

Numeryka i teorie z wyższymi członami krzywiznowymi

Received: _____; *Accepted:* _____

Abstract

Rozwiązywanie numeryczne równań pola dla teorii z wyższymi członami krzywiznowymi

1. Rozwiązanie sferycznie symetryczne otrzymywane numerycznie

1.1 Rozwiązanie sferycznie symetryczne - równania pola

Najprostrza teorią wyższego rzędu która modyfikuje rozwiązania Schwarzschilda jest teoria szóstego rzędu

$$I_g = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -R + \alpha R^{ab}{}_{cd} R^{cd}{}_{ef} R^{ef}{}_{ab} \right\}, \quad (1)$$

Ponieważ rozważana jest czasoprzestrzeń sferycznie symetryczna i statyczna należy znaleźć tylko dwie składowe metryki: $g_{tt}^{(n)}(r)$ oraz $g_{rr}^{(n)}(r)$. Ze względów rachunkowych wygodnie jest stosować funkcje $m^{(n)}(r)$ i $\psi^{(n)}(r)$ zamiast metryki, z którą funkcje te związane są relacją

$$\begin{aligned} g_{tt}(r) &= -(1 - 2m(r)/r) e^{2\psi(r)}, \\ g_{rr}(r) &= 1/(1 - 2m(r)/r). \end{aligned} \quad (2)$$

Związek reprezentacji $m^{(n)}(r)$, $\psi^{(n)}$ i reprezentacji metrycznej $g_{tt}^{(n)}(r)$, $g_{rr}^{(n)}(r)$ zadany jest przez tożsamość (2). Aby przejść z reprezentacji $m^{(n)}(r)$, $\psi^{(n)}$ do $g_{tt}^{(n)}(r)$, $g_{rr}^{(n)}(r)$ należy wstawić do równania (2) funkcje $m^{(n)}(r)$ i $\psi^{(n)}$ w postaci $m^{(n)} = m^{(0)} + \Delta m^{(1)} + \Delta m^{(2)} + \dots +$

$\Delta m^{(n)}$ i $\psi^{(n)} = \psi^{(0)} + \Delta\psi^{(1)} + \Delta\psi^{(2)} + \dots + \Delta\psi^{(n)}$, gdzie $\Delta m^{(n)}$ i $\Delta\psi^{(n)}$ oznaczają poprawki pochodzące od n-tej perturbacji. Następnie należy wprowadzić bezwymiarowy parametr ε dokonując podstawienia $\Delta m^{(n)}(r) \rightarrow \varepsilon^n \Delta m^{(n)}(r)$, $\Delta\psi^{(n)} \rightarrow \varepsilon^n \Delta\psi^{(n)}$ i rozwinąć prawą stronę równania (2) w szereg Taylora względem ε do rzędu n . Parametr pomocniczy ε należy na końcu wyeliminować poprzez podstawienie $\varepsilon = 1$.

Zastosowanie nowej reprezentacji powoduje, że aby otrzymać poprawkę pierwszego rzędu do metryki Reissnera-Nordströma $\Delta m^{(1)}(r)$ i $\Delta\psi^{(1)}(r)$ należy rozwiązać dwa równania różniczkowe. Pierwsze z nich to

$$\Delta m^{(1)'} = f\left(\frac{\partial m^{(0)}}{\partial r}, \dots, \frac{\partial^4 m^{(0)}}{\partial r^4}, \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial r}, \dots, \frac{\partial^4 \psi^{(0)}}{\partial r^4}\right), \quad (3)$$

gdzie prim oznacza pochodną po r , natomiast drugie równanie ma postać

$$\Delta\psi^{(1)'} = g\left(\frac{\partial m^{(0)}}{\partial r}, \dots, \frac{\partial^4 m^{(0)}}{\partial r^4}, \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial r}, \dots, \frac{\partial^4 \psi^{(0)}}{\partial r^4}\right). \quad (4)$$

1.2 Rozwiązanie symboliczne

W przypadku poszukiwania analogonu rozwiązania Schwarzschilda dla teorii (1) metodą perturbacyjną do drugiego rzędu włącznie należy rozwiązać równania (3) i (4) dla pierwszego rzędu i analogiczne dla drugiego rzędu. Po przyjęciu warunków $m(r \rightarrow \infty) = M$ czyli $m^{(n)}(r \rightarrow \infty) = 0$ oraz $\psi(r \rightarrow \infty) = 0$ czyli $\psi^{(n)}(r \rightarrow \infty) = 0$ otrzymujemy rozwiązania

$$\Delta m^{(1)}(r) = 196 \frac{M^3}{r^6} - 108 \frac{M^2}{r^5}, \quad \Delta\psi^{(1)}(r) = -108 \frac{M^2}{r^6} \quad (5)$$

$$\Delta m^{(2)}(r) = 14808 \frac{M^5}{r^{12}} - \frac{98496}{11} \frac{M^4}{r^{11}}, \quad \Delta\psi^{(2)}(r) = -29808 \frac{M^4}{r^{12}} + \frac{165888}{11} \frac{M^3}{r^{11}} \quad (6)$$

1.3 Rozwiązanie numeryczne

Kluczowym powodem dla którego powyższe rozwiązania były możliwe do uzyskania jest bardzo prosta postać rozwiązania zerowego rzędu $m^{(0)}(r) = M$, $\psi^{(0)}(r) = 0$. Jeśli $m^{(0)}(r)$,

$\psi^{(0)}(r)$ jest skomplikowaną funkcją uzyskanie przybliżenia dowolnego rzędu jest niemożliwe.

Można zadać pytanie czy można pociągnąć dalej obliczenia za pomocą obliczeń numerycznych.

Przypuśćmy, że mamy równania pola określające dowolny rząd obliczeń

$$\Delta m^{(n)'} = f_n\left(\frac{\partial m^{(0\dots n-1)}}{\partial r}, \dots, \frac{\partial^4 m^{(0\dots n-1)}}{\partial r^4}, \frac{\partial \psi^{(0\dots n-1)}}{\partial r}, \dots, \frac{\partial^4 \psi^{(0\dots n-1)}}{\partial r^4}\right), \quad (7)$$

$$\Delta \psi^{(n)'} = g_n\left(\frac{\partial m^{(0\dots n-1)}}{\partial r}, \dots, \frac{\partial^4 m^{(0\dots n-1)}}{\partial r^4}, \frac{\partial \psi^{(0\dots n-1)}}{\partial r}, \dots, \frac{\partial^4 \psi^{(0\dots n-1)}}{\partial r^4}\right). \quad (8)$$

Aby obliczyć $\Delta m^{(n)}$ i $\Delta \psi^{(n)}$ należy formalnie scałkować równania (7-8).

