac{11^T}{N}$

K: Matriz kernel

I: Matriz identidad

1: Vector columna de unos

N: Número de observaciones

H: Matriz para centrar datos

$$K_c = \left(I - \frac{11^T}{N}\right) K \left(I - \frac{11^T}{N}\right)$$

$$= \left(I - \frac{11^T}{N}\right)\left(KI - K\frac{11^T}{N}\right)$$

$$= IKI - IK\frac{11^T}{N} - KI\frac{11^T}{N} + \frac{11^T}{N} K \frac{11^T}{N}$$

$$= K - 2\frac{K11^T}{N} + \frac{11^T K 11^T}{N^2}$$

si $K_c(X_n, X_m)$ tenemos

$$K_c(X_n, X_m) = K(X_n, X_m) - 2\, K(X_n, X_m)\frac{11^T}{N} + \frac{11^T K(X_n, X_m) 11^T}{N^2}$$

$11^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$K_c(X_n, X_m) = K(X_n, X_m) - \frac{2K(X_n, X_m)}{N} + \frac{K(X_n, X_m)}{N^2}$$

Probar la desigualdad de Jensen

sí $\mathcal{E}_p\{K(x,x)^{1/2}\} < \infty$ entonces $\mu_p \in F$, donde el operador inicial $T_p f = \mathcal{E}_p\{f(x)\}$, $\forall f \in F$

Decimos que

$$|T_p f| = |\mathcal{E}_p\{f(x)\}| \underset{\Downarrow}{\leq} \mathcal{E}_p\{|f(x)|\} = \mathcal{E}_p\{|\langle f, \mu_p\rangle|\}$$

Desiguada de Jensen

entonces

$$|T_P f| \leq \mathcal{E}_P\{\|f\|_F \, \|\mu_P\|_F\} = \mathcal{E}_P\{\sqrt{k(x,x)}\,\|f\|_F\}$$

Por lo tanto existe un $\mu_P \in F$ tal que $T_P f = \langle f, \mu_P \rangle_F$
si $f(x) = \mu_P(x) = k(x, \cdot)$

$$\mu_P(x) = \langle \mu_P, k(x,\cdot) \rangle_F = \mathcal{E}_P\{k(x, x')\}$$