Kreu 3

Zgjidhja e sistemeve të ekuacioneve lineare dhe jolineare

Sistemet e ekuacioneve lineare janë nga modelet që hasen më dendur në praktikën e eksperimentimit shkencor, prandaj për zgjidhjen e tyre janë përpunuar shumë metoda.

Sistemi me n ekuacione lineare dhe n të panjohura

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (3.1)$$

mund të shkruhet në trajtë matricore :

$$A\,x = b \qquad (3.2)$$

ku A është matrica me nxn përmasa e koeficientëve (a_{ij}), $x \in R^n$ është vektori i të panjohurave dhe $b \in R^n$ vektori i kufizave të lira.

Për sistemin (3.1) ka tre mundësi: të mos ketë zgjidhje, të ketë një pafundësi zgjidhjesh ose të ketë një zgjidhje të vetme. Në rastin e fundit, përcaktori i *A-së* është i ndryshëm nga zero dhe zgjidhja e sistemit (3.2), jepen me formulën e Kramerit:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \qquad \text{për}\ i = 1,2,\ldots n$$

ku $|A_i|$ është përcaktori i matricës

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

E meta kryesore e formulave të Kramerit është numri i madh i veprimeve që duhen kryer. Kështu, për shembull, për një sistem me $n=10$ përmasa duhen kryer rreth 400 milionë veprime aritmetike. Kjo e bën të papërdorshme në praktikë këtë metodë.

Në analizën numerike studiohen dy tipe metodash për zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare, metodat e drejtpërdrejta (ose të sakta) dhe ato iterative.

3.1 Metoda të drejtpërdrejta për zgjidhjen e një sistemi ekuacionesh lineare

3.1.1 Metoda e Gausit

Kjo është nga metodat më efikase dhe shumë e përdorshme në praktikë. Metoda e Gausit shndërron sistemin (3.2) në një sistem trekëndësh të sipërm me një algoritëm të përshtatshëm. Shënojmë sistemin (3.2) në trajtën:

$$A^{(1)}x = b^{(1)}, \text{ ku } A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)}) = A \text{ dhe } b^{(1)} = (b_i^{(1)}) = b$$

Pas ndryshimit të rreshtave ose shtyllave në matricën $A^{(1)}$, mund të mendojmë që $a_{11}^{(1)} \neq 0$. Për $i = 2,3,\dots,n$ shumëzojmë ekuacionin e parë të sistemit (3.2) me $g_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ dhe zbresim ekuacionin e përftuar nga ekuacioni i i-të. Fitojmë kështu një sistem të trajtës:

$$A^{(2)}x = b^{(2)}, \text{ ku } A^{(2)} = (a_{ij}^{(2)}) \text{ dhe } b^{(2)} = (b_i^{(2)})$$

me

$$
\begin{cases}
a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)}, \; j = 1,2,\ldots,n\ldots \\
a_{i1}^{(2)} = 0, \quad i = 2,3,\ldots,n \\
a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - g_{i1}a_{1j}^{(1)}, \; i = 2,3,\ldots,n, \; j = 2,3,\ldots,n \\
b_1^{(2)} = b_1^{(1)} \\
b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - g_{i1}b_1^{(1)}, \quad i = 2,3,\ldots,n
\end{cases}
\tag{3.4}
$$

Kemi pra

$$
A_2^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} a_{12}^{(1)} \ldots a_{1n}^{(1)} \\ 0 \quad a_{22}^{(2)} \ldots a_{2n}^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad a_{n2}^{(2)} \ldots a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ . \\ . \\ . \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}
$$

Vëmë re nga (3.4) se komponentet e vektorit x nuk ndërhyjnë në këtë eliminim dhe gjithashtu veprimet që kryhen me elementet e rreshtit të matricës A dhe komponentit përkatës të vektorit b, janë të njëjta. Marrim matricën e zgjeruar $\overline{A}$ të A :

$$
\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \; b_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \; b_n \end{pmatrix}.
$$

Komponentet b_i i shënojmë me a_{in+1}. Shënojmë, gjithashtu, shkurt $\overline{A} \equiv (A|b)$. Me këto shënime matrica $\overline{A}^{(2)} = (A^{(2)}|b^{(2)})$ njehsohet nga

$$
\begin{cases}
a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)} \quad j = 1,2,\ldots,n,n+1 \\
a_{i1}^{(2)} = 0 \quad i = 2,3,\ldots,n \\
a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - g_{i1}a_{1j}^{(1)} \quad i = 2,3,\ldots,n \quad j = 2,3,\ldots,n,n+1.
\end{cases}
$$

Duke vazhduar procesin me $a_{22}^{(2)} \neq 0$ (ndoshta pas ndryshimit të rreshtave e shtyllave) gjendet matrica $A^{(3)}$.

