capítulo 8

Progressões

1 Introdução

Examine estas duas situações:

1ª) Um corpo caindo livremente (desprezando-se a resistência do ar) tem, ao final do primeiro segundo, velocidade de 9,8 m/s; velocidade de 19,6 m/s no final do segundo seguinte; de 29,4 m/s no final do terceiro segundo; e assim por diante. Continuando assim, qual será sua velocidade no final do décimo segundo?

2ª) Ao lançarmos uma moeda, teremos dois resultados possíveis: cara ou coroa.

Se lançarmos duas moedas diferentes, por exemplo, uma de R$ 0,10 e outra de R$ 0,50, teremos quatro possibilidades: (cara, cara), (cara, coroa), (coroa, coroa) ou (coroa, cara).

Se lançarmos três moedas diferentes, serão oito os resultados possíveis, e assim por diante.

PARA REFLETIR Explicite os oito resultados no caso de três moedas.

A relação entre o número de moedas e o número de resultados é mostrada na tabela:

Número de moedas	Número de resultados
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
⋮	⋮

Vemos que $2 = 2^1$; $4 = 2^2$; $8 = 2^3$; $16 = 2^4$; $32 = 2^5$; etc.

Então, se **n** é o número de moedas, o número de resultados é dado por 2^n.

Neste caso, temos uma seqüência: (2, 4, 8, 16, 32, ...).

Qual será o total de resultados se lançarmos 8 moedas?

Neste capítulo aprofundaremos o estudo de seqüências e, em particular, as seqüências chamadas de *progressão aritmética* e de *progressão geométrica*, já mencionadas no capítulo 2, de funções. Com esses conceitos poderemos resolver situações como as exemplificadas e outras envolvendo seqüências.

2 Seqüências

Em muitas situações da vida diária aparece a idéia de *seqüência* ou *sucessão*. Assim, por exemplo, temos:

- a seqüência dos dias da semana (domingo, segunda, ..., sábado)
- a seqüência dos meses do ano (janeiro, fevereiro, ..., dezembro)
- a seqüência dos números naturais (0, 1, 2, 3, 4, ...)
- a seqüência dos anos, a partir de 1990, nos quais a Copa do Mundo de Futebol é realizada (1990, 1994, 1998, 2002, 2006, 2010, ...)

Em todas essas situações observamos uma certa ordem nos elementos da seqüência. Esses elementos são também chamados *termos* da seqüência ou sucessão. Na seqüência dos meses do ano, temos:

1º termo: janeiro, 2º termo: fevereiro, ..., 12º termo: dezembro.

Se representarmos o 1º termo por a_1 (lê-se **a** índice um), o 2º termo por a_2, o 3º por a_3, e assim por diante, até o termo de ordem **n** ou enésimo termo (a_n), essa seqüência poderá ser representada por:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

Nesse exemplo, temos:

a_1 = janeiro $\quad$ a_{10} = outubro
a_7 = julho $\quad$ a_{12} = dezembro

Definição

Uma seqüência finita de **n** termos é uma função cujo domínio é o conjunto numérico $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Os números do contradomínio são indicados por $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Uma seqüência infinita é uma função f cujo domínio é $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, e o contradomínio é indicado por $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$. Assim, $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, ..., $f(n) = a_n$, ...

Exemplos:

1º) A seqüência dos números ímpares positivos é infinita: (1, 3, 5, 7, 9, ...) na qual $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 9$, etc.

2º) A seqüência dos quatro primeiros múltiplos de 5 é finita: (0, 5, 10, 15). Nesse caso, $a_1 = 0$, $a_2 = 5$, $a_3 = 10$ e $a_4 = 15$.

3º) 17, 12, 7, 2, −3, −8 é uma seqüência finita de 6 termos.

Determinação de uma seqüência

Algumas seqüências são dadas por regras ou leis matemáticas chamadas *leis de formação*, que possibilitam explicitar todos os seus termos.

A seqüência $a_n = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, é dada por:

- para $n = 1 \Rightarrow a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$;
- para $n = 2 \Rightarrow a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$;
- para $n = 3 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$;
- para $n = 4 \Rightarrow a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$; etc.

Portanto, a seqüência é (1, 3, 5, 7, ...), ou seja, a dos números naturais ímpares.

Exemplo:

Vamos escrever a seqüência definida por

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 2, \text{ para } n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$$

- $a_1 = 3$
- para $n = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 + 2 = 3 + 2 = 5$
- para $n = 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + 2 = 5 + 2 = 7$
- para $n = 4 \Rightarrow a_4 = a_3 + 2 = 7 + 2 = 9$, etc.

Portanto, a seqüência é (3, 5, 7, 9, ...), que é a seqüência dos números naturais ímpares a partir do 3.

PARA REFLETIR Esta maneira de definir uma seqüência é chamada de recorrência. Por quê?

Exercícios propostos

1. Escreva o termo geral das seqüências:

   a) (1, 2, 3, 4, 5, 6, ...)

   b) (2, 3, 4, 5, 6, ...)

   c) (3, 6, 9, 12, 15, 18, ...)

   d) (2, 5, 8, 11, 14, 17)

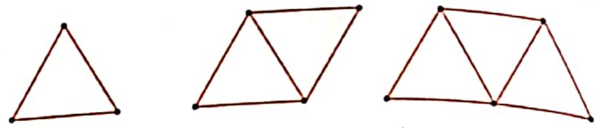
ATENÇÃO! NÃO ESCREVA NO LIVRO.

2. Determine os cinco primeiros elementos das seqüências (a_n), $n \in \mathbb{N}^*$, definidas pelas leis de recorrência a seguir:

   a) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = (-1)^n a_{n-1}, \text{ para } n \geq 2 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = (a_{n-1})^2 + 1, \text{ para } n \geq 2 \end{cases}$

3. Dada uma seqüência em que $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + 5$, com $n \geq 2$, quantos dos dez primeiros números são números primos?

4. 

Observe as figuras acima, formadas com palitos, e complete a tabela com o número de palitos necessários para formar os triângulos:

Número de triângulos	Número de palitos
1	3
2	5
3	?
4	?
5	?
⋮	⋮
x	?

Observando que o número de palitos necessários é dado em função do número de triângulos que se quer formar, responda:

a) Quantos palitos são necessários para formar 20 triângulos?

b) Quantos palitos são necessários para formar 77 triângulos?

c) Quantos triângulos se podem formar com 41 palitos?

5. Chamamos seqüência de Fibonacci à seqüência definida por:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ para } n \geq 3 \end{cases}$$

Calcule os dez primeiros termos dessa seqüência.

Observação: Veja a leitura no final do capítulo.

3 Progressão aritmética (PA)

Introdução

Encontramos freqüentemente grandezas que sofrem *variações iguais em intervalos de tempo iguais*. Veja, por exemplo, o seguinte problema:

Uma empresa produziu, no ano de 2005, 100000 unidades de certo produto. Quantas unidades produzirá, anualmente, de 2005 a 2010, se o aumento anual de produção for estabelecido em 20000 unidades?

Esquematizamos o problema da seguinte forma:

- produção em 2005: 100000
- produção em 2006 = (produção em 2005) + 20000 = 100000 + 20000 = 120000
- produção em 2007 = (produção em 2006) + 20000 = 120000 + 20000 = 140000
- produção em 2008 = (produção em 2007) + 20000 = 140000 + 20000 = 160000
- produção em 2009 = (produção em 2008) + 20000 = 160000 + 20000 = 180000

- produção em 2010 = (produção em 2009) + 20000 = 180000 + 20000 = 200000

Nessas condições, a produção anual nesse período será representada pela seqüência (100000, 120000, 140000, 160000, 180000, 200000).

Notamos que, nessa seqüência, cada termo, a partir do segundo, é obtido do anterior somando-se a este um número fixo (20000, nesse caso). Ou seja, a produção sofreu aumentos iguais de 20000 unidades, em intervalos de tempo iguais de 1 ano.

Seqüências desse tipo são chamadas de *progressões aritméticas*. Observe que a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante (20000 unidades nessa seqüência).

A seqüência (100 000, 120 000, 140 000, 160 000, 180 000, 200 000) é um exemplo de progressão aritmética. O aumento de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo e é chamado *razão* da progressão. A razão dessa progressão é 20 000. Dizemos que os termos dessa seqüência estão em *progressão aritmética*.

Definição

Progressão aritmética (PA) é toda seqüência de números na qual a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada *razão* da progressão e é representada pela letra **r**.

Exemplos:

1º) A seqüência (2, 7, 12, 17, ...) é uma progressão aritmética infinita de razão 5, em que $a_1 = 2$ e $r = 5$.
Essa é uma PA *crescente*, pois $r > 0$.

2º) A seqüência (20, 10, 0, −10, −20) é uma PA de cinco termos em que o 1º termo é $a_1 = 20$ e a razão é $r = -10$.
Essa é uma PA *decrescente*, pois $r < 0$.

3º) A seqüência (4, 4, 4) é uma PA de três termos, em que o 1º termo é $a_1 = 4$ e a razão é $r = 0$.
Quando $r = 0$, a PA é chamada *PA constante ou estacionária*.

Observações:

1) Notamos então que, de modo geral, uma seqüência $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots)$ é uma PA quando:

$$a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_2 - a_1 = r$$
$$a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 - a_2 = r$$
$$a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 - a_3 = r$$
$$\dots$$
$$a_n = a_{n-1} + r \Rightarrow a_n - a_{n-1} = r$$

Comparando, temos:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1} = \dots = r$$

2) Da definição decorre que, se a_r, a_s e a_p são termos consecutivos de uma PA, então:

$$a_s - a_r = a_p - a_s \Rightarrow 2a_s = a_r + a_p \Rightarrow a_s = \frac{a_r + a_p}{2}$$

Ou seja, dados três termos consecutivos de uma progressão aritmética, o termo do meio é a média aritmética dos outros dois.

3) A seqüência (1, −1, 1, −1, 1, −1, ...) não é uma progressão aritmética, pois as diferenças entre termos sucessivos são alternadamente −2 e 2.

Fórmula do termo geral de uma PA

Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ de razão r, partindo do 1º termo, para avançar um termo basta somar **r** ao 1º termo ($a_2 = a_1 + r$); para avançar dois termos basta somar 2r ao 1º termo ($a_3 = a_1 + 2r$); para avançar três termos basta somar 3r ao 1º termo ($a_4 = a_1 + 3r$); e assim por diante. Desse modo encontramos o termo de ordem **n**, denominado *termo geral* da PA, que é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

(ao passar de a_1 para a_n, avançamos (n − 1) termos, ou seja, basta somar (n − 1) vezes a razão ao 1º termo)

Nessa fórmula temos:

- a_n = termo geral
- a_1 = 1º termo
- n = número de termos (até a_n)
- r = razão da PA

Observações:

1) Note que $a_9 = a_4 + 5r$, pois, ao passar de a_4 para a_9, avançamos cinco termos; $a_3 = a_{15} - 12r$, pois retrocedemos 12 termos ao passar de a_{15} para a_3; e assim por diante.

