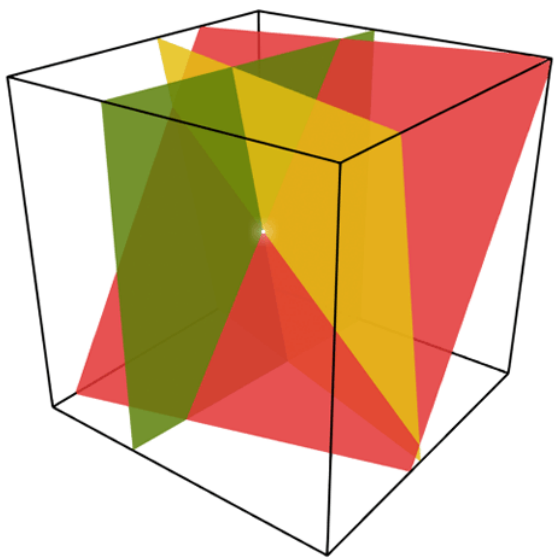


Algèbre linéaire cours 3

Saison 2016-2017

Prof : Simon Plouffe, IUT

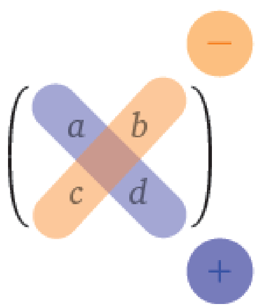
Les déterminants et les matrices

Le déterminant est un nombre que l'on associe à n vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Il correspond au volume du parallélépipède engendré par ces n vecteurs. On peut aussi définir le déterminant d'une matrice A. Le déterminant permet de savoir si une matrice est inversible ou pas, et de façon plus générale, joue un rôle important dans le calcul matriciel et la résolution de systèmes linéaires.

En dimension 2 : c'est direct

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

C'est donc le produit des éléments sur la diagonale principale (en bleu) moins le produit des éléments sur l'autre diagonale (en orange).



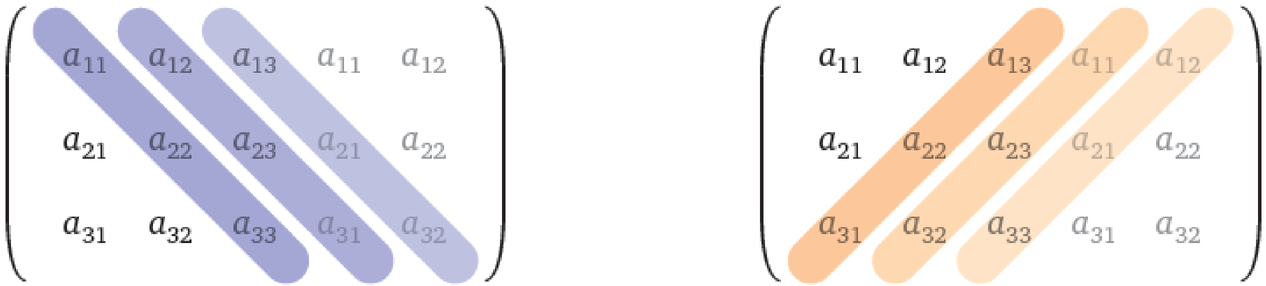
En dimension 3, si on a une matrice A des éléments ∈ ℝ.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Voici la formule pour le déterminant :

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}\,.$$

Mais il y a la règle de Sarrus qui est très parlante visuellement :



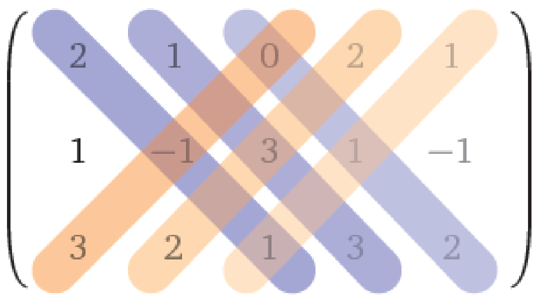
On remarque que : les colonnes sont recopiées, ce qui est en bleu est une somme et en jaune une soustraction.

