Kreu 7

Zgjidhja e përafërt e ekuacioneve diferenciale të zakonshme

Zgjidhja numerike e ekuacioneve diferenciale është një nga pjesët më të rëndësishme të analizës numerike sepse një numër shumë i madh zbatimesh nga shumë fusha si fizikë kimi, financa, biologji etj çojnë në modele ekuacionesh diferenciale dhe vetëm fare pak prej tyre mund të zgjidhen analitikisht. Kështu kërkimi i metodave të tjera që përdorin kompjuterin është i domosdoshëm. Më poshtë do të trajtojmë metoda numerike për zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale të zakonshme, së pari me kushte fillestare dhe pastaj ato me kushte kufitare.

Kujtojmë së pari disa elemente nga teoria e ekuacioneve diferenciale të zakonshme.

Përkufizim 7.1 Ekuacion diferencial i zakonshëm i rendit n quhet ekuacioni që përmban ndryshoren x, funksionin y dhe derivatet e tij deri në rendin e n-të. Trajta e shtjellur e tij është

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)), \quad x \in [a, b] \qquad (7.1)$$

Zgjidhje e veçantë e këtij ekuacioni quhet çdo funksion y që ka derivate deri në rendin e n-të dhe vërteton ekuacionin (7.1).

Vërtetohet që ekuacioni (7.1) ka për zgjidhje një familje vijash n-parametrike të trajtës $y=y(x,c_1,\ldots,c_n)$ që quhet ***zgjidhje e përgjithshme***.

Prej zgjidhjes së përgjithshme mund të veçohet një zgjidhje e veçantë duke vënë disa kushte për funksionin y dhe derivatet e tij.

Në qoftë se për funksionin y dhe derivatet e tij vihen kushte vetëm në një pikë të segmentit $[a,b]$ (në rastin tonë në skajin a) të trajtës:

$$y(a)=\alpha_1, \quad y'(a)=\alpha_2, \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(a)=\alpha_n \tag{7.2}$$

ku $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ janë konstante të njohura

atëherë relacionet (7.2) quhen ***kushte fillestare*** dhe problemi (7.1),(7.2) quhet problem i ***vlerës fillestare*** i rendit n ose ***problem Koshi.***

Në qoftë se tani për funksionin y dhe derivatet e tij vihen kushte në dy pika të segmentit $[a,b]$ (në rastin tonë në skajet a dhe b) të trajtës

$$y(a)=\alpha_1, \quad y'(a)=\alpha_2, \quad \ldots \quad y^{(s)}(a)=\alpha_s \tag{7.3$_1$}$$

$$y^{(s+1)}(b)=\beta_1, \quad y^{(s+2)}(b)=\beta_2, \quad \ldots \quad y^{(n)}(a)=\beta_{n-s} \tag{7.3$_2$}$$

atëherë relacionet (7.3) quhen ***kushte kufitare*** dhe problemi (7.1),(7.3) quhet ***problem i vlerave kufitare***.

Problemi i vlerave fillestare dhe ai i vlerave kufitare në pamje të parë duken të ngjashëm. Theksojmë se, me gjithë ngjashmërinë në dukje, këto e kanë burimin në probleme krejt të ndryshme dhe zgjidhen numerikisht, në përgjithësi, me metoda krejt të ndryshme. Ne do shqyrtojmë metoda për të dy problemet.

7.1 Zgjidhja e problemit të vlerës fillestare

Do të trajtojmë së pari problemin e vlerës fillestare për një ekuacion të rendit parë

$$y'(x)=f(x,y) \quad a \le x \le b \qquad y(a)=\alpha \tag{7.4}$$

Përkufizim 7.2 Thuhet se funksioni $f(x,y)$ plotëson ***kushtin e Lipshicit*** (Lipschitz) në një zonë $D \subset R^2$ në lidhje me ndryshoren y, në qoftë se ekziston një konstante $L>0$ e tillë që

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le L\,|y_1-y_2|$$

për çdo $(x, y_1), (x, y_2) \subset D$.

