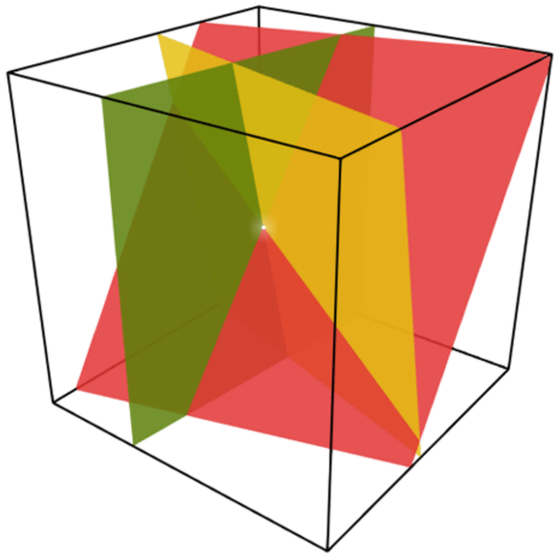


Algèbre linéaire cours 5

Saison 2016-2017

Prof : Simon Plouffe, IUT

Définition d'un espace vectoriel

Un espace vectoriel est un ensemble formé de vecteurs, de sorte que l'on puisse additionner (et soustraire) deux vecteurs u, v pour en former un troisième $u + v$ (ou $u - v$) et aussi afin que l'on puisse multiplier chaque vecteur u d'un facteur λ pour obtenir un vecteur $\lambda \cdot u$. Voici la définition formelle :

Un $\mathbb{K}$-***espace vectoriel*** est un ensemble non vide E muni :

- d'une loi de composition interne, c'est-à-dire d'une application de $E \times E$ dans E :

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & E \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

- d'une loi de composition externe, c'est-à-dire d'une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda \cdot u \end{array}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

1. $u+v=v+u$ (pour tous $u,v\in E$)
2. $u+(v+w)=(u+v)+w$ (pour tous $u,v,w\in E$)
3. Il existe un ***élément neutre*** $0_E\in E$ tel que $u+0_E=u$ (pour tout $u\in E$)
4. Tout $u\in E$ admet un ***symétrique*** u' tel que $u+u'=0_E$. Cet élément u' est noté $-u$.
5. $1\cdot u=u$ (pour tout $u\in E$)
6. $\lambda\cdot(\mu\cdot u)=(\lambda\mu)\cdot u$ (pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $u\in E$)
7. $\lambda\cdot(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v$ (pour tous $\lambda\in\mathbb{K}$, $u,v\in E$)
8. $(\lambda+\mu)\cdot u=\lambda\cdot u+\mu\cdot u$ (pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $u\in E$)

Exemple 1 (Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$).
Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. Un élément $u \in E$ est donc un couple (x, y) avec x élément de $\mathbb{R}$ et y élément de $\mathbb{R}$. Ceci s'écrit