Aby poszukiwać rozwiązań metodą numeryczną należy matematyczne infinitezymalne wielkości odpowiednikami numerycznymi. Pochodne $\frac{\partial^n m^{(m)}}{\partial r^n}$ i $\frac{\partial^n \psi^{(m)}}{\partial r^n}$ należy zastąpić przybliżeniem różnicowym oznaczonym $D^n m^{(m)}$ i $D^n \psi^{(m)}$. Na przykład przybliżenie pierwszej pochodnej (ang. central difference) rzędu drugiego ma postać $D^1 m^{(m)} = \frac{-\frac{1}{2}m(x-h) + \frac{1}{2}m(x+h)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$. Parametr h reprezentuje odstęp siatki. Całki równań (7-8) należy zastąpić wersją numeryczną na przykład obliczając je metodą trapezów z błędem rzędu $\mathcal{O}(h^2)$.

Jeśli policzymy $\Delta m^{(1)}$ i $\Delta \psi^{(1)}$ metodą numeryczną i porównamy z obliczeniami dokładnymi (5) wyniki pokrywają się (do pewnej dokładności) co obrazują Rysunki 1, 2, 3, 4.

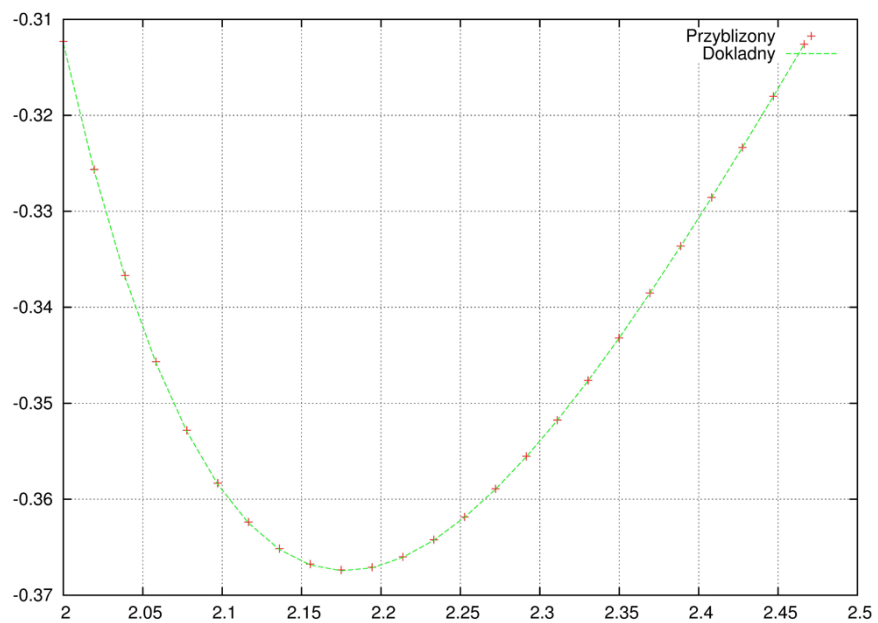
Jeśli zdefiniujemy normę

$$\|u^h\| = \left(J^{-1} \sum_{j=1}^J (u_j^h)^2 \right)^{1/2}, \quad (9)$$

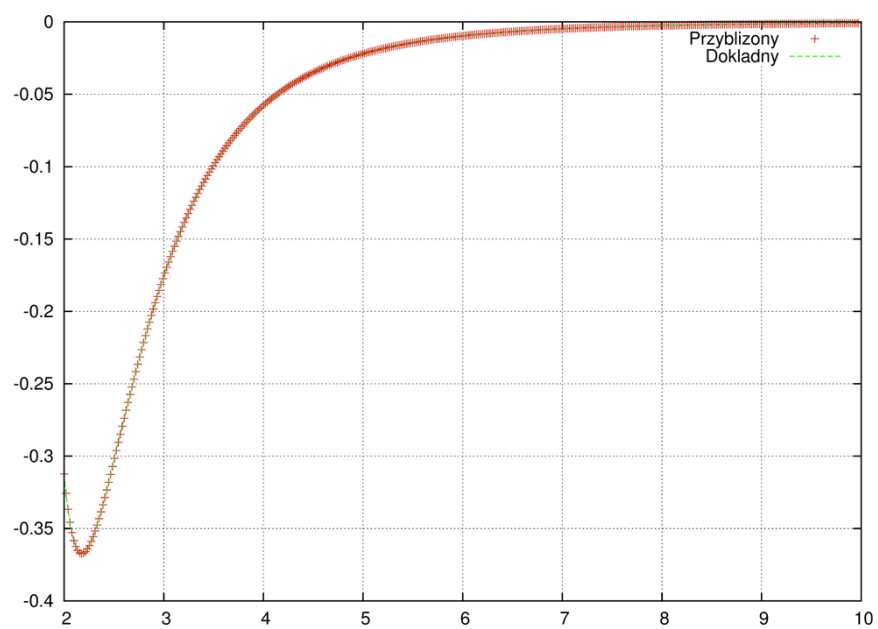
gdzie u^h oznacza rozwiązanie równania różnicowego, u_j^h to j-ty element rozwiązania u^h , J to liczba elementów rozwiązania u^h to można obliczyć błąd

$$Err_{u^h} = \|u_{exact}^h - u^h\|, \quad (10)$$

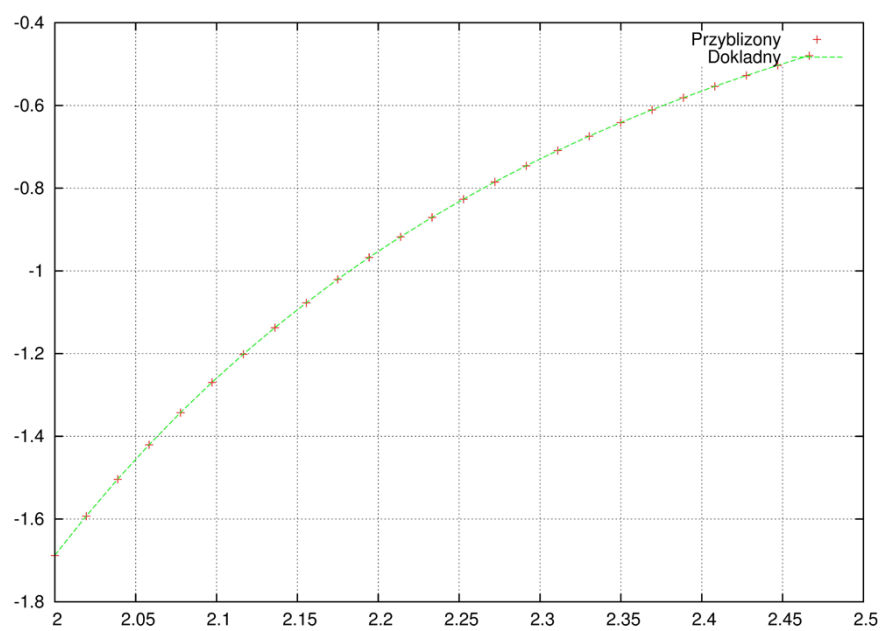
gdzie $u_{exact}^h j = u_{exact}(x_j)$. Błędy $Err_{m^{(1)h}}$ i $Err_{\psi^{(1)h}}$ przedstawiono na rysunku 5, 6