Numri L quhet dhe ***konstante e Lipshicit***.

Teoremë 7.1 (e ekzistencës dhe unicitetit) Le të jetë $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b$ dhe $-\infty \le y \le \infty\}$. Në qoftë se funksioni f është i vazhdueshëm dhe plotëson kushtin e Lipshicit në lidhje me y në D, problemi i vlerës fillestare (7.4) ka zgjidhje të vetme.

Në analizën numerike shqyrtohen për t'u zgjidhur probleme që kanë zgjidhje të vetme, prandaj është e rëndësishme të shihet nëse problemi që kërkojmë të zgjidhim është i tillë.

Një karakteristikë e zgjidhjes numerike të një problemi, në përgjithësi, pra edhe të problemit Koshi në një segment $[a,b]$ nuk është gjetja e një funksioni analitik, por e një vargu të fundëm vlerash të përafërta të funksionit zgjidhje në pika që i takojnë segmentit $[a,b]$. Në këtë paragraf me y_i do të shënojmë vlerën e përafërt të vlerës së saktë $y(x_i)$, për çdo i.

7.1.1 Metoda e Eulerit (Euler)

Kjo është metoda më e thjeshtë për zgjidhjen e problemit Koshi. Ndajmë segmentin $[a,b]$ në n segmente të barabarta me anë të pikave $x_i = a + ih$ për i=0,1,...,n ku $x_n = b$. Le të jetë $y(x)$ zgjidhja e vetme e problemit Koshi (7.4). Në bazë të formulës së Teilorit mund të shkruajmë:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\,y'(x_i) + h^2\,y''(\xi_i)/2, \qquad \xi_i \in [a,b] \tag{7.5}$$

Në qoftë se shpërfillim kufizën e fundit dhe meqë $y(x)$ plotëson ekuacionin (7.4) shkruajmë

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i))$$

Duke marrë tani në vend të vlerave të sakta $y(x_i)$, i=1,2...,n vlera të përafërta y_i , fitohet metoda e Eulerit :

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha \\ y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i) \qquad i = 0,1,\ldots,n-1 \end{aligned} \tag{7.6}$$

h quhet edhe ***hap i metodës***.

Metoda e Eulerit ka një kuptim të thjeshtë gjeometrik. Vija $y=y(x)$, që është zgjidhja e saktë, zëvendësohet me pikat $M_i = (x_i, y_i)$

i=0,1,...,n që merren (duke filluar nga i=1) si pikëprerje të tangjentes së hequr ndaj vijës y=y(x), në pikën $(x_{i-1},y(x_{i-1}))$ me drejtëzën $x = x_i$.

Në qoftë se duam një zgjidhje të vazhdueshme, mund t'i bashkojmë pikat $M_i = (x_i,y_i)$ me segmente drejtvizore, duke formuar kështu një vijë të thyer $M_0\, M_1 \ldots M_n$ si në figurën 6.1

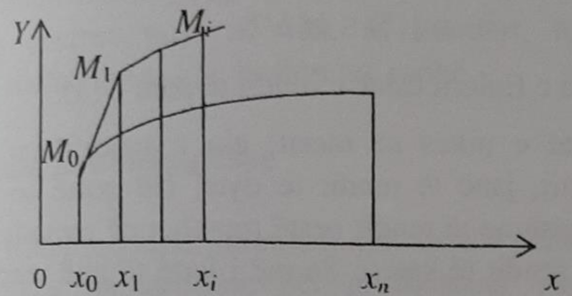

Figura 7.1. Kuptimi gjeometrik i metodës së Eulerit

Një vlerësim për gabimin e metodës së Eulerit e jep teorema e mwposhtme.

