$$\min_{w} \mathcal{E}\{\|x_n - f(g(x_n))\|_2^2\}$$

donde:

$$g(x_n) = x_n W$$

$$f(s) = s W^T$$

Por lo tanto

$$\min_{w} \mathcal{E}\{\|x_n - x_n W W^T\|_2^2\}$$

Usando Media Muestral

$$\min \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} \|x_n - x_n W W^T\|_2^2 \}$$

$$\min_{w} \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} (x_n - x_n W W^T)(x_n - x_n W W^T)^T$$

$$\min_{w} \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} x_n x_n^T - x_n (x_n W W^T)^T - x_n W W^T x_n^T + x_n W W^T (x_n W W^T)^T$$

$$\min_{w} \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} x_n x_n^T - x_n W W^T x_n^T - x_n W W^T x_n^T + x_n W W^T W W^T x_n^T$$

si $W^T W = 1$, Entonces

$$\min_{w} \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} x_n x_n^T - 2 x_n W W^T x_n^T + x_n W W^T x_n^T$$

s.J $W^T W = 1$

$$\min_{w} \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} x_n x_n^T - x_n W W^T x_n^T$$

s.J $W^T W = 1$

como estuimos minimizando con respecto a w

$$\min_{w} -\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n w w^T x_n^T$$
s.j

$$\min_{w} -\mathcal{E}_x\{x_n w w^T x_n^T\}$$
s.j $w^T w = 1$

aplicando que $\mathcal{E}\{X Y\} = \mathcal{E}\{Y X\}$

$$\min_{w} -\mathcal{E}_x\{w^T x_n^T x_n w\}$$
s.j $w^T w = 1$

como es la esperanza de x sacamos las otras varuble

$$\min -w^T \mathcal{E}_x\{x_n^T x_n\} w$$
s.j $w^T w = 1$

ahora, si asumimos que los datos están centrados
$\mathcal{E}_x\{x_n^T x_n\} = R_{xx} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ = Auto covarianza

$$\min_{w} -w^T \Sigma_x w$$
s.j $w^T w = 1$

aplicando langrange para integrar la restricción en el objetivo, derivando e igualando a cero, tenemos:

$$L(w, \lambda) = -w^T \Sigma_x w - \lambda(w^T w - 1)$$

$$\frac{dL}{dw} = -2\Sigma_x w - 2\lambda w = 0$$

$$-\cancel{2}\Sigma_x w = \cancel{2}\lambda w$$

aplicando w^T por izquierda

$$-w^T \Sigma_x w = w^T \lambda w$$
$$-w^T \Sigma_x w = \lambda$$

Entonces

$$-\Sigma\{w^T x_n^T x_n w\} = \lambda$$