2) Observe a PA finita (a_1, a_2, a_3, a_4). Nela, os termos a_2 e a_3 são *eqüidistantes* dos extremos a_1 e a_4. Veja:

$$a_2 + a_3 = a_1 + r + a_3 = a_1 + a_3 + r = a_1 + a_4$$

Isso é válido de modo geral e dizemos que, numa PA finita, a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

3) Muitas vezes é conveniente notar que o 1º termo é a_0 e não a_1, ficando o termo geral da PA dado por $a_n = a_0 + nr$.
Observe isso no seguinte problema:
Se o preço de um carro novo é R$ 20000,00 e esse valor diminui R$ 1200,00 a cada ano de uso, qual será seu preço com 5 anos de uso?
Temos uma PA com $a_0 = 20000$, razão $r = -1200$ e queremos determinar a_5:

$$a_5 = a_0 + 5r = 20000 + 5(-1200) =$$
$$= 20000 - 6000 = 14000$$

Assim, após 5 anos o carro custará R$ 14000,00.

Exemplos:

1º) Vamos encontrar o termo geral da PA (5, 9, ...).

Temos $a_1 = 5$ e $r = 9 - 5 = 4$

$a_n = a_1 + (n - 1)r = 5 + (n - 1)4 = 5 + 4n - 4 =$
$= 4n + 1$

Logo, a fórmula do termo geral é $a_n = 4n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2º) Vamos determinar o décimo termo da PA (2, 8, 14, ...).

$a_1 = 2$; $r = 6$; $n = 10$

$a_{10} = a_1 + 9r = 2 + 9 \cdot 6 = 56$

Logo, $a_{10} = 56$.

3º) Em uma progressão aritmética, o décimo termo é -3 e o décimo segundo é 11. Quanto vale o sétimo termo dessa progressão?

$a_{12} = a_{10} + 2r \Rightarrow 11 = -3 + 2r \Rightarrow r = 7$

$a_7 = a_{10} - 3r \Rightarrow a_7 = -3 - 3 \cdot 7 = -24$

Logo, o sétimo termo vale -24.

4º) Primeira situação-problema da introdução do capítulo: "Um corpo caindo livremente (desprezando-se a resistência do ar) tem, ao final do primeiro segundo, velocidade de 9,8 m/s; velocidade de 19,6 m/s no final do segundo seguinte; de 29,4 m/s no final do terceiro segundo; e assim por diante. Continuando assim, qual será sua velocidade no final do décimo segundo?"

Devemos estabelecer a PA (9,8; 19,6; 29,4; ...), na qual $a_1 = 9{,}8$ e $r = 9{,}8$, e determinar o termo a_{10}:

$a_n = a_1(n - 1)r \Rightarrow a_{10} = 9{,}8 + 9(9{,}8) \Rightarrow a_{10} = 98$ m/s

Logo, no final do décimo segundo sua velocidade será de 98 m/s.

5º) No primeiro semestre de um dado ano, a produção mensal de uma montadora está em PA crescente. Em janeiro, a produção foi de 18 000 carros e, em junho, foi de 78 000 unidades. Qual foi a produção dessa montadora nos meses de fevereiro, março, abril e maio?

Nessas condições, o problema consiste em formar uma PA na qual:

$$\begin{cases} a_1 = \text{produção de janeiro} = 18\,000 \\ a_n = \text{produção de junho} = 78\,000 \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow (18\,000, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, 78\,000) \\ n = 6 \end{cases}$$

Devemos inicialmente calcular o valor da razão r:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 78\,000 = 18\,000 + 5r \Rightarrow$
$\Rightarrow 5r = 60\,000 \Rightarrow r = 12\,000$

Então, teremos:

$$\begin{cases} a_2 = \text{produção de fevereiro} = 30\,000 \\ a_3 = \text{produção de março} = 42\,000 \\ a_4 = \text{produção de abril} = 54\,000 \\ a_5 = \text{produção de maio} = 66\,000 \end{cases}$$

(18 000, 30 000, 42 000, 54 000, 66 000, 78 000)

Na realidade, o que fizemos foi *inserir* ou *interpolar quatro meios aritméticos* entre 18 000 e 78 000.

6º) Vamos determinar quantos são os múltiplos de 5 compreendidos entre 101 e 999.

- O primeiro número múltiplo de 5 maior do que 101 é 105.
- O último número múltiplo de 5 menor do que 999 é 995.

Então, os múltiplos de 5 compreendidos entre 101 e 999 constituem a PA (105, 110, ..., 995). Nela temos $a_1 = 105$, $r = 5$ e $a_n = 995$.

Devemos calcular o número **n** de termos da PA:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 995 = 105 + (n - 1)5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 995 = 105 + 5n - 5 \Rightarrow n = 179$

Portanto, existem 179 múltiplos de 5 compreendidos entre 101 e 999.

7º) Numa PA crescente, $a_2 + a_6 = 20$ e $a_4 + a_9 = 35$. Vamos determinar o primeiro termo a_1, a razão r dessa PA e escrevê-la.

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 + r \\ a_6 = a_1 + 5r \end{array}\right\} \Rightarrow a_2 + a_6 = (a_1 + r) + (a_1 + 5r) \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_2 + a_6 = 2a_1 + 6r$

$$\left.\begin{array}{l} a_4 = a_1 + 3r \\ a_9 = a_1 + 8r \end{array}\right\} \Rightarrow a_4 + a_9 = (a_1 + 3r) + (a_1 + 8r) \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_4 + a_9 = 2a_1 + 11r$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 2a_1 + 6r = 20 \\ 2a_1 + 11r = 35 \end{cases}$, obtemos $r = 3$ e $a_1 = 1$.

Logo, a PA é (1, 4, 7, 10, 13, ...).

8º) Três números estão em PA; o produto deles é 66 e a soma é 18. Vamos calcular os três números.

Podemos sempre representar três números em PA por $x - r$, x, $x + r$, em que **r** é a razão.

Assim, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} (x - r)x(x + r) = 66 \\ (x - r) + x + (x + r) = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x^2 - r^2) = 66 \\ 3x = 18 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$3x = 18 \Rightarrow x = 6$

$6(6^2 - r^2) = 66 \Rightarrow 36 - r^2 = \dfrac{66}{6} \Rightarrow 36 - r^2 = 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = \pm 5$

Então, para $x = 6$ e $r = 5$, temos:

- $x - r = 6 - 5 = 1$
- $x + r = 6 + 5 = 11$

Para $x = 6$ e $r = -5$, temos:

- $x - r = 6 - (-5) = 11$
- $x + r = 6 - 5 = 1$

Verificação: $1 \cdot 6 \cdot 11 = 66$ e $1 + 6 + 11 = 18$

Portanto, os números procurados são 1, 6 e 11, que estabelecem duas PA: (1, 6, 11) e (11, 6, 1).

PARA REFLETIR Quando temos $a_n = a_1 \cdot n$ em uma PA?

Exercícios propostos

6. Escreva a PA de:
   a) cinco termos, em que o 1º termo é $a_1 = 7$ e a razão é $r = 4$;
   b) quatro termos, em que o 1º termo é $a_1 = -6$ e a razão é $r = 8$.

ATENÇÃO!
NÃO ESCREVA NO LIVRO.

7. Determine:
   a) o 4º termo de uma PA em que o 1º termo é $a_1 = 1$ e a razão é $r = \frac{1}{n}$, $n \neq 0$;
   b) o 7º termo de uma PA na qual $a_4 = 25$ e $r = -5$.

8. Qual é a fórmula do termo geral da seqüência dos números pares positivos?

9. Qual é o 50º número ímpar positivo?

10. Calcule o 1º termo da PA:
    a) de razão $r = 3$ sabendo que $a_7 = 21$;
    b) em que $a_{12} = -29$ e $r = -4$.

11. Numa PA na qual o 20º termo é 157 e o 1º termo é 5, calcule a razão.

12. Numa PA, o 8º termo é 52 e o 10º termo é 66. Calcule o 9º termo e a razão dessa PA.

13. Quantos múltiplos de 11 existem entre 100 e 1 000?

14. Quantos números inteiros existem de 100 a 500 que não são divisíveis por 7?

15. Insira sete meios aritméticos entre 20 e 68.

16. Determine quatro números em progressão aritmética crescente sabendo que sua soma é 6 e a soma de seus quadrados é 54.

17. As medidas dos lados de um triângulo retângulo formam uma PA de razão 5. Determine as medidas dos lados desse triângulo. (Sugestão: utilize o teorema de Pitágoras para esquematizar o problema.)

18. A população atual de uma certa cidade é de 20 000 habitantes. Essa população aumenta anualmente em 100 habitantes. Qual será a população dessa cidade daqui a 10 anos?

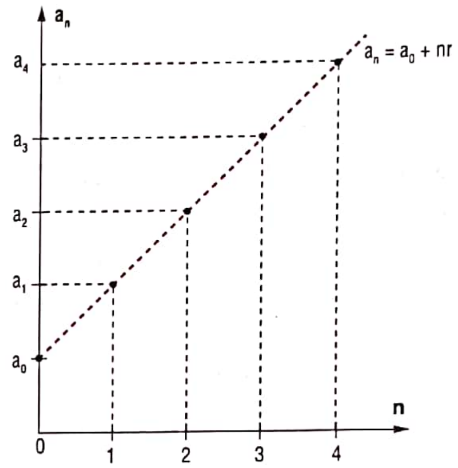
19. O preço de um carro novo é de R$ 25 000,00 e diminui R$ 1 500,00 a cada ano de uso. Qual será o seu preço após 5 anos de uso?

Desafio em dupla

Determine três números que estão em PA crescente tal que, aumentados de 1, 2 e 9 unidades, respectivamente, sejam proporcionais aos números 5, 10 e 25.

Interpretação geométrica de uma progressão aritmética

Já vimos que o termo geral de uma progressão aritmética é dado por $a_n = a_1 + (n - 1)r$, ou por $a_n = a_0 + nr$ ao começarmos a enumeração dos termos por a_0. Assim, podemos pensar em uma progressão aritmética como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n dado por $a_n = a_0 + nr$. Essa função é a restrição aos números naturais da função afim $a(x) = a_0 + rx$, ou seja, ela é definida por uma fórmula do tipo da função afim, mas com domínio $\mathbb{N}$. O gráfico dessa função é formado por uma seqüência de pontos colineares no plano: $(0, a_0)$, $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, $(3, a_3)$, ..., (n, a_n), ...