Teoremë 7.2 Le të jetë funksioni f i vazhdueshëm që plotëson kushtin e Lipshicit me konstante L në $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b$ dhe $-\infty \le y \le \infty\}$ dhe M një konstante që plotëson kushtin

$$|y''(x)| < M \qquad \text{për } x \in [a,b]$$

atëherë vlerat e përafërta y_i që jep metoda e Eulerit plotësojnë kushtin

$$|y(x_i) - y_i| \le \frac{hM}{2L}[e^{L(x_i-a)} - 1] \qquad \text{për } i = 0,1,\ldots,n$$

Shembull 7.1 Duke përdorur metodën e Eulerit, zgjidhni problemin e vlerës fillestare:

$$y'(x) = y - x^2 + 1, \qquad 0 \le x \le 2 \qquad y(0) = 0.5$$

me n=10.

Zgjidhje Nga të dhënat kemi $h = 0.2$, $x_i = 0.2i$, $y_0 = 0.5$ dhe

$$y_{i+1} = y_i + h\,(y_i - x_i^2 + 1) = y_i + 0.2\,(y_i - 0.04i^2 + 1)$$
$$= 1.2\,y_i + 0.008\,i^2 + 0.2, \qquad \text{për } i = 0,1,\ldots,9.$$

Zgjidhja e saktë është

$$y(x) = (x+1)^2 - 0.5e^x . \quad (7.7)$$

Në tabelën 7.1 jepen vlerat y_i të llogaritura me metodën e Eulerit, vlerat e sakta sipas (7.7) si dhe gabimet për çdo pikë x_i të segmentit [0,2].

x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0.0	0.5000000	0.5000000	0.0000000
0.2	0.8000000	0.8292986	0.0292986
0.4	1.1520000	1.2140877	0.0620877
0.6	1.5504000	1.6489406	0.0985406
0.8	1.9884800	2.1272295	0.1387495
1.0	2.4581760	2.6408591	0.1826831
1.2	2.9498112	3.1799415	0.2301303
1.4	3.4517734	3.7324000	0.2806266
1.6	3.9501281	4.2834838	0.3333557
1.8	4.4281538	4.8151763	0.3870225
2.0	4.8657845	5.3054720	0.4396874

Tabela 7.1 Zbatim i metodës së Eulerit

Nga Tabela, shihet që gabimet rriten lehtë me rritjen e x_i.

7.1.2 Metoda e pikës së mesit

Kjo metodë jepet me:

$$y_0 = \alpha$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + h/2,\ y_i + hf(x_i, y_i)) \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$

7.1.3 Metoda e modifikuar e Eulerit

$$y_0 = \alpha$$

$$y_{i+1} = y_i + [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1},\ y_i + hf(x_i, y_i))]\, h/2, \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$

7.1.4 Metoda e Hënit (Heun)

$$y_0 = \alpha$$

$$y_{i+1} = y_i + [f(x_i, y_i) + 3f(x_i + 2h/3,\ y_i + 2hf(x_i, y_i)/3)]h/4,\ i = 0,1,\ldots,n-1$$

7.1.5 Metoda klasike Runge-Kuta (Runge-Kutta)

Kjo është metoda më e mirë që përdoret shpesh në praktikë për zgjidhjen e problemit të vlerës fillestare.

$$\begin{aligned}
&y_0=\alpha\\
&k_1^{(i)} = hf(x_i\ ,\ y_i)\\
&k_2^{(i)} = hf(x_i + h/2,\ y_i + k_1^{(i)}/2)\\
&k_3^{(i)} = hf(x_i + h/2,\ y_i + k_2^{(i)}/2)\\
&k_4^{(i)} = hf(x_i + h,\ y_i + k_3^{(i)})\\
&y_{i+1}=y_i + [k_1^{(i)} + 2\,k_2^{(i)} + 2\,k_3^{(i)} + k_4^{(i)}]/6 \qquad i = 0,1,\ldots,n-1
\end{aligned}$$

Metodat e trajtuara më sipër për zgjidhjen e problemit Koshi mund të paraqiten në një trajtë më të përgjithshme:

$$\begin{aligned}
&y_0=\alpha\\
&y_{i+1}=y_i + h\ F(x_i\ ,\ y_i,\ h) \qquad i = 0,1,\ldots,n-1 \qquad (7.8)
\end{aligned}$$

Metodat e këtij tipi quhen ***metoda njëhapëshe*** sepse për njehsimin e vlerës y_{i+1} që përafron vlerën e saktë $y(x_{i+1})$ të funksionit në pikën x_{i+1}, përdoret vetëm vlera paraardhëse y_i (përafrimi i $y(x_i)$) që i takon një hapi më parë.