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

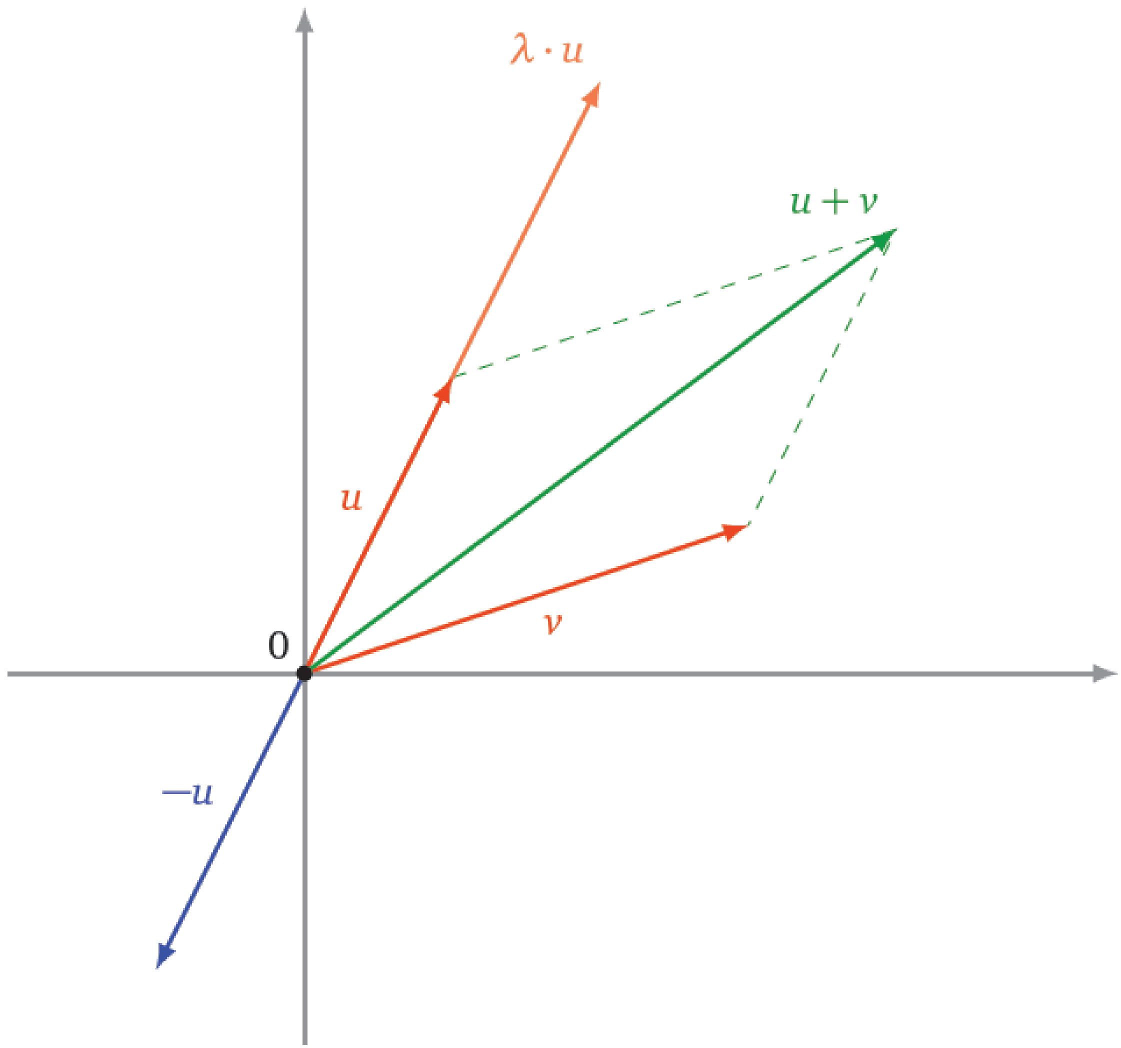
- *Définition de la loi interne.* Si (x, y) et (x', y') sont deux éléments de $\mathbb{R}^2$, alors :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

- *Définition de la loi externe.* Si λ est un réel et (x, y) est un élément de $\mathbb{R}^2$, alors :

$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0, 0)$. Le symétrique de (x, y) est $(-x, -y)$, que l'on note aussi $-(x, y)$.


λ · u
u + v
u
v
0
−u

Base et dimension

INTRODUCTION

Quelques-uns des résultats fondamentaux établis dans ce chapitre sont :

(1) On peut définir une notion de "dimension" d'un espace vectoriel.

(2) Si V a pour dimension n sur K, alors V est "isomorphe" à K^n

(3) Un système d'équations linéaires a une solution si et seulement si la matrice du système et la matrice augmentée ont le même "rang"

Ces concepts et ces résultats ne sont pas triviaux et répondent à certaines questions posées et étudiées par les mathématiciens de la fin du siècle dernier et du début de ce siècle.

DEPENDANCE LINEAIRE

Définition : Soit V un espace vectoriel sur le corps K. Les vecteurs $v_1, \ldots, v_m \in V$ sont dits linéairement dépendants sur K, ou simplement dépendants s'il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_m \in K$ non tous nuls, tels que :

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m = 0 \qquad (*)$$

Sinon les vecteurs sont dits linéairement indépendants sur K, ou simplement indépendants.