Assim, podemos caracterizar uma progressão aritmética observando que uma seqüência (a_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, os pontos do plano que têm coordenadas $(0, a_0)$, $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, $(3, a_3)$, etc. estão em linha reta.

PARA REFLETIR Bastam dois pontos para determinar uma reta e bastam dois termos de uma PA para determinar a PA toda.

Exercício proposto

20. Trace o gráfico de cada uma das progressões aritméticas sabendo que:
    a) $a_0 = 1$ e $r = 1$;
    b) $a_0 = -2$ e $r = 2$.

Soma dos termos de uma PA finita

Introdução

Na tabela abaixo está demonstrada a produção anual de uma empresa num certo período:

Ano	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Produção (unidades)	10 000	12 000	14 000	16 000	18 000	20 000	22 000	24 000

Quantas unidades a empresa produziu de 1997 a 2004?

Pela tabela, no período de 1997 a 2004 a empresa produziu:

$10000 + 12000 + 14000 + 16000 + 18000 +$
$+ 20000 + 22000 + 24000 = 136000$ unidades

Observamos que:

- as parcelas formam uma PA finita (razão $r = 2000$): $(10000, 12000, 14000, 16000, 18000, 20000, 22000, 24000)$
- o número 136000 representa a soma dos termos dessa PA.

Exercícios propostos

21. Uma PA tem $a_1 = -9$ e $r = 7$. Determine seus seis primeiros termos e calcule a soma deles.

22. Uma PA tem $a_1 = 1$ e $r = 1$. Determine a soma dos seus primeiros 20 termos.

Fórmula da soma dos termos de uma PA finita

Karl Friedrich Gauss foi um matemático que viveu de 1777 a 1855. Certo dia, quando Gauss era um estudante de aproximadamente 7 ou 8 anos de idade, seu professor, querendo manter o silêncio em sala de aula por um bom tempo, pediu que os alunos somassem todos os números de 1 a 100, isto é, $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100$. Para surpresa do professor, depois de alguns minutos Gauss disse que a soma era 5 050. Veja seu raciocínio:

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+98+99+100}_{\substack{50 \text{ parcelas de } 101 \\ 50 \cdot 101 = 5050}} \quad (1+100=101,\ 2+99=101, \text{etc.})$$

Ou seja, $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100 = 5\,050$.

Fórmula

O procedimento usado por Gauss no caso da PA $(1, 2, 3, 4, ..., 99, 100)$ vale de modo geral.

Consideremos a PA finita de razão r $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ cuja soma dos seus **n** termos pode ser escrita por:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

(pares: $a_1 + a_n$, $a_1 + a_n$, $a_1 + a_n$)

Portanto,

$$S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)}_{\frac{n}{2} \text{ parcelas iguais a } (a_1 + a_n)}.$$

Então:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$ → fórmula que nos permite calcular a soma dos n primeiros termos de uma PA

em que:

- a_1 é o primeiro termo;
- a_n é o enésimo termo;
- **n** é o número de termos;
- S_n é a soma dos **n** termos.

PARA REFLETIR

- A fórmula obtida é equivalente a esta: $S_n = \frac{n(a_p + a_q)}{2}$, com $p + q = n + 1$. Por quê?
- S_n é uma função quadrática de **n**. Basta substituirmos a_n por $a_1 + (n - 1)r$ e chegaremos a: $S_n = \frac{r}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right)n = an^2 + bn$, em que $a = \frac{r}{2}$ e $b = a_1 - \frac{r}{2}$. Verifique.

Exemplos:

1º) Vamos retomar o problema sobre a produção de uma empresa, citado na página 139, e resolvê-lo agora aplicando a fórmula da soma dos termos de uma PA finita.
Sabemos que a produção anual nesse período é uma PA na qual $a_1 = 10000$, $r = 2000$, $n = 8$ e $a_n = a_8 = 24000$.
Aplicando a fórmula:
$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{8(10\,000 + 24\,000)}{2} = $$
$$= 136\,000$$
Logo, no período de 1997 a 2004 a empresa produziu 136000 unidades.

2º) Vamos calcular a soma dos 50 primeiros termos da PA (2, 6, ...).
Nessa PA infinita, os 50 primeiros termos formam uma PA finita, na qual $a_1 = 2$, $r = 4$ e $n = 50$.
Devemos calcular a_n (ou seja, a_{50}):
$$a_n = a_{50} = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = 2 + 49(4) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_n = 2 + 196 \Rightarrow a_n = 198$$
Aplicando a fórmula, temos:
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_{50} = \frac{(2 + 198)50}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_{50} = 5000$$
A soma procurada é igual a 5000.

3º) Vamos calcular a soma dos primeiros **n** números ímpares $(1, 3, 5, 7, ..., 2n - 1, ...)$, $n \in \mathbb{N}^*$:
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$
Portanto, a soma dos **n** primeiros números ímpares é igual a n^2.

4º) A soma dos dez termos de uma PA é 200. Se o 1º termo dessa PA é 2, qual a razão r da PA?
Nessa PA sabemos que $S_{10} = 200$, $a_1 = 2$ e $n = 10$.
Devemos calcular a_{10} aplicando a fórmula da soma:
$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10})10}{2} \Rightarrow 200 = \frac{(2 + a_{10})10}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 20 + 10a_{10} = 400 \Rightarrow 10a_{10} = 380 \Rightarrow a_{10} = 38$$
Vamos calcular **r**:
$$a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow 38 = 2 + 9r \Rightarrow 9r = 36 \Rightarrow r = 4$$
Então, a razão procurada é 4.

Exercícios propostos

23. Calcule a soma:
a) dos trinta primeiros termos da PA (4, 10, ...);
b) dos vinte primeiros termos de uma PA em que o 1º termo é $a_1 = 17$ e $r = 4$;
c) dos 200 primeiros números pares positivos;
d) dos 50 primeiros múltiplos positivos de 5;
e) de todos os múltiplos de 7 que tenham 3 algarismos;
f) dos **n** primeiros números pares positivos.

24. Numa PA, a soma dos seis primeiros termos é 12. Sabendo que o último termo dessa PA é 7, calcule o primeiro termo, a_1.

25. A soma dos 20 termos de uma PA finita é igual a 710. Se o 1º termo dessa PA é $a_1 = 7$, calcule seu 10º termo.

26. Numa PA, $a_3 + a_6 = 34$ e $a_4 + a_9 = 50$. Calcule a soma dos 20 primeiros termos dessa PA.

27. Sabe-se que, numa PA, $a_1 + a_n = n$. Calcule a soma dos **n** termos dessa PA.

28. A expressão $S_n = n^2 - 3n$, para qualquer **n** inteiro positivo, representa a soma dos **n** primeiros termos de uma PA. Qual é a razão dessa PA?

29. Calcule a razão de uma PA cuja soma dos **n** primeiros termos é expressa por $S_n = n^2 + 4n$, para todo **n** natural.

30. Resolva a equação $2 + 5 + 8 + ... + x = 77$ sabendo que os termos do 1º membro estão em PA.

31. Um ciclista percorre 20 km na primeira hora; 17 km na segunda hora, e assim por diante, em progressão aritmética. Quantos quilômetros percorrerá em 5 horas?

32. Um corpo em queda livre percorre 3 m no primeiro segundo, 12 m no segundo, 21 m no terceiro segundo, e assim por diante. Continuando nessa seqüência, quantos metros terá percorrido após 10 segundos?

33. Uma escada maciça possui 10 degraus. Cada degrau é um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são 50 cm de comprimento, 20 cm de largura e 10 cm de altura. Qual é o volume dessa escada?

34. Um teatro possui 12 poltronas na primeira fileira, 14 na segunda e 16 na terceira; as demais fileiras se compõem na mesma seqüência. Quantas fileiras são necessárias para o teatro ter um total de 620 poltronas?

35. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Num triângulo, as medidas dos ângulos estão em PA e o menor desses ângulos mede 40°. Calcule a medida dos outros dois ângulos.

36. Os ângulos internos de um pentágono convexo estão em progressão aritmética. Determine o termo do meio dessa seqüência.

ATENÇÃO!
NÃO ESCREVA NO LIVRO.

37. *Atividade em dupla*
(Osec-SP) Um jardim tem uma torneira e dez roseiras dispostas em linha reta. A torneira dista 50 m da primeira roseira e cada roseira dista 2 m da seguinte. Um jardineiro, para regar as roseiras, enche um balde na torneira e despeja seu conteúdo na primeira. Volta à torneira e repete a operação para cada roseira seguinte. Após regar a última roseira e voltar à torneira para deixar o balde, ele terá andado:
a) 1 200 m.
b) 1 180 m.
c) 1 130 m.
d) 1 110 m.
e) 1 000 m.

4 Progressão geométrica (PG)

Enquanto a população humana cresce em progressão geométrica, a produção de alimentos cresce em progressão aritmética.
Thomas Malthus

Introdução

A taxa de crescimento relativo de uma grandeza é dada pela razão entre o seu aumento e seu valor inicial. Assim, uma grandeza que passa do valor **a** para o valor **b** tem taxa de crescimento relativo igual a $\frac{b - a}{a}$.

Por exemplo, a taxa de crescimento relativo de uma grandeza que passa do valor 5 para o valor 8 é igual a 60%, pois $\frac{8 - 5}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}60 = 60\%$.

Neste item trataremos de seqüências que variam com taxa de crescimento relativo constante. Examine, por exemplo, a seguinte situação-problema:

Em 2003 uma empresa produziu 200000 unidades de certo produto. Quantas unidades produzirá no período de 2003 a 2008, se o aumento de produção anual for sempre de 10% em relação ao ano anterior?

Esquematizamos o problema da seguinte forma:

- produção em 2003 = 200000
- produção em 2004 = produção em 2003 · 1,10 = = 200 000 · 1,10 = 220 000
- produção em 2005 = produção em 2004 · 1,10 = = 220 000 · 1,10 = 242 000
- produção em 2006 = produção em 2005 · 1,10 = = 242 000 · 1,10 = 266 200
- produção em 2007 = produção em 2006 · 1,10 = = 266 200 · 1,10 = 292 820
- produção em 2008 = produção em 2007 · 1,10 = = 292 820 · 1,10 = 322 102

PARA REFLETIR
Se uma grandeza tem taxa de crescimento relativo igual a i, o novo valor é obtido fazendo (1 + i) vezes o valor anterior.
No exemplo, (1 + i) = (1 + 0,10) = 1,10 ou 1,1.