Po japim tani disa përkufizime që do na ndihmojnë në vlerësimin e gabimit si dhe të mundësisë së marrjes së një rezultati të pranueshëm.

Përkufizim 7.3 Gabim lokal të trungëzimit ose gabim i diskretizimit për metodat njëhapëshe (7.7) që e shënojmë me $\varepsilon_{i+1}(h)$ do quajmë diferencën:

$$\varepsilon_{i+1}(h) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - F(x_i\ ,\ y_i,\ h) \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$

Përkufizim 7.4 Rend të metodës do quajmë rendin e gabimit lokal të trungëzimit të asaj metode.

Për metodën e Eulerit, gabimi lokal i trungëzimit në hapin e i-të, për problemin e vlerës fillestare (7.4) është

$$\varepsilon_{i+1}(h) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - f(x_i\ ,\ y_i) \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$

nga ku, duke iu referuar relacionit (7.5) kemi

$$\varepsilon_{i+1}(h) = h\, y''(\xi_i)/2, \qquad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

Në qoftë se supozojmë $y''(x)$ të kufizuar në $[a,b]$ nga një konstante M, atëherë

$$\varepsilon_{i+1}(h) \leq M\, h/2,$$

Kështu metoda e Eulerit është e rendit të parë $O(h)$.

Metodat e pikës së mesit, ajo e modifikuar e Eulerit dhe metoda e Hënit, janë të rendit të dytë. Në qoftë se funksioni f ka derivate të pjesshme të rendit pestë tregohet që metoda klasike Runge -Kuta është e rendit të katërt. Sa më i lartë të jetë rendi i metodës aq më e preferuar është ajo me kusht që numri i veprimeve të mbetet nën një kufi të arsyeshëm. Kjo shpjegon parapëlqimin e metodës klasike Runge-Kuta në praktikë.

Në mjaft tekste me emrin Runge-Kuta përfshihen të gjitha metodat që përmendëm duke i dalluar ato vetëm nga rendi. Kështu metoda e Eulerit njihet edhe si metoda Runge-Kuta e rendit të parë, metoda e pikës së mesit, ajo e modifikuar e Eulerit dhe metoda e Hënit, njihen edhe si metoda Runge-Kuta të rendit të dytë, ndërsa metoda klasike Runge-Kuta, njihet edhe si metoda Runge-Kuta e rendit të katërt.

Shprehja analitike e gabimit të metodës klasike Runge-Kuta është mjaft e ndërlikuar, prandaj dhe vlerësimi efektiv i gabimit është i vështirë. Në praktikë, për të përcaktuar nëse hapi është zgjedhur mirë, përdoret një teknikë ekstrapolimi të cilën po e përshkruajmë.

Supozojmë se për zgjidhjen e problemit (7.4) është përdorur një metodë njëhapëshe e rendit n me hap h, pra me gabim $O(h^n)$. Në teori tregohet se ky gabim mund të shkruhet $\varepsilon_{i+1}(h) \approx K\, h^n$ ku K është një konstante që nuk varet nga h. Shënojmë y_h vlerën e njehsuar me metodën e mësipërme me hap h ndërsa $y_{h/2}$ vlerën e njehsuar me hap $h/2$ në pikën x_{i+1}, atëherë :

$$y(x_{i+1}) = y_h + K\, h^n$$
$$y(x_{i+1}) = y_{h/2} + K\, (h/2)^n$$

që nga, duke zbritur anë për anë dhe duke nxjerrë në dukje $K\, h^n$ fitohet

$$\varepsilon_{i+1}(h) \approx K\,h^n = (y_{h/2} - y_h)2^n/(2^n-1)$$

ose

$$\varepsilon_{i+1}(h) \approx y_{h/2} - y_h$$

Kështu, në qoftë se kërkohet të njehsohet një vlerë me saktësi ε mjafton të kontrollohet $|\,y_{h/2} - y_h\,| < \varepsilon$. Kur ky mosbarazim plotësohet, si zgjidhje merret $y_{h/2}$, në rast të kundërt, hapi përgjysmohet, domethënë njehsohet $y_{h/4}$, e kështu me radhë.

