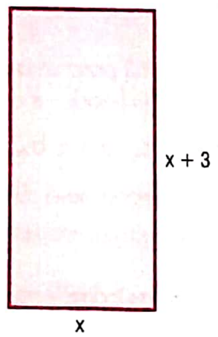
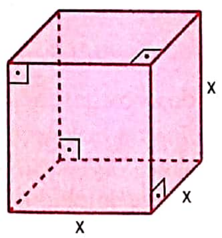
capítulo 35

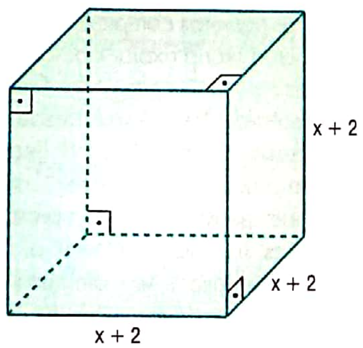
Polinômios e equações algébricas

1 Introdução

Na resolução de problemas, é muito comum ocorrerem situações em que a leitura e a compreensão do enunciado nos levam a formular expressões que permitam depois a resolução do problema, por meio de uma equação oriunda das expressões obtidas. Imagine, por exemplo, que, em determinados problemas, os enunciados nos levem às seguintes figuras e suas dimensões:







A primeira figura é uma região retangular de dimensões **x** e **x + 3**, cujo perímetro é indicado pela expressão:

$$2x + 2(x + 3) \quad \text{ou} \quad 4x + 6$$

e cuja área é indicada por:

$$x(x + 3) \quad \text{ou} \quad x^2 + 3x$$

A segunda figura é um cubo com arestas de medida **x**, cuja área total é indicada por:

$$6x^2$$

e cujo volume é expresso por:

$$x^3$$

A terceira figura é outro cubo com arestas **x + 2**, cuja área total é:

$$6(x + 2)^2 \quad \text{ou} \quad 6(x^2 + 4x + 4) \quad \text{ou} \quad 6x^2 + 24x + 24$$

e cujo volume é expresso por:

$$(x + 2)^3 \quad \text{ou} \quad x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Todas essas expressões são chamadas *expressões polinomiais* ou *polinômios*, cujo estudo você já iniciou no ensino fundamental e será aprofundado neste capítulo.

2 Definição

Chamamos expressão polinomial ou polinômio na variável complexa **x** toda expressão da forma:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

em que:

- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ são números complexos denominados coeficientes;
- **n** é um número inteiro positivo ou nulo;
- o maior expoente de **x**, com coeficiente não-nulo, é o grau da expressão.

Veja, por exemplo, as expressões polinomiais:

1ª) $4x + 6$: expressão polinomial do 1º grau (grau 1).

2ª) $x^2 + 3x$: expressão polinomial do 2º grau (grau 2).

3ª) x^3: expressão polinomial do 3º grau (grau 3).

4ª) $6x^2 + (1 - i)x + 5$: expressão polinomial do 2º grau (grau 2).

PARA REFLETIR Que nome se dá às expressões seguintes?
a) $6x^5$ b) $x^4 + 6x^2 + 6x + 8$

Pela definição, não são expressões polinomiais:

1ª) $x^{-2} + 3x^{-1} + 1$, pois o expoente da variável **x** não pode ser negativo.

2ª) $x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$, pois a variável **x** não pode aparecer em denominador.

3ª) $x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{2}} + 6$, pois o expoente da variável **x** não pode ser fracionário.

4ª) $\sqrt[3]{x} + 6\sqrt{x} + 2$, pois a variável **x** não pode aparecer sob radical.

3 Função polinomial

As funções complexas f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definidas por expressões polinomiais são denominadas *funções polinomiais*. Assim:

1ª) $f(x) = 2x - 1$ é uma função polinomial de grau 1.
2ª) $g(x) = 3x^2 - 2x - 1$ é uma função polinomial de grau 2.
3ª) $h(x) = x^3 - 6x^2 + x - 1$ é uma função polinomial de grau 3.
4ª) $p(x) = x^4 - ix^2$ é uma função polinomial de grau 4.