Remarquons que la relation (*) est toujours vérifiée si les a_s sont tous nuls. Si cette relation est vérifiée seulement dans ce cas, c'est-à-dire

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m = 0 \text{ seulement si } a_1 = 0, \ \ldots, \ a_m = 0$$

les vecteurs sont linéairement indépendants. Par contre si la relation (*) est vérifiée lorsque l'un des a_s n'est pas nul, alors les vecteurs sont linéairement dépendants.

Exemple

Les vecteurs $u = (1, -1, 0)$, $v = (1, 3, -1)$ et $w = (5, 3, -2)$ sont dépendants puisque $3u + 2v - w = 0$,

$$3(1, -1, 0) + 2(1, 3, -1) - (5, 3, -2) = (0, 0, 0)$$

Un autre exemple

Montrons que les vecteurs $u = (6, 2, 3, 4)$, $v = (0, 5, -3, 1)$ et $w = (0, 0, 7, -2)$ sont indépendants. Supposons que $xu + yv + zw = 0$ où x, y et z sont des scalaires inconnus. Alors

$$\begin{aligned} (0, 0, 0, 0) &= x(6, 2, 3, 4) + y(0, 5, -3, 1) + z(0, 0, 7, -2) \\ &= (6x, 2x + 5y, 3x - 3y + 7z, 4x + y - 2z) \end{aligned}$$

et ainsi en égalant les composantes correspondantes

$$\begin{aligned} 6x \qquad\qquad &= 0 \\ 2x + 5y \qquad &= 0 \\ 3x - 3y + 7z &= 0 \\ 4x + \ \ y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

La première équation donne $x = 0$; la seconde équation avec $x = 0$ donne $y = 0$; et la troisième équation avec $x = 0$ et $y = 0$ donne $z = 0$. Ainsi

$$xu + yv + zw = 0 \quad \text{implique} \quad x = 0, \ y = 0, \ z = 0$$

Les vecteurs u, v, w sont alors indépendants.

Remarquons que les vecteurs dans l'exemple précédent forme une matrice mise sous la forme échelonnée.

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, nous avons montré que les lignes (non nulles) de la matrice précédente sous la forme échelonnée sont indépendantes. Ce résultat reste vrai en général ; nous l'énonçons donc sous la forme d'un théorème à cause de son usage fréquent.

Théorème

Les lignes non nulles d'une matrice sous sa forme échelonnée sont linéairement indépendantes.

Les vecteurs non nuls $v_1, \ldots, v_m$ sont linéairement dépendants si et seulement si l'un d'entre eux, v_i, est une combinaison linéaire des vecteurs précédents :

$$v_i = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_{i-1} v_{i-1}$$

Remarque 1 : L'ensemble $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ est dit un ensemble dépendant ou indépendant suivant que les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sont dépendants ou indépendants. Nous définissons aussi l'ensemble vide $\emptyset$ comme ensemble indépendant.

Remarque 2 : Si deux des vecteurs $v_1, \ldots, v_m$ sont égaux, par exemple $v_1 = v_2$, alors les vecteurs sont dépendants. En effet

$$v_1 - v_2 + 0v_3 + \cdots + 0v_m = 0$$

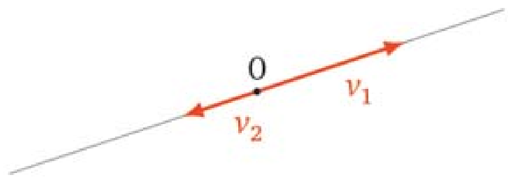
et le coefficient de v_1 n'est pas nul.

Remarque 3 : Deux vecteurs v_1 et v_2 sont dépendants si et seulement si l'un d'entre eux est un multiple de l'autre.

