Metody numeryczne ─ Projekt 3

Aproksymacja profilu wysokościowego

Dar-Na 30.05.2022

1. Wstęp

Głównym celem projektu było zaimplementowanie aproksymacji profilu wysokościowego, do którego wykorzystałem język Python z bibliotekami: csv, os, numpy.arrange (dla generowania wartości w zadanym przedziale) oraz matplotlib.

Do rozwiązania układu równań z drugiej metody interpolacji wykorzystałem faktoryzację LU, którą zaimplementowałem w projekcie 2, tym razem z uwzględnieniem pivotingu, ze względu na możliwość wystąpienia dzielenia przez 0.

2. Profili wysokościowe

Wybrane przeze mnie profile wysokościowe, na których przeprowadzę testy dla metod interpolacyjnych to:

- Hel - teren o zróżnicowanym charakterze
- Góra Everest - teren górzysty
- Spacerek Gdański – teren plaski, z lekkimi uskokami

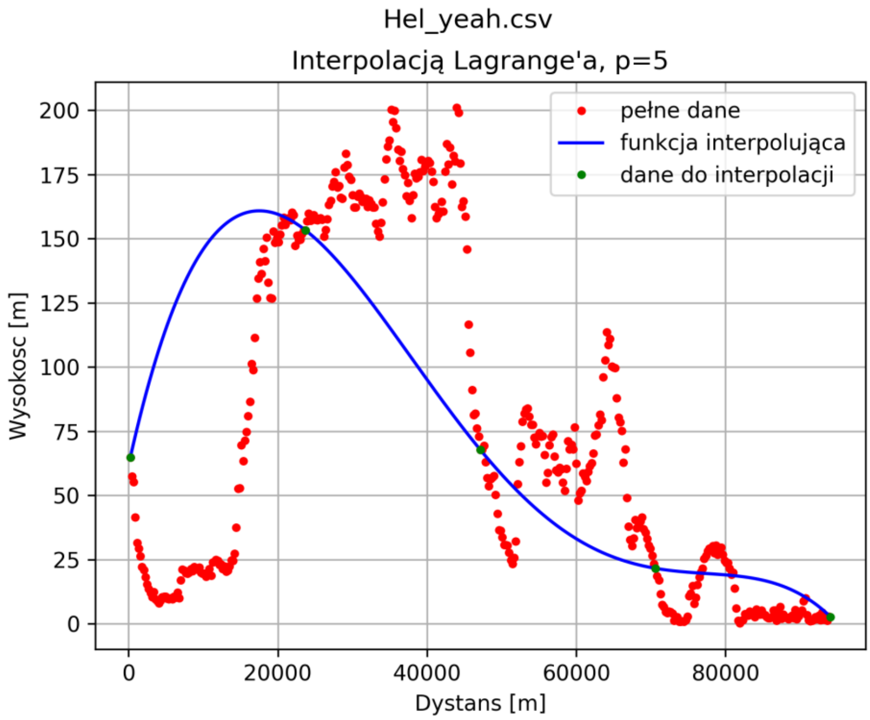
Dane pochodzą z portalu eNauczanie. Do testów wybrane zostaną tylko poszczególne próbki na których operować będą poszczególne metody.

3. Interpolacja Langranga

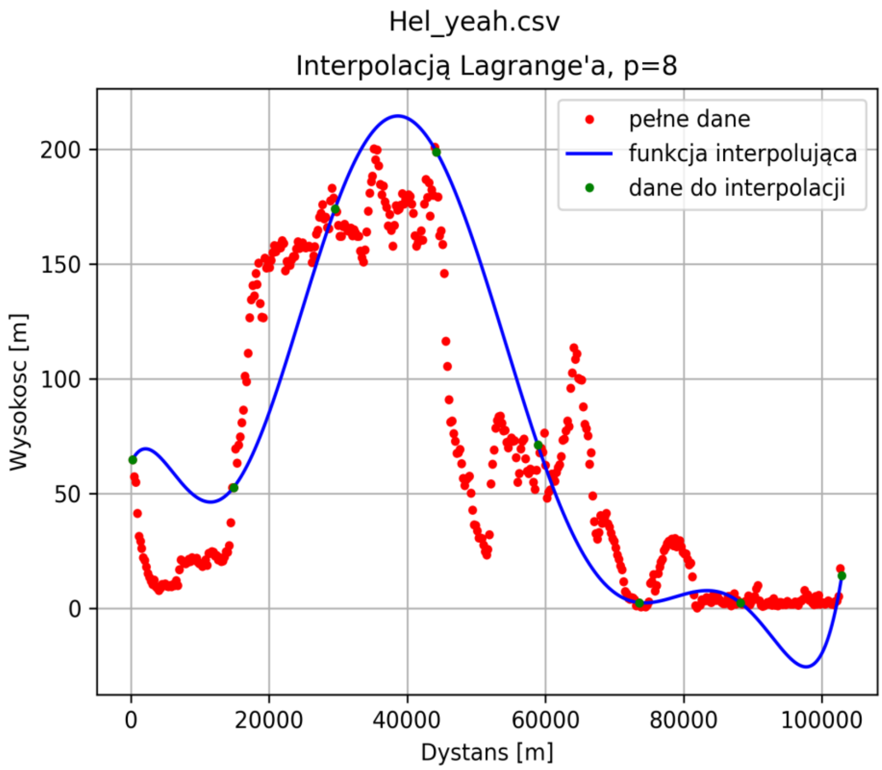
Jest to interpolacja przy pomocy wielomianu wysokiego stopnia, który przybliża przy pomocy szczątkowych danych (węzłów) wykres zadanej funkcji. Od ilości węzłów zależy stopień obliczonego wielomianu. Charakteryzuje się przede wszystkim prostą implementacją oraz niewielkimi (w porównaniu do splajnów) wymaganiami pamięciowymi. Zatem wydawałoby by się, że im więcej punktów podamy, tym dokładniejsze przybliżenie otrzymamy, gdyż zwiększy nam się stopień wielomianu.

Niestety metoda ta jest bardzo narażona na tzw. efekt Rungego - oscylacje na krańcach przedziału.