Então, toda função definida por:

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

para todo **x** complexo, é denominada função polinomial de grau **n**, em que **n** é um número inteiro positivo ou nulo e $\mathbf{a_n}$ é diferente de 0.

Se o grau de uma função polinomial for 0, então a função é definida por $f(x) = a_0$, com $a_0 \neq 0$. Por exemplo, $f(x) = 5$.

Polinômio

A cada função polinomial associa-se um único polinômio (ou expressão polinomial) e vice-versa, de forma que não há confusão em nos referirmos indistintamente às funções polinomiais ou aos polinômios.

Exemplos:

1º) $p(x) = 5$ é um polinômio de grau 0 ou polinômio constante.
2º) $p(x) = 2x + 1$ é um polinômio do 1º grau.
3º) $p(x) = x^2 - 5x + 6$ é um polinômio do 2º grau.

Polinômio identicamente nulo

Define-se o polinômio identicamente nulo (Pin) como o polinômio cujos coeficientes são todos nulos. Assim, o polinômio nulo $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ é polinômio nulo $\Leftrightarrow a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$.

PARA REFLETIR Como o Pin não tem coeficiente não-nulo, não se define grau para ele.

4 Valor numérico de um polinômio

Considere um polinômio p(x) e um número real α.

O valor numérico do polinômio p(x) para $x = \alpha$ é o número que se obtém substituindo **x** por α e efetuando os cálculos necessários. Indica-se por $p(\alpha)$.

Então, $p(\alpha)$ é o valor numérico de p(x) para $x = \alpha$.

PARA REFLETIR O valor numérico do polinômio nulo é 0 para qualquer valor de **x**.

Exemplos:

1º) O valor numérico de $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ para $x = 4$ é:
$p(4) = 2(4)^2 - 3(4) + 5 = 32 - 12 + 5 = 25$
Logo, $p(4) = 25$.

2º) Dado $p(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 10$, o valor de p(x) para $x = 3$ é: $p(3) = 4(3)^3 - 3(3)^2 + 5(3) - 10 =$
$= 108 - 27 + 15 - 10 = 86$
Logo, $p(3) = 86$.

3º) Se $p(x) = 3x^2 - 7$, então, para $x = i$, o valor numérico de p(x) é $p(i) = -3 - 7 = -10$.

Assim, de modo geral, dado o polinômio:

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$$

o valor numérico de p(x) para $x = \alpha$ é:

$$p(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \ldots + a_1\alpha + a_0$$

Observação: Se $p(\alpha) = 0$, o número α é denominado *raiz* de p(x). Por exemplo, no polinômio $p(x) = x^2 - 6x + 8$, temos $p(2) = 0$. Logo, 2 é a raiz desse polinômio.

Exemplos:

1º) Dado o polinômio
$p(x) = (m^2 - 1)x^3 + (m + 1)x^2 - x + 4$, com $m \in \mathbb{R}$, vamos discutir o seu grau.
Fazendo os coeficientes de $\mathbf{x^3}$ e $\mathbf{x^2}$ iguais a 0, temos:
$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$
$m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$
Analisando, vem:
- se $m \neq 1$ e $m \neq -1$, o polinômio será do 3º grau.
- se $m = 1$, o polinômio será do 2º grau.
- se $m = -1$, o polinômio será do 1º grau.