Exemple :

Calculons le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Par la règle de Sarrus :

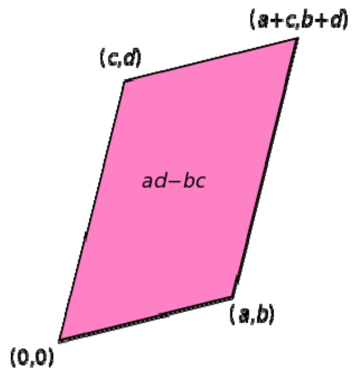
$$\begin{aligned} \det A = &\ 2 \times (-1) \times 1 + 1 \times 3 \times 3 + 0 \times 1 \times 2 \\ & - 3 \times (-1) \times 0 - 2 \times 3 \times 2 - 1 \times 1 \times 1 = -6. \end{aligned}$$



Attention : cette méthode ne s'applique pas pour les matrices de taille supérieure à 3. Nous verrons d'autres méthodes qui s'appliquent aux matrices carrées de toute taille et donc aussi aux matrices 3×3.

Interprétation géométrique du déterminant

Dans le cas d'une matrice 2 x 2, le terme $ad - bc$ correspond au parallélogramme : en valeur absolue.

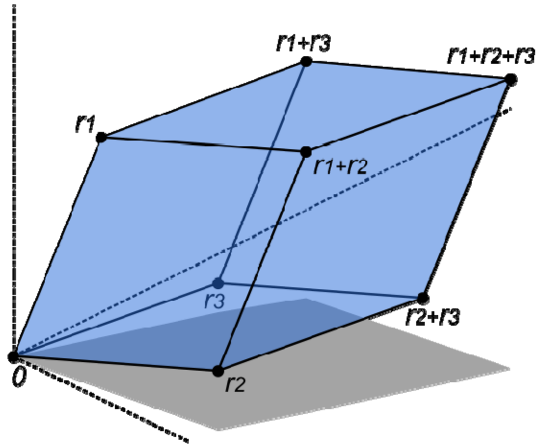


Pour une 3 x 3, comme celle-ci : on note ici les : | | qui est la notation pour le déterminant de la matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$
$$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$
$$= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

On remarque plusieurs astuces intéressantes (lesquelles ?).

On s'en doute, le déterminant d'une matrice 3 x 3 est un volume.



Le déterminant d'une matrice 4 x 4 n'a rien à voir avec les voitures.

Kowa Seki 1700 : 2x2

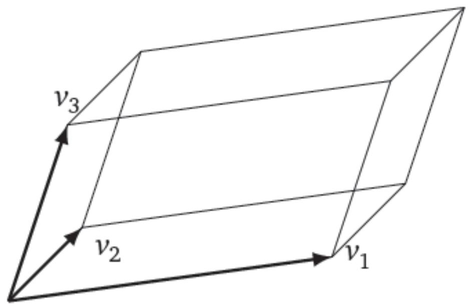
Leibniz ~1700 : 3x3

Landrover: 2016 4x4

De manière similaire, trois vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

définissent un parallélépipède.



À partir de ces trois vecteurs on définit, en juxtaposant les colonnes, une matrice et un déterminant :

$$\det(v_1, v_2, v_3) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Le volume du parallélépipède est donné par la valeur absolue du déterminant :

$$\mathcal{V} = \Big| \det(v_1, v_2, v_3) \Big|.$$

On revient avec les déterminants 2 x 2.