Nessas condições, a produção anual, nesse período, será representada pela seqüência (200 000, 220 000, 242 000, 266 200, 292 820, 322 102).

Notamos que, nessa seqüência, cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o termo anterior por um número fixo (no caso, 1,10), ou seja, a produção anual teve uma taxa de crescimento relativo constante de 10% em relação ao ano anterior.

Seqüências com esse tipo de lei de formação são chamadas *progressões geométricas*. No exemplo dado, o valor 1,10 é chamado de *razão* da progressão geométrica e indicado por **q** (no exemplo, q = 1,10). Dizemos que os termos dessa seqüência estão em progressão geométrica.

Definição

Progressão geométrica (PG) é toda seqüência de números não-nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado *razão* (**q**) da progressão. Ou seja, uma progressão geométrica é uma seqüência na qual a taxa de crescimento relativo de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.

Exemplos:

1º) A seqüência (2, 10, 50, 250) é uma PG de quatro termos, em que o 1º termo é $a_1 = 2$ e a razão é $q = 5$.
Observe que:
- $a_1 = 2$; $a_2 = 10\ (2 \cdot 5)$; $a_3 = 50\ (10 \cdot 5)$; $a_4 = 250\ (50 \cdot 5)$
  $250 : 50 = 5$; $50 : 10 = 5$; $10 : 2 = 5 \to$ quociente constante = 5 (razão)
- a taxa de crescimento relativo de **a** para **b** é dada por $\frac{b-a}{a}$. Nesse exemplo, $i = \frac{10-2}{2} = \frac{8}{2} = 4 = 400\%$. Logo, $q = 1 + i = 1 + 4 = 5$.

PARA REFLETIR Aumentar uma vez é aumentar 100%, aumentar duas vezes é aumentar 200%, e assim por diante.

2º) A seqüência (6, −12, 24, −48, 96) é uma PG de cinco termos, na qual $a_1 = 6$ e $q = -2$, pois:
$a_1 = 6$
$a_2 = -12\ [-12 = 6(-2)$, ou seja, $a_2 = a_1 \cdot (-2)]$
$a_3 = 24\ [24 = (-12)(-2)$, ou seja, $a_3 = a_2 \cdot (-2)]$
$a_4 = -48\ [48 = 24(-2)$, ou seja, $a_4 = a_3 \cdot (-2)]$
$a_5 = 96\ [96 = (-48)(-2)$, ou seja, $a_5 = a_4 \cdot (-2)]$
Ou, de modo equivalente:
- $-12 : 6 = -2$; $24 : (-12) = -2$; $-48 : 24 = -2$; $96 : (-48) = -2$ (quociente constante = −2 (razão))
- taxa de crescimento relativo: $i = \frac{-12-6}{6} = -\frac{18}{6} = -3 = -300\%$

Logo, $q = 1 + i = 1 + (-3) = -2$.

3º) A seqüência (1, 3, 9, 27, 81, ...) é uma PG infinita na qual $a_1 = 1$ e $q = 3$, pois:
$a_1 = 1$
$a_2 = 3\ (3 = 1 \cdot 3$, ou seja, $a_2 = a_1 \cdot 3)$
$a_3 = 9\ (9 = 3 \cdot 3$, ou seja, $a_3 = a_2 \cdot 3)$
$a_4 = 27\ (27 = 9 \cdot 3$, ou seja, $a_4 = a_3 \cdot 3)$, etc.
Taxa de crescimento relativo: $i = \frac{3-1}{1} = 2 = 200\%$. Logo, $q = 1 + 2 = 3$.

Observações:

1) De modo geral, observamos que uma seqüência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ com $a_1 \neq 0$ é uma PG de razão $q \neq 0$ quando:

$$a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow \frac{a_3}{a_2} = q$$

$$a_4 = a_3 \cdot q \Rightarrow \frac{a_4}{a_3} = q$$

...

$$a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Comparando, temos:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q, \text{ com}$$

$q = 1 + i$

em que $i = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}}$ $(a_{n-1} \neq 0)$ é a taxa de crescimento relativo dos termos.

2) Da definição decorre que, se a_r, a_s e a_p estão em PG, então:

$$\frac{a_s}{a_r} = \frac{a_p}{a_s} \Rightarrow a_s^2 = a_r \cdot a_p$$

Ou seja, dados três termos consecutivos de uma progressão geométrica, o termo do meio é a *média geométrica* dos outros dois.

Exemplos:

1º) A seqüência $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots\right)$ é uma PG infinita. Vamos determinar a razão dessa PG e a taxa de crescimento dos seus termos.

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow q = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{3}$$

Logo, $q = \frac{1}{3}$.

Taxa de crescimento: $i = \dfrac{\frac{1}{6} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3} = -0{,}66\ldots \simeq -66{,}66\%$

2º) Nas progressões geométricas abaixo, qual é a taxa de crescimento relativo de cada termo para o seguinte?

a) (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...) b) (100, 70, 49, ...)

a) (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...)
Nesta PG a taxa de crescimento relativo de cada termo para o seguinte é de 100%, o que faz com que cada termo seja igual a 200% do termo anterior $\left(\frac{2-1}{1} = 1 \rightarrow 100\%\right)$.

b) (100, 70, 49, ...)
Cada termo equivale a 70% do termo anterior. A taxa de crescimento relativo de cada termo para o seguinte é de −30%
$\left(\frac{70-100}{100} = \frac{-30}{100} \rightarrow -30\%\right)$.

3º) A população de um país é atualmente igual a P_0 e cresce 3% ao ano. Qual será a população desse país daqui a t anos?
Como a população cresce 3% ao ano, em cada ano a população é de 103% da população do ano anterior. Logo, a cada ano a população é multiplicada por 103% = 1,03.
Após t anos, a população será $P_0 \cdot (1{,}03)^t$.
Neste caso, temos a PG: P_0, $P_0 \cdot (1{,}03)$, $P_0 \cdot (1{,}03)^2$, $P_0 \cdot (1{,}03)^3$, ..., $P_0 \cdot (1{,}03)^t$, ... de razão 1,03.

4º) Um tanque tem capacidade C_0 de água. Abre-se o tampão e essa capacidade decresce 4% por minuto. Qual será a capacidade desse tanque daqui a t minutos?
Como a capacidade diminui 4% por minuto, em cada minuto a capacidade equivalerá a 96% da capacidade do minuto anterior. Assim, a cada minuto que passa, a capacidade é multiplicada por 96% = 0,96. Depois de t minutos, a capacidade do tanque será de $C_0 \cdot 0{,}96^t$.
Neste caso a PG seria C_0, $C_0 \cdot 0{,}96$, $C_0 \cdot (0{,}96)^2$, $C_0 \cdot (0{,}96)^3$, ..., $C_0 \cdot (0{,}96)^t$, ... de razão 0,96.

Exercícios propostos

38. Verifique se cada seqüência dada é uma PG. Em caso positivo, dê o valor da razão **q**:
a) (1, 3, 9, 27, 81)
b) (5, −10, 20, −40, 80, −160)
c) $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$

39. As seguintes seqüências são PG. Determine a razão de cada uma delas:
a) (2, 8, ...)
b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, ...\right)$
c) $\left(\frac{x}{y^2}, \frac{x^2}{y^3}, ...\right)$
d) $(x^{n-2}, x^n, ...)$

40. Escreva uma PG:
a) de cinco termos em que $a_1 = 7$ e $q = 3$;
b) de quatro termos em que $a_1 = -5$ e $q = 2$.

41. Se o primeiro termo de uma PG é $a_1 = 10^{-3}$ e a razão é 10^2, escreva os quatro primeiros termos dessa PG.

42. Determine:
a) o 4º termo da PG em que $a_1 = 4$ e $q = 5$;
b) o 5º termo da PG na qual $a_1 = 10^{-4}$ e $q = 10$.

43. Qual é o 4º termo da PG $(10^{n-3}, 10^n, ...)$?

44. Nas progressões geométricas abaixo, qual é a taxa de crescimento relativo de cada termo para o seguinte?
a) (5, 15, 45, 135, ...)
b) (100; 60; 36; 21,6; ...)

45. Uma população de bactérias é atualmente dada por B_0 e cresce 5% por minuto. Qual será essa população daqui a **n** minutos?

46. A torcida de determinado clube é atualmente dada por P_0, mas está diminuindo 3% ao ano. Se esse fato continuar a ocorrer, qual será a torcida desse clube daqui a t anos?

Classificação das progressões geométricas

Dependendo da razão **q**, uma PG pode ser:

- *Crescente* — A PG é crescente quando $q > 1$ e os termos são positivos ou quando $0 < q < 1$ e os termos são negativos. Por exemplo:
(2, 6, 18, 54, ...), com $q = 3$
(−40, −20, −10, −5, ...), com $q = \frac{1}{2}$
- *Decrescente* — A PG é decrescente quando $0 < q < 1$ e os termos são positivos ou quando $q > 1$ e os termos são negativos. Veja os exemplos:
(200, 100, 50, 25, ...), em que $q = \frac{1}{2}$
(−4, −12, −36, −108, ...), em que $q = 3$
- *Constante* — A PG é constante quando $q = 1$. Veja:
(10, 10, 10, ...), em que $q = 1$
(−5, −5, −5, ...), na qual $q = 1$
- *Alternante* — A PG é alternante quando $q < 0$. Por exemplo:
(4, −8, 16, −32, ...), em que $q = -2$
(−81, 27, −9, 3, ...), na qual $q = -\frac{1}{3}$

PARA REFLETIR Como são os termos da PG alternante?

Exercício proposto

47. Identifique cada PG abaixo como crescente, decrescente, constante ou alternante:
a) (20, 40, 80, ...)
b) (3, −9, 27, −81, ...)
c) (−7, −14, −28, ...)
d) (2, 2, 2, ...)

ATENÇÃO! NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Fórmula do termo geral de uma PG

Em uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão **q**, partindo do 1º termo, para avançar um termo basta multiplicar o 1º termo pela razão **q** $(a_2 = a_1q)$; para avançar dois termos, basta multiplicar o 1º termo pelo quadrado da razão **q** $(a_3 = a_1q^2)$; para avançar três termos basta multiplicar o 1º termo pelo cubo da razão **q** $(a_4 = a_1q^3)$; e assim por diante. Desse modo encontramos o termo de ordem **n**, denominado termo geral da PG, que é dado por:

$a_n = a_1q^{n-1}$ (ao passar de $\mathbf{a_1}$ para $\mathbf{a_n}$, avançamos n − 1 termos)

Nessa fórmula:
- a_n = termo geral
- a_1 = 1º termo
- n = número de termos (até $\mathbf{a_n}$)
- q = razão

Observações:

1) Note que $a_{10} = a_3q^7$, pois ao passar de $\mathbf{a_3}$ para $\mathbf{a_{10}}$ avançamos 7 termos; $a_5 = \dfrac{a_9}{q^4}$, pois ao passar de $\mathbf{a_9}$ para $\mathbf{a_5}$ retrocedemos 4 termos; e assim por diante.