7.1.6 Metodat shumëhapëshe

Siç u tha më sipër, metodat njëhapëshe përdorin informacionin e vetëm pikës paraardhëse për të njehsuar vlerën e përafërt të funksionit zgjidhje në pikën korrente. Megjithëse të mira, metodat njëhapëshe nuk shfrytëzojnë informacion nga shumë pika të tjera të cilat në parim japin informacion më të saktë sa më afër pikës së fillimit janë. Prandaj kërkohet të trajtohen metoda që e zbutin në një farë mase mangësinë e metodave njëhapëshe.

Metodat që përdorin, për njehsimin e vlerës y_{i+1} që përafron vlerën e saktë $y(x_{i+1})$ të funksionit në pikën x_{i+1}, disa vlera paraardhëse tashmë të njehsuara të funksionit y në pikat x_i, x_{i-1},..., quhen ***metoda shumëhapëshe***. Më saktë po japim këtë përkufizim:

Përkufizim 7.4 Metodë m-hapëshe për zgjidhjen e problemit

$$y'(x) = f(x, y),\ \ a \le x \le b,\ \ y(a) = \alpha$$

quhet skema:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k\, y_{i-k+1} = h\sum_{k=0}^{m} b_k\, f(x_{i-k+1}, y_{i-k+1}),\ a_0 \neq 0 \quad (7.9)$$

për $i = m-1, m, \ldots, n-1$ dhe $h = (b-a)/n$

Shihet qartë që, për të filluar punë, këtyre metodave u duhen m vlera të njohura. Nga këto, vlera $y_0 = \alpha$ njihet ndërsa vlerat e tjera $y_1,\ldots,y_{m-1}$ përcaktohen me ndonjë metodë njëhapëshe.

Në qoftë se koeficienti $b_0=0$, atëherë metoda (7.9) quhet ***e shtjellur***, në rast të kundërt ajo quhet ***e pashtjellur***.

Përkufizim 7.5 Gabim lokal të trungëzimit ose gabim i diskretizimit për metodat shumëhapëshe (7.9) në hapin e $(i+1)$-të, që e shënojmë me $\varepsilon_{i+1}(h)$, do quajmë shprehjen:

$$\varepsilon_{i+1}(h) = [y(x_{i+1}) - \sum_{k=1}^{m} a_k\, y(x_{i-k+1})]/h - \sum_{k=0}^{m} b_k\, f(x_{i-k+1}, y(x_{i-k+1}))$$

Po japim tani disa metoda shumëhapëshe

Metoda dyhapëshe Adams-Bashforth (Adams-Bashforth)

$$y_0 = \alpha \qquad y_1 = \alpha_1 \text{ (kjo vlerë duhet gjetur)}$$

$$y_{i+1} = y_i + [3f(x_i,y_i) - f(x_{i-1},y_{i-1})]\, h/2$$

ku $i=1,2,\ldots n-1$. Kjo është metodë e shtjellur me gabim lokal të trungëzimit

$$\varepsilon_{i+1}(h) = \frac{5}{12} y'''(\xi_i)\, h^2 \qquad \xi_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$$

Metoda katërhapëshe Adams-Bashforth

$$y_0 = \alpha, \qquad y_1 = \alpha_1,\ y_2 = \alpha_2,\ y_3 = \alpha_3 \quad (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \text{ duhet gjetur})$$

$$y_{i+1} = y_i + [55f(x_i,y_i) - 59f(x_{i-1},y_{i-1}) + 37f(x_{i-2},y_{i-2}) - 9f(x_{i-3},y_{i-3})]\, h/24$$

ku $i=3,4,\ldots n-1$. Kjo është metodë e shtjellur me gabim lokal të trungëzimit

$$\varepsilon_{i+1}(h) = \frac{251}{720} y^{(5)}(\xi_i) h^4 \qquad \xi_i \in [x_{i-3}, x_{i+1}]$$