Soit P le plan euclidien orienté usuel. Le déterminant des vecteurs X et X' est donné par l'expression analytique

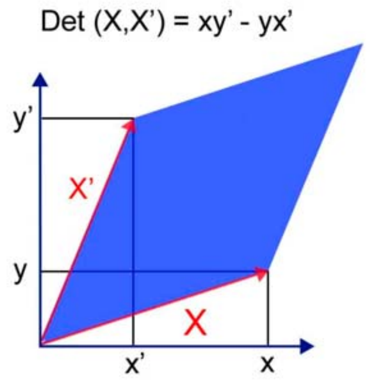
$$\det(X, X') = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

ou, de façon équivalente, par l'expression géométrique

$$\det(X, X') = \|X\| \cdot \|X'\| \cdot \sin\theta$$

dans laquelle θ est l'angle orienté formé par les vecteurs X et X'.

Géométriquement c'est



Propriétés

La valeur absolue du déterminant est égale à l'aire du parallélogramme défini par X et X' (en effet, $\|X'\| \sin\theta$ est la longueur de la hauteur du parallélogramme associée au côté X et l'aire du parallélogramme est $\|X\| \times \|X'\| \sin\theta$).
Le déterminant est nul si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires (le parallélogramme devient une ligne).

important

Également :

Le déterminant des vecteurs X et X' est strictement positif si et seulement si la mesure de l'angle entre ces deux vecteurs est comprise dans l'intervalle $]0, \pi[$.

Propriétés (suite)

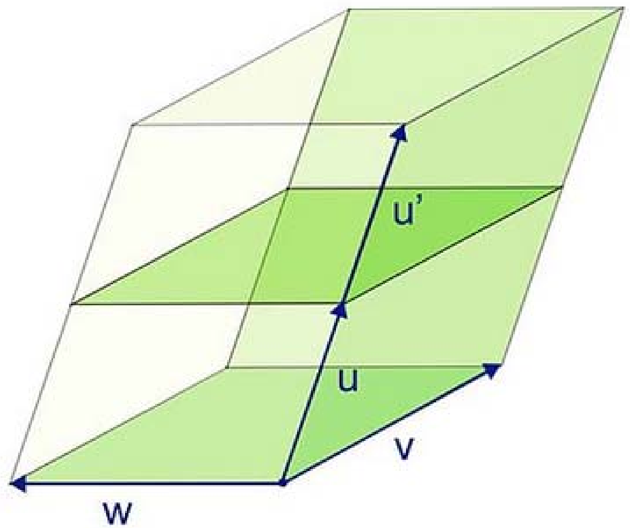
- La valeur absolue du déterminant est égale au volume du parallélépipède défini par les trois vecteurs.
- Le déterminant est nul si et seulement si les trois vecteurs sont contenus dans un même plan (parallélépipède « plat »).
- L'application déterminant est trilinéaire : notamment

$$\det(aX+bY,X',X'')=a\det(X,X',X'')+b\det(Y,X',X'').$$

important

Illustration de la trilinéarité,

$$\det(u+u',v,w) = \det(u,v,w) + \det(u',v,w).$$



Déterminants de matrices particulières

Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure)
est égal au produit des termes diagonaux.

Autrement dit, pour une matrice triangulaire $A = (a_{ij})$ on a

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Comme cas particulier :

Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des termes diagonaux.

On continue avec les propriétés des déterminants

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
De plus si A est inversible, alors :

$$\boxed{\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}}$$

Donc pour savoir si une matrice est inversible il suffit de calculer son déterminant, si c'est 0 alors la matrice n'est PAS inversible.

De plus le déterminant d'une matrice transposée est

$$\boxed{\det\left(A^{T}\right) = \det A}$$

Une conséquence du dernier résultat, est que par transposition, tout ce que l'on a dit des déterminants à propos des colonnes est vrai pour les lignes.

Ainsi, le déterminant est multilinéaire par rapport aux lignes, si une matrice a deux lignes égales, son déterminant est nul,
on ne modifie pas un déterminant en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes, etc.