Në mënyrë të përgjithshme, me metodën e Gausit ndërtohet një varg sistemesh të barasvlershme me (3.2) të trajtës

$$A^{(k)}x = b^{(k)} \tag{3.5}$$

ku matricat $A^{(k)}$ dhe vektorët $b^{(k)}$ jepen me anë të matricës së zgjeruar $\overline{A}^{(k)}$ =($A^{(k)}|b^{(k)}$) të trajtës

$$\overline{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)}\, a_{12}^{(1)} \ldots a_{1k}^{(1)} \ldots a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 \quad a_{22}^{(2)} \ldots a_{2k}^{(2)} \ldots a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 0\ldots\ldots\ldots 0 \; a_{kk}^{(k)} \ldots a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 0\ldots\ldots\ldots 0 \; a_{nk}^{(k)} \ldots a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

Për të kaluar nga sistemi (3.5) tek sistemi $A^{(k+1)}x = b^{(k+1)}$ mund të mendojmë që $a_{kk}^{(k)} \neq 0$. Pastaj për $i=k+1,\ldots,n$ shumëzojmë rreshtin e k-të të $\overline{A}^{(k)}$ me

$$\boxed{g_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}} \tag{3.6}$$

dhe zbresim rezultatin e marrë nga rreshti i i-të. Merret kështu matrica $A^{(k+1)}$ elementet e së cilës jepen nga :

$$\begin{aligned} &a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)}, \quad i=1,\ldots,k, \quad j=k,\ldots,n+1 \\ &\boxed{a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - g_{ik}a_{kj}^{(k)},} \quad i=k+1,\ldots,n \quad j=k+1,\ldots,n+1 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Elementet e tjera janë zero.

Në etapën e n-të, matrica $A^{(n)}$ është trekëndëshe e sipërme dhe sistemi ka trajtën

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{22}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

$-\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$

Për zgjidhjen e tij mjafton të gjendet fillimisht x_n, e duke u ngjitur në rreshta gjenden të gjitha komponentet e x-it. Algoritmi për këtë është :

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1 \text{ deri } n} a_{ij}^{(i)} x_j}{a_{ii}^{(i)}}, \quad \text{për } i = n-1, n-2, \ldots, 1 \tag{3.8}$$

Vërejtje 3.1 Kemi pranuar që sistemi ka zgjidhje të vetme, pra $|A| \neq 0$. Kjo siguron gjetjen gjithnjë të elementeve $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, pas ndryshimit ndoshta të rreshtave ose shtyllave. Elementet $a_{kk}^{(k)}$, quhen ***elemente kryesore* ose *çelës* (*angl. e frengj. pivot*).**

Vërejtje 3.2 Shpeshherë, për të siguruar qëndrueshmërinë e metodës, domethënë, që ndryshimeve të vogla të të dhënave t'u përgjigjen ndryshime të vogla në rezultat, si element çelës në etapën e k-të, merret elementi më i madh në vlerë absolute që ndodhet në shtyllën e k-të, dhe në rreshtat nga i k-ti deri tek i n-ti. Në këtë rast thuhet se kemi kryer ***përzgjedhje të pjesshme (angl. Partial pivoting)***. Si element çelës mund të merret edhe elementi më i madh në vlerë absolute që ndodhet në rreshtat nga i *k-ti* deri në të n-tin dhe në shtyllat nga e *k-ta* deri në të n-tën. Në këtë rast thuhet se kemi kryer ***përzgjedhje të plotë (angl. Total pivoting)***.

Kryerja e një përzgjedhjeje të pjesshme është e mjaftueshme për të marrë një rezultat të pranueshëm numerik.

Po japim tani algoritmin e Gausit të shprehur me pseudo kod, duke shënuar $a(i,j)$ elementet e matricës $\tilde{A}^{(k)}$. Algoritmi i mëposhtëm është dhënë në trajtën më të thjeshtë dhe nuk merr parasysh rastin kur ndonjë nga elementet kryesore bëhet zero. Në këtë rast algoritmi duhet të plotësohet me disa rreshta shtesë që realizojnë kontrollin e elementit nëse është zero, si dhe ndërrimin e vendeve kur një gjë e tillë ndodh. Gjithashtu algoritmi mund të plotësohet për ta përshtatur atë në rastin e një përzgjedhjeje të thjeshtë apo një përzgjedhjeje të plotë. Këto i lihen si detyrë lexuesit që dëshiron të mësojë edhe vetë.

Algoritmi i metodës së Gausit

Lexo $\{n, \tilde{A}\}$ % faza e parë
për k=1 deri $n-1$
    për i= k+1 deri n
        $g(i,k) = a(i,k)/ a(k,k)$
        për j= k+1 deri n+1
            $a(i,j) = a(i,j) - g(i,k)\, a(k,j)$
        fund j
    fund i
fund k
$x(n) = a(n,n+1) / a(n,n)$ % faza e dytë
për i= n−1 deri 1
    $S = a(i,n+1)$
    për j= i+1 deri n
        $S = S - a(i,j) * x(j)$
    fund j
    $x(i) = S / a(i,i)$
fund i
shkruaj $\{x\}$. Ndalo.