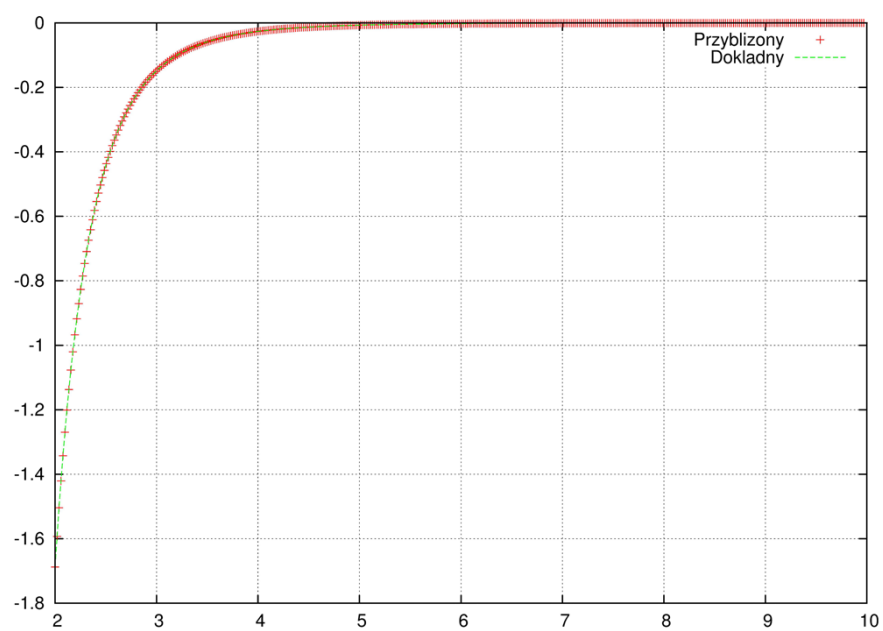
Rysunek 1: M1 $h=0.02$



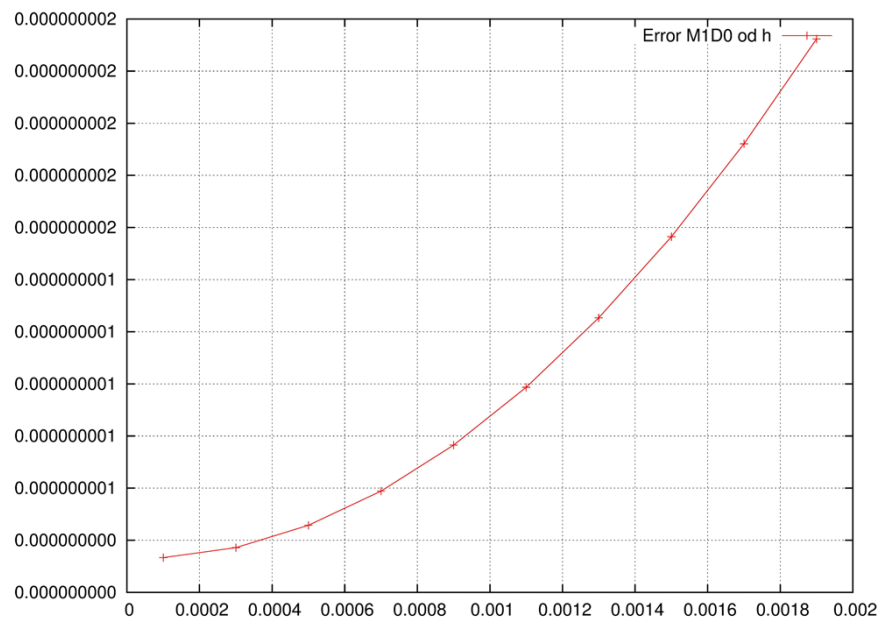
Rysunek 2: M1 $h=0.02$



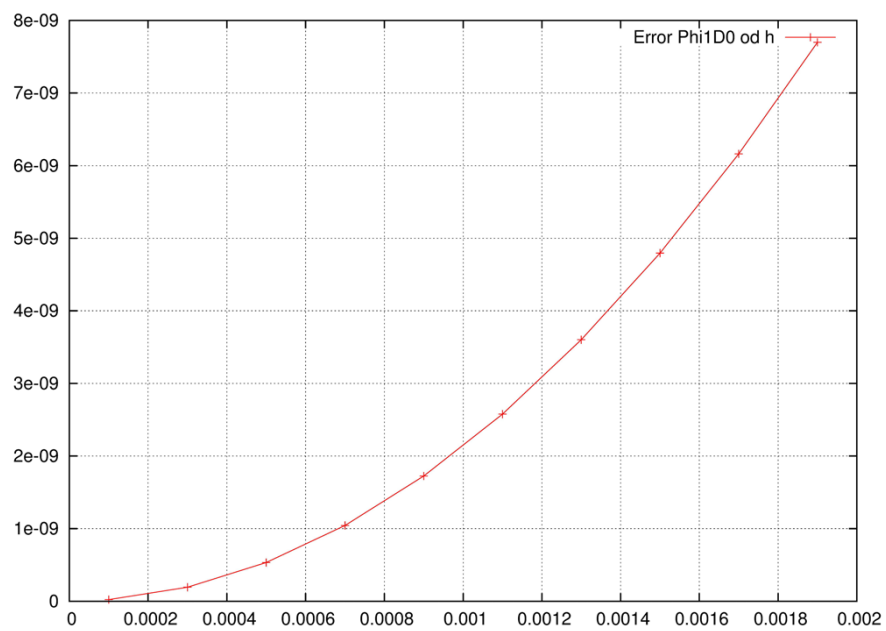
Rysunek 3: Φ_1 $h=0.02$



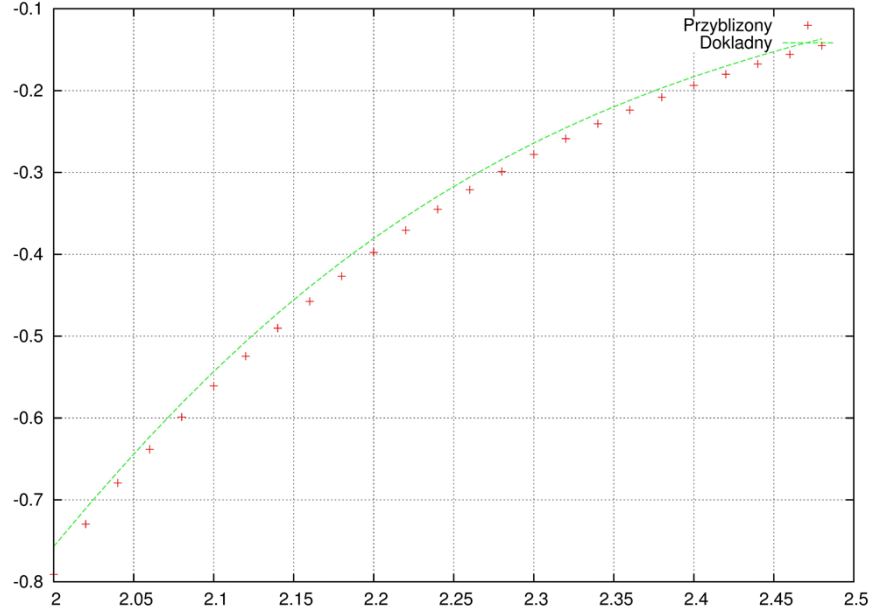
Rysunek 4: Φ_1 $h=0.02$



Rysunek 5: M1 Error