On a les règles suivantes sur les lignes d'une matrice :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: le déterminant est multiplié par λ.
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : le déterminant ne change pas.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: le déterminant change de signe.

Calculs de déterminants

Une des techniques les plus utiles pour calculer un déterminant est le
« développement par rapport à une ligne (ouune colonne) ».

Pour procéder on a besoin du cofacteur.

Définition

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

- On note A_{ij} la matrice extraite, obtenue en effaçant la ligne i et la colonne j de A.
- Le nombre $\det A_{ij}$ est un ***mineur d'ordre*** $n-1$ de la matrice A.
- Le nombre $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ est le ***cofacteur*** de A relatif au coefficient a_{ij}.

Ne pas oublier la règle du signe de $C_{ij} = (-1)^{i+j}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculons $A_{11}, C_{11}, A_{32}, C_{32}$.

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_{11} = (-1)^{1+1} \det A_{11} = +1.$$

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \det A_{32} = (-1) \times (-11) = 11.$$

Pour déterminer si $C_{ij} = +\det A_{ij}$ ou $C_{ij} = -\det A_{ij}$, on peut se souvenir que l'on associe des signes en suivant le schéma d'un échiquier :

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Donc $C_{11} = +\det A_{11}$, $C_{12} = -\det A_{12}$, $C_{21} = -\det A_{21}$...

Encore une propriété :

Le déterminant change de signe si on permute 2 colonnes adjacentes d'une matrice, ici les colonnes 1 et 2.

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Par contre, ceci n'est plus nécessairement vrai lorsque les colonnes ne sont pas adjacentes.
Par exemple, on a en permutant cette fois les colonnes 1 et 3 de cette dernière matrice.

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} ,$$

De plus, le déterminant d’une matrice *A* est nul si l’une ou plusieurs de ces conditions sont remplies.

1- A possède une colonne (ou ligne) nulle.
2- A possède 2 colonnes (ou lignes) identiques.
3- A possède 2 colonnes (ou lignes) proportionnelles.
4- A possède 1 colonne qui est combinaison linéaire des autres colonnes (même chose pour les lignes).

Revenons aux cofacteurs par un exemple sur une matrice 4 x 4.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ alors le déterminant est

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \\ 11 & 15 & 16 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \\ 13 & 14 & 15 \end{vmatrix}$$

Qui donne au final $2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0$.

Le déterminant est nul (mais pas la méthode!).

En examinant le détail de $\det(A)$ on voit bien l'astuce avec les cofacteurs.

On peut simplifier encore comme suit :

Soit à calculer le déterminant

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$$

en soustrayant les lignes on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & 2 & 12 & 56 \\ 0 & 3 & 21 & 117 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 6 & 60 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} .$$

Il suffit de développer par rapport à la première colonne pour obtenir

$$\det(A) = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 5 & 19 \\ 0 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 18 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 .$$

Sans faire de grands calculs au final. On savait aussi que le produit des termes de la diagonale est $2 \cdot 6 = 12$.

Supposons que A soit inversible alors $A^{-1}A = I_n$.
et que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Inversement supposons que $\det(A) \neq 0$.

Alors les colonnes de A forment une base du corps dans lequel on travaille, ici c'est $\mathbb{R}^n$.

Et A n'est autre que la matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base.

La base canonique

Dans l'espace des matrices à n lignes et p colonnes, la base canonique est l'ensemble des *unités matricielles* : ce sont les matrices E_{ij} qui présentent un 1 dans dans la i'ième ligne et la j'ième colonne et 0 partout ailleurs.

Pour toute matrice $M = a_{ij}$, ses coordonnées dans la base canonique sont les coefficients :

$$M = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j} E_{i,j}$$

Exemple (en plus clair):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est la façon standard d'écrire la matrice en unités élémentaires.

Autre point important à propos des matrices carrées.

Si on a un système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & = & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases},$$

qui est $AX = B$.

Un tel système (où il y a autant d'équations que d'inconnues) est appelé système de Cramer et si $\det(A) \neq 0$.