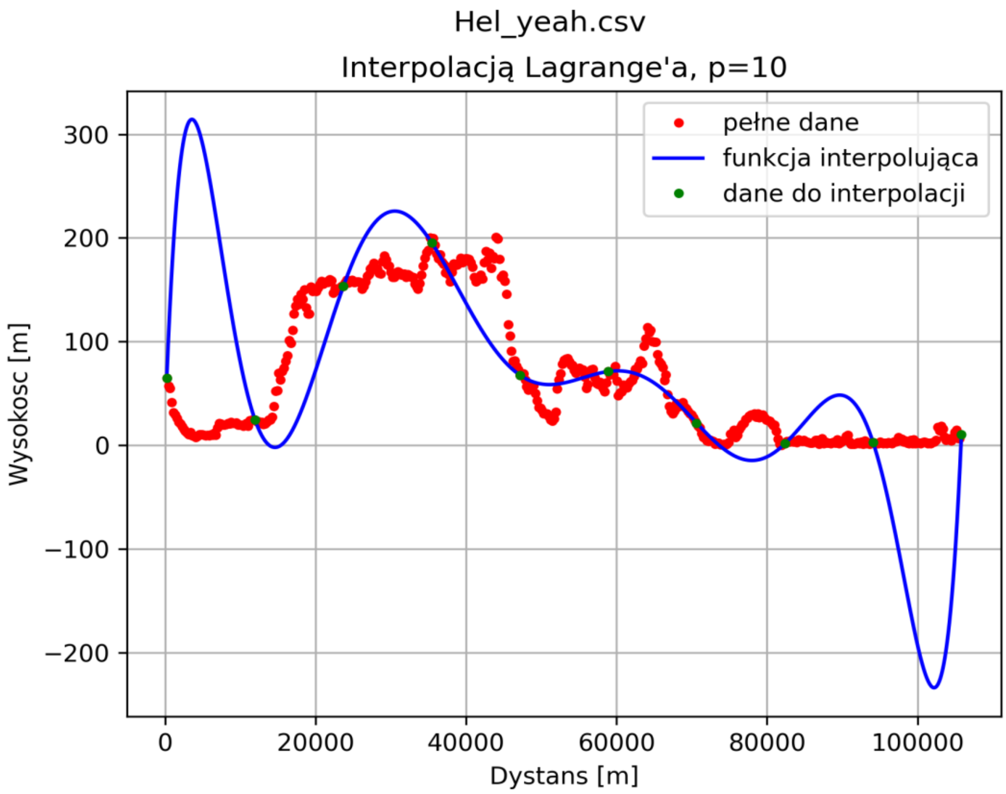
3.1 Hel_yeah



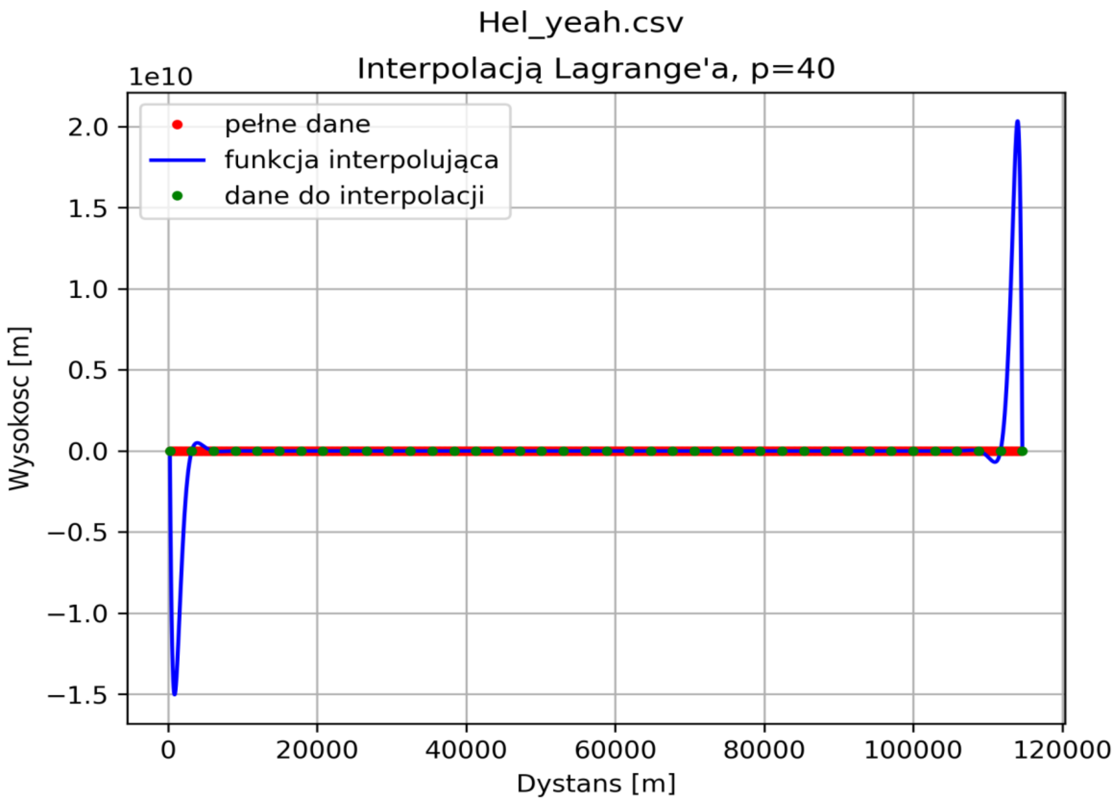
Rysunek 1: Profil wysokościowy Hel - niewielka ilosć węzłow skutkuje niedokładnym przybliżeniem interpolowanej funkcji.



Rysunek 2: Zwiększenie ilości węzłów daje coraz dokładniej wykres.

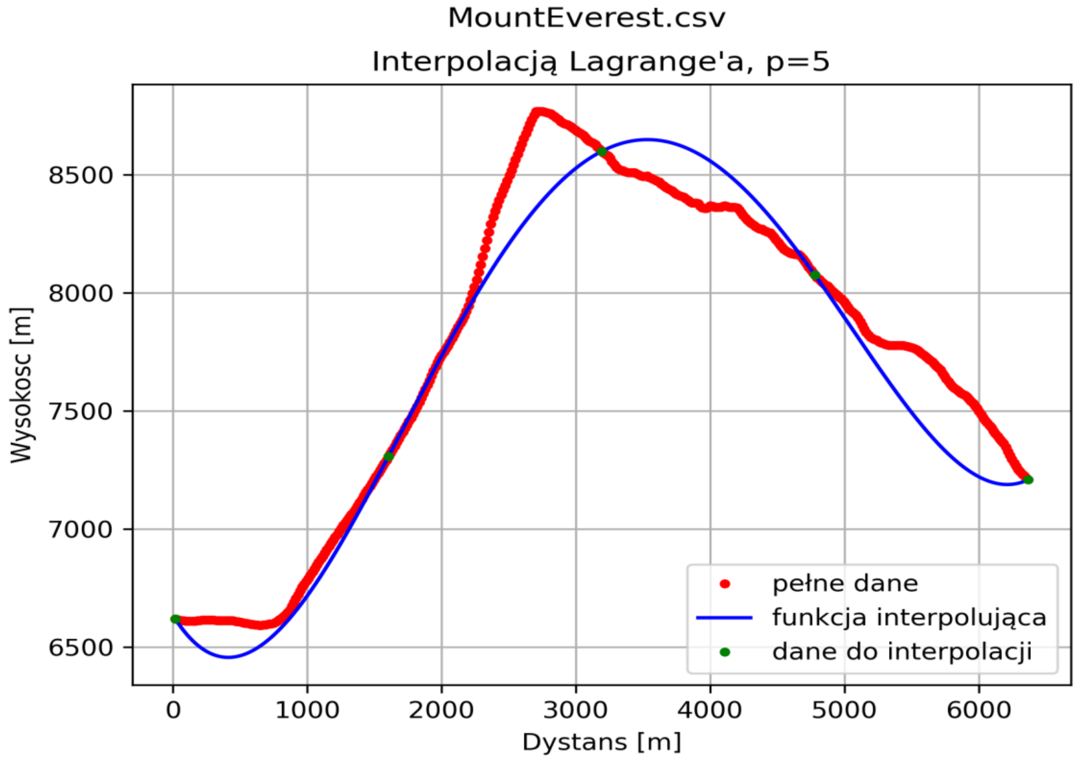


Rysunek 3: Oscylacja na krańcach przedziałów.

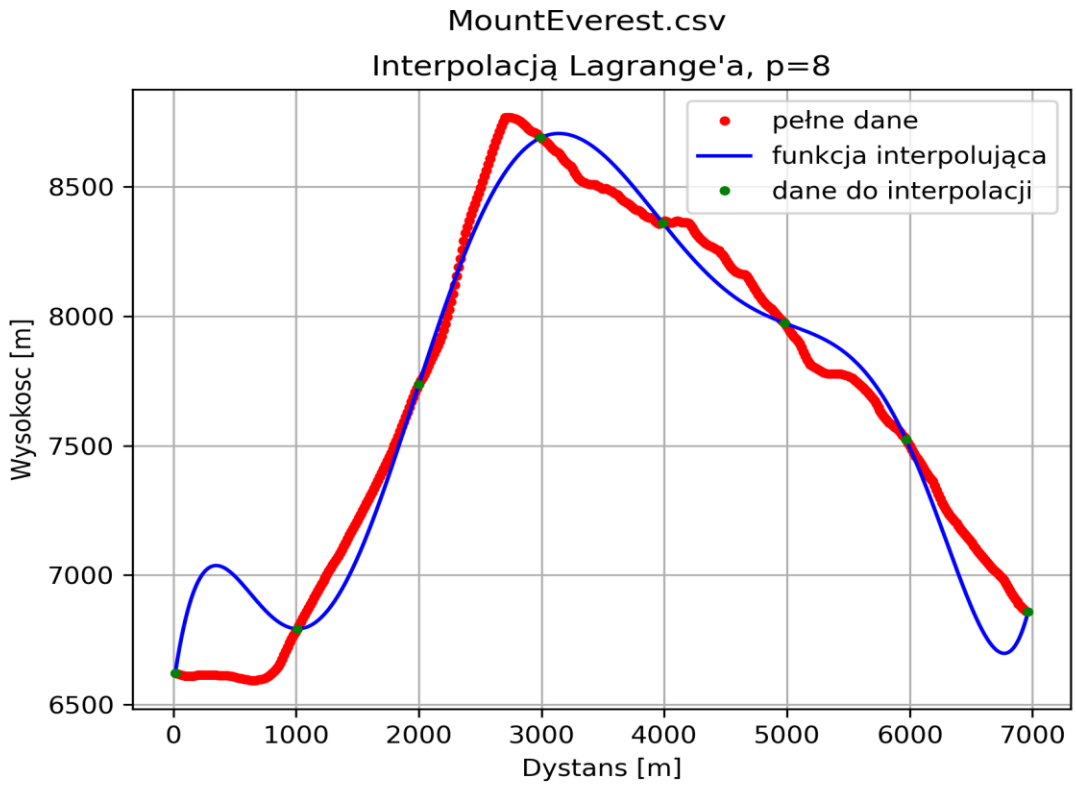


Rysunek 4: Wyraźne oscylacje na krańcach przedziałów przy zbyt dużej ilosci węzłów.

