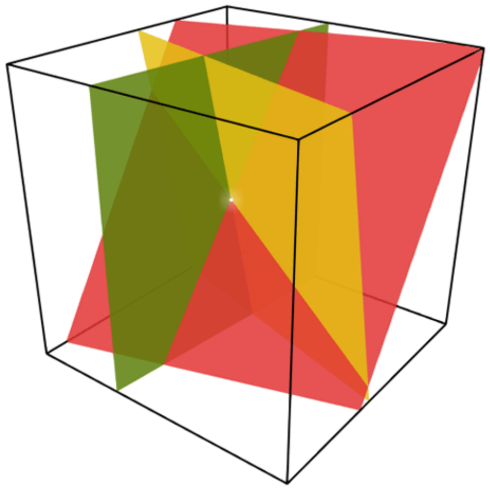

Algèbre linéaire cours 2

Saison 2016-2017

Prof : Simon Plouffe, IUT

Rappel sur les équations linéaires et les opérations de lignes

Utilisons ces opérations élémentaires pour résoudre le système suivant.

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +7z & = & -1 & (L_1) \\ 2x & -y & +5z & = & -5 & (L_2) \\ -x & -3y & -9z & = & -5 & (L_3) \end{array}\right.$$

Commençons par l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: on soustrait à la deuxième équation deux fois la première équation. On obtient un système équivalent avec une nouvelle deuxième ligne (plus simple) :

Qu'il vaut mieux réécrire en plus court

$$\begin{array}{rrrcr} 1 & 1 & 7 & | & -1 \\ 2 & -1 & 5 & | & -5 \\ -1 & -3 & -9 & | & -5 \end{array}$$

https://www.youtube.com/watch?v=WDHDv55LS-I
donne en détail les opérations pour ce système.
https://www.youtube.com/watch?v=6EAxrPVL-Hg mais sans le son, la musique est insupportable.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{array}$$

On pose $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ & -3 & -9 & -3 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{array}$$

ensuite $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ & -3 & -9 & -3 \\ & -2 & -2 & -6 \end{array}$$

On pose $L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_1$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ & 1 & 3 & 1 \\ & -2 & -2 & -6 \end{array}$$

On pose $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ & 1 & 3 & 1 \\ & & 4 & -4 \end{array}$$

Donc, $z = -1$
On peut remonter les équations

$$y + 3z = 1 \; donc \; y = 4$$

et trouver le $x = 2$.
La solution finale est le vecteur $(2, 4, -1)$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & -3y & -9z & = & -3 & \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -x & -3y & -9z & = & -5 & \end{array}\right.$$

Puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & -3y & -9z & = & -3 & \\ & -2y & -2z & = & -6 & \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right.$$

On continue pour faire apparaître un coefficient 1 en tête de la deuxième ligne ; pour cela on divise la ligne L_2 par -3 :

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & y & +3z & = & 1 & \quad L_2 \leftarrow -\frac{1}{3} L_2 \\ & -2y & -2z & = & -6 & \end{array}\right.$$

On continue ainsi

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & y & +3z & = & 1 & \\ & & 4z & = & -4 & \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & y & +3z & = & 1 & \\ & & z & = & -1 & \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{4} L_3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & y & & = & 4 & \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\ & & z & = & -1 & \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & & = & 6 & \quad L_1 \leftarrow L_1 - 7L_3 \\ & y & & = & 4 & \\ & & z & = & -1 & \end{array}\right.$$

On obtient ainsi $x = 2$, $y = 4$ et $z = -1$ et l'unique solution du système est $(2, 4, -1)$.

Définition 1.

- Une ***matrice*** A est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{K}$.
- Elle est dite de ***taille*** $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.
- Les nombres du tableau sont appelés les ***coefficients*** de A.
- Le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne est noté $a_{i,j}$.

Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \quad \text{ou} \quad \left(a_{i,j}\right).$$

Exemple 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

est une matrice 2×3 avec, par exemple, $a_{1,1} = 1$ et $a_{2,3} = 7$.