3.1.2 Faktorizimi *LU*

Thuhet se matrica A është **faktorizuar në trajtën *LU*** në qoftë se

$$A=LU$$

ku L është matricë trekëndëshe e poshtme me njësha në diagonalen kryesore dhe U një matricë trekëndëshe e sipërme. Mund të provohet që, në qoftë se është kryer faza e eleminimit të Gausit, atëherë matrica A e sistemit mund të faktorizohet në trajtën LU me

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ g_{21} & 1 & 0 & . \\ . & . & . & 0 \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn-1} & 1 \end{pmatrix} \text{ dhe } U=\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & . & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & . & a_{2n}^{(2)} \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

ku matrica U është ajo e fituar pas eliminimit të Gausit, kurse matrica L

ka si elemente nën diagonalen kryesore g_{ik} që lidhen me elementet e $A^{(k)}$ me formulat (3.6). Duke shfrytëzuar këtë faktorizim, sistemi (3.2) shkruhet :

$$LU\,x=b, \text{ që nga } \begin{cases} Ly=b \\ Ux=y \end{cases} \quad \text{ku } y=b^{(n)}.$$

Pra zgjidhja e sistemit (3.2) sillet në zgjidhjen e njëpasnjëshme të dy sistemeve lineare me matrica trekëndëshe. Ky zbërthim paraqet interes kur për të njëjtën matricë A duhen zgjidhur shumë sisteme të trajtës (3.2), por që kanë të ndryshme vetëm shtyllën e lirë b.

3.1.3 Metoda e Gaus-Zhordanit (Gauss-Jordan)

Kjo metodë merret nga ajo e Gausit duke bërë disa ndryshime të vogla. Matrica A e sistemit fillestar shndërrohet në një matricë diagonale me anë të eleminimit të modifikuar të Gausit. E zëmë se në etapën e k-të të eleminimit, matrica $A=A^{(1)}$ është shndërruar në matricën $\overline{A}^{(k)}$.

$$\overline{A}^{(k)}=\begin{pmatrix}
a_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & a_{1k}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & \dots & 0 & a_{2k}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
 & & & & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\
 & & & 0 & a_{k+1,k}^{(k)} & \dots & a_{k+1n}^{(k)} & b_{k+1}^{(k)} \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
 & & & & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)}
\end{pmatrix}$$

Për të kaluar në matricën $\overline{A}^{(k+1)}=(a_{ij})^{(k+1)}$ veprohet kështu :

a) Ndërtohen numrat

$$g_{ik}=\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}},\; i=1,2,\dots,k-1,k+1,\dots,n.$$

b) Shumëzohen me g_{ik} rreshti i k-të dhe i zbritet rreshtit të i-të.

Fitohen
$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - g_{ik}a_{kj}^{(k)}, i = 1,2,\dots,k-1,k+1,\dots,n;\ j = k+1,\dots,n+1$$
ku $a_{in+1}^{(k)} = b_i^{(k)}$, $i = 1,2,\dots,n$. Elementet e tjera jashtë diagonales kryesore janë zero.

Në hapin e n-të merret matrica $\overline{A}^{(n)}$ të cilës i përgjigjet sistemi

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 = b_2^{(2)} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases} \quad \text{prej nga,} \quad x_i = \frac{b_i^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}} \quad \text{për } i = 1,2,\dots,n$$

Algoritmi i metodës së Gaus-Zhordanit

Lexo $\{n, \widetilde{A}\}$
për k=1 deri n % faza e parë
  për i= 1 deri n dhe $i \neq k$
    $g(i,k) = a(i,k)/a(k,k)$
    për j= k+1 deri n+1
      $a(i,j) = a(i,j) - g(i,k)\, a(k,j)$
    fund j
  fund i
fund k
për i= 1 deri n % faza e dytë
  $x(i) = a(i,n+1)/a(i,i)$
fund i
shkruaj $\{x\}$. Ndalo.

3.1.4 Gjetja e matricës së anasjellë

Duke menduar matricën A të sistemit $Ax=b$ të rregullt (domethënë $|A| \neq 0$) kryejmë këto shndërrime në sistemin $Ax=b$:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b.$$

Pra, duke njohur matricën e anasjellë A^{-1}, gjejmë drejtpërdrejt zgjidhjen e sistemit (3.2).