3.2 MountEverest

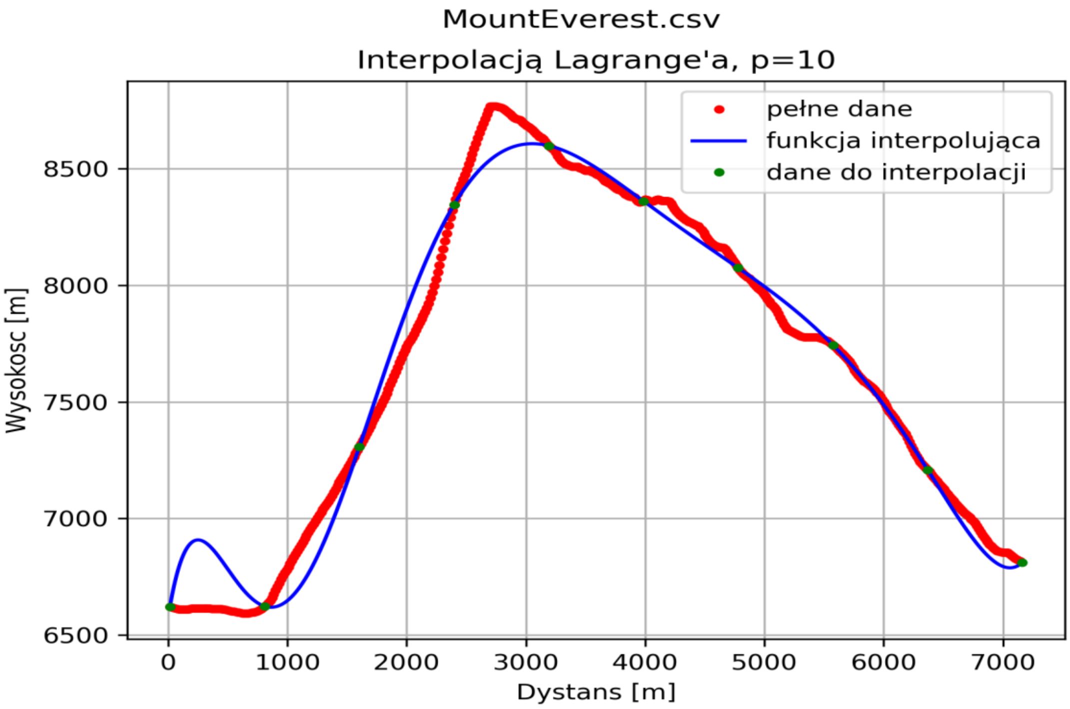


Rysunek 5: Uzyskujemy niezbyt zadowalający nas efekt. Funkcja jest niedokładnie przybliżona. Zwiększy zatem liczbę węzłów do 8.



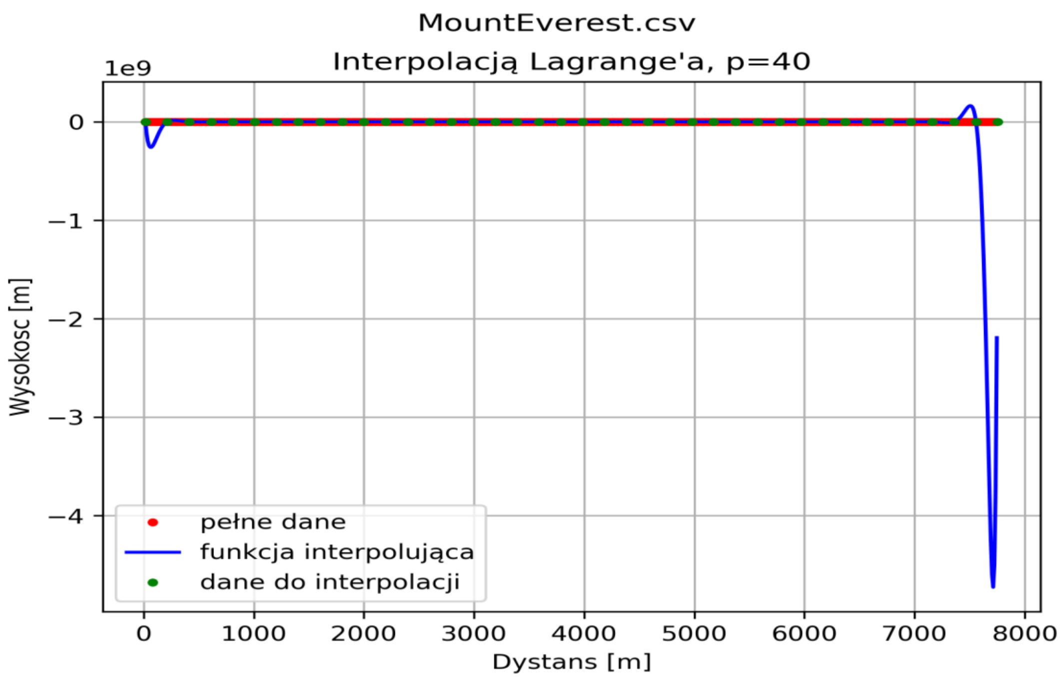
Rysunek 6: Interpolacja Lagrange’a dla 8 punktów.

Możemy zauważyć, że ponad dwukrotne zwiększenie liczby punktów zwiększyło nam dokładność przybliżenia funkcji, ale niestety głównie w środkowym przedziale. Na krańcach widoczne są już dość duże oscylacje.



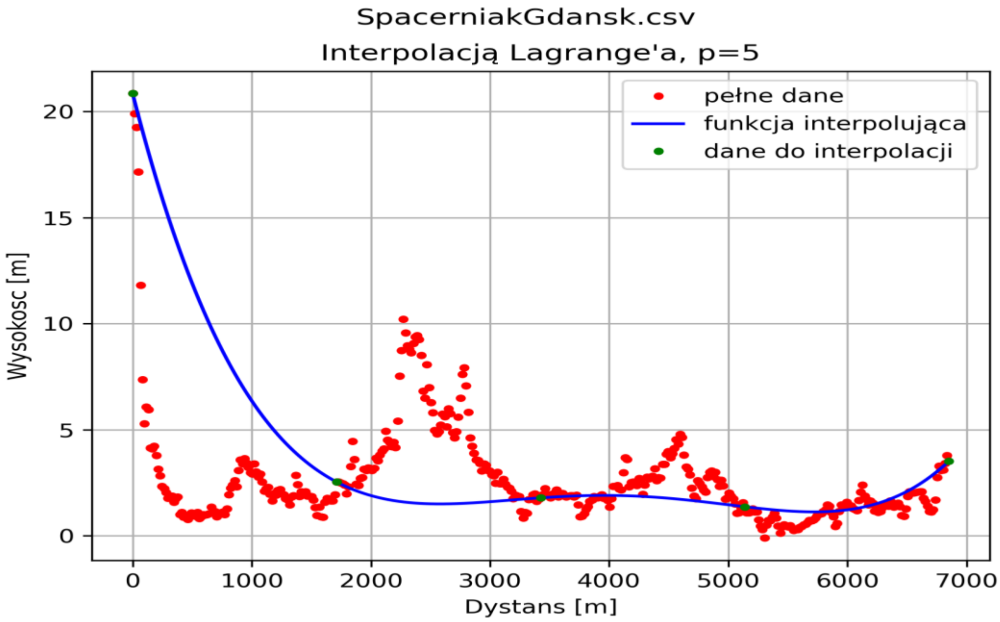
Rysunek 7: Interpolacja Lagrange'a dla 10 punktów.

Dostaliśmy dobry wykres, ale mamy dużą oscylację na początku. Kolejne zwiększenia ilości węzłów tylko pogorszy nasze przybliżenie.