2º) Um polinômio p(x) é do 2º grau. Sabendo que $p(-1) = 12$, $p(0) = 6$ e 2 é uma raiz de p(x), vamos escrever o polinômio e determinar p(5).
Se p(x) é um polinômio do 2º grau, sua forma será $p(x) = ax^2 + bx + c$. Então:
$p(2) = 0 \Rightarrow a(2)^2 + b(2) + c = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4a + 2b + c = 0 \quad \text{(I)}$
$p(-1) = 12 \Rightarrow a(-1)^2 + b(-1) + c = 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow a - b + c = 12 \quad \text{(II)}$
$p(0) = 6 \Rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 6 \Rightarrow c = 6 \quad \text{(III)}$
Substituindo (III) em (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} 4a + 2b = -6 \\ a - b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -3 \\ a - b = 6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 1$ e $b = -5$.
Sabendo que $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$, vamos escrever p(x):
$p(x) = ax^2 + bx + c = x^2 - 5x + 6$
Agora, vamos calcular p(5):
$p(5) = (5)^2 - 5(5) + 6 = 25 - 25 + 6 = 6$
Logo, $p(x) = x^2 - 5x + 6$ e $p(5) = 6$.

Exercícios propostos

1. (Mack-SP) Determine $m \in \mathbb{R}$ para que o polinômio $p(x) = (m-4)x^3 + (m^2-16)x^2 + (m+4)x + 4$ seja de grau 2.

2. Discuta, para $m \in \mathbb{R}$, o grau dos polinômios:
   a) $p(x) = (m-4)x^3 + (m+2)x^2 + x + 1$
   b) $g(x) = (m^2-4)x^4 + (m-2)x + m$

3. Dados $p(x) = -3x^3 + x^2 + x - 2$ e $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, calcule $p(-1) + g(1)$.

4. Se $p(x) = 2x^3 - kx^2 + 3x - 2k$, para que valores de k temos $p(2) = 4$?

5. Sabendo que 2 é raiz de $p(x) = x^2 - mx + 6$, calcule o valor de **m**.

6. Consideremos o polinômio $p(x) = 2x^3 - 6x^2 + mx + n$. Se $p(2) = 0$ e $p(-1) = -6$, calcule os valores de **m** e **n**.

5 Igualdade de polinômios

Dizemos que dois polinômios são iguais ou idênticos se, e somente se, seus valores numéricos são iguais para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Assim:

$p(x) = q(x) \Leftrightarrow p(\alpha) = q(\alpha)$ (qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{C}$)

Para que isso aconteça, sua diferença $p(x) - q(x)$ deve ser o Pin. Assim, dois polinômios p(x) e q(x) são iguais se, e somente se, têm coeficientes respectivamente iguais (os coeficientes dos termos de mesmo grau são todos iguais).

PARA REFLETIR Polinômios de graus diferentes nunca são iguais.

Exemplos:

1º) Dados os polinômios $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e $q(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x + 3$, temos:
$p(x) = q(x) \Leftrightarrow a = 2,\ b = 5,\ c = -4$ e $d = 3$.

2º) Vamos determinar os valores de **a**, **b**, **c**, **d** e **e** de modo que os polinômios $p(x) = ax^4 + 5x^2 + dx - b$ e $g(x) = 2x^4 + (b-3)x^3 + (2c-1)x^2 + x + e$ sejam iguais.
Para que $p(x) = g(x)$, devemos ter:
$a = 2$
$0 = b - 3 \Rightarrow b = 3$
$5 = 2c - 1 \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3$
$d = 1$
$e = -b = -3$
Logo, $a = 2$, $b = 3$, $c = 3$, $d = 1$ e $e = -3$.

Exercícios propostos

7. (FEI-SP) Determine A, B e C na decomposição
$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

8. (Mack-SP) Calcule os valores de **m**, **n** e **ℓ** para os quais o polinômio $p(x) = (2m-1)x^3 - (5n-2)x^2 + (3-2\ell)$ é identicamente nulo.

9. (Faap-SP) Calcule os valores de **a**, **b** e **c** para que o polinômio $p_1(x) = a(x+c)^3 + b(x+d)$ seja idêntico a $p_2(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$.