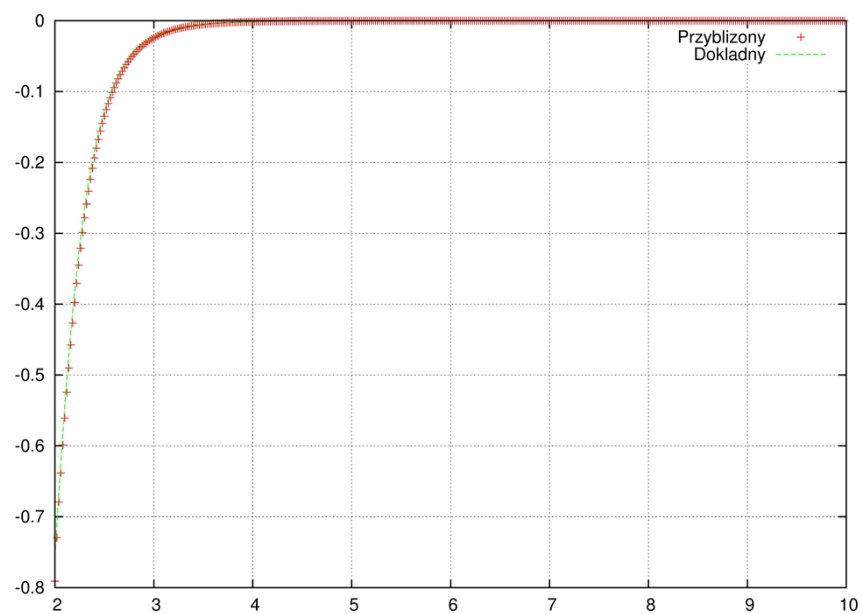
Rysunek 6: Phi1 Error



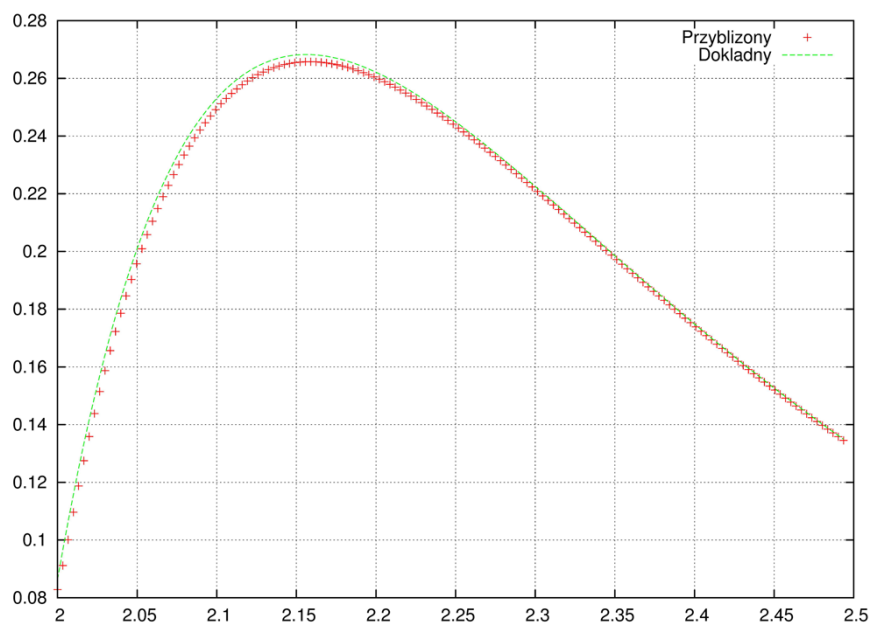
Rysunek 7: M2 h=0.02

Jeśli policzymy $\Delta m^{(2)}$ i $\Delta \psi^{(2)}$ metodą numeryczną i porównamy z obliczeniami dokładnymi (6) wyniki pokrywają się (do pewnej dokładności) co obrazują Rysunki 7, 8, 3, 10.