Ici les éléments seront habituellement dans $\mathbb{R}$

Ensuite les opérations usuelles de somme et produit.
En clair la somme se fait terme à terme, le produit aussi.

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Par contre si} \quad B' = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A + B' \quad \text{n'est pas définie.}$$

Le produit par un scalaire :

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha = 2 \quad \text{alors} \quad \alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $(-1)A$ est l'***opposée*** de A et est notée $-A$. La ***différence*** $A - B$ est définie par $A + (-B)$.

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ alors $A - B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

L'addition et la multiplication par un scalaire se comportent sans surprises :

Soient A, B et C, 3 matrices de avec coefficients dans $\mathbb{R}$, α et β des scalaires alors

1. $A + B = B + A$: *la somme est commutative,*
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$: *la somme est associative,*
3. $A + 0 = A$: *la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition,*
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Multiplication de matrices

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$. Alors le produit $C = AB$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}}$$

On peut écrire le coefficient de façon plus développée, à savoir :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

Il est commode de disposer les calculs de la façon suivante.

$$\begin{array}{rl}
 & \begin{pmatrix} & & & \times & & \\ & & & \times & & \\ & & & \times & & \\ & & & \times & & \end{pmatrix} \leftarrow B \\
A \rightarrow \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ \times & \times & \times & \times \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & & | & & \\ & & & | & & \\ - & - & - & c_{ij} & & \\ & & & & & \end{pmatrix} \leftarrow AB
\end{array}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On dispose d'abord le produit correctement (à gauche) : la matrice obtenue est de taille 2×2. Puis on calcule chacun des coefficients, en commençant par le premier coefficient $c_{11} = 1 \times 1 \; + \; 2 \times (-1) \; + \; 3 \times 1 = 2$ (au milieu), puis les autres (à droite).

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 \\ \color{red}{-1} & 1 \\ \color{red}{1} & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{3} \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \color{blue}{2} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Un exemple intéressant est le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne :

$$u = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Alors $u \times v$ est une matrice de taille 1×1 dont l'unique coefficient est $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$. Ce nombre s'appelle le ***produit scalaire*** des vecteurs u et v.

Calculer le coefficient c_{ij} dans le produit $A \times B$ revient donc à calculer le produit scalaire des vecteurs formés par la i-ème ligne de A et la j-ème colonne de B.

Pièges à éviter

Premier piège. Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.
En effet, il se peut que AB soit défini mais pas BA, ou que AB et BA soient tous deux définis mais pas de la même taille. Mais même dans le cas où AB et BA sont définis et de la même taille, on a en général $AB \neq BA$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{mais} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}.$$

Deuxième piège. $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.
Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Troisième piège. $AB = AC$ **n'implique pas** $B = C$. On peut avoir $AB = AC$ et $B \neq C$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

Propriétés du produit matriciel

Malgré les difficultés soulevées au-dessus, le produit vérifie les propriétés suivantes :

1. $A(BC) = (AB)C$: *associativité du produit,*
2. $A(B+C) = AB + AC$ *et* $(B+C)A = BA + CA$: *distributivité du produit par rapport à la somme,*
3. $A \cdot 0 = 0$ *et* $0 \cdot A = 0$.

La matrice identité

La matrice carrée suivante s'appelle la ***matrice identité*** :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous ses autres éléments sont égaux à 0. Elle se note I_n ou simplement I. Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. C'est l'élément neutre pour la multiplication. En d'autres termes :

Si A est une matrice $n \times p$, alors

$$I_n \cdot A = A \qquad \textit{et} \qquad A \cdot I_p = A.$$

Puissances d'une matrice

Les puissances d'une matrice A sont notées A^p et c'est une opération interne si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ alors $AB \in M_n(\mathbb{R})$.

M_n étant les matrices carrées d'ordre n

On cherche à calculer A^p avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule A^2, A^3 et A^4 et on obtient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

L'observation de ces premières puissances permet de penser que la formule est : $A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$

On peut démontrer par récurrence cette formule.