Kjo mënyrë e thjeshtë për përcaktimin e A^{-1} mbështetet në metodën e Gaus-Zhordanit. Shënojmë e_i, shtyllën e i-të të matricës njësi I, domethënë $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ dhe b_i shtyllën e i-të të matricës A^{-1}. Atëherë, nga ekuacioni

$$AA^{-1}=I$$

rrjedh $A\,b_i = e_i$, $\quad i = 1,2,\ldots,n$. Kështu që zgjidhja e sistemit

$$A\,x = e_i\,, \qquad (3.9)$$

është pikërisht shtylla e i-të e matricës A^{-1}. Prandaj A^{-1} mund të përcaktohet duke zgjidhur (3.9) për $i = 1,2,\ldots,n$, domethënë duke zgjidhur n sisteme lineare që kanë të njëjtën matricë, por ndryshojnë vetëm nga shtylla e kufizave të lira. Këto sisteme mund të zgjidhen njëkohësisht me anë të metodës së Gaus-Zhordanit duke zvogëluar shumë numrin e veprimeve aritmetike në krahasim me metodën që ofron përkufizimi i matricës së anasjellë.

Shembull 3.1 Të gjendet matrica e anasjellë, të zgjidhet sistemi

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 1.5x_3 = 1.5 \\ x_1 - 0.5x_2 + 0.5x_3 = 0.5 \end{cases}$$

Gjejmë A^{-1}. Shkruajmë matricën A së bashku me vektorët e_1, e_2, e_3

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1.5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Përdorim tani metodën e Gaus-Zhordanit. Transformimet e nevojshme nuk janë paraqitur me formulat përkatëse për të mos e rënduar paraqitjen, por janë paraqitur vetëm rezultatet në çdo hap të kryer.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -0,5 & . & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & . & -0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0,5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0.5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{7}{6} \\ 0 & -2 & 0 & -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{12} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = A^{-1},$$

atëherë

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}.\text{ Që nga } \begin{cases} x_1 = 7/6 \\ x_2 = -1/6 \\ x_3 = -1/3 \end{cases}, \text{ është zgjidhja e sistemit.}$$

Vërejtje 3.3 Përdorimi i njërës nga metodat e mësipërme lejon njëkohësisht edhe njehsimin e përcaktorit të matricës A. Me të vërtetë,

$$\det(A) = |A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}^{(i)}$$

dhe $a_{ii}^{(i)}, \forall i = 1,2,...,n$ njihen. Ato janë elementet e diagonales kryesore pas shndërrimit të matricës A në matricë trekëndëshe apo diagonale ose ndryshe elementet kryesorë apo çelës.

3.2 Metodat iterative për zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare

Metodat e drejtpërdrejta janë të efektshme kur n është e vogël. Në qoftë se kemi sisteme me n të mëdha (për shembull $n \geq 1000$), atëherë këto metoda, qoftë edhe ajo e Gausit, nuk përdoren. Në vend të tyre përdoren metodat iterative. Do të trajtojmë dy prej tyre: atë të Jakobit (Jacobi) dhe të Gaus-Zajdelit (Gauss-Seidel). Po japim së pari disa kuptime për normat.

3.2.1 Normat vektoriale dhe matricore

Përkufizim 3.1 Normë e një vektori $x = (x_1, x_2,..., x_n)^T$, quhet një funksion nga R^n në R që shënohet $\|x\|$ dhe plotëson kushtet :

1) $\|x\| > 0$ për $x \neq 0$ dhe $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\|kx\| = |k|\,\|x\|$ për $k \in R$ ose C

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ për $x, y \in R^n$ (mosbarazimi i trekëndëshit)

Tri llojet e normave vektoriale që përdoren më shumë janë:

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{(norma e Manhatanit)}$$

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \quad \text{(norma euklidiane)}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \quad \text{(norma e maksimumit)}$$

Përkufizim 3.2 Normë e një matrice $A \in R^{m \times n}$, quhet një funksion i përcaktuar në bashkësinë e matricave dhe që merr vlera reale i cili shënohet $\|A\|$ dhe plotëson kushtet:

1) $\|A\| \geq 0$ dhe $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

2) $\|kA\| = |k|\,\|A\|$ për $k \in R$

3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ *për* $A, B \in R^{m \times n}$

Një pjesë të normave matricore mund t'i ndërtojmë me anë të normave vektoriale, me barazimin e mëposhtëm

$$\|A\|_p = \max\{\, \|Ax\|_p \mid x \in R^n, \|x\|_p = 1 \,\} \qquad p = 1, 2, \infty \quad (3.10)$$

Këto quhen ***norma natyrale*** ose ***norma të prejardhura*** nga normat vektoriale. Duke u nisur nga (3.10) mund të tregohet vërtetësia e shprehjeve :

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{(normë sipas shtyllave)}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{(normë sipas rreshtave)}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \quad \text{(normë spektrale)}$$

ku $\rho(A^T A)$ është rrezja spektrale e matricës $A^T A$, domethënë vlera vetjake më e madhe në vlerë absolute e $A^T A$.