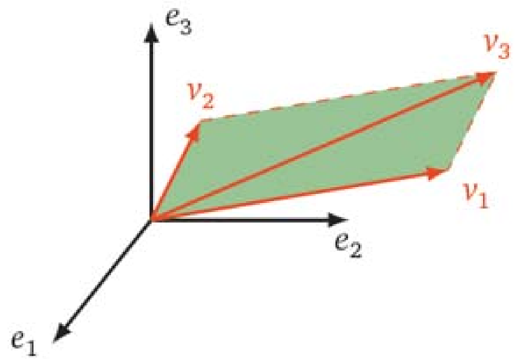
Remarque 4 : Un ensemble contenant un sous-ensemble dépendant est lui-même dépendant. Par suite un sous-ensemble quelconque d'un ensemble indépendant est indépendant.

Remarque 5 : Si l'ensemble $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ est indépendant, une permutation quelconque des vecteurs $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_m}\}$ est aussi indépendante.

Remarque 6 : Dans l'espace réel $\mathbf{R}^3$, la dépendance des vecteurs peut être représentée géométriquement de la manière suivante : deux vecteurs quelconques u et v sont dépendants si et seulement s'ils appartiennent à la même droite issue de l'origine ; trois vecteurs quelconques u, v et w sont dépendants si et seulement s'ils appartiennent au même plan passant par l'origine.



2 vecteurs colinéaires : dépendants



Les vecteurs sont
dans le même plan

Espace généré et équivalence

Soient des espaces U et W générés à l'aide des vecteurs

$$u_1 = (1, 2, -1, 3), \qquad u_2 = (2, 4, 1, -2), \qquad u_3 = (3, 6, 3, -7)$$
$$w_1 = (1, 2, -4, 11), \qquad w_2 = (2, 4, -5, 14)$$

Est-ce que U = W ?

On peut le démontrer de 2 façons

1- On doit montrer que chaque vecteur u_i est une combinaison linéaire de w_1 et w_2 et que chaque vecteur w_i est une combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2 et u_3. Ce qui fait un bon paquet d'équations linéaires à vérifier.

2- On pose sous forme matricielle A et B, qu'on peut réduire et de là constater que les 2 matrices sont équivalentes (=).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & -16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 2 & 4 & -5 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

Les matrices réduites sous forme canonique, on ne voit que des ‘1’ dans chaque début de ligne. Donc A = B, donc l’espace U = l’espace W.

La méthode 2 est de loin la plus simple.

Encore des exemples:

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les trois vecteurs (2, −1, 1), (1, 0, 1) et (3, −1, 2) forment une famille liée car (2, −1, 1) + (1, 0, 1) − (3, −1, 2) = (0, 0, 0).

Les 3 vecteurs, v_1=(1, 1), v_2=(−3, 2) et v_3=(2, 4) sont-ils indépendants ? Alors les conditions pour qu'ils le soient sont

$$a_1\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}+a_2\begin{Bmatrix}-3\\2\end{Bmatrix}+a_3\begin{Bmatrix}2\\4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\1 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}.$$

En réduisant les lignes de cette matrice on a

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & 5 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}.$$

On réduit, on réduit

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 16/5\\ 0 & 1 & 2/5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\end{Bmatrix}=-a_3\begin{Bmatrix}16/5\\ 2/5\end{Bmatrix}.$$

Ce qui veut dire que $v_3=(2, 4)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $v_1=(1, 1)$ et $v_2=(-3, 2)$.

On revient aux 2 vecteurs, v_1=(1, 1) et v_2=(−3, 2) qu'on écrit sous forme matricielle

$$a_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + a_2 \begin{Bmatrix} -3 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

En réduisant les lignes on trouve

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Ce qui montre que les a_i sont 0. DONC c'est linéairement indépendant, c'est bien une base.

Dans, $\mathbb{R}^4$ on a les 3 vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{Bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{Bmatrix} 7 \\ 10 \\ -4 \\ -1 \end{Bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ -4 \end{Bmatrix}.$$

Sont-ils indépendants ?