Metoda dyhapëshe Adams-Multon (Adams-Moulton)

$$y_0 = \alpha \qquad y_1 = \alpha_1 \text{ (kjo vlerë duhet gjetur)}$$

$$y_{i+1} = y_i + [5f(x_{i+1},y_{i+1}) + 8f(x_i,y_i) - f(x_{i-1},y_{i-1})]\, h/12$$

ku $i=1,2,\ldots n-1$. Kjo është metodë e pashtjellur me gabim lokal të trungëzimit

$$\varepsilon_{i+1}(h) = -\frac{1}{24} y^{(4)}(\xi_i)\, h^3 \qquad \xi_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$$

Metoda trehapëshe Adams- Multon

$$y_0 = \alpha, \qquad y_1 = \alpha_1,\ y_2 = \alpha_2, \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \text{ duhen gjetur})$$

$$y_{i+1} = y_i + [9f(x_{i+1},y_{i+1}) + 19f(x_i,y_i) - 5f(x_{i-1},y_{i-1}) + f(x_{i-2},y_{i-2})]\ h/24$$

ku $i=2,3,...n-1$. Kjo është metodë e pashtjellur me gabim lokal të trungëzimit

$$\varepsilon_{i+1}(h) = -\frac{19}{720} y^{(5)}(\xi_i)h^4 \qquad \xi_i \in [x_{i-2}, x_{i+1}]$$

Metoda katërhapëshe Adams- Multon

$$y_0 = \alpha, \quad y_1 = \alpha_1,\ y_2 = \alpha_2,\ y_3 = \alpha_3 \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ duhen gjetur})$$

$$y_{i+1} = y_i + [251f(x_{i+1},y_{i+1}) + 646f(x_i,y_i) - 264f(x_{i-1},y_{i-1}) +$$
$$+106f(x_{i-2},y_{i-2}) - 19f(x_{i-3},y_{i-3})]\ h/720$$

ku $i=3,4,...n-1$. Kjo është metodë e pashtjellur me gabim lokal të trungëzimit

$$\varepsilon_{i+1}(h) = -\frac{3}{160} y^{(6)}(\xi_i)h^5 \qquad \xi_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$$

Në qoftë se krahasojmë metodën e shtjellur katërhapëshe Adams-Bashforth me atë të pashtjellur trihapëshe Adams- Multon, vëmë re se të dyja metodat kërkojnë m vlerësime të funksionit në një hap dhe kanë të njëjtin rend gabimi lokal. Në përgjithësi koeficientët pranë vlerave të funksionit në një metodë të pashtjellur janë më të vegjël se ato të metodave të shtjellura. Kjo tregon se metodat e pashtjellura janë më të qëndrueshme dhe me gabim më të vogël rrumbullakimi.

7.1.7 Sistemet e ekuacioneve diferenciale

Problemi Koshi për një sistemi ekuacionesh diferenciale të rendit të parë mund të shprehet në trajtën :

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2'(x) &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_n'(x) &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \qquad (7.10)$$

për $x \in [a,b]$, me kushte fillestare

$$y_1(a) = \alpha_1, \qquad y_2(a) = \alpha_2, \qquad \dots \qquad y_n(a) = \alpha_n \qquad (7.11)$$

Kërkohet të gjenden funksionet y_1, y_2, ... y_n, që vërtetojnë sistemin (7.10) si dhe kushtet fillestare (7.11).