Alors comme $\det(A) \neq 0$, A est inversible et on peut écrire :

$$X = A^{-1}B$$

On revient au système d'équations vues plus tôt :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

Ce système peut aussi s'écrire sous forme matricielle $AX = B$ où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}), \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

On définit la matrice A_j est

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, A_j est la matrice obtenue en remplaçant la j-ème colonne de A par le second membre B. La règle de Cramer va nous permettre de calculer la solution du système dans le cas où $\det A \neq 0$ en fonction des déterminants des matrices A et A_j.

Soit $AX = B$

La règle de Cramer est telle que

un système de n équations à n inconnues. Supposons que $\det A \neq 0$. *Alors l'unique solution* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *du système est donnée par :*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \qquad \ldots \qquad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

En autant que les déterminants ne soient pas trop lourds à calculer, avec la règle de Cramer, c'est faisable à la main.

Cette règle de Cramer est une façon de résoudre un système (on en a vu d'autres), mais pas la plus efficace.

Résolvons le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 6 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 30 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 8. \end{array}\right.$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

et

$$\det A = 44 \qquad \det A_1 = -40 \qquad \det A_2 = 72 \qquad \det A_3 = 152.$$

La solution est alors

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = -\frac{40}{44} = -\frac{10}{11} \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11} \quad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}.$$

La méthode de Cramer n'est pas la méthode la plus efficace pour résoudre un système, mais est utile si le système contient des paramètres.

Mineurs d'une matrice

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit k un entier inférieur à n et à p. On appelle ***mineur d'ordre k*** le déterminant d'une matrice carrée de taille k obtenue à partir de A en supprimant $n-k$ lignes et $p-k$ colonnes.

Ici K est habituellement $\mathbb{R}$, noter que A n'a pas besoin d'être une matrice carrée.

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

- Un mineur d'ordre 1 est simplement un coefficient de la matrice A.
- Un mineur d'ordre 2 est le déterminant d'une matrice 2×2 extraite de A. Par exemple en ne retenant que la ligne 1 et 3 et la colonne 2 et 4, on obtient la matrice extraite $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Donc un des mineurs d'ordre 2 de A est $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6$.

- Un mineur d'ordre 3 est le déterminant d'une matrice 3×3 extraite de A. Par exemple, en ne retenant que les colonnes 1, 3 et 4 on obtient le mineur
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -28$$
- Il n'y a pas de mineur d'ordre 4 (car la matrice n'a que 3 lignes).

Quelques précisions et définitions

La transposition

Soit A la matrice de taille $n \times p$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

On appelle *matrice transposée* de A la matrice A^T de taille $p \times n$ définie par :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

A^T est souvent aussi appelée ${}^tA$ mais nous utiliserons A^T.

Propriétés de la transposition

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
3. $(A^T)^T = A$
4. $\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$
5. *Si A est inversible, alors A^T l'est aussi et on a* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Notez bien l'inversion : $(AB)^T = B^T A^T$, comme pour $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

La trace d'une matrice

Dans le cas d'une matrice carrée de taille $n \times n$, les éléments a_{11}, $a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sont appelés les ***éléments diagonaux***. Sa ***diagonale principale*** est la diagonale $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La ***trace*** de la matrice A est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A. Autrement dit,

$$\boxed{\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.}$$

Exemple

Si $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, alors $\operatorname{tr} A = 2 + 5 = 7$.
Pour $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 11 & 0 & -10 \end{smallmatrix}\right)$, $\operatorname{tr} B = 1 + 2 - 10 = -7$.

La trace d’une matrice (suite)

Soient A et B deux matrices $n \times n$. Alors :

1. $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$,
2. $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr} A$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$,
3. $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr} A$,
4. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Matrices symétriques

Une matrice A de taille $n \times n$ est *symétrique* si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si

$$A = A^T,$$

ou encore si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$. Les coefficients sont donc symétriques par rapport à la diagonale.