Një veti e rëndësishme e normave natyrale, që rrjedh nga barazimi (3.10), është:

$$\|A\,B\|_p \leq \|A\|_p\,\|B\|_p \qquad (3.11)$$

Përveç normave natyrale ka dhe norma të tjera si ajo e Frobenius-it (Ushtrimi 16 në fund të këtij kreu).

Ideja e metodave iterative qëndron në ndërtimin e një vargu vektorësh $\{x_n\}$, i cili konvergjon tek zgjidhja e saktë e sistemit $A\,x = b$.

Edhe këtu është i nevojshëm një përafrim fillestar $x^{(0)}$, si dhe kriteret për të ndaluar procesin iterativ. Shpesh, si përafrim fillestar merret vektori zero ose vektori me të gjitha komponentet të barabarta me 1, ndërsa si kriter ndalimi merret

$$\left\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\right\| < \varepsilon_1 \left\|x^{(n+1)}\right\|$$

Për të zbatuar metodat iterative, sistemit (3.2) i jepet trajta:

$$x = T\,x + d \qquad (3.12)$$

ku T është një matricë katrore e rendit n, që quhet ***edhe matricë e kalimit***, ndërsa d është një vektor shtyllë me n përmasa. Ka vend kjo

Teoremë 3.1 Në qoftë se ndonjë nga normat e matricës T është më e vogël se 1, atëherë vargu $x^{(k)}$, i përcaktuar nga (3.12)

$$x^{(k)} = T\,x^{(k-1)} + d$$

konvergjon tek zgjidhja x^* e sistemit (3.2) për çdo përzgjedhje të vektorit fillestar $x^{(0)}$. Eshtë i vërtetë edhe ky vlerësim për gabimin :

$$\left\|x^{(k)} - x^*\right\| \leq \frac{\|T\|^k}{1-\|T\|}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| \qquad (3.13)$$

Teorema jep kushte vetëm të mjaftueshme për konvergjencën e metodës. Kjo do të thotë që mund të ndodhë që kushti të mos plotësohet dhe përsëri metoda të konvergjojë. Sigurisht, në praktikë raste të tilla janë jo të shpeshta.

3.2.2 Metoda e Jakobit

Një nga mënyrat më të thjeshta për të kaluar nga trajta (3.2) në trajtën (3.12) të sistemit fillestar (3.1) është nxjerrja e të panjohurës x_i nga ekuacioni i i-të në varësi të të tjerave, domethënë x_1 nxirret nga ekuacioni i parë ; x_2 nga i dyti e kështu me radhë. Kemi

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}(b_i - a_{i1}x_1 - \ldots - a_{i,i-1}x_{i-1} - a_{i,i+1}x_{i+1} - \ldots - a_{in}x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

Sistemi $Ax=b$ u vu kështu në trajtën $x = Tx + d$ ku rolin e T dhe d-së e luajnë përkatësisht

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & . & . & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ . & . & . & . & . \\ -\dfrac{a_{i1}}{a_{11}} & . & 0 & . & -\dfrac{a_{in}}{a_{i1}} \\ . & . & . & . & . \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & . & . & -\dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1}{a_{i1}} \\ . \\ \dfrac{b_i}{a_{i1}} \\ . \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

E shkruar në mënyrë të përmbledhur ***metoda e Jakobit*** ose e ***iteracionit të thjeshtë*** ka pamjen

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \qquad (3.14)$$

për $i = 1,2,\ldots,n$ dhe $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ të dhënë.

Më poshtë po japin në mënyrë më të detajuar algoritmin e metodës së Jakobit.

Algoritmi i metodës së Jakobit

Lexo $\{n, x = (x_1, x_1, \ldots x_n), A, b, N_{\max}\}$
për $k := 1$ deri $N_{\max}$
    për $i := 1$ deri n
        $s := b_i$
        për $j=1$ deri $i-1$
            $s := s - a_{ij} * x_j$
        fund j
        për $j= i+1$ deri n
            $s := s - a_{ij} * x_j$
        fund j
        $y_i = s / a_{ii}$
    fund i
    Në qoftë se $\|x - y\| < \varepsilon \|y\|$ atëherë
        Shkruaj $\{y, \varepsilon, k\}$
    Përndryshe
        Për $i=1$ deri n
            $x_i = y_i$
        fund i
fund k
Shkruaj {Procesi nuk konvergjon}. Ndalo.