2) Observe a PG finita (a_1, a_2, a_3, a_4). Nela, os termos $\mathbf{a_2}$ e $\mathbf{a_3}$ são *eqüidistantes* dos extremos $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_4}$. Veja que:

$$a_2 \cdot a_3 = a_1q \cdot a_3 = a_1 \cdot a_3q = a_1 \cdot a_4$$

Isso é válido de modo geral e dizemos que, numa PG finita, o produto de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

3) Muitas vezes é conveniente colocar o 1º termo como $\mathbf{a_0}$ e não $\mathbf{a_1}$, ficando o termo geral da PG dado por $a_n = a_0 \cdot q^n$. Por exemplo, se o número de sócios de um clube hoje é 2000 e cresce 5% ao ano, quantos sócios esse clube terá em 3 anos?
Temos uma PG com $a_0 = 2000$ e razão $q = 1 + i =$
$= 1 + 0{,}05 = 1{,}05$.
Após 3 anos, o clube terá
$a_3 = a_0 \cdot q^3 = 2000(1{,}05)^3 \simeq 2\,315$ sócios.

Exemplos:

1º) Segunda situação-problema da introdução do capítulo:
"Ao lançarmos uma moeda, teremos dois resultados possíveis: cara ou coroa. Se lançarmos duas moedas diferentes, por exemplo, uma de R$ 0,10 e outra de R$ 0,50, teremos quatro possibilidades: (cara, cara), (cara, coroa), (coroa, coroa) ou (coroa, cara). Qual será o total de resultados se lançarmos 8 moedas?"
Nesta situação, temos a progressão geométrica (2, 4, 8, 16, 32, ...) e procuramos o 8º termo:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$; $a_1 = 2$; $q = 2$
$a_8 = 2 \cdot 2^{8-1} = 2 \cdot 2^7 = 2^8 = 256$
Portanto, se lançarmos 8 moedas diferentes, teremos 256 resultados possíveis.

2º) Vamos determinar o 10º termo da PG $\left(\frac{1}{2}, 1, 2, 4, ...\right)$.
Temos $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = 2$.
$a_n = a_1q^{n-1} \Rightarrow a_{10} = a_1q^9 \Rightarrow a_{10} = \frac{1}{2} \cdot 2^9 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{10} = 2^8 \Rightarrow a_{10} = 256$
Logo, o 10º termo vale 256.

3º) Em uma progressão geométrica crescente, o 4º termo é 2 e o 9º termo é 64. Qual é o valor do 7º termo dessa progressão?
$a_9 = a_4q^5$ (ao passar do 4º termo para o 9º, avançamos 5 termos)
$64 = 2q^5 \Rightarrow q^5 = 32 \Rightarrow q = 2$
$a_7 = a_4q^3 \Rightarrow a_7 = 2 \cdot 2^3 \Rightarrow a_7 = 16$
Logo, o 7º termo vale 16.

4º) Numa PG, a soma do 3º e do 5º termo é igual a 360 e a soma do 4º e do 6º termo é igual a 1 080. Vamos determinar a razão e o 1º termo dessa PG.

$$\left.\begin{matrix} a_3 = a_1q^2 \\ a_5 = a_1q^4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_3 + a_5 = a_1q^2 + a_1q^4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_1(q^2 + q^4) = 360$ (I)

$$\left.\begin{matrix} a_4 = a_1q^3 \\ a_6 = a_1q^5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_4 + a_6 = a_1q^3 + a_1q^5 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_1q(q^2 + q^4) = 1\,080$ (II)

Dividindo membro a membro (I) e (II), temos:

$$\frac{\cancel{a_1(q^2+q^4)}}{\cancel{a_1}q\cancel{(q^2+q^4)}} = \frac{\overset{1}{\cancel{360}}}{\underset{3}{\cancel{1\,080}}} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{3} \Rightarrow q = 3$$

Vamos calcular $\mathbf{a_1}$:
$a_1(q^2 + q^4) = 360 \Rightarrow a_1(3^2 + 3^4) = 360 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_1 \cdot 90 = 360 \Rightarrow a_1 = 4$
Portanto, na PG dada, $a_1 = 4$ e $q = 3$.

5º) No primeiro semestre de 2005, a produção mensal de uma indústria cresceu em PG. Em janeiro, a produção foi de 1 500 unidades e, em junho, foi de 48 000 unidades. Qual foi a produção dessa indústria nos meses de fevereiro, março, abril e maio?
Nessas condições, o problema consiste em formar uma PG em que:
- a_1 (produção em janeiro) = 1 500
- a_n (produção em junho) = 48 000
- n = 6

Devemos inicialmente calcular o valor da razão **q**:
$a_n = a_1q^{n-1} \Rightarrow 48000 = 1500q^5 \Rightarrow q^5 = 32 \Rightarrow$
$\Rightarrow q = \sqrt[5]{32} \Rightarrow q = 2$
Então, temos:
(1 500, 3 000, 6 000, 12 000, 24 000, 48 000)
Daí podemos dizer que:

- a_2 = produção em fevereiro = 3 000 unidades
- a_3 = produção em março = 6 000 unidades
- a_4 = produção em abril = 12 000 unidades
- a_5 = produção em maio = 24 000 unidades

Na realidade, o que fizemos foi *inserir* ou *interpolar quatro meios geométricos* entre 1 500 e 48 000.

6º) Supondo que, a cada ano que passa, o valor de um carro diminui 30% em relação ao valor do ano anterior e sendo V o valor do carro no primeiro ano, qual será o seu valor no oitavo ano?
Valor no 1º ano = V
Valor no 2º ano = 70% de V = 0,7V (diminuição de 30%)
Valor no 3º ano = 70% de (0,7V) = 0,7(0,7V) = $= (0,7)^2V$
Temos então uma PG na qual $a_1 = V$ e $q = 0,7$.
Devemos calcular $\mathbf{a_8}$:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_8 = a_1 \cdot q^7 \Rightarrow a_8 = V(0,7)^7$
Logo, o valor do carro no oitavo ano será $(0,7)^7V$.

Exercícios propostos

48. Determine a fórmula do termo geral de cada PG:
a) (2, 8, ...) b) (3, 9, ...) c) (2, 1, ...)

49. Calcule:
a) o 5º termo da PG (1, 5, ...);
b) o 10º termo da PG (9, 27, ...).

50. Numa PG infinita, temos $a_1 = 512$ e $q = \dfrac{1}{2}$. Qual é o 6º termo dessa PG?

51. As raízes da equação do 2º grau $x^2 - 5x + 4 = 0$ são o 1º e o 2º termo de uma PG crescente. Determine o 6º termo dessa PG.

52. Considere a PG de termos não-nulos $(2ax, 4ax^2, ...)$. Qual é o 7º termo dessa PG?

53. Calcule o 1º termo da PG $(a_1, a_2, a_3, ...)$ em que:
a) $a_4 = 128$ e $q = 4$
b) $a_6 = 10^3$ e $q = 10$

54. Calcule quantos termos tem a PG finita $(a_1, a_2, ..., a_n)$ em que:
a) $a_1 = 9$, $a_n = 3^{20}$ e $q = 3$
b) $a_n = 1875$, $a_1 = 3$ e $q = 5$

55. Numa PG em que $a_1 = \dfrac{1}{4}$ e $q = 2$, qual é o lugar ocupado na seqüência pelo termo igual a 32?

56. Determine **x** para que as seguintes seqüências sejam PG:
a) (4, x, 9) c) (x − 3, x, x + 6)
b) (a, x, ab^2) d) (2x + 1, 3x − 6, 4x − 8)

57. Numa PG crescente, o 8º termo vale 8 e o 10º vale 32. Calcule o 9º termo e a razão dessa PG.

58. Insira quatro meios geométricos entre 6 e 192.

59. Entre os números 18 e **x** foram inseridos dois meios geométricos. Obteve-se, assim, uma PG de razão 3. Qual é o valor de **x**?

60. Cinco meios geométricos foram inseridos entre 4 e 2 916. Qual é a razão **q** da PG assim obtida?

61. Entre os números 100 e 1 000 000 devem ser escritos **x** números de modo que a seqüência obtida seja uma PG de razão 10. Calcule **x**.

62. Descubra o produto dos termos da seguinte PG finita: (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024). (Sugestão: utilize um processo análogo ao de Gauss, citado na página 140.)

63. Numa PG de números reais, $a_3 = 16$ e $a_6 = 1024$. Determine $\mathbf{a_1}$ e a razão **q** dessa PG.

64. Sabe-se que, numa PG de números reais, $a_2 = 48$ e $a_7 = \dfrac{3}{2}$. Qual é o 1º termo dessa PG?

65. A produção de uma empresa nos meses de janeiro, fevereiro e março, respectivamente, forma uma PG. Se a produção em janeiro foi de 3 000 unidades e em março foi de 27 000 unidades, quantas unidades foram produzidas em fevereiro?

66. Qual o número **x** que se deve adicionar a 2, 6 e 14 para que os números assim obtidos sejam, nessa ordem, termos consecutivos de uma PG?

67. Qual é a razão **q** de uma PG de quatro termos, na qual a soma dos dois primeiros é igual a 15 e a soma dos dois últimos é igual a 240?

68. Numa PG de números reais, $a_4 + a_6 = 120$ e $a_7 + a_9 = 960$. Calcule a razão **q** e o primeiro termo, $\mathbf{a_1}$, dessa PG.

69. Numa PG crescente, $a_2 - a_1 = 39$ e o primeiro termo $\mathbf{a_1}$ é igual ao quíntuplo da razão **q**. Calcule $\mathbf{a_1}$ e **q**.

70. Determine a PG de três elementos que são números inteiros sabendo que a soma deles é igual a 31 e o produto é 125.

71. Três números inteiros positivos estão em PG de tal forma que a soma deles é igual a 62 e o maior número é igual a 25 vezes o menor. Quais são os três números?

72. As medidas dos lados de um triângulo retângulo estão em PG. Determine a razão **q** dessa PG. (Sugestão: aplicar o teorema de Pitágoras.)