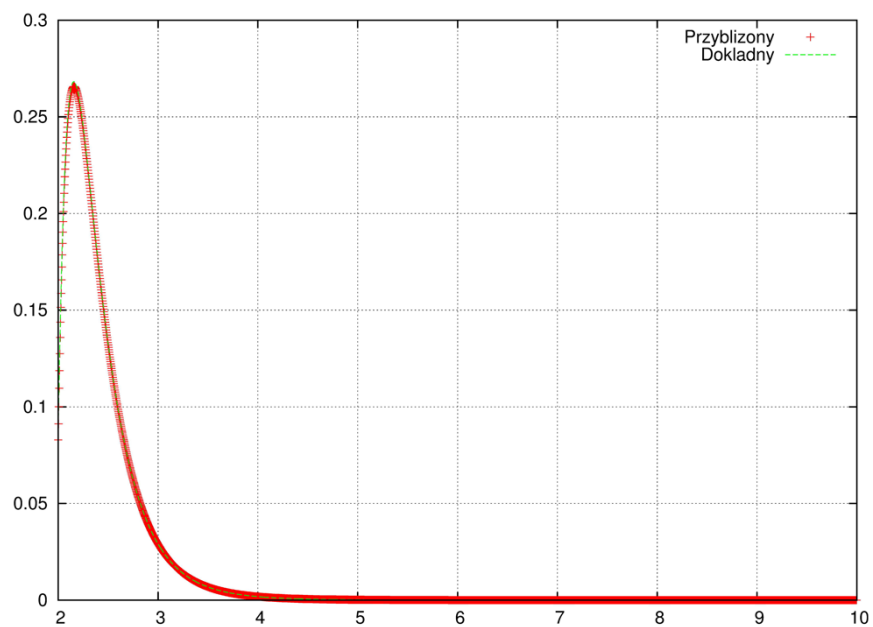
Błędy $Err_{m^{(2)h}}$ i $Err_{\psi^{(2)h}}$ przedstawiono na rysunku 11, 12. Widac, że istnieje pewna minimalna wartość odległości siatki h poniżej której błąd nie maleje ale zaczyna wzrastać. Dzieje się tak prawdopodobnie (**sprawdzić !!!**) dlatego że mamy doczynienia z teorią z wysokimi pochodnymi. Wartości wysokich pochodnych generują błąd zaokrąglenia tym wyższy im wyższa pochodna. W przypadku liczenia poprawki $\Delta m^{(1)}$ i $\Delta \psi^{(1)}$ problem ten się nie pojawił ponieważ w całce równań 7 i 8 występowały pochodne funkcji stałej $\frac{\partial m^{(0.)}}{\partial r}, \dots, \frac{\partial^4 m^{(0.)}}{\partial r^4}, \frac{\partial \psi^{(0.)}}{\partial r}, \dots, \frac{\partial^4 \psi^{(0.)}}{\partial r^4}$ a te wynosiły dokładnie zero.



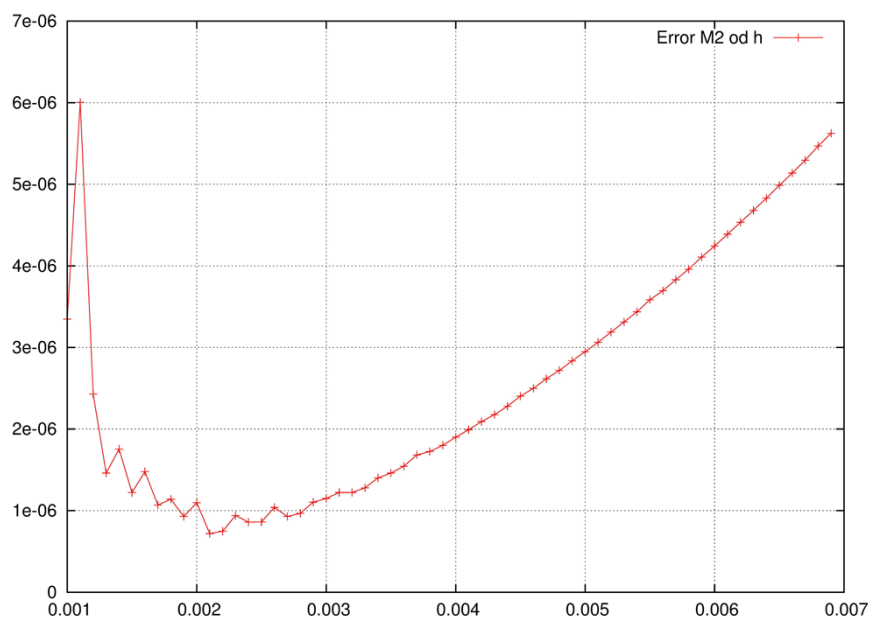
Rysunek 8: M_2 $h=0.02$



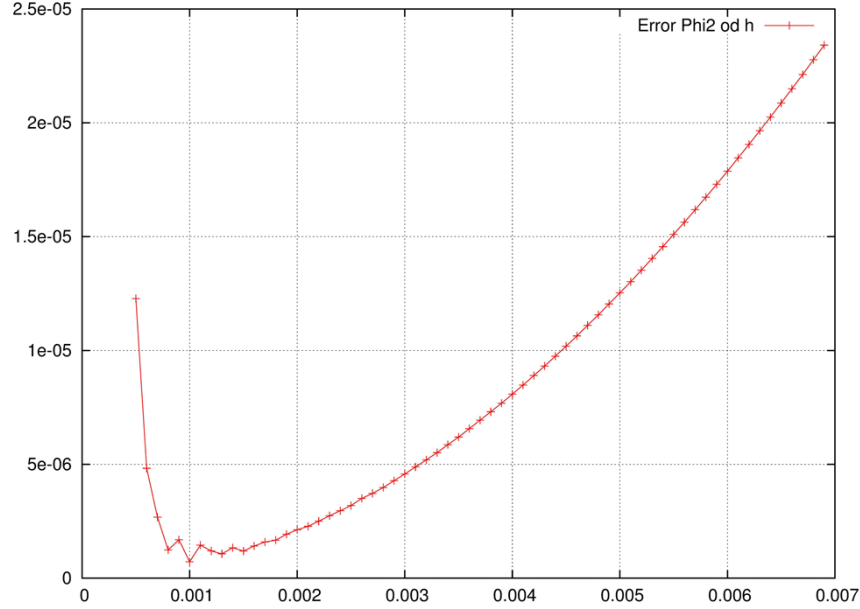
Rysunek 9: Φ_2 $h=0.003$



Rysunek 10: Φ_2 $h=0.003$



Rysunek 11: M2 error



Rysunek 12: Phi2 Error

1.4 Rozwiązanie numeryczne - curve fitting

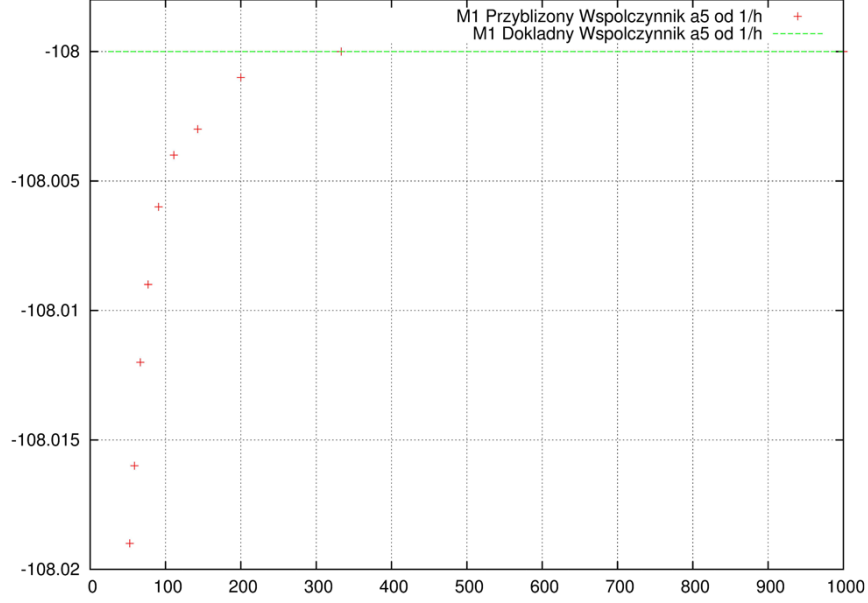
Jeśli znajdziemy rozwiązanie numeryczne można przedstawić je w bazie funkcji