Les matrices suivantes sont symétriques :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour une matrice B quelconque, les matrices $B \cdot B^T$ et $B^T \cdot B$ sont symétriques.
Preuve : $(BB^T)^T = (B^T)^T B^T = BB^T$. Idem pour $B^T B$.

Matrices antisymétriques

Une matrice A de taille $n \times n$ est ***antisymétrique*** si

$$A^T = -A,$$

c'est-à-dire si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$.

Comme par exemple les 2 matrices suivantes sont antisymétriques.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, le critère est la multiplication par le scalaire (-1).

Matrices antisymétriques

Et ici la chose pas évidente est que

Toute matrice est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

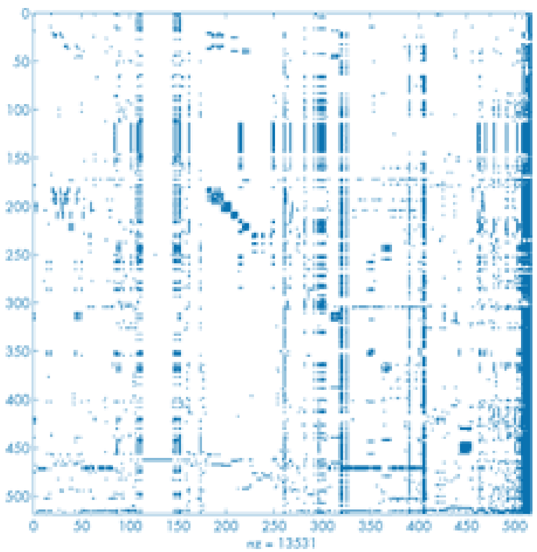
Preuve : Soit A une matrice. Définissons $B = \frac{1}{2}(A+A^T)$ et $C = \frac{1}{2}(A-A^T)$. Alors d'une part $A = B+C$; d'autre part B est symétrique, car $B^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$; et enfin C est antisymétrique, car $C^T = \frac{1}{2}(A^T - (A^T)^T) = -C$.
Exemple :

$$\text{Pour} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{alors} \qquad A \;=\; \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}}_{\text{symétrique}} \;+\; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antisymétrique}}.$$

Le calcul de grandes matrices est très utilisé aujourd'hui.

On parle ici de 2,7 milliards de lignes et colonnes.

La société Google en utilise beaucoup pour lier/trier/classer les sites internet. Les matrices sont énormes mais très peu remplies en ce sens que même avec beaucoup de zéros et de 1, ce qu'ils calculent sont les valeurs propres de ces matrices.
(que nous verrons prochainement).



Une vue rapprochée d'une toute petite partie de cette matrice.

Heureusement, un gros ordinateur qui calcule en parallèle permet d'abattre la besogne.

On a vu ici une partie des astuces pour simplifier le calcul du déterminant ou l'inverse d'une matrice.

Ouvrages à consulter et lecture de chevet

Quelques bonnes pages dédiées aux mathématiques et l'algèbre linéaire :
http://exo7.emath.fr/cours/

Calcul du déterminant astucieux :
https://www.i2m.univ-amu.fr/~torresan/CalcMat/cours/node4.html

Déterminants sur wikipedia :
https://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9terminant_(math%C3%A9matiques)

Systèmes d'équations linéaires avec numpy :
https://docs.scipy.org/doc/scipy-0.18.1/reference/tutorial/linalg.html

Le calcul matriciel :
https://www.i2m.univ-amu.fr/~torresan/CalcMat/cours/cours.html

La règle de Cramer :
https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A8gle_de_Cramer

Calcul de matrice (plus spécialisé): en anglais seulement
https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_multiplication_algorithm

Les matrices énormes utilisées par Google :
http://www.brynmawr.edu/math/people/anmyers/203/SearchWebEigen.pdf