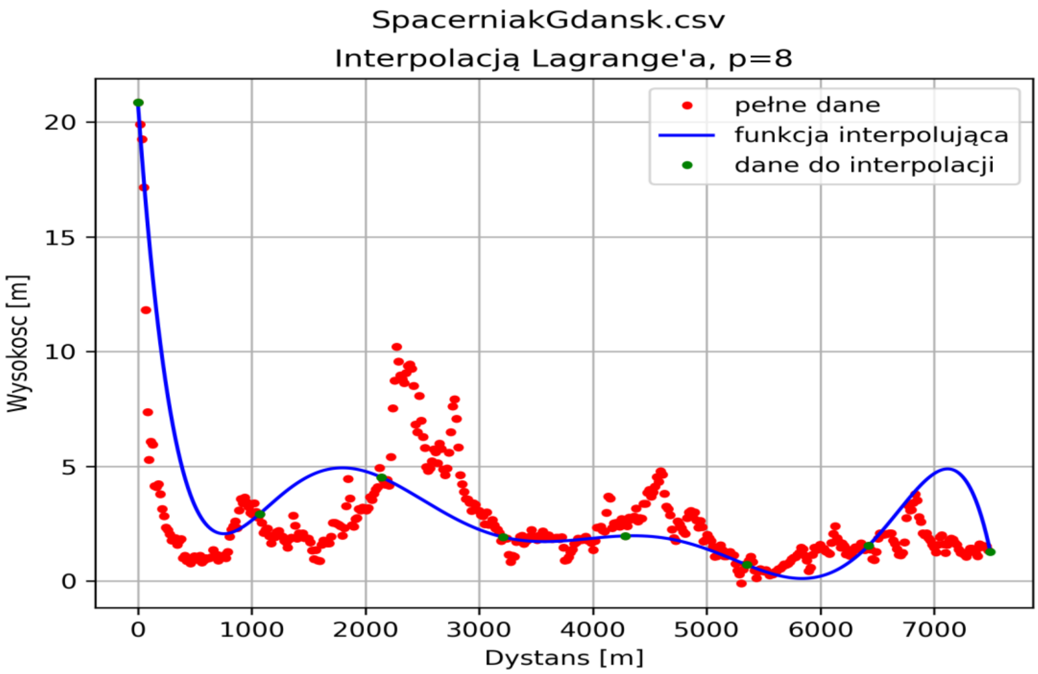
Rysunek 8: Interpolacja Lagrange'a dla 40 punktów.

3.3 SpacerniakGdansk



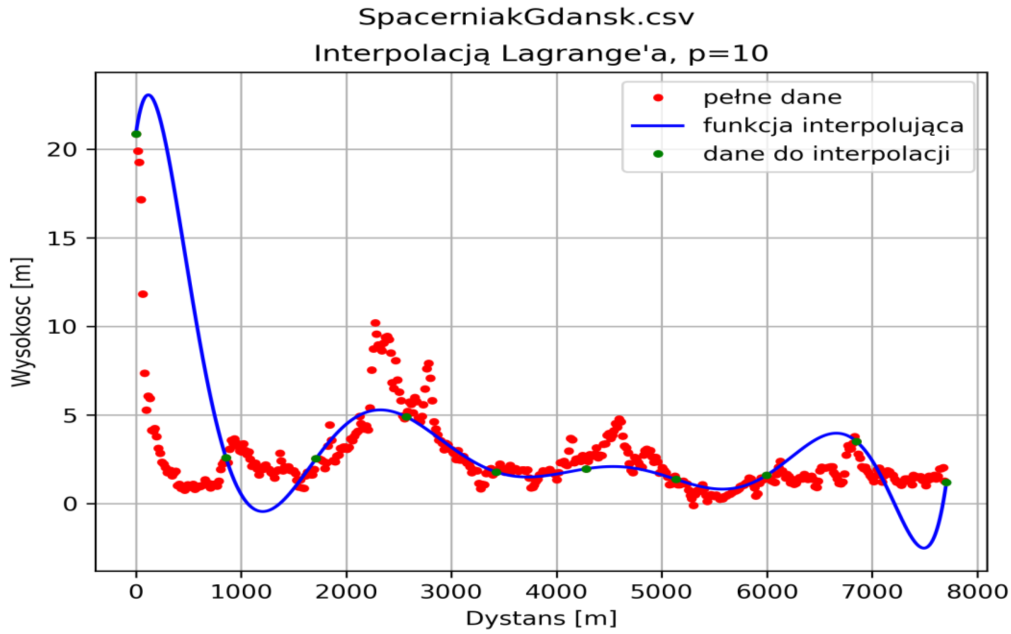
Rysunek 9: Interpolacja Lagrange’a dla 5 punktów.

Rozpoczynamy od 5 punktów. Uzyskujemy niezbyt zadowalający nas efekt. Funkcja jest niedokładnie przybliżona. Zwiększy zatem liczbę węzłów do 8. Warto zwrócić uwagę, że profil wysokościowy jest płaski, w porównaniu do MountEverest, jednak zawiera pewne nagłe skoki wysokościowe, co utrudniają dokładniejszą interpolację.



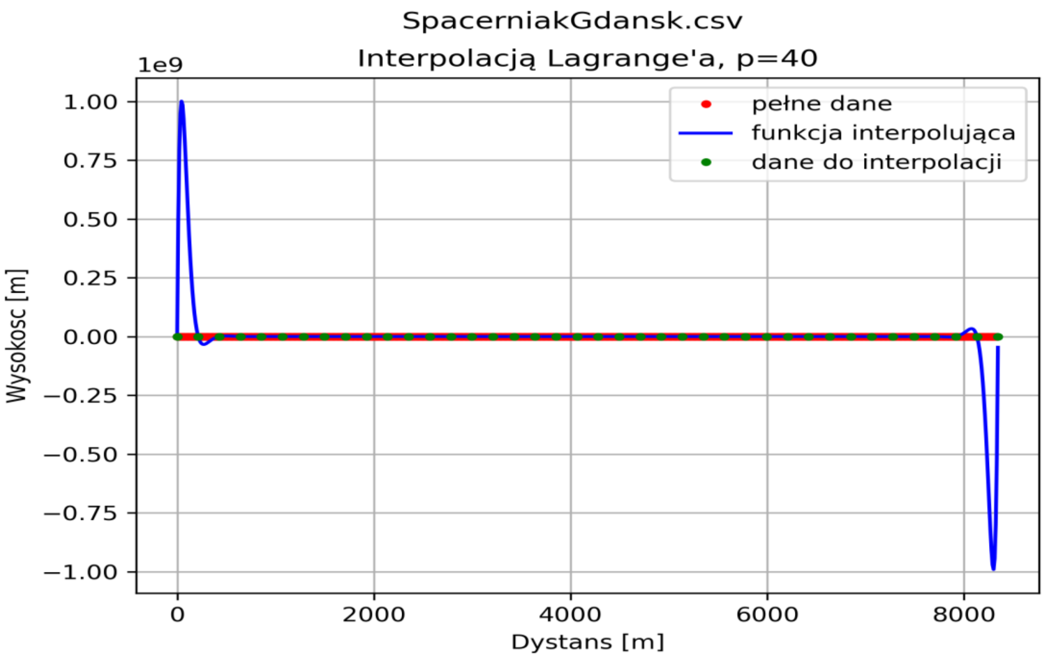
Rysunek 10: Interpolacja Lagrange’a dla 8 punktów.

Zwiększenie ilości punktów dało nam coraz bardziej dokładny wykres. Spróbujmy jeszcze bardziej zwiększyć liczbę punktów i spójrzmy na wynik.



Rysunek 11: Interpolacja Lagrange’a dla 10 punktów.

Jak widać wykres stał się jeszcze dokładniejszy w porównaniu do poprzedniego, ale widać oscylacje na prawym krańcu wykresu.