Për zgjidhjen numerike të problemit (7.10), (7.11) mund të përdoren të gjitha metodat e trajtuara më lart, sigurisht me modifikimet përkatëse. Për konkretizim, po trajtojmë metodën Runge-Kuta të rendit të katërt për rastin e një sistemi me dy ekuacione (n=2) tek sistemi (7.10).

$$y_1'(x) = f_1(x, y_1, y_2)$$
$$y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2)$$

për $x \in [a,b]$, me kushte fillestare

$$y_1(a) = \alpha_1, \qquad y_2(a) = \alpha_2$$

E zëmë se njihen vlerat e përafërta y_1, y_2 të funksioneve $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$ në pikën x (një nyje në segmentin $[a,b]$) përkatësisht, pra njihet treshja (x, y_1, y_2) dhe kërkojmë të gjejmë treshen $(x+h, y_1+\Delta y_1, y_2+\Delta y_2)$ ku $y_1+\Delta y_1$, $y_2+\Delta y_2$ janë vlerat e përafërta të funksioneve $y_1=y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ në pikën $x+h$ përkatësisht.

Metoda klasike Runge-Kuta do shkruhej

$$k_1 = hf_1(x, y_1, y_2) \qquad l_1 = hf_2(x, y_1, y_2)$$
$$k_2 = hf_1(x+h/2,\ y_1+k_1/2,\ y_2+l_1/2) \qquad l_2 = hf_2(x+h/2,\ y_1+k_1/2,\ y_2+l_1/2)$$
$$k_3 = hf_1(x+h/2,\ y_1+k_2/2,\ y_2+l_2/2) \qquad l_3 = hf_2(x+h/2,\ y_1+k_2/2,\ y_2+l_2/2)$$
$$k_4 = hf_1(x+h,\ y_1+k_3,\ y_2+l_3) \qquad l_4 = hf_2(x+h,\ y_1+k_3,\ y_2+l_3)$$
$$\Delta y_1 = [k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4] / 6 \Delta y_2 = [l_1 + 2\,l_2 + 2\,l_3 + l_4] / 6$$

Problemi i vlerave fillestare për një ekuacion diferencial të rendit më të lartë se një, mund të shndërrohet në një sistem ekuacionesh diferenciale të rendit të parë dhe më tej të zgjidhet duke përdorur metodat e përmendura më sipër për sistemet. Le të shohim shembullin e mëposhtëm.

Shembull 7.2 Të zgjidhet problemi Koshi për ekuacionin e rendit 2

$$y'' = x\,y'^2 - y^2 \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

duke marrë hapin $h = 0.2$

Zgjidhje Shndërrojmë së pari ekuacionin e dhënë në një sistem dy ekuacionesh, duke bërë zëvendësimin $z = y'$

$$y' = z$$
$$z' = x z^2 - y^2$$

Kushtet fillestare marrin pamjen

$$y(0) = 1, z(0) = 0$$

Duke përdorur metodën Runge Kuta, rezultatet e veprimeve për hapin e parë po i paraqesim në tabelën 7.2:

x	$y (= y_1)$	$z (= y_1)$	$xz^2 - y^2 (= y_2)$	Δy_1	Δy_2
0	1	0	−1	0	−0.2
0.1	1	−0.1	−0.999	−0.02	−0.1998
0.1	0.99	−0.0999	−0.979102	−0.01998	−0.1958204
0.2	0.98002	−0.1958204	−0.9527709	−0.039164	−0.1905542

0.2 0.980146 -0.196966

Tabela 7.2 Rezultatet e përdorimit të metodës Runge-Kuta

Pra në hapin e parë nga pika (0, 1, 0) kaluam në pikën (0.2, 0, 0.980146). Në mënyrë të ngjashme veprohet në hapat e tjerë për të përcaktuar vlerat e funksionit y.

7.2 Problemi i vlerave kufitare

Siç është theksuar edhe në fillim të këtij kreu, metodat për zgjidhjen e problemit të vlerave kufitare janë të ndryshme nga ato të problemit Koshi. Ne do të trajtojmë metodën e diferencave të fundme në zgjidhjen e tij.

Do të marrim rastin e një ekuacioni diferencial linear të rendit të dytë :

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x) \qquad x \in [a,b] \tag{7.12}$$

me kushte kufitare