On met sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \\ -3 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

On réduit

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -18 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Et en résolvant par rapport à v_3

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & \\ 0 & -18 & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = -a_3 \begin{Bmatrix} -2 \\ 9 \end{Bmatrix}.$$

$$a_1 = -3a_3/2, a_2 = a_3/2,$$

Donc, au final $a_1$et a_2 s'expriment en fonction de a_3 : ce n'est pas linéairement indépendant.
(On s'en doutait un peu). Conclusion v_1, v_2, v_3 ne sont pas libres, ils sont liés.

Et encore un autre exemple

Soient les 3 vecteurs $v_1 = (1,1,0), v_2 = (1,3,2)\ et\ v_3 = (4,9,5)$.

Alors, ils sont dépendants puisque l'on a la relation :

$$3v_1 + 5v_2 - 2v_3 = 3(1,1,0) + 5(1,3,2) - 2(4,9,5) = (0,0,0) = 0.$$

Soient les 3 vecteurs : $u = (1,2,3), v = (2,5,7)\ et\ w = (1,3,5)$. On montre qu'ils sont linéairement indépendants, pour ce faire on forme
$xu + yv + zw = 0$ où x, y, et z sont des scalaires inconnus. Ce qui nous donne :

$$x\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}2\\5\\7\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{r} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \\ 3x + 7y + 5z = 0 \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{r} x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{array}$$

En remontant à l'envers l'équation à droite on a que $x = 0, y = 0\ et\ z = 0$.

On a montré que $xu + yv + zw = 0$ implique que $x = 0, y = 0\ et\ z = 0$. Donc, $u, v\ et\ w$ sont linéairement indépendants.

Soit maintenant l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}\ dans\ \mathbb{R}$, et les 3 fonctions, $f(t) = \sin(t)$, $g(t) = e^t$ et $h(t) = t^2$. On montre qu'elles sont linéairement indépendantes.

De la même façon que précédemment on forme le vecteur (fonction) $xf + yg + zh = 0$ où les scalaires x, y, et z sont inconnus.

L'astuce est maintenant de choisir 3 valeurs qui donneront $x = 0, y = 0\ et\ z = 0$.

Par exemple

$$\begin{matrix} On\ subsitue \\ t = 0 \\ t = \pi \\ t = \pi/2 \end{matrix} \quad \text{ce qui donne} \quad \begin{matrix} x(0) + y(1) + z(0) = 0 \\ x(0) + 0(e^{\pi}) + z(\pi^2) = 0 \\ x(1) + 0(e^{\pi/2}) + 0\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = 0 \end{matrix}$$

La première ligne implique que $y = 0$, qui implique que $z = 0$ et $x = 0$.

On a montré que $xf + yg + zh = 0$ implique que $x = 0, y = 0\ et\ z = 0$, que $f, g, et\ h$ sont linéairement indépendantes, les 3 fonctions sont linéairement indépendantes.

Supposons que nous voulions exprimer le polynôme : v = $3t^2 + 5t - 5$ comme étant une combinaison linéaire de

$$p_1 = t^2 + 2t + 1, \qquad p_2 = 2t^2 + 5t + 4, \qquad p_3 = t^2 + 3t + 6$$

On cherche donc des scalaires x, y, z tels que $v = xp_1 + yp_2 + zp_3$

$$v = 3t^2 + 5t - 5 =$$

$$x(t^2 + 2t + 1) + y(2t^2 + 5t + 4) + z(t^2 + 3t + 6)$$

En multipliant au long on obtient :

$$\begin{aligned} 3t^2 + 5t - 5 &= xt^2 + 2xt + x + 2yt^2 + 5yt + 4y + zt^2 + 3zt + 6z \\ &= (x + 2y + z)t^2 + (2x + 5y + 3z)t + (x + 4y + 6z) \end{aligned}$$

Qui se réduit à

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ 2x + 5y + 3z &= 5 \\ x + 4y + 6z &= -5 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ y + z &= -1 \\ 2y + 5z &= -8 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ y + z &= -1 \\ 3z &= -6 \end{aligned}$$

Encore une fois, en substituant à l'envers à partir de z, on obtient

$$x = 3,\ y = 1,\ z = -2.$$

Donc, la combinaison linéaire cherchée est

$$v = 3p_1 + p_2 - 2p_3$$

Mais, connaissant les principes des équations et combinaisons linéaires on aurait pu :

Revenir à l'équation

$$v = 3t^2 + 5t - 5 =$$

$$x(t^2 + 2t + 1) + y(2t^2 + 5t + 4) + z(t^2 + 3t + 6)$$

qui est vraie pour toute valeur de t.