3.2.3 Metoda e Gaus-Zajdelit (Gauss-Seidel)

Kjo metodë ndryshon nga ajo e Jakobit, sepse çdo komponente $x_i^{(k+1)}$ $i=1,2,\ldots,n-1$ e vektorit $x^{(k+1)}$, e njehsuar gjatë iteracionit të $(k+1)$ përdoret menjëherë për njehsimin e komponenteve të tjera $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$ gjatë të njëjtit iteracion, atij të $(k+1)$. Duke ruajtur shënimet e bëra më lart, algoritmi i Gaus-Zajdelit shkruhet :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

$i=1,2,\ldots,n$ dhe $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ të dhënë. Për studimin e konvergjencës së metodave të Jakobit dhe Gaus- Zajdelit mund të përdoret teorema 3.1, si dhe një pohim që jep kushte të mjaftueshme dhe që po e formulojmë si teoremë:

Teoremë 3.2 Në qoftë se matrica A e sistemit (3.2) është me diagonale dominante, domethënë

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \text{ për } i = 1,2,\ldots,n,$$

atëherë algoritmet e Jakobit dhe të Gaus-Zajdelit konvergjojnë për çdo vektor fillestar $x^{(0)}$.

Gabimi i metodave njehsohet me anë të relacioneve (3.13). Vërtetohet që, kur ka konvergjencë, metoda e Gaus-Zajdelit konvergjon më shpejt. Por gjenden raste kur metoda e Jakobit konvergjon, kurse e Gaus-Zajdelit jo. Përveç shpejtësisë, algoritmi i Gaus-Zajdelit ka edhe një përparësi tjetër në lidhje me atë të Jakobit nga pikëpamja informatike: në qoftë se tek metoda e Jakobit duhen patjetër dy vektorë me n përmasa për të njehsuar vektorin x, metoda e Gaus-Zajdelit kërkon të rezervojë vend vetëm për një vektor me n përmasa.

3.2.4 Përmirësimi iterativ i zgjidhjes

Pasi një sistem është zgjidhur me një metodë të drejtpërdrejtë, zgjidhja e tij mund të përmirësohet duke përdorur një teknikë iterative.

E zëmë se duke zgjidhur sistemin $A\,x = b$ me ndonjë metodë të drejtpërdrejtë, është gjetur zgjidhja $x^{(0)}$ atëherë përdorim algoritmin:

1. Njehsojmë vektorin mbetje $\quad r^{(0)} = b - A\,x^{(0)}$
2. Zgjidhim sistemin $\quad A\,e^{(0)} = r^{(0)}$
3. Marrim $\quad x^{(1)} = x^{(0)} + e^{(0)}$

Vlera $x^{(1)}$ është më e saktë se $x^{(0)}$. Procedura e mësipërme mund të përsëritet duke marrë në vend të $x^{(0)}$ vektorin $x^{(1)}$.

Vërejtje 3.4 Për të shmangur veprimet me numra të mëdhenj, që shkaktojnë shpesh tejngopje (overflow) në kompjuter, rekomandohet që sistemi (3.1) të normalizohet, domethënë të pjesëtohen të gjithë koeficientët e tij me një numër (ose çdo ekuacion me numrin e tij) që pas pjesëtimit të gjithë koeficientët a_{ij} të jenë më të vegjël ose baras me 1, në vlerë absolute.

3.3 Zgjidhja e sistemeve të ekuacioneve jolineare

Ky në përgjithësi është një problem shumë më i ndërlikuar se ai i zgjidhjes së një ekuacioni apo i një sistemi ekuacionesh lineare. Zgjedhja e përafrimit fillestar të përshtatshëm këtu ka rëndësi të dorës së parë. Ne do të kufizohemi me trajtimin e sistemeve me dy ekuacione jolineare dhe dy të panjohura.
Le të jenë f_1 dhe f_2 dy funksione të $D \subset R^2 \to R$. Kërkohen dyshet $(x,y) \in D$ që vërtetojnë sistemin

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Do pranojmë që zona D mund të zgjidhet në mënyrë të tillë që sistemi (3.15) të ketë zgjidhje të vetme.

3.3.1 Metoda e përafrimeve të njëpasnjëshme

Ngjashëm me rastin e zgjidhjes së $f(x) = 0$, sistemi (3.15) mund të vihet në trajtën

$$\begin{cases} x = x - f_1(x,y) = g_1(x,y) \\ y = y - f_2(x,y) = g_2(x,y) \end{cases}$$

Prej nga, duke u nisur nga $(x_0, y_0) \in D$, fitohen formulat rekurente

$$\begin{cases} x_{k+1} = g_1(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = g_2(x_k, y_k) \end{cases} \quad (3.16)$$

Në qoftë se tani shënojmë

$$z = (x,y), f(z) = (f_1(z), f_2(z)) \text{ dhe } g(z) = (g_1(z), g_2(z)),$$

atëherë relacionet (3.16) shkruhen në trajtën

$$z_{k+1} = g(z_k) \quad (3.17)$$

Vargu i vektorëve z_k konvergjon tek zgjidhja e sistemit (3.15) kur plotësohen kushtet e teoremës:

Teoremë 3.3 Le të jetë zona $D \subset R^2$ e mbyllur. Në qoftë se
a) $\forall z \in D$ kemi $G(z) \in D$

b) g_1 e g_2 kanë derivate të pjesshme të vazhdueshme në D dhe

$$\max_{z\in D}\sqrt{\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial g_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g_2}{\partial y}\right)^2}<1$$

atëherë

vargu i përcaktuar nga (3.17) konvergjon tek zgjidhja e sistemit (3.15) për $\forall z_0 \in D$.