73. A cada mês, a caderneta de poupança rende juros de 1,5% sobre o saldo anterior. Se, em 1º de abril desse ano o saldo era S, qual será o saldo em dezembro desse mesmo ano, considerando que não tenha havido retirada ou depósito no período?

74. Na América Latina, a população cresce à taxa de 3% ao ano, aproximadamente. Em 1993, sua população era de P habitantes. Persistindo essa taxa de crescimento anual, qual será a população da América Latina em 2010?

75. Uma pessoa compra uma casa, devendo pagá-la em prestações mensais durante 5 anos. A primeira prestação é de R$ 400,00 e as prestações pagas num mesmo ano são iguais. A cada ano, a prestação sofre um aumento de 10% em relação à do ano anterior. Qual será o valor da prestação mensal no último ano?

76. Uma indústria produziu 30000 unidades de certo produto no primeiro trimestre de 2003. Supondo que a produção tenha dobrado a cada trimestre, quantas unidades desse produto foram produzidas no último trimestre de 2003?

Resolva em equipe os exercícios 77 e 78.

77. (UFMG) Uma criação de coelhos foi iniciada há exatamente um ano e, durante esse período, o número de coelhos duplicou a cada quatro meses. Hoje, parte dessa criação deverá ser vendida para se ficar com a quantidade inicial de coelhos. Para que isso ocorra, a porcentagem da população atual dessa criação de coelhos a ser vendida é:

a) 75%. c) 83,33%.
b) 80%. d) 87,5%.

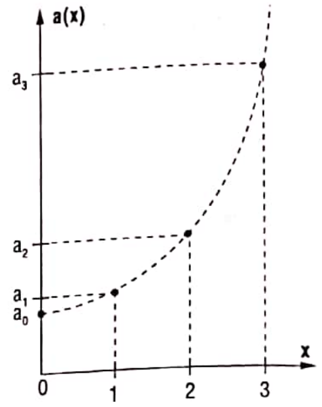
ATENÇÃO! As questões de vestibular foram transcritas literalmente. Embora em algumas apareça: "Assinale", "Indique", etc., **não escreva no livro.** Todas as respostas devem ser dadas no caderno.

78. (UFPE) Suponha que o preço de um automóvel se desvalorize 10% ao ano nos seus cinco primeiros anos de uso. Se esse automóvel novo custou R$ 10 000,00, qual será o seu valor em reais após os cinco anos de uso?

a) 5 550,00. d) 5 904,90.
b) 5 804,00. e) 5 745,20.
c) 6 204,30.

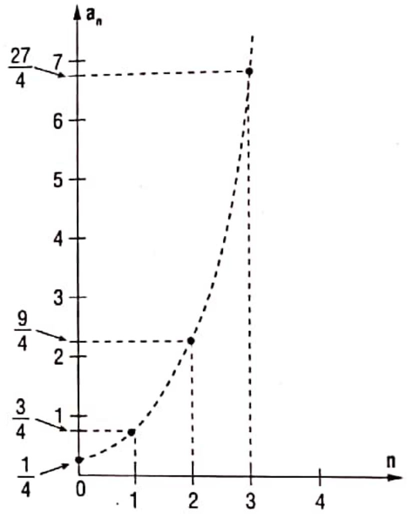
Interpretação geométrica de uma progressão geométrica

Já vimos que o termo geral de uma progressão geométrica é dado por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, ou por $a_n = a_0 \cdot q^n$ quando começamos a enumeração dos termos por a_0. Nesse caso, podemos pensar em uma progressão geométrica como uma função que associa a cada número natural n o valor dado por $a_n = a_0 \cdot q^n$. Essa função é a restrição aos números naturais da função exponencial $a(x) = a_0q^x$. O gráfico dessa função é formado por uma seqüência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial.



Veja o exemplo de $a_n = a_0 \cdot q^n$, com $a_0 = \frac{1}{4}$ e $q = 3$ e o esboço do gráfico da função correspondente:

$$PG\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{9}{4}, \frac{27}{4}, \ldots\right)$$



Equivalência de taxas

Considere a seguinte situação-problema:

Se a população de um país cresce 3% ao ano, quanto crescerá em 10 anos?

$i = 3\% = 0,03$

População inicial: P_0

População após 1 ano: $P_0(1 + 0,03)$

População após 2 anos: $P_0(1 + 0,03)^2$

...

População após 10 anos: $P_0(1 + 0,03)^{10}$

Observe que a seqüência:

$P_0, P_0(1 + 0,03), P_0(1 + 0,03)^2, \ldots, P_0(1 + 0,03)^{10}$

é uma PG de razão $1 + 0,03 = 1,03$. Assim, se I é a taxa de crescimento da população relativa a 10 anos e i é a taxa de crescimento relativa a 1 ano, temos que:

$$1 + I = (1 + i)^{10}$$

pois 10 anos equivalem a 10 períodos iguais a 1 ano.

No problema, temos:

$1 + I = (1 + 0,03)^{10} \Rightarrow 1 + I = (1,03)^{10} \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + I \simeq 1,3439 \Rightarrow I \simeq 0,3439 = 34,39\%$

Portanto, a população crescerá aproximadamente 34,39% em 10 anos.

É possível provar que, se I é a taxa de crescimento de uma grandeza relativa ao período de tempo T e i é a taxa de crescimento relativa ao período t, e se T = nt, então $1 + I = (1 + i)^n$.

Exemplos:

1º) Uma bomba retira, em cada sucção, 3% da água de um poço. Depois de 20 sucções, quanto restará da água inicialmente existente no poço?

$i = -3\% = -0{,}03$

$1 + I = (1 - 0{,}03)^{20} \Rightarrow 1 + I = (0{,}97)^{20} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + I \simeq 0{,}5437 \Rightarrow I \simeq -0{,}4563 = -45{,}63\%$

Portanto, a quantidade de água, após 20 sucções, diminuirá aproximadamente 45,63% e restarão cerca de 54,37% da água existente inicialmente no poço.

2º) A renda *per capita* é definida como o quociente do produto interno bruto (PIB) pela população economicamente ativa. Se nos próximos dez anos a população crescer 2% ao ano, quanto deverá crescer anualmente o PIB para que a renda *per capita* aumente 10% na próxima década?*

Representando a renda por R, o PIB por P, a população por Q, a taxa de crescimento anual do PIB por i e usando os índices para representar o tempo (em anos), temos:

$$R_{10} = \frac{P_{10}}{Q_{10}} = \frac{P_0(1 + i)^{10}}{Q_0(1 + 0{,}02)^{10}} = R_0 \cdot \frac{(1 + i)^{10}}{1{,}02^{10}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}1R_0 = R_0 \cdot \frac{(1 + i)^{10}}{1{,}02^{10}}$$

Logo, $(1 + i)^{10} = 1{,}1 \cdot 1{,}02^{10} \simeq 1{,}34$. Extraindo a raiz décima, obtemos $1 + i \simeq 1{,}03$ e $i \simeq 0{,}03 = 3\%$.

Portanto, o PIB deve crescer 3% ao ano.

Exercícios propostos

79. Numa cultura de bactérias, o número delas aumenta à taxa de 20% por minuto. Quanto crescerá esse número em 8 minutos?

80. Se a população de uma cidade cresce 2% ao ano, quanto crescerá em 20 anos?

81. Uma seringa retira, de cada vez, 2% do remédio de um frasco. Depois de 10 vezes quanto restará do remédio inicialmente existente no frasco?

82. Em uma escola, o número de alunos aumenta 5% ao ano. Quanto aumentará em 15 anos?

83. O número de torcedores de um time de futebol diminui 6% ao ano. Depois de 12 anos quanto restará dos torcedores inicialmente existentes?

84. O valor de um objeto decresce 4% ao ano. Se hoje ele custa R$ 2 000,00, quanto custará daqui a 5 anos?

85. Se a população do Brasil continuar crescendo à taxa de 2% ao ano, qual será o seu crescimento na próxima década?*

Fórmula da soma dos **n** primeiros termos de uma PG finita

A soma dos **n** primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$ é $S_n = a_1 \cdot \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.

Demonstração:

Consideremos a PG finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ e seja S_n a soma de seus termos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \quad \text{(I)}$$

Vamos multiplicar os dois membros dessa igualdade pela razão **q**, obtendo:

$$qS_n = \underbrace{a_1q}_{a_2} + \underbrace{a_2q}_{a_3} + \underbrace{a_3q}_{a_4} + \ldots + \underbrace{a_{n-1}q}_{a_n} + a_nq$$

ou

$$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_nq \quad \text{(II)}$$

Fazendo (I) − (II) obtemos:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_nq$$

Como $a_n = a_1q^{n-1}$, então $a_nq = a_1q^{n-1}q = a_1q^n$, daí:

$$S_n(1 - q) = a_1 - a_1q^n \Rightarrow S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

Portanto, $S_n = a_1 \cdot \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$ para $q \neq 1$.

PARA REFLETIR: Essa fórmula também pode aparecer assim: $S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, $q \neq 1$

Exemplos:

1º) Uma empresa produziu 10 000 unidades de certo produto em 2005. A cada ano seguinte produzirá 20% a mais desse produto em relação ao ano anterior. Quantas unidades desse produto a empresa produzirá no período de 2005 a 2009?

1ª maneira

Ano	Produção (em unidades)
2005	10 000
2006	12 000
2007	14 400
2008	17 280
2009	20 736

20% de 10 000 = 12 000
20% de 12 000 = 14 400
etc.

*O exemplo 2 e o exercício 85 foram extraídos de: MORGADO, Augusto C. e outros. *Progressões e Matemática financeira*. Rio de Janeiro, SBM, 1993. p. 19-20. (Coleção do Professor de Matemática.)

No período de 2005 a 2009 a empresa produzirá:
$10\,000 + 12\,000 + 14\,400 + 17\,280 + 20\,736 =$
$= 74\,416$ unidades
As parcelas formam uma PG finita de razão $q = 1{,}20$.
Assim, a soma dos cinco primeiros termos é 74 416.

2ª *maneira*: usando a fórmula
Como temos uma PG na qual $a_1 = 10\,000$, $q = 1{,}20$ e $n = 5$, temos:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_5 = 10\,000 \cdot \frac{1 - (1{,}20)^5}{1 - 1{,}20} =$$

$$= 10\,000 \cdot \frac{-1{,}48832}{-0{,}20} = 74\,416$$

Logo, no período de 2005 a 2009 a empresa produzirá 74 416 unidades desse produto.

2º) Vamos determinar a soma dos dez primeiros termos da PG (3, 6, 12, ...).
Conhecemos $a_1 = 3$, $q = 2$ e $n = 10$.