Donc, par exemple en $t = 0, t = 1\ et\ t = -1\ on\ aurait\ les\ 3\ équations$

$$x + \ 4y + \ 6z = -5$$

$$4x + 11y + 10z = 3$$

$$y + \ 4z = -7$$

qui une fois réduites, nous auraient donné exactement la même solution : $x = 3, y = 1, z = -2.$

Considérons maintenant, l'espace vectoriel $V = P_n(t)$ de tous les polynômes de degré n.

Clairement, chaque polynôme $P_n(t)$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des $n+1$ polynômes

$$1, t, t^2, t^3, \dots t^n.$$

Ces polynômes sont donc une famille génératrice de l'espace $P_n(t)$.

De la même façon (ou inspiré de), l'espace vectoriel $\mathbf{M} = M_{2,2}$ de toutes les matrices 2 x 2 peut être généré par les 4 matrices :

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors, toute matrice A peut s'écrire comme une combinaison linéaire des 4 matrices.

Par exemple

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = 5E_{11} - 6E_{12} + 7E_{21} + 8E_{22}$$

Considérons l'espace vectoriel $P_2(t)$ de tous les polynômes de degré ≤ 2.

Les polynômes :

$$p_1 = t + 1, \qquad p_2 = t - 1, \qquad p_3 = (t-1)^2 = t^2 - 2t + 1$$

Forment une base S de $P_2(t)$. Le vecteur v $= 2t^2 - 5t + 9$ par rapport à la base S est représenté par

On pose :

Et on cherche les 3 scalaires x, y, z tels que

$v = xp_1 + yp_2 + zp_3$

$$\begin{aligned} 2t^2 - 5t + 9 &= x(t+1) + y(t-1) + z(t^2 - 2t + 1) \\ &= xt + x + yt - y + zt^2 - 2zt + z \\ &= zt^2 + (x + y - 2z)t + (x - y + z) \end{aligned}$$

Et on remplace (astucieusement) : $z = 2, \qquad x + y - 2z = -5, \qquad x - y + z = 9$

Ce qui donne 3 équations à 3 inconnues familières, on en déduit : $x = 3$, $y = -4$, $z = 2$.

Donc, $v = 3p_1 - 4p_2 + 2p_3$ ou v = [3, -4, 2] en coordonnées par rapport à S.

Une autre astuce avec les matrices et l'indépendance linéaire :

Supposons que nous voulions savoir si 3 matrices de V = $M_{2,3}$ sont linéairement indépendantes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -11 \\ 16 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

Les coordonnées dans ce système peuvent être vus comme suit :

$$[A] = [1, 2, -3, 4, 0, 1], \qquad [B] = [1, 3, -4, 6, 5, 4], \qquad [C] = [3, 8, -11, 16, 10, 9]$$

Mais alors si on réduit ce système :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & -11 & 16 & 10 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 10 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient qu'il ne reste que 2 lignes lin. Indép. Ce qui implique que A, B, C sont linéairement dépendantes et génèrent un sous-espace de dimension 2.

Ouvrages à consulter et lecture de chevet

Quelques bonnes pages dédiées aux mathématiques et l'algèbre linéaire :
http://exo7.emath.fr/cours/

Espace vectoriel sur wikipedia : https://fr.wikipedia.org/wiki/Espace_vectoriel

Indépendance linéaire sur wikipedia:
https://fr.wikipedia.org/wiki/Ind%C3%A9pendance_lin%C3%A9aire