6 Operações com polinômios

Por meio de exemplos, vamos retomar operações conhecidas no estudo de expressões algébricas, como adição, subtração e multiplicação de polinômios, além da multiplicação de um número real por um polinômio. Em seguida, estudaremos mais detalhadamente a divisão de polinômios.

1º) Se $p(x) = 3x^2 + 2x - 1$ e $q(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x - 5$, temos:
$p(x) + q(x) = 3x^2 + 2x - 1 - x^3 + 4x^2 - 2x - 5 =$
$= -x^3 + (3+4)x^2 + (2-2)x + (-1-5) =$
$= -x^3 + 7x^2 - 6$

2º) Se $p(x) = 3x^2 - 4x + 1$ e $q(x) = 5x^2 - 3x + 4$, temos:
$p(x) - q(x) = 3x^2 - 4x + 1 - 5x^2 + 3x - 4 =$
$= -2x^2 - x - 3$

3º) Dado $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 3$, temos:
$7p(x) = 7(2x^3 - 4x^2 + 5x - 3) =$
$= 14x^3 - 28x^2 + 35x - 21$

4º) Dados $p(x) = 3x - 4$ e $q(x) = -2x + 5$, temos:
$p(x) \cdot q(x) = (3x-4)(-2x+5) =$
$= -6x^2 + 15x + 8x - 20 = -6x^2 + 23x - 20$

Divisão de polinômios

Dados dois polinômios p(x) e h(x), com h(x) não-nulo, dividir p(x) por h(x) significa encontrar dois polinômios q(x) e r(x) que satisfaçam as seguintes condições:

1ª) $p(x) = h(x)q(x) + r(x)$

2ª) o grau de r(x) não pode ser igual nem maior do que o grau de h(x) ou então $r(x) = 0$.

Assim, dizemos que:

- p(x) é o dividendo
- h(x) é o divisor
- q(x) é o quociente
- r(x) é o resto

$$\begin{array}{l|l} p(x) & h(x) \\ \hline r(x) & q(x) \end{array}$$

Exemplos:

1º) Vamos efetuar a divisão de
$p(x) = 2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x - 1$ por
$h(x) = 2x^2 + 4x - 3$ e fazer a verificação:

$$\begin{array}{r|l}
2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x - 1 & 2x^2 + 4x - 3 \\ \hline
-2x^4 - 4x^3 + 3x^2 \quad\quad\quad\quad & x^2 - 3x + 1 \\ \hline
-6x^3 - 10x^2 + 10x - 1 & \\
6x^3 + 12x^2 - 9x \quad\; & \\ \hline
2x^2 + x - 1 & \\
-2x^2 - 4x + 3 & \\ \hline
-3x + 2 &
\end{array}$$

Fazendo a verificação, vem:
$q(x)h(x) + r(x) =$
$= (x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 4x - 3) + (-3x + 2) =$
$= (2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 13x - 3) + (-3x + 2) =$
$= 2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x - 1 = p(x)$

2º) O polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ é divisível por $h(x) = x^2 - 3x - 4$. Nessas condições, vamos resolver a equação $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 4x^2 - x + 4 & x^2 - 3x - 4 \\ \hline
-x^3 + 3x^2 + 4x \quad & x - 1 \\ \hline
-x^2 + 3x + 4 & \\
+x^2 - 3x - 4 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

Então:
$x^3 - 4x^2 - x + 4 = (x^2 - 3x - 4)(x - 1)$
Como $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$, vem
$(x^2 - 3x - 4)(x - 1) = 0$.
Portanto, a resolução da equação dada recai na resolução de equações de graus menores:

$$(x^2 - 3x - 4)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ ou } x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Logo, $S = \{-1, 1, 4\}$.

Exercícios propostos

10. Efetue a divisão de $p(x)$ por $h(x)$ quando:
a) $p(x) = x^2 + 4x + 3$ e $h(x) = x + 1$;
b) $p(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ e $h(x) = x + 4$;
c) $p(x) = x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 10x - 24$ e $h(x) = x^2 - 6x + 5$.