$$y_i = f(\alpha_s) = \sum_{k=0}^M \alpha_k \phi_k(x_i), \quad (11)$$

gdzie (y_i, x_i) to numeryczne rozwiązanie, α_k współczynniki liczbowe, ϕ_k baza. W przypadku analogonu rozwiązania Schwarzschilda naturalnym jest wybór $\phi_k(r) = 1/r^k$. Zatem celem jest znalezienie $\Delta m^{(n)}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^n / r^k$, $\Delta \psi^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^n / r^k$. Współczynniki α_k można znaleźć metodą najmniejszych kwadratów minimalizując błąd

$$Err = \sum_{i=1}^J (y_i - f(\alpha_s))^2 \quad (12)$$

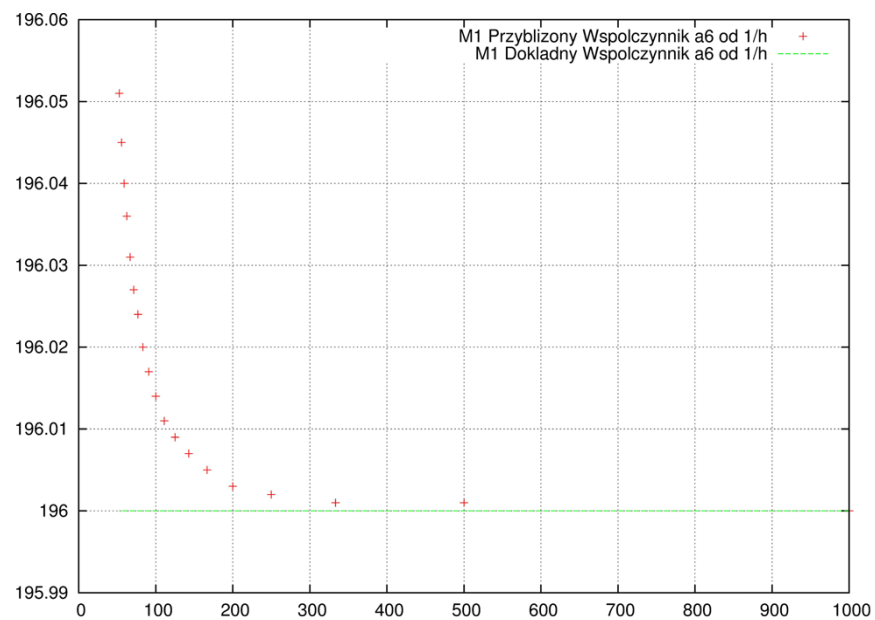
Z działania 1 można wywnioskować ze wymiar α wynosi $[\alpha] = m^4$. Informacja ta pozwala przewidzieć z numerycznego rozwiązania, rozwiązanie analityczne "dowolny element sumy $\Delta m^{(n)}(r) = \dots + \alpha_k^n / r^k + \dots$ musi mieć postać



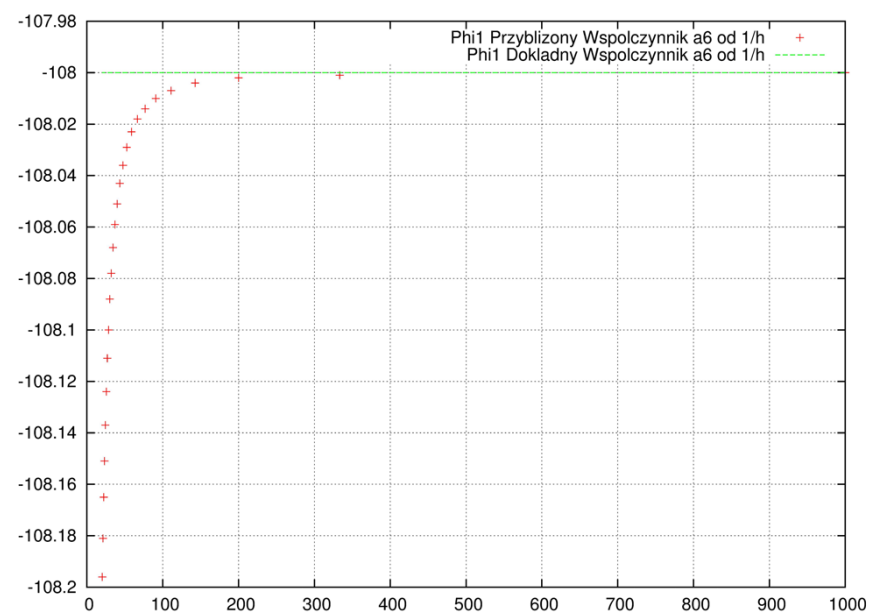
Rysunek 13: M1 a5

$\Delta m^{(n)}(r) = \dots + \alpha^n a_k^n M^s / r^k + \dots$ ponieważ wymiar $[\Delta m^{(n)}(r)] = m$ to $[\alpha^n a_k^n M^s / r^k] = m$ a zatem $[\alpha]^n [a_k^n] [M]^s / [r]^k = m^4 m^0 m^s / m^k = m^{(4+s-k)} = m$ zatem $4 + s - k = 1 \Rightarrow s = k - 3$ i można przewidzieć potęgę masy w członie $\alpha^n a_k^n M^s / r^k$. Przykładowo dla $\alpha a_5^1 M^s / r^5$ $s=2$. Dla rozwiązania pierwszego rzędu z równań pola prawdopodobnie można ograniczyć liczbę funkcji bazowych np. dla $\Delta m^{(1)}(r) = a_5 \frac{M^2}{r^5} + a_6 \frac{M^3}{r^6}$, $\Delta \psi^{(1)}(r) = b_6 \frac{M^2}{r^6}$. Zatem występują tylko trzy współczynniki a_5, a_6 i b_6 które trzeba przewidzieć metodą najmniejszych kwadratów do obliczenia $\Delta m^{(1)}(r)$, $\Delta \psi^{(1)}(r)$. Rysunki 13, 14 i 15 przedstawiają numerycznie obliczone współczynniki a_5, a_6 i b_6 w zależności od parametru $1/h$.