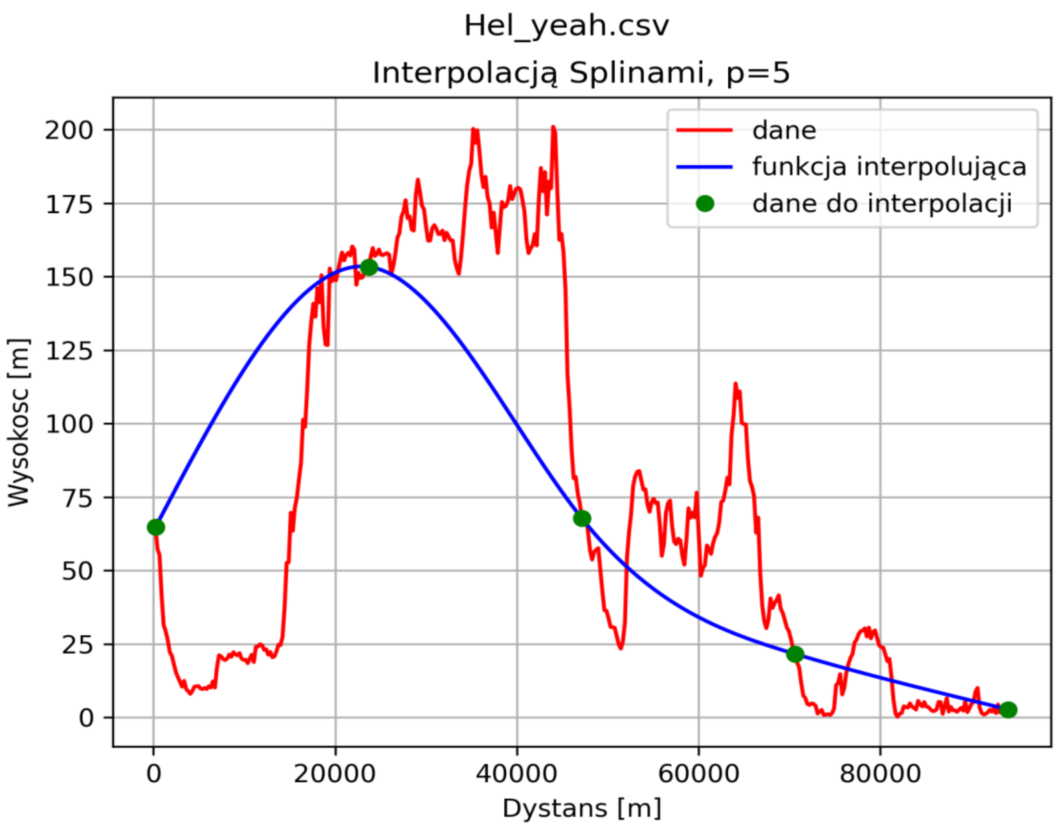
Rysunek 12: Interpolacja Lagrange’a dla 40 punktów.
Dla 40 punktów oscylacje są już bardzo duże, nie możemy zaakceptować takiego przybliżenia. Nie widoczny teraz wartości w środku.

4 Interpolacja funkcjami sklejanymi

Ta metoda wyróżnia się tym, że zamiast wyznaczać jeden wielomian wysokiego stopnia należy wyznaczyć serię wielomianów stopnia trzeciego, które zostaną następnie ”sklejone” w jedną funkcję. W tym przypadku dla n węzłów tworzymy n-1 podprzedziałów i dla każdego z nich interpolujemy funkcję wielomianem trzeciego stopnia. Kluczowym krokiem jest utworzenie układu 4(n-1) równań, które następnie rozwiązujemy używając faktoryzacji LU z pivotingiem.Przewagą ”splajnów” nad interpolacją wielomianową jest dowolność w liczbie węzłów. Efekt Rungego tu nie występuje, zatem jeżeli jest potrzeba, można zinterpolować dany profil bardzo dokładnie.

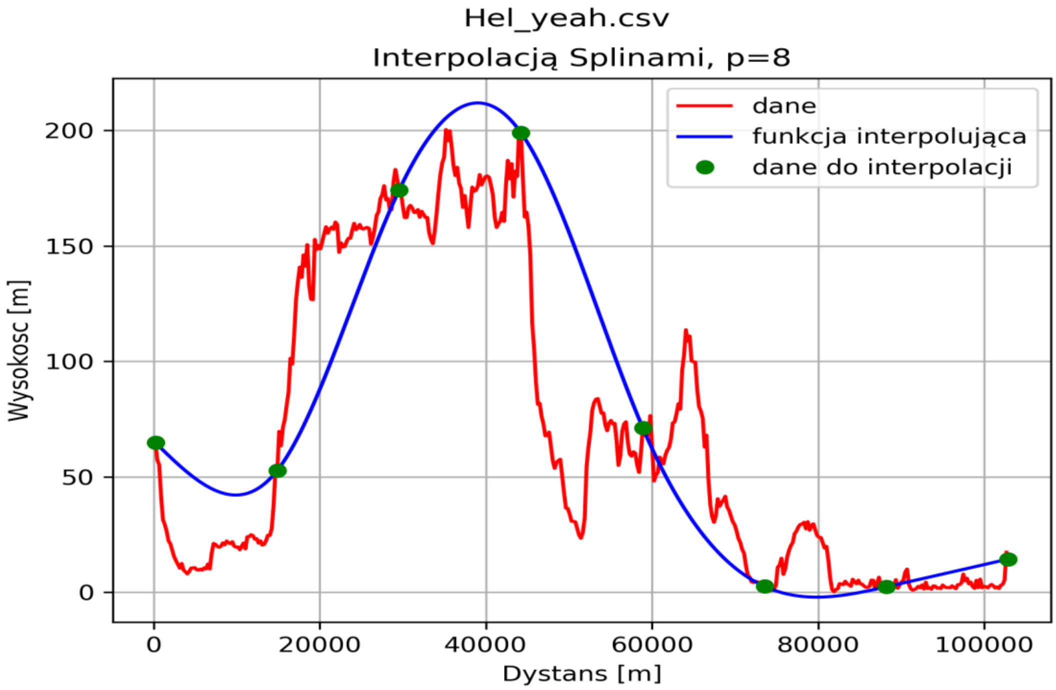
Poniżej prezentacja zastosowania interpolacji funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia dla trzech profili wysokościowych.

4.1 Hel_yeah



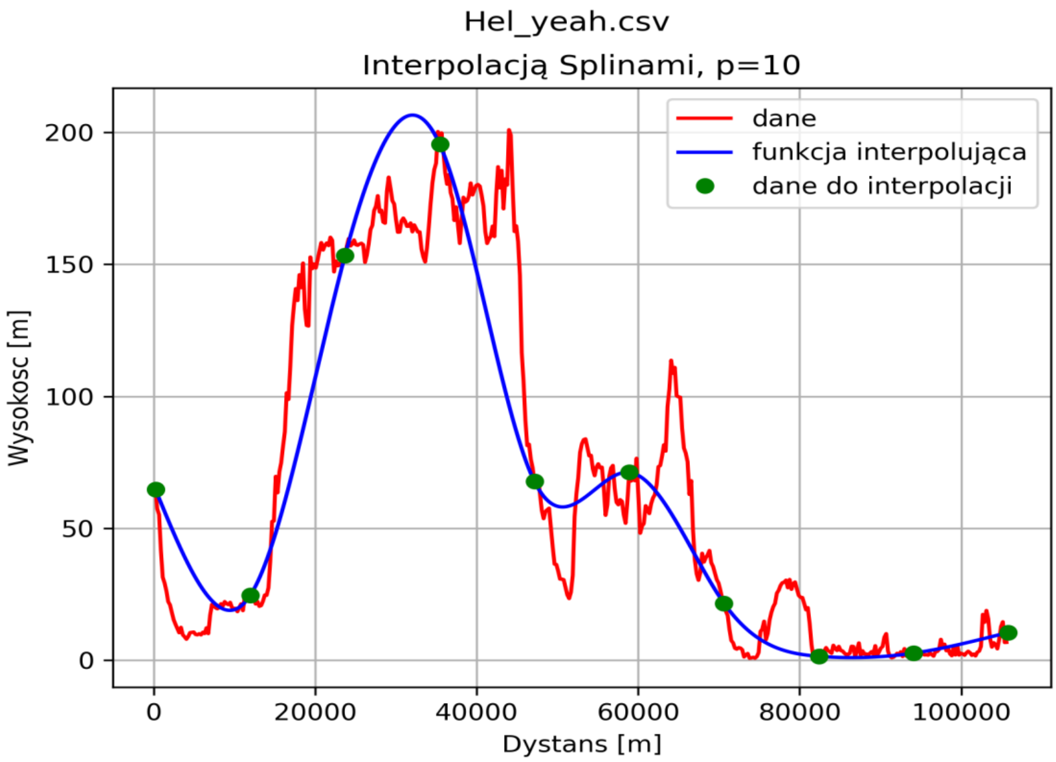
Rysunek 13: Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 5 punktów.

Dla 5 węzłów uzyskujemy praktycznie identyczny wynik jak dla interpolacji Lagrange’a. Zobaczymy co się stanie, kiedy zwiększymy liczbę punktów.