11. Calcule os valores de **m** e **n** para que seja exata a divisão do polinômio $p(x) = 2x^3 + mx^2 + nx - 1$ por $h(x) = 2x^2 - x - 1$.

12. Dividindo $p(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 3$ por certo polinômio $h(x)$, obtemos o quociente $q(x) = x - 1$ e o resto $r(x) = 2x - 1$. Determine o polinômio $h(x)$.

13. Sabendo que o polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ é divisível por $h(x) = x - 2$, resolva a equação $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$.

Divisão por (x − a): dispositivo prático de Briot-Ruffini

Há um dispositivo que permite efetuar as divisões por polinômios do tipo $x - a$ de uma maneira mais simples e rápida: é o chamado *dispositivo prático* ou *algoritmo de Briot-Ruffini*:

termo constante do divisor, com sinal trocado	coeficientes de **x** do dividendo p(x)	termo constante do dividendo p(x)
	coeficientes do quociente	resto

Vejamos o roteiro desse dispositivo prático efetuando a divisão de $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ por $h(x) = x - 2$.

1º)
$$\begin{array}{c|ccc:c}
2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline
 & & & &
\end{array}$$

2º)
$$\begin{array}{c|ccc:c}
2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline
 & 3 & & &
\end{array}$$

Repetimos (ou "abaixamos") o primeiro coeficiente do dividendo.

3º)
$$\begin{array}{c|ccc:c}
2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline
 & & 6 + (-5) & & \\
 & 3 & 1 & &
\end{array}$$

$3 \cdot 2 = 6$ e $6 + (-5) = 1$
Multiplicamos o termo repetido pelo divisor e somamos o produto com o próximo termo do dividendo.

4º)
$$\begin{array}{c|ccc:c}
2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline
 & & 6 + (-5) & 2 + 1 & \\
 & 3 & 1 & 3 &
\end{array}$$

$1 \cdot 2 = 2$ e $2 + 1 = 3$
Repetimos o processo para obter o novo termo do quociente.

5º)
$$\begin{array}{c|ccc:c}
2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline
 & & 6 + (-5) & 2 + 1 & 6 + (-2) \\
 & 3 & 1 & 3 & 4
\end{array}$$

$3 \cdot 2 = 6$ e $6 + (-2) = 4$

Pelo quadro, temos $q(x) = 3x^2 + x + 3$ e $r(x) = 4$.
Logo, $3x^3 - 5x^2 + x - 2 = (x - 2)(3x^2 + x + 3) + 4$.

PARA REFLETIR Na divisão por $x - a$, o resto é sempre uma constante, pois $x - a$ é um polinômio do 1º grau.

Exemplos:

1º) Vamos dividir $p(x) = 2x^4 + 7x^3 - 4x + 5$ por $h(x) = x + 3$.

-3	2	7	0	-4	5
	$\downarrow$	$\underbrace{-6 + 7}$	$\underbrace{-3 + 0}$	$\underbrace{9 + (-4)}$	$\underbrace{-15 + 5}$
	2	1	-3	5	-10

quociente: $q(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 5$
resto: $r(x) = -10$
Logo, $2x^4 + 7x^3 - 4x + 5 =$
$= (x + 3)(2x^3 + x^2 - 3x + 5) - 10$.