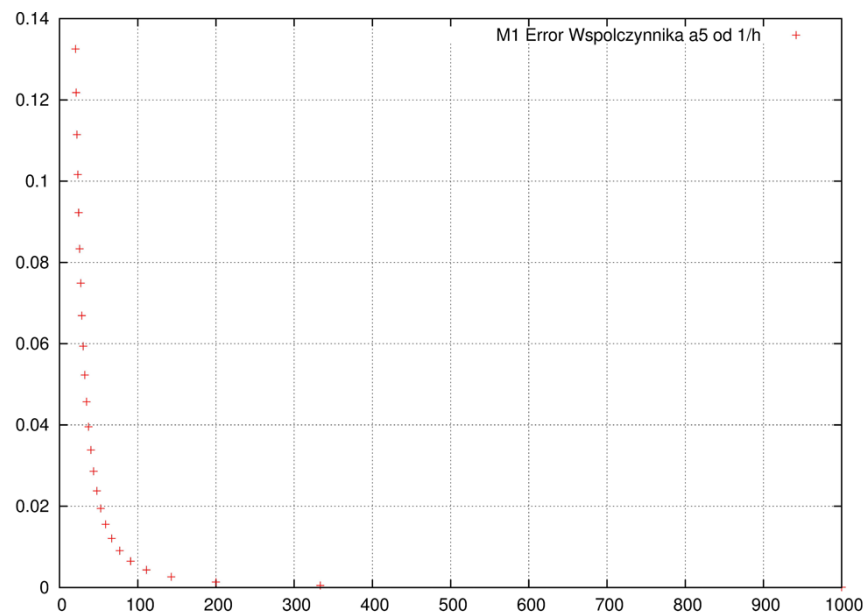
Błędy współczynników liczone według wzoru $Error = |w^{exact} - w^{approx}|$ gdzie w reprezentuje współczynnik a_n, b_n reprezentują wykresy 16, 17 i 18.