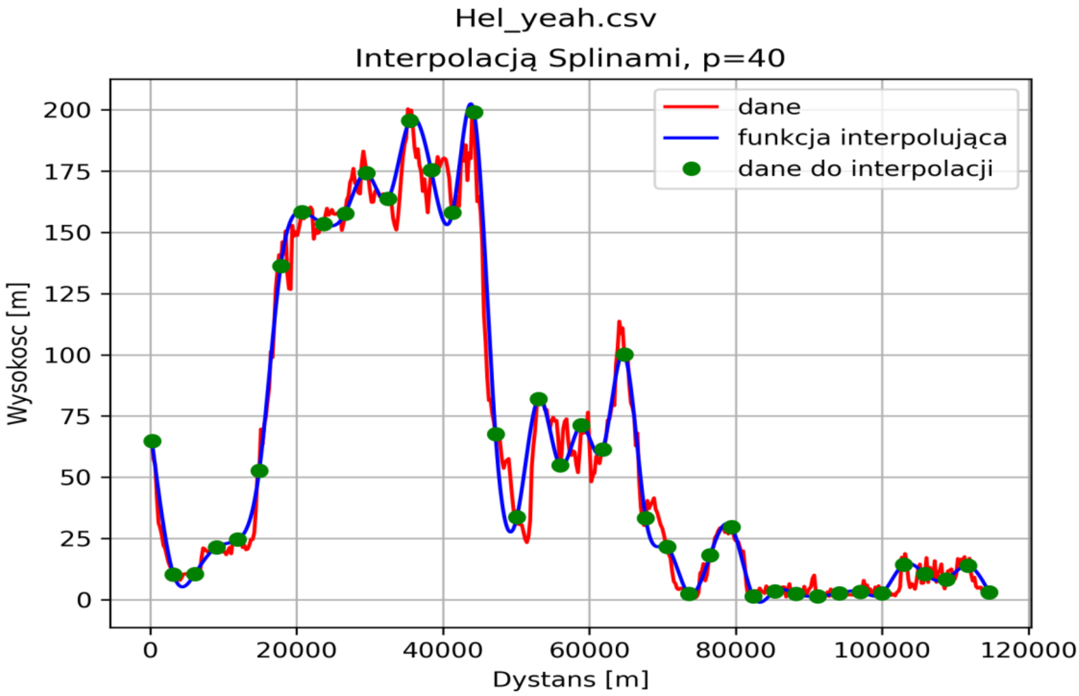


Rysunek 14: Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 8 punktów.

Uzyskujemy coraz dokładniejsze przybliżenie. Na krańcach nie pojawiają się oscylacje, zatem dalej zwiększamy liczbę punktów.



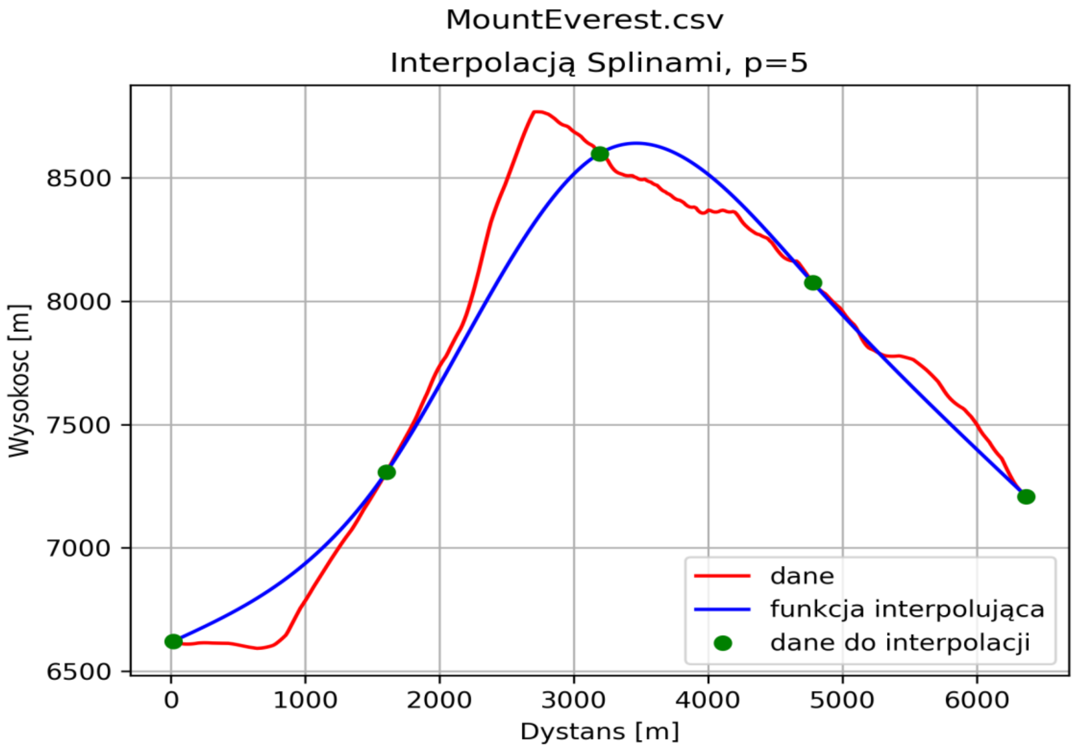
Rysunek 15: Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 10 punktów.



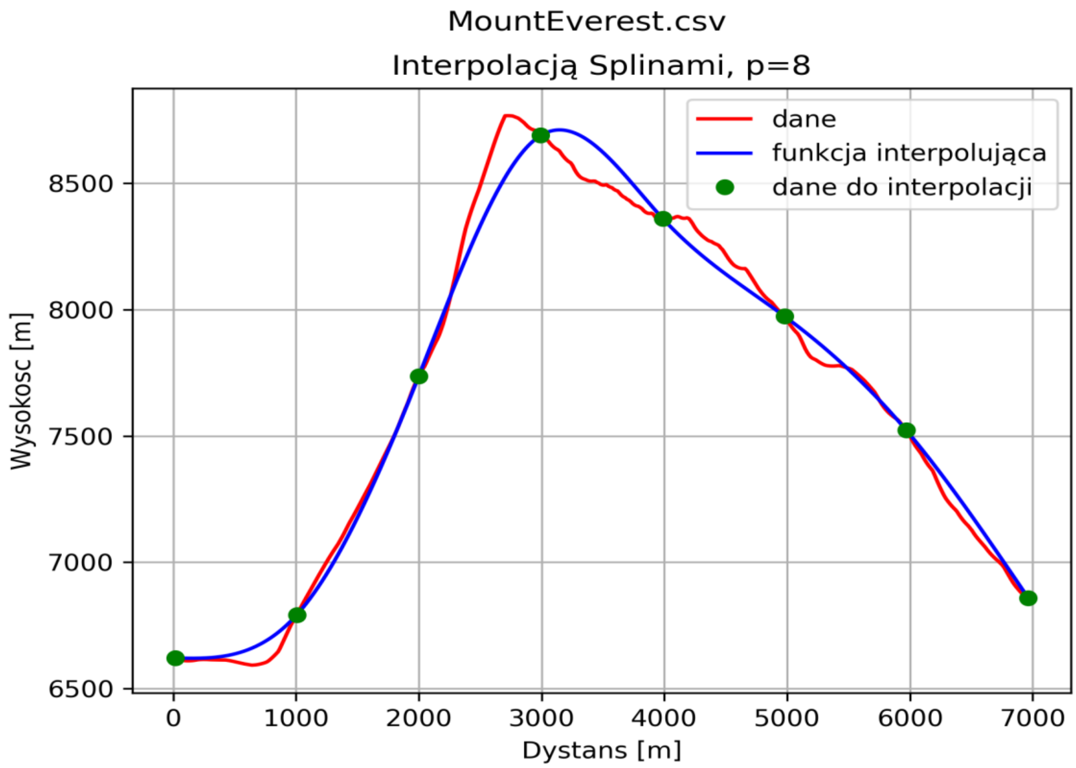
Rysunek 16: Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 40 punktów.

Uzyskaliśmy dokładny wynik, nie występuje efekt efekt Rungego.
Dalej będą przykłady wykresów dla innych danych.