Formule du binôme

Comme la multiplication n'est pas commutative, les identités binomiales usuelles sont fausses. En particulier, $(A+B)^2$ ne vaut en général pas $A^2+2AB+B^2$, mais on sait seulement que

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Inverse d'une matrice : calcul

Matrices 2 x 2

Considérons la matrice 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Si $ad - bc \neq 0$*, alors* A *est inversible et*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Démonstration. On vérifie que si $B = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$ alors $AB = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Idem pour BA.

Le calcul est direct

Méthode de Gauss pour inverser les matrices

La méthode pour inverser une matrice A consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A jusqu'à la transformer en la matrice identité I. On fait simultanément les mêmes opérations élémentaires en partant de la matrice I. On aboutit alors à une matrice qui est A^{-1}

En pratique, on fait les deux opérations en même temps en adoptant la disposition suivante : à côté de la matrice A que l'on veut inverser, on rajoute la matrice identité pour former un tableau $(A \mid I)$. Sur les lignes de cette matrice augmentée, on effectue des opérations élémentaires jusqu'à obtenir le tableau $(I \mid B)$. Et alors $B = A^{-1}$.

Ces opérations élémentaires sur les lignes sont :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une ligne par un réel non nul
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux lignes.

N'oubliez pas : tout ce que vous faites sur la partie gauche de la matrice augmentée, vous devez aussi le faire sur la partie droite.

Exemple

Calculons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Voici la matrice augmentée, avec les lignes numérotées :

$$(A \mid I) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On applique la méthode de Gauss pour faire apparaître des 0 sur la première colonne, d'abord sur la deuxième ligne par l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ qui conduit à la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ \\ \end{array}$$

Puis un 0 sur la première colonne, à la troisième ligne, avec $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

On continue afin de faire apparaître des 0 partout sous la diagonale, et on multiplie la ligne L_3. Ce qui termine la première partie de la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)_{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2}$$

puis

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)_{L_3 \leftarrow 2L_3}$$

Il ne reste plus qu'à « remonter » pour faire apparaître des zéros au-dessus de la diagonale :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{8} L_3}$$

puis

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3}$$

Ainsi l'inverse de A est la matrice obtenue à droite et après avoir factorisé tous les coefficients par $\frac{1}{4}$, on a obtenu :

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Pour se rassurer sur ses calculs, on n'oublie pas de vérifier rapidement que $A \times A^{-1} = I$.

MATRICES ET SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

Le système suivant d'équations linéaires

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad (1)$$

est équivalent à l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot\cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot\cdot \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{ou simplement } AX = B \qquad (2)$$

où $A = (a_{ij})$, $X = (x_i)$ et $B = (b_i)$. En somme, chaque solution du système (*1*) est une solution de l'équation matricielle (*2*) est vice versa. Observons que le système homogène associé au système (*1*) est alors équivalent à l'équation matricielle $AX = 0$.

La matrice A précédente est appelée la *matrice des coefficients* du système (*1*) et la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

est appelée *matrice augmentée* de (*1*). Le système (*1*) est complètement défini par sa matrice augmentée.

La matrice des coefficients et la matrice augmentée du système

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 7 \\ x - 2y - 5z &= 3 \end{aligned}$$

sont respectivement les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Observons que le système est équivalent à l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ouvrages à consulter et lecture de chevet

Quelques bonnes pages dédiées aux mathématiques et l'algèbre linéaire :
http://exo7.emath.fr/cours/

https://www.youtube.com/watch?v=6EAxrPVL-Hg
mais sans le son, la musique est insupportable

https://www.youtube.com/watch?v=WDHDv55LS-I
donne en détail les opérations pour ce système.

Multiplication de matrices:
https://www.youtube.com/watch?v=XwtvirsK2HU

Systèmes d'équations linéaires avec numpy :
https://docs.scipy.org/doc/scipy-0.18.1/reference/tutorial/linalg.html