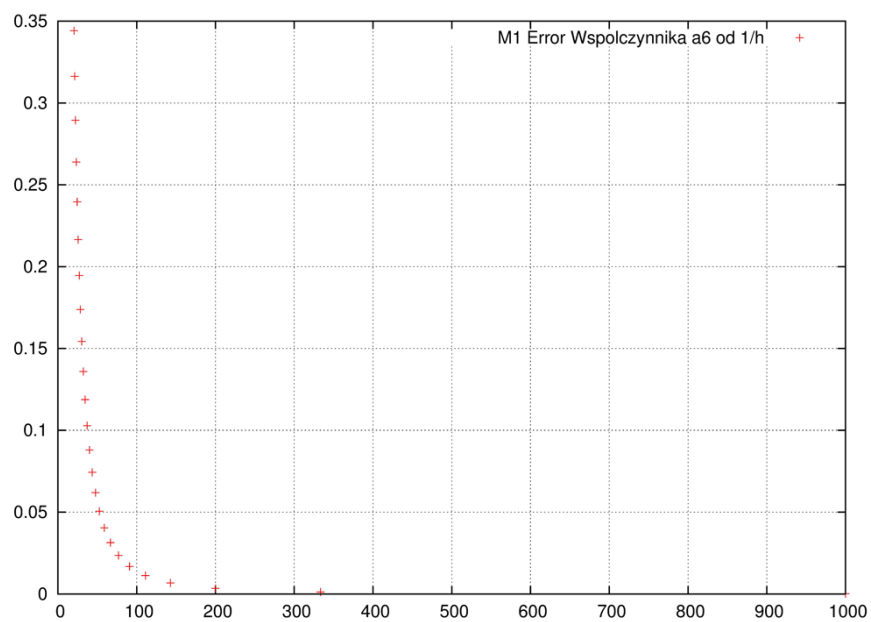
Rysunek 14: M1 a_6



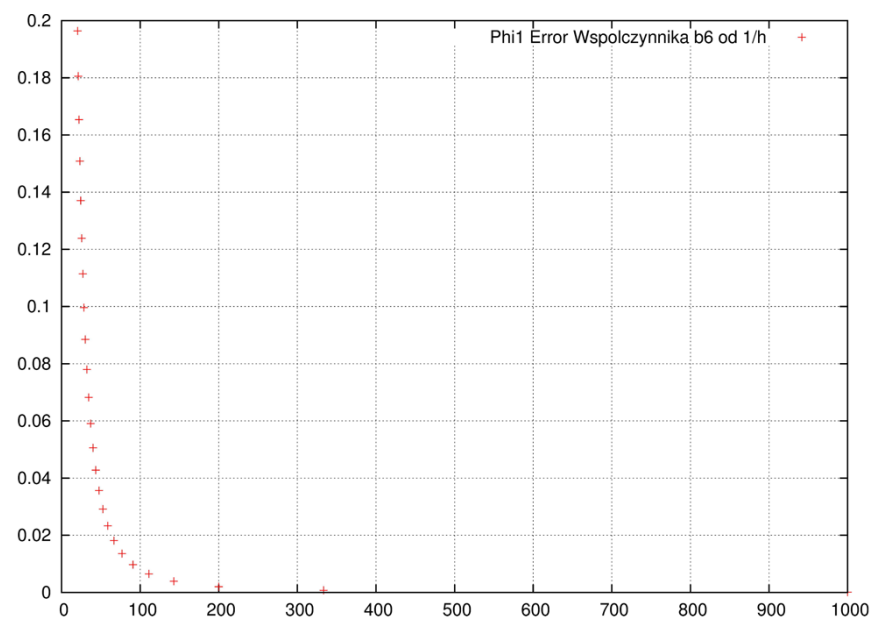
Rysunek 15: Phi1 a_6



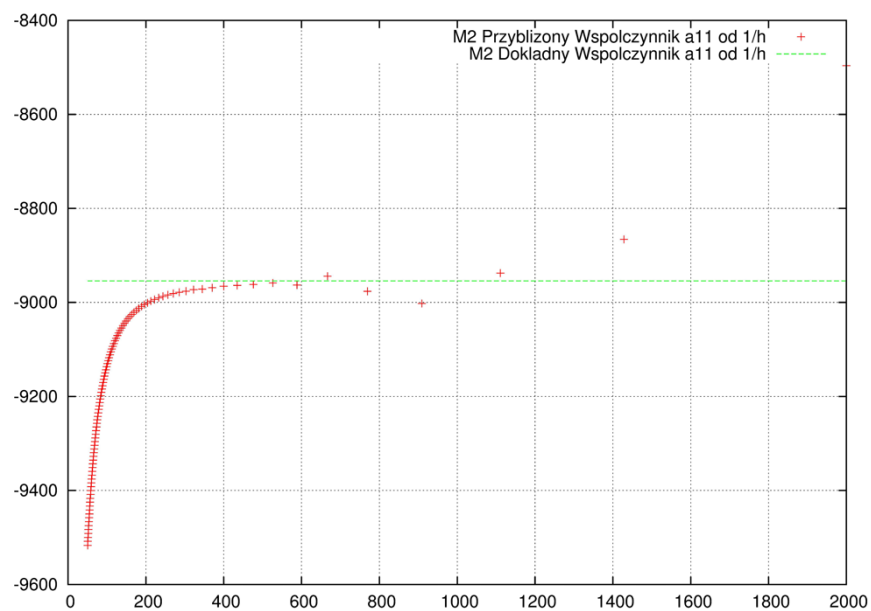
Rysunek 16: M1 Error a_5



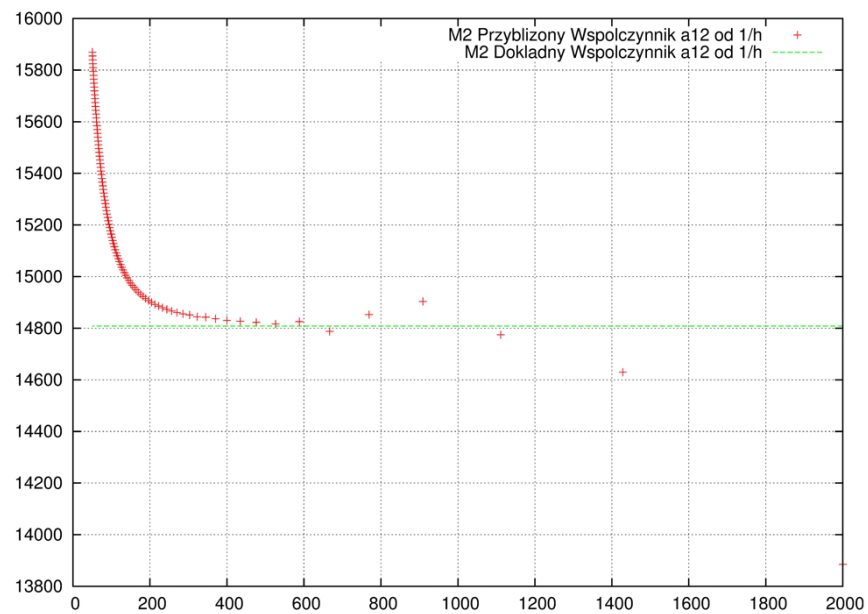
Rysunek 17: M1 Error A_6



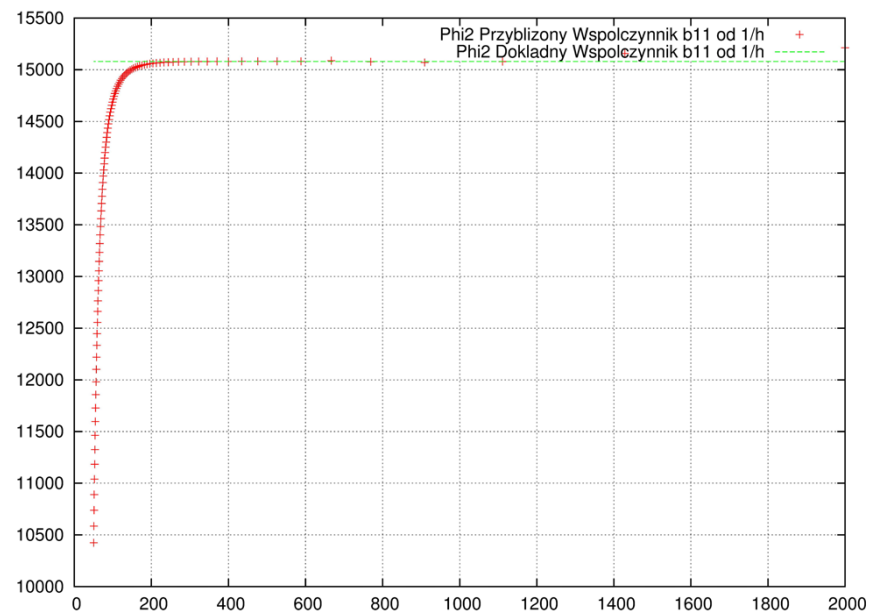
Rysunek 18: Phi1 Error B6



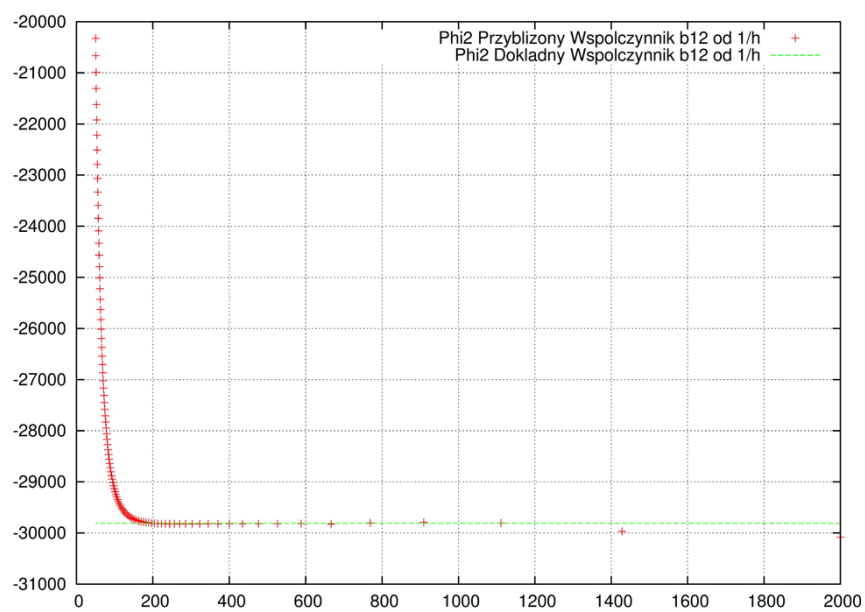
Rysunek 19: M2 a11



Rysunek 20: M2 A12



Rysunek 21: Phi2 B11



Rysunek 22: Phi2 B12

REFERENCES

1988 Balluch, M. 1988, A&A, 200, 58