3.3.2 Metoda e Njuton-Rafsonit

Le të jetë (x_k, y_k) një përafrim i zgjidhjes së sistemit (3.15), kërkojmë të gjejmë një përafrim më të mirë, që po e shënojmë (x_{k+1}, y_{k+1}), ku $x_{k+1} = x_k + \delta_1$ dhe $y_{k+1} = y_k + \delta_2$. Atëherë duke u nisur nga (x_k, y_k) të përcaktojmë δ_1 dhe δ_2 në mënyrë të tillë që

$$\begin{cases} f_1(x_k+\delta_1, y_k+\delta_2)=0 \\ f_2(x_k+\delta_1, y_k+\delta_2)=0 \end{cases}$$

Duke zbatuar formulën e Teilorit për funksionin me dy ndryshore zbërthejmë funksionet e mësipërme në pikën (x_k, y_k) dhe shpërfillim kufizat e rendit të dytë. Si rezultat

$$\begin{cases} f_1(x_k,y_k)+\delta_1\dfrac{\partial f_1(x_k,y_k)}{\partial x}+\delta_2\dfrac{\partial f_1(x_k,y_k)}{\partial y})=0 \\ f_2(x_k,y_k)+\delta_1\dfrac{\partial f_2(x_k,y_k)}{\partial x}+\delta_2\dfrac{\partial f_2(x_k,y_k)}{\partial y})=0 \end{cases} \tag{3.18}$$

Ky është sistem ekuacionesh lineare në lidhje me të panjohurat δ_1 dhe δ_2. Shënojmë tani $J(x_k, y_k)$ matricën

$$J(x_k, y_k)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_k,y_k)}$$

e cila quhet ***Jakobian i funksionit*** f dhe luan rolin e derivatit të funksionit me dy ndryshore.

Atëherë zgjidhja e sistemit (3.18) do ishte

$$\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{bmatrix} = -J^{-1}(x_k, y_k)\begin{bmatrix} f_1(x_k, y_k)\\ f_2(x_k, y_k)\end{bmatrix}$$

Fitohet kështu formula iterative matricore

$$z_{k+1} = z_k - J^{-1}(z_k)\, f(z_k)$$

që është ***metoda e Njuton- Rafsonit*** ose ***metoda e Njutonit*** për rastin e sistemeve jolineare.

Vërejtje 3.5 Shpejtësia e konvergjencës e metodës së përafrimeve të njëpasnjëshme është lineare ndërsa ajo e metodës së Njuton-Rafsonit është kuadratike.

3.4 Ushtrime

1. Të vërtetohet që:

a) Shuma e matricave trekëndëshe të sipërme (poshtme) është matricë trekëndëshe e sipërme (poshtme)

b) Prodhimi i matricave trekëndëshe të sipërme (poshtme) është matricë trekëndëshe e sipërme (poshtme)

2. Të tregohet që e anasjella e një matrice trekëndëshe të sipërme (poshtme) është matricë trekëndëshe e sipërme (poshtme) dhe më tej, në qoftë se një matricë e tillë L ka njësha në diagonalen kryesore edhe L^{-1} ka njësha.

3. Jepet A dhe b

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$$

a) Të zgjidhet sistemi $Ax = b$ me metodën e Gausit

b) Të llogaritet përcaktori i matricës A.

4. Të ndërtohet nje algoritëm për zgjidhjen e një sistemi me matricë trekëndëshe të poshtme.

5. Duke përdorur metodën e Gausit të zgjidhet sistemi

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2.7 \\ 0.4x_1 + 0.5x_2 + 4x_3 - 8.5x_4 &= 21.9 \\ 2.1x_1 + 1.5x_2 + 19.8x_3 + 1.3x_4 &= 28.76 \\ 0.9x_1 + 2.5x_2 + 1.3x_3 + 32.1x_4 &= 49.72 \end{aligned}$$

6. Të ndërtohet algoritmi i metodës së Gausit në rastin e zgjedhjes së pjesshme.

7. Të gjendet numri i veprimeve në metodën e Gausit, për një sistem me n përmasa.

8. Të zgjidhet sistemi $Ax = b$ i ushtrimit 3 me metodën e Gaus-Zhordanit.

9. Gjeni faktorizimin LU të matricave:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

10. Të zgjidhet sistemi $Ax = b$ i ushtrimit 3 me anë të faktorizimit LU.

11. Gjeni matricën e anasjellë A^{-1} të matricës A, të ushtrimit 3.

12. Gjeni të anasjellën e matricës

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Me rregullën e Kramerit

b) Me metodën e Gaus-Zhordanit

c) Krahasoni numrin e veprimeve dhe nxirrni ndonjë përfundim.