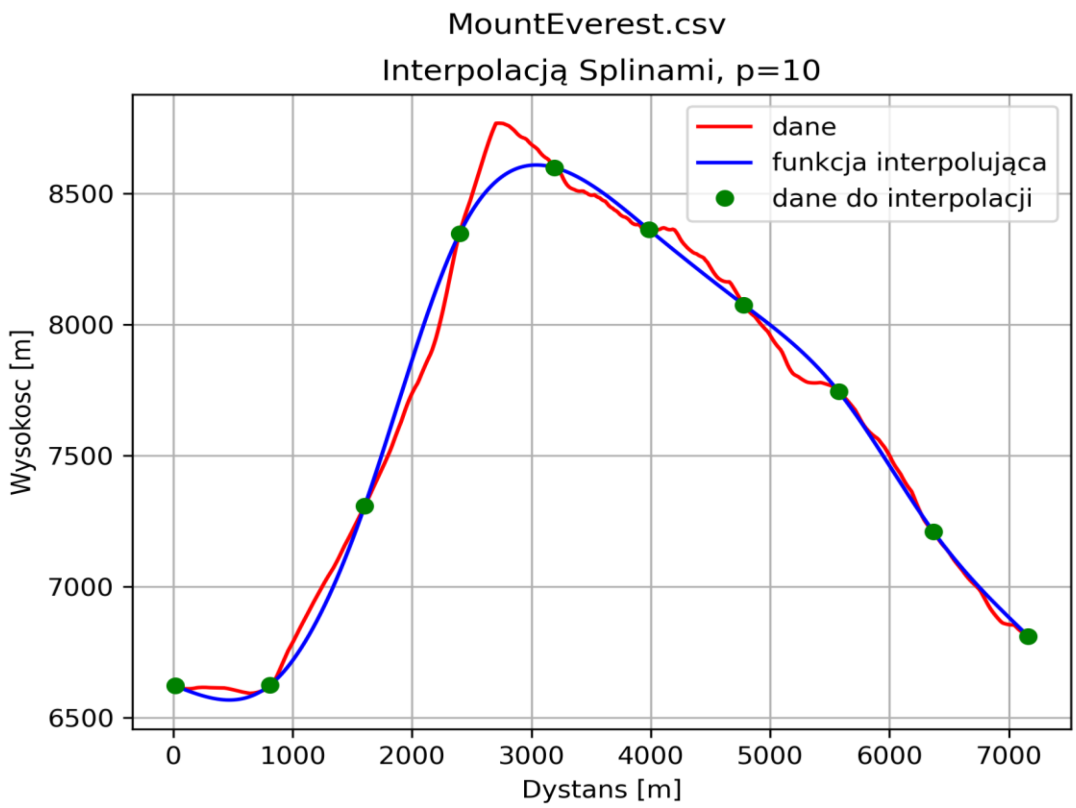
4.2 MountEverest



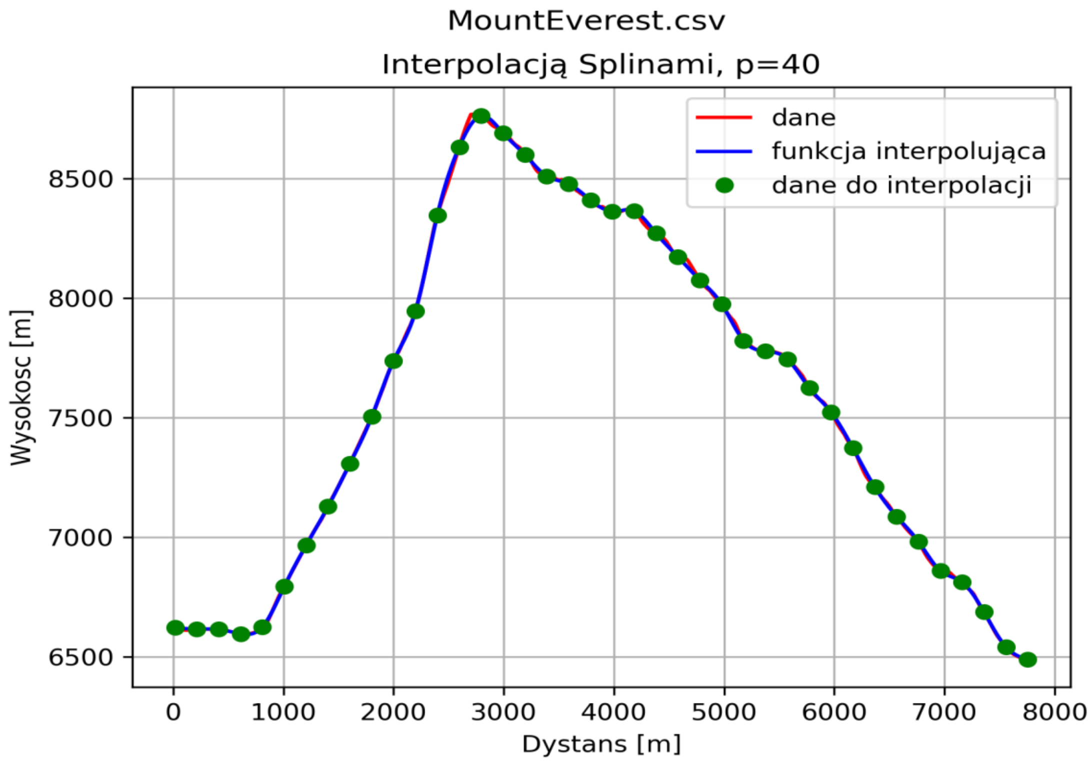
Rysunek 17: Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 5 punktów.



Rysunek 18: Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 8 punktów.

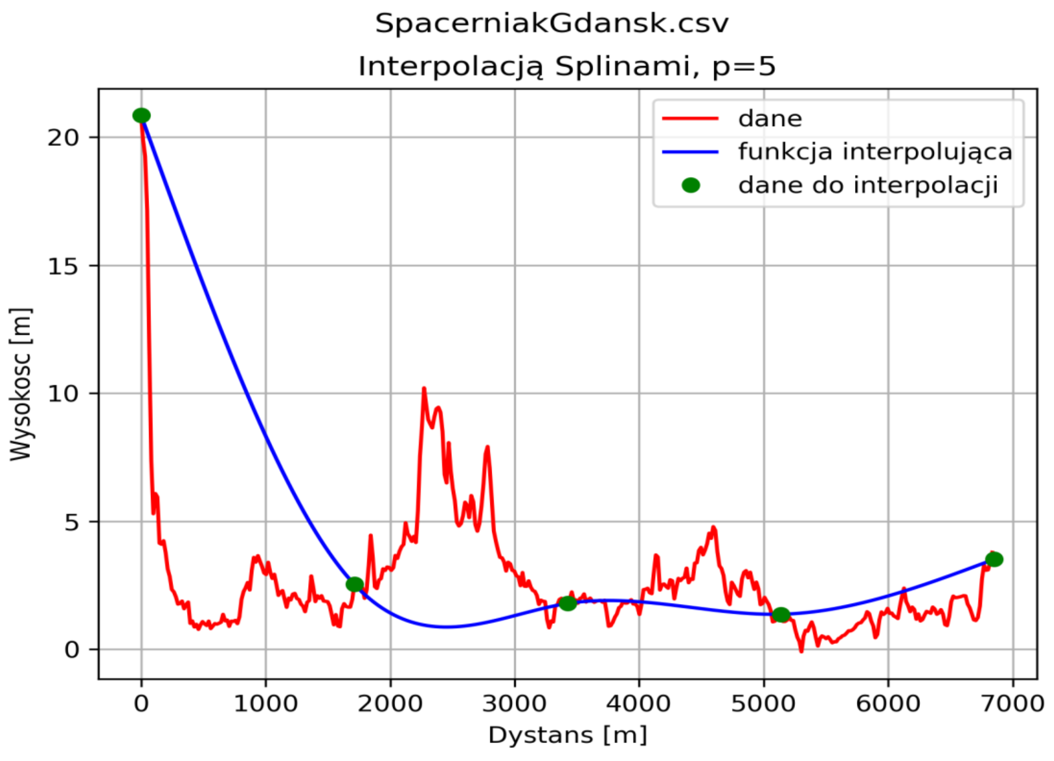


Rysunek 19: Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 10 punktów.