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{3(2^{10} - 1)}{2 - 1} =$$

$$= \frac{3(1\,024 - 1)}{1} = 3\,069$$

A soma pedida é 3 069.

PARA REFLETIR Se na página anterior fizéssemos (II) − (I), obteríamos: $S_n(q - 1) = a_nq - a_1$, ou seja,
$$S_n = \frac{a_nq - a_1}{q - 1},\ q \neq 1.$$

3º) Vamos calcular o valor de x na igualdade
$10x + 20x + \ldots + 1\,280x = 7\,650$ sabendo que os termos do 1º membro formam uma PG.
Nesse caso, $a_1 = 10x$, $q = 2$, $a_n = 1\,280x$ e $S_n = 7\,650$.
Inicialmente, vamos determinar **n**:

$$a_n = a_1q^{n-1} \Rightarrow 1\,280x = 10x \cdot 2^{n-1} \overset{x \neq 0}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow 128 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^7 = 2^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 7 \Rightarrow n = 8$$

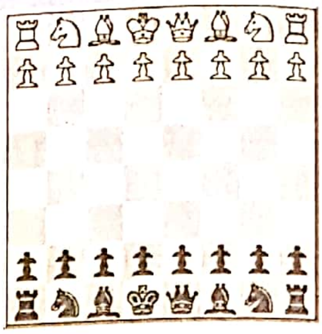
$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 7\,650 = \frac{10x(2^8 - 1)}{2 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7\,650 = 10x \cdot 225 \Rightarrow 7\,650 = 2\,550x \Rightarrow x = 3$$

Logo, $x = 3$.

Curiosidade

Há uma lenda que diz que um rei perguntou ao inventor do jogo de xadrez o que ele queria como recompensa por ter inventado esse jogo. E o inventor respondeu: "1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira, 8 pela quarta, 16 pela quinta, e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa".



Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, o inventor pediu a soma dos primeiros 64 termos da PG: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ..., de razão $q = 2$.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 \cdot \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1$$

Fazendo esse cálculo, encontramos o gigantesco número de vinte algarismos: 18 446 744 073 709 551 615.
Coitado do rei! Será que ele teria uma superfície suficientemente grande para conter uma plantação de trigo com esse número de grãos?
De acordo com John Wallis, matemático inglês, essa quantidade de grãos de trigo poderia encher um cubo que tivesse 9 400 m de aresta. Se contássemos esses grãos à razão de 5 por segundo, trabalhando dia e noite sem parar, gastaríamos, nessa contagem, 1 170 milhões de séculos!

Adaptado de: TAHAN, Malba. *O homem que calculava.* Rio de Janeiro, Record, 1998.

PARA REFLETIR Como se lê o número 18 446 744 073 709 551 615?

ATENÇÃO! NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Exercícios propostos

86. Calcule a soma:
a) dos seis primeiros termos da PG (2, 8, ...);
b) dos seis primeiros termos da PG (7, 14, ...);
c) dos dez termos iniciais da PG $(a^2, a^5, \ldots)$.

87. Qual é a soma dos dez primeiros termos de uma PG na qual o 1º termo é $a_1 = 10$ e a razão é $q = 2$?

88. Calcule a soma dos termos da PG finita:
a) (1, 2, ..., 512)
b) (5, 20, ..., 1 280)
c) $(1, 2^2, \ldots, 2^{10})$

89. Os termos do 1º membro da equação
$3 + 6 + \ldots + x = 381$ formam uma PG. Calcule o conjunto solução dessa equação.

90. Quantos termos devemos considerar na PG (3, 6, ...) para obter uma soma igual a 765?

91. A soma dos seis termos iniciais de uma PG é 1456. Sabendo que a razão dessa PG é $q = 3$, calcule a_1.

92. Uma empresa produziu 20 000 unidades de certo produto no primeiro trimestre de 2003. Quantas unidades foram produzidas em 2003 sabendo que a produção aumentou 20% a cada trimestre?
(**Observação**: Para obter um novo valor 20% maior que um valor anterior, basta multiplicar o valor anterior por 1,20.
Aumento de 20% $\rightarrow$ novo = anterior · 1,20)

93. Uma pessoa aposta na loteria durante cinco semanas, de tal forma que, em cada semana, o valor da aposta é o dobro do valor da aposta da semana anterior. Se o valor da aposta da primeira semana é R$ 60,00, qual o total apostado após as cinco semanas?

Limite da soma dos termos de uma PG infinita

Introdução

Consideremos a seqüência $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ com $n \in \mathbb{N}^*$, explicitada por:

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{100}, \ldots, \frac{1}{1000}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

PARA REFLETIR Essa seqüência é uma PG?

ou, ainda, em representação decimal:

1; 0,5; 0,333...; 0,25; 0,2; 0,16...; 0,142...; 0,125; 0,11...; 0,1; ...; 0,01; ...; 0,001; ...

Observemos que, à medida que **n** cresce indefinidamente (tendendo a infinito), o termo $a_n = \frac{1}{n}$ tende a 0 (zero). Indicamos assim:

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

ou, então, assim:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

que lemos: limite de $\frac{1}{n}$ quando **n** tende a infinito é igual a 0.

Nas progressões geométricas em que $0 < |q| < 1$, a soma dos **n** primeiros termos tem um limite finito quando **n** tende a infinito. Nesse caso, q^n aproxima-se de zero para **n** suficientemente grande, ou seja, $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$.

Sabemos que $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, q \neq 1$.

Logo, $\lim_{n \to \infty} S_n = a_1 \cdot \frac{1 - 0}{1 - q}$, isto é:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}, 0 < |q| < 1$$

PARA REFLETIR O que acontece com a soma dos termos de uma PG infinita de termos positivos e razão maior do que 1?

Exemplo:

Vamos calcular o limite da soma dos termos da progressão geométrica $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots, n \in \mathbb{N}^*$.

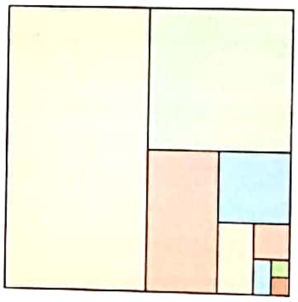
Neste caso, $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ e temos:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

PARA REFLETIR
$S_1 = \frac{1}{2}$
$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots$ tende a 1.

Logo, $\lim_{n \to \infty} S_n = 1$. Isso significa que, quanto maior for **n**, a soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ será mais próxima de 1.

Veja, abaixo, uma interpretação geométrica desse fato considerando a área da região quadrada igual a 1.



Inicialmente pintamos $\frac{1}{2}$ dela, depois $\frac{1}{4}$, depois $\frac{1}{8}$, e assim por diante. Continuando esse procedimento indefinidamente, nos aproximamos da área total da região quadrada, que é 1.

Vejamos, agora, estes exemplos:

1º) Vamos determinar a fração geratriz:
a) da dízima periódica simples 0,333...
b) da dízima periódica composta 0,52121...

a) $0{,}333\ldots = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \ldots =$
$= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$
As parcelas formam a PG infinita $\left(\frac{3}{10}, \frac{3}{10^2}, \frac{3}{10^3}, \ldots\right)$, na qual $a_1 = \frac{3}{10}$ e $q = \frac{1}{10}$.

A fração correspondente a 0,333... é o limite da soma dessa PG infinita.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} =$$

$$= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Logo, a fração procurada é $\frac{1}{3}$.

b) $0{,}52121... = 0{,}5 + 0{,}021 + 0{,}00021 + ... =$

$= \frac{5}{10} + \frac{21}{1\,000} + \frac{21}{100\,000} + ...$

Observamos que a seqüência $\left(\frac{21}{10^3}, \frac{21}{10^5}, \frac{21}{10^7}, ...\right)$ é uma PG infinita, na qual $a_1 = \frac{21}{10^3}$ e $q = \frac{1}{10^2}$:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{21}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} =$$

$$= \frac{\frac{21}{1\,000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{21}{1\,000}}{\frac{99}{100}} =$$

$$= \frac{21}{\cancel{1\,000}_{10}} \cdot \frac{\cancel{100}^{1}}{99} = \frac{21}{990} = \frac{7}{330}$$

Agora, vamos calcular:

$$0{,}52121... = \frac{5}{10} + \frac{7}{330} = \frac{165 + 7}{330} =$$

$$= \frac{172}{330} = \frac{86}{165}$$

Logo, a fração geratriz é $\frac{86}{165}$.

2º) Vamos determinar o limite da soma da PG infinita $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + ...$

As parcelas formam uma PG infinita, na qual $a_1 = \frac{1}{3}$

e $q = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$.

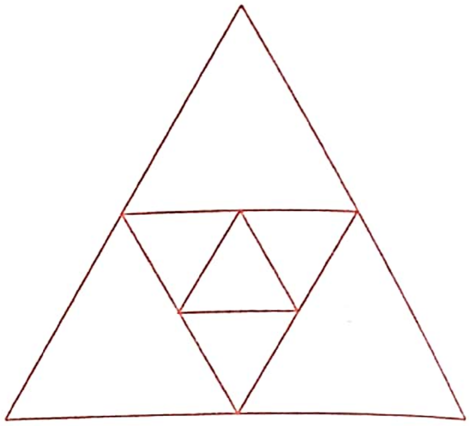
Como $\frac{2}{3} < 1$, podemos usar a fórmula

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}:$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$$

Logo, o valor procurado é 1.

3º) A medida do lado de um triângulo eqüilátero é 10. Unindo-se os pontos médios de seus lados obtém-se um segundo triângulo eqüilátero. Unindo-se os pontos médios dos lados desse novo triângulo eqüilátero obtém-se um terceiro, e assim por diante, indefinidamente. Vamos calcular a soma dos perímetros de todos esses triângulos.



Perímetro do 1º triângulo = 30

Perímetro do 2º triângulo = 15

Perímetro do 3º triângulo = $\frac{15}{2}$ ...

Devemos calcular a soma dos termos da PG infinita $\left(30, 15, \frac{15}{2}, ...\right)$ na qual $a_1 = 30$ e $q = \frac{1}{2}$:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{30}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{30}{\frac{1}{2}} = 60$$

Portanto, a soma dos perímetros é 60.

PARA REFLETIR Nessas condições, os perímetros sempre formam uma PG infinita de razão $\frac{1}{2}$.

Exercícios propostos

94. Determine o valor dos limites das seguintes somas:

a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + ...$

b) $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + ...$

ATENÇÃO! NÃO ESCREVA NO LIVRO.