13. Dihet që kur A është simetrike dhe pozitivisht e përcaktuar, ajo mund të shkruhet:

$$A = LL^{\mathrm{T}}$$

ku L është matricë trekëndëshe e poshtme.

a) Ndërtoni një algoritëm që lejon njehsimin e elementeve të L në funksion të elementeve të A-së.

b) Duke përdorur algoritmin e ndërtuar (i cili njihet me emrin metoda e Çoleskit), zgjidhni sistemin $Ax=b$ ku A është matrica e Ushtrimit 12 dhe $b=(2,-1,1)$

14. Gjeni normat $\|x\|_p$, $p=1,2,\infty$ për vektorët:

a) $x=(3, -4, 0, 3/2)^T$ b) $x=(2, 1, -3, 4)^T$

c) $x=(\sin k, \cos k, 2^k)^T$, për një $k>0$ të fiksuar.

15. Gjeni normat $\|A\|_p$, $p=1,2,\infty$ për matricat :

a) $\begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

16. Për një matricë me n x n përmasa jepet numri

$$\|A\|_F = (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{\ 2})^{1/2}$$

Tregoni që $\|A\|_F$ është normë. Kjo quhet ***norma e Frobenius***-it.

17. Gjeni normën e Frobeniusit për matricat e ushtrimit 15.

18. Tregoni që norma e Frobeniusit nuk plotëson kushtin (3.11) të normave natyrale por mosbarazimin:

$$\|Ax\|_2 \le \|A\|_F \, \|x\|_2$$

19. Jepet sistemi

$$\begin{aligned} 6x_1 - x_2 - x_3 &= 11.33 \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 &= 32 \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 &= 42 \end{aligned}$$

a) Duke punuar me një aritmetikë tri-shifrore, të zgjidhet sistemi me metodën e Gausit.

b) Duke përdorur zgjidhjen e pikës a) si përafrim fillestar, përmirësoni zgjidhjen me saktësi deri në 10^{-4}.

20. Të zgjidhet sistemi i ushtrimit 3 me metodën iterative të Jakobit duke kryer vetëm 4 iteracione.

21. Hartoni një program për metodën e Jakobit dhe zgjidhni sistemet $Ax = b$ me saktësi ε :

a) $A = \begin{bmatrix} 4.00 & 0.24 & -0.08 & 0.16 \\ 0.09 & 3.00 & -0.15 & -0.12 \\ 0.04 & -0.08 & 4.00 & 0.06 \\ 0.02 & 0.06 & 0.04 & -10.00 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varepsilon = 0.5\ 10^{-3}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 8.714 & 2.180 & 5.684 \\ -1.351 & 10.724 & 5.224 \\ 2.489 & -0.459 & 6.799 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 49.91 \\ 50.17 \\ 32.68 \end{bmatrix}$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

22. Të zgjidhet sistemi i ushtrimit 3 me metodën iterative të Gaus-Zajdelit duke kryer vetëm 4 iteracione.

23. Hartoni një program në një nga gjuhët e programimit për algoritmin e Gaus-Zajdelit dhe zgjidhni sistemet e ushtrimit 21.

24. Jepet sistemi

$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_4 - x_5 &= 2 \\ -x_1 + 4x_2 - x_5 &= 3 \\ 2x_3 - x_4 &= -1 \\ -x_1 + 4x_4 - 2x_5 &= 0 \\ -x_4 + 2x_5 &= -1 \end{aligned}$$

Duke u nisur nga $x^{(0)} = (1,1,1,1,1,)^T$ të zgjidhet ai me saktësi 10^{-7} duke përdorur :

a) metodën e Jakobit.

b) metodën e Gaus-Zajdelit.

c) të krahasohen rezultatet.

25. Jepet sistemi

$$\begin{cases} f_1(x,y) = y - x^2 = 0 \\ f_2(x,y) = x - xy + 1 = 0 \end{cases}$$

a)Të gjendet gjeometrikisht një përafrim fillestar.

b) Të zgjidhet sistemi duke përdorur metodën e Njutonit.

26. Të ndërtohet algoritmi i metodës së Njutonit.

27. Me metodën e Njutonit, gjeni zgjidhjen e përafërt pozitive me 4 shifra të sakta të sistemit :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\ 3x^2 - 4y + z^2 = 0 \end{cases}$$

duke u nisur nga $(x_0, y_0, z_0)^T = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$