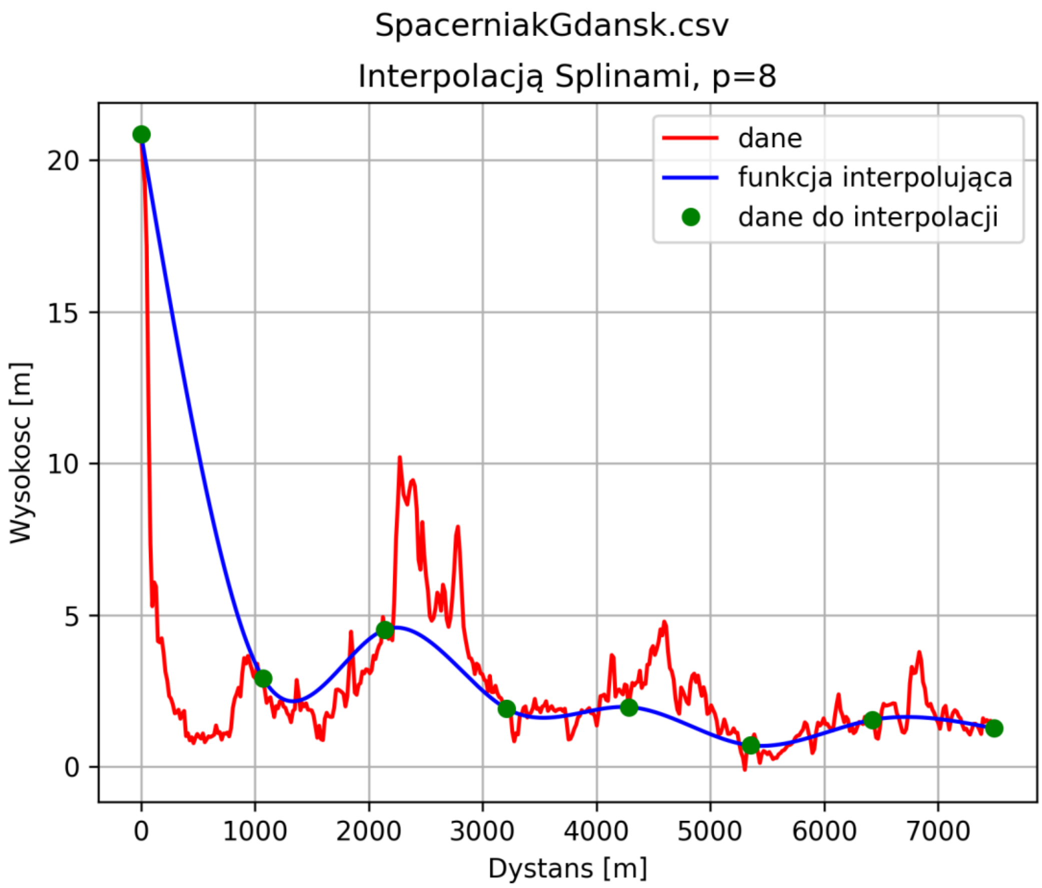


Rysunek 20: Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 40 punktów.

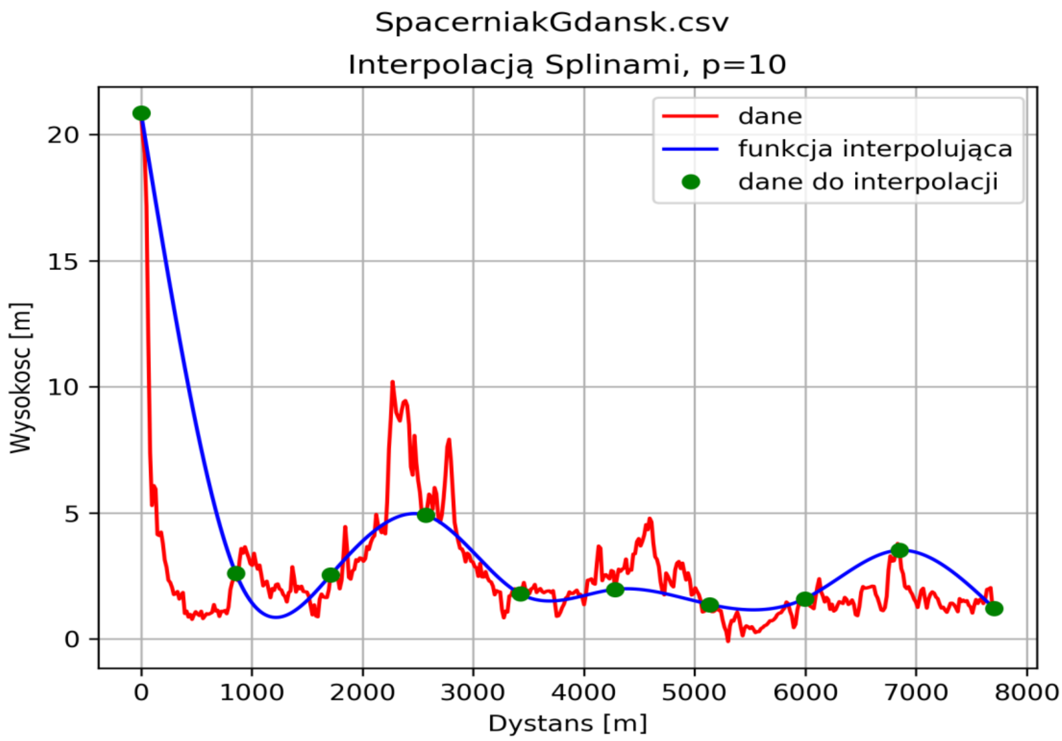
4.3 SpacerniakGdansk



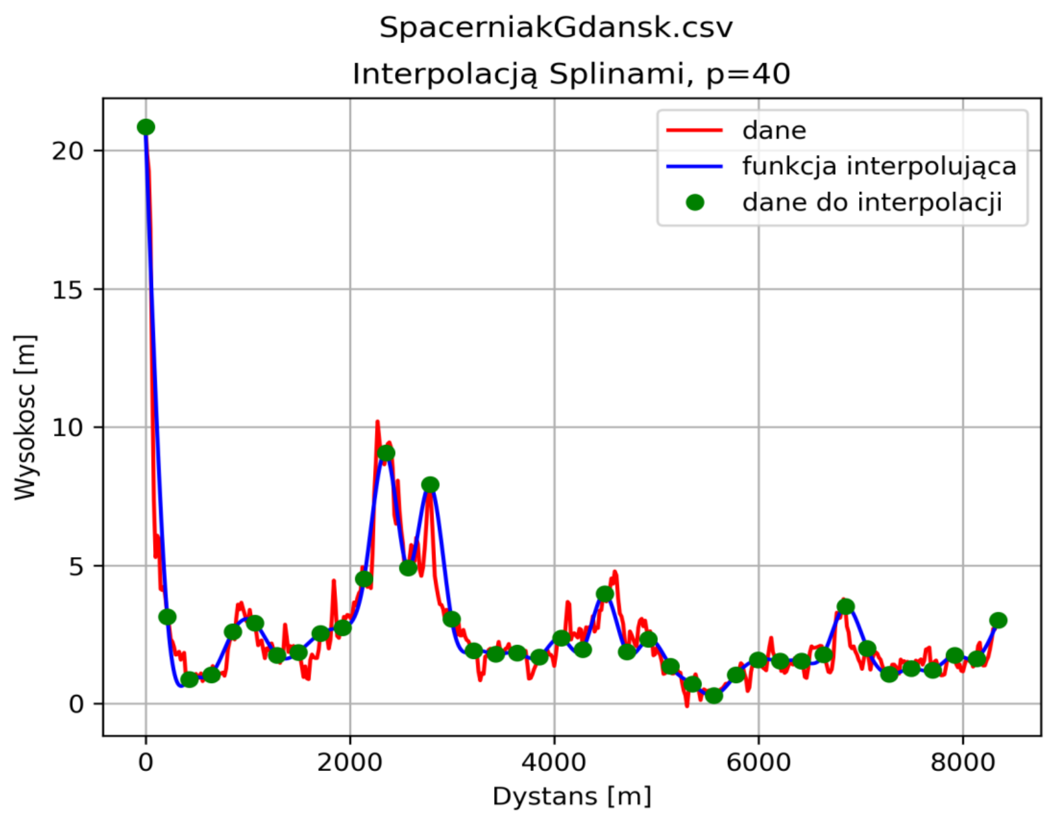
Rysunek 21: Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 5 punktów.



Rysunek 22: Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 8 punktów.



Rysunek 23: Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 10 punktów.



Rysunek 24: Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 40 punktów.

5 Podsumowanie

Interpolacja Lagrange'a sprawdza się, gdy mamy mało danych wejściowych, ważny jest czas lub prostota implementacji. Nie nadaje się ona jednak do aproksymacji profilu wysokościowego czy pracy na rzeczywistych zbiorach danych, ze względu na efekt Rungego, który przekłamuje wynik.

Interpolacja funkcjami sklejanymi, mimo że jest skomplikowana w implementacji, doskonale spełnia swoją rolę w pracy z danymi rzeczywistymi. Nie jest ograniczona ilością danych wejściowych oraz daje tym dokładniejszy wynik im jest ich więcej.

W niektórych przypadkach moglibyśmy zauważyć że potrzebujemy więcej punktów żeby osiągnąć dokładniejszy wynik. Na przykład dla profilu charakteryzującego się stromymi wzlotami i upadkami (np. trasa Hel, rys. 1-3, 13-16). Na podstawie tego możemy stwierdzić, że dla ścieżek regularnie rosnących lub malejących przybliżenia są dokładniejsze. W przypadku skoków ostrych przybliżenie dla tej samej liczby punktów okazuje się mniej dokładne.

Metoda spline jest z pewnością lepsza niż metoda Lagrange'a, pomimo wyższych wymagań. Metoda Lagrange'a, ze względu na wygenerowany efekt Rungego, powoduje poważne błędy w interpolacji.