95. Determine o valor de x na igualdade $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + ... = 12$ na qual o primeiro membro é o limite da soma dos termos de uma PG infinita.

96. Resolva a equação $x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{8} + ... = 6$, na qual o primeiro membro é o limite da soma dos termos de uma PG infinita.

97. Calcule a fração geratriz das seguintes dízimas periódicas:

a) 0,515151...

b) 0,4333...

c) 0,2313131...

d) 2,666...

98. Partindo de um quadrado Q_1, cujo lado mede **a**, consideremos os quadrados Q_2, Q_3, Q_4, ..., tal que os vértices de cada um sejam os pontos médios dos lados do quadrado anterior. Determine o limite da soma das áreas de todos esses quadrados.

99. Uma bola de borracha cai de uma altura **a**. Após chocar-se com o solo, atinge uma altura igual a $\frac{2}{3}$ da anterior e este valor se mantém nos choques subseqüentes. Quanto a bola percorrerá até que pare?

100. Considerando-se, inicialmente, um triângulo eqüilátero de lado ℓ, forma-se uma seqüência de triângulos eqüiláteros, cada um tendo os vértices nos pontos médios dos lados do triângulo anterior. Obtenha o limite da soma das áreas da infinidade de triângulos eqüiláteros dessa seqüência sabendo que a área do triângulo eqüilátero é dada por $S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$.

5 Problemas envolvendo PA e PG

Para completar o capítulo sobre progressões, veremos agora alguns exemplos de problemas que envolvem PA e PG.

1º) São dados quatro números, x, y, 6, 4, nessa ordem. Sabendo que os três primeiros estão em PA e os três últimos estão em PG, vamos determinar **x** e **y**.

Se x, y, 6 estão em PA, temos $y = \frac{x+6}{2}$.

Se y, 6, 4 estão em PG, temos $6^2 = 4y$.

Devemos resolver o sistema formado por essas duas equações:

$$\begin{cases} y = \frac{x+6}{2} \\ 4y = 36 \Rightarrow y = 9 \end{cases}$$

$$9 = \frac{x+6}{2} \Rightarrow x + 6 = 18 \Rightarrow x = 12$$

Então, x = 12 e y = 9.

2º) Numa situação em que há empréstimo de dinheiro para devolução depois de certo número de períodos, e em que esse empréstimo é baseado no sistema de juros simples, os juros correspondentes a cada período são constantes e iguais ao valor calculado no fim do 1º período. Dessa forma, no fim do 1º período, os juros são acrescidos ao capital inicial, resultando no montante M_1. No fim do 2º período, os juros são acrescidos ao montante M_1, resultando no montante M_2, e assim por diante até o fim dos períodos contratados, em que o capital emprestado terá se transformado no montante M_n.

Considere então um empréstimo de R$ 800,00 a ser pago em 6 meses, à taxa de juros simples de 4% a.m.

No fim dos 6 meses, quanto deverá ser pago para a quitação da dívida?

Os 4% de juros simples cobrados por mês significam $0{,}04 \cdot 800{,}00 =$ R$ 32,00 de acréscimo mensal. Essa é uma situação em que os valores devidos evoluem da seguinte forma:

Mês 0: 800,00
Mês 1: 800,00 + 32,00 = 832,00
Mês 2: 832,00 + 32,00 = 864,00
Mês 3: ...
Mês 4: ...
....

É possível representar a seqüência de valores devidos por uma progressão aritmética usando como 1º termo o valor devido após o 1º período e, como razão, o valor constante a ser pago a título de juros simples:

r = juro do 1º período = $0{,}04 \cdot 800 = 32$

$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow M_n = 832 + (n-1)32 \Rightarrow$
$\Rightarrow M_6 = 832 + (6-1)32 = 992{,}00$

É importante salientar que essa progressão poderia ser mais bem representada usando-se a_0 em vez de a_1 no termo geral. Assim, teríamos o capital inicial representado no termo geral:

$a_n = a_0 + nr \Rightarrow M_n = 800 + 32n \Rightarrow$
$\Rightarrow M_6 = 800 + 32n = 992{,}00$

No fim do 6º mês, o valor a ser pago será R$ 992,00.

3º) Numa situação em que há empréstimo de dinheiro para devolução depois de certo número de períodos, e em que esse empréstimo é baseado no sistema de juros compostos, os juros correspondentes a cada período não são constantes e, por isso, precisam ser calculados no fim de cada período, relativo ao montante atual da dívida. Dessa forma, no fim do 1º período, os juros são acrescidos ao capital inicial, resultando no montante M_1. No fim do 2º período, os juros são recalculados sobre o montante M_1 e somados, resultando no montante M_2, e assim por diante até o fim dos períodos contratados, em que o capital emprestado terá se transformado no montante M_n.

Considere então um empréstimo de R$ 800,00 a ser pago em 6 meses, à taxa de juros compostos de 4% a.m. No fim dos 6 meses, quanto deverá ser pago para a quitação da dívida?

Lembre-se de que, quando é preciso aumentar um valor em 4%, o novo valor é imediatamente obtido ao multiplicarmos o valor antigo por 1,04, pois

$x_1 = x + 0{,}04x = x(1 + 0{,}04) = 1{,}04x$. Chamamos 1,04 de fator de atualização.

Essa é uma situação em que os valores devidos evoluem da seguinte forma:

Mês 0: 800,00
Mês 1: $800 \cdot 1{,}04 = 832{,}00$
Mês 2: $832 \cdot 1{,}04 = 800 \cdot (1{,}04)^2 = 865{,}28$
Mês 3: $865{,}28 \cdot 1{,}04 = 800 \cdot (1{,}04)^3 = \ldots$
Mês 4: ...
...

É possível representar a seqüência de valores devidos por uma progressão geométrica usando como 1º termo o valor devido após o 1º período e, como razão, o valor do fator multiplicativo que permite a atualização do valor:

$q = 1 + i = 1 + 0{,}04 = 1{,}04$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow M_n = 832 \cdot (1{,}04)^{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow M_6 = 832 \cdot (1{,}04)^{6-1} = 1\,012{,}25$

Novamente é importante salientar que essa progressão poderia ser mais bem representada usando-se a_0 em vez de a_1 no termo geral. Assim, teríamos o capital inicial representado no termo geral:

$a_n = a_0 \cdot q^n \Rightarrow M_n = 800 \cdot (1{,}04)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow M_6 = 800 \cdot (1{,}04)^6 = 1\,012{,}25$

No fim do 6º mês, deverão ser pagos R$ 1012,25.

Exercícios propostos

101. Calcule **x** e **y** sabendo que a seqüência (x, y, 9) é uma PA e a seqüência (x, y, 12) é uma PG crescente.

102. A seqüência (x, y, z) é uma PA e a seqüência $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{x+z}\right)$ é uma PG. Nessas condições, prove que y = 2x.

103. A seqüência (a_1, a_2, a_3, a_4) é uma PA de razão 4 e a seqüência (b_1, b_2, b_3, b_4) é uma PG de razão 4. Sabendo que $a_4 = b_3$ e $a_1 = b_2$, escreva a PA e a PG.

104. Sabendo que os números 2, log x, log y, nessa ordem, estão simultaneamente em PA e em PG, calcule **x** e **y**.

105. (Fuvest-SP) 500 moedas são distribuídas entre três pessoas, A, B e C, sentadas em círculo, da seguinte maneira: A recebe uma moeda, B duas, C três, A quatro, B cinco, C seis, A sete, e assim por diante, até que não haja mais moedas suficientes para continuar o processo. A pessoa seguinte, então, receberá as moedas restantes.
    a) Quantas foram as moedas restantes e quem as recebeu? (Deixe explícito como você obteve a resposta.)
    b) Quantas moedas recebeu cada uma das três pessoas?

106. A torcida do glorioso S. C. Corinthians Paulista tem hoje 20 milhões de torcedores e cresce 3% ao ano. Qual será a torcida do time daqui a 10 anos?

107. (UFRRJ) Uma forte chuva começa a cair na UFRRJ formando uma goteira no teto de uma das salas de aula. Uma primeira gota cai e 30 segundos depois cai uma segunda gota. A chuva se intensifica de tal forma que uma terceira gota cai 15 segundos após a queda da segunda gota. Assim, o intervalo de tempo entre as quedas de duas gotas consecutivas reduz-se à metade à medida que a chuva aumenta de intensidade. Se a situação assim se mantiver, em quanto tempo, aproximadamente, desde a queda da primeira gota, a goteira se transformará em um fio contínuo de água?

108. A espessura de uma folha de papel é 0,05 mm. Forma-se uma pilha de folhas de papel colocando-se na 1ª vez uma folha e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já foram colocadas anteriormente. Após 11 operações iguais a essa, qual a altura da pilha de folhas de papel em centímetros?

109. Um sitiante estava perdendo sua plantação de algodão em decorrência da ação de uma praga. Ao consultar um agrônomo da Casa da Lavoura, foi orientado para que pulverizasse, uma vez ao dia, um determinado agrotóxico da seguinte maneira:
    - 1º dia: 2 litros
    - 2º dia: 4 litros
    - 3º dia: 8 litros

    ATENÇÃO!
    NÃO ESCREVA NO LIVRO.

    ... e assim sucessivamente. Sabendo que o total de agrotóxico pulverizado foi de 126 litros, determine quantos dias de duração teve esse tratamento.

110. Em alguns países europeus, a taxa de juros é tão baixa que algumas lojas e bancos trabalham com o sistema de juros simples, pois ele é mais facilmente compreendido pelos clientes. Faça uma comparação do montante de uma dívida de R$ 1000,00 após 6 meses, usando os sistemas de juros simples e compostos, verificando se a diferença entre os montantes obtidos com os dois sistemas de juros é significativa, comparada com a dívida:*
    a) para 0,5% a.m.   b) para 5% a.m.

    Observação: É fácil perceber o motivo que leva à adoção do sistema de juros simples quando o valor do juro é muito baixo. A diferença monetária não compensa o esforço do cliente (ou do lojista) em fazer uso do sistema de juros compostos.

Desafio em dupla

(UFG-GO) Um carpinteiro deseja construir uma escada para ser usada por eletricistas. O modelo está na figura abaixo. As travessas da escada são de madeira, seus comprimentos são decrescentes e estão em progressão aritmética. A primeira travessa mede 0,80 m, e a última mede 0,40 m. Sabendo que, para as travessas, o carpinteiro tem à sua disposição 13,2 metros lineares de madeira, e não havendo desperdício algum, quantas travessas conterá a escada?

* Consulte os exemplos 2 e 3 da página 151 para lembrar-se de como relacionar juros simples e juros compostos com PA e PG.