2º) Vamos determinar o quociente e o resto da divisão de $p(x) = 2x^2 - 5x + 2$ por $h(x) = 2x - 1$.
Observe que, neste caso, o coeficiente de **x** no binômio não é igual a 1. Para obter o quociente e o resto pedidos, devemos dividir todos os coeficientes de $p(x)$ e de $h(x)$ por 2. Assim obtemos o quociente procurado $q(x)$, enquanto o resto também ficará dividido por $2\left(\frac{r(x)}{2}\right)$. Então, temos:

$$\frac{p(x)}{2} = x^2 - \frac{5}{2}x + 1$$

$$\frac{h(x)}{2} = x - \frac{1}{2}$$

Aplicando o dispositivo prático, vem:

$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{5}{2}$	1
	$\downarrow$	$\underbrace{\frac{1}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right)}$	$\underbrace{-1 + 1}$
	1	-2	0

quociente: $q(x) = x - 2$

resto: $\frac{r(x)}{2} = 0 \Rightarrow r(x) = 0$

Logo, $2x^2 - 5x + 2 = (x - 2)(2x - 1)$.

PARA REFLETIR

$p(x) = \overbrace{(ax - b)}^{h(x)}q(x) + r(x)$ dividido por $a \neq 0$:

$$\frac{p(x)}{a} = \frac{(ax - b)q(x)}{a} + \frac{r(x)}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p(x)}{a} = \overbrace{\left(x - \frac{b}{a}\right)}^{\frac{h(x)}{a}}q(x) + \frac{r(x)}{a}$$

Exercícios propostos

14. Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, calcule o quociente e o resto da divisão de:
a) $p(x) = 5x^2 - 3x + 2$ por $h(x) = x + 3$.
b) $p(x) = x^4 + 3x^2 + x - 5$ por $h(x) = x + 2$.
c) $p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 1$ por $h(x) = x - 4$.
d) $p(x) = 2x^3 - 10x^2 + 8x - 3$ por $h(x) = x - 5$.
e) $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 2$ por $h(x) = 2x - 1$.
f) $p(x) = x^2 - 2x + 1$ por $h(x) = 3x + 1$.

15. Nos esquemas seguintes foi aplicado o dispositivo prático de Briot-Ruffini; calcule, então, o dividendo $p(x)$, o divisor $h(x)$, o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$.

a)

2	a	b	c	d
	1	3	−2	1

b)

3	m	n	p	q	r
	2	−1	1	−2	1

16. Calcule o valor de **a** sabendo que:
a) $p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + a$ é divisível por $h(x) = x - 1$;
b) $p(x) = 2x^3 + ax^2 + (2a + 1)x + a + 3$ é divisível por $x + 4$.

17. (PUC-SP) Calcule os valores de **a** e **b** para que o polinômio $p(x) = x^3 + ax + b$ seja divisível por $g(x) = (x - 1)^2$.

18. Efetue a divisão do polinômio $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + ix - 3i$ por $(x + i)$.

Teorema de D'Alembert

Este teorema diz que o resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x - a$ é $p(a)$.

Considerando que a divisão de $p(x)$ por $x - a$ resulta um quociente $q(x)$ e um resto **r**, temos:

$$p(x) = (x - a)q(x) + r$$

Fazendo $x = a$, vem:

$$p(a) = (a - a)q(a) + r = 0 \cdot q(a) + r = r \Rightarrow r = p(a)$$

PARA REFLETIR Na substituição de **x** por **a**, o resto **r** não muda, pois é um valor constante.

Exemplos:

1º) Vamos calcular o resto da divisão de $p(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 3$ por $h(x) = x - 4$.
De acordo com o teorema de D'Alembert:
$p(4) = 2(4)^3 - (4)^2 + 5(4) - 3 =$
$= 128 - 16 + 20 - 3 = 129$
Logo, o resto desta divisão é 129.

2º) Vamos determinar o valor de **a** de modo que o polinômio $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - ax + 2$ seja divisível por $h(x) = x - 2$.
Se $p(x)$ é divisível por $h(x)$, o resto da divisão é 0. Então, pelo teorema de D'Alembert, temos:
$p(2) = 0 \Rightarrow 2(2)^3 + 5(2)^2 - a(2) + 2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 16 + 20 - 2a + 2 = 0 \Rightarrow 2a = 38 \Rightarrow a = 19$
Logo, $a = 19$.

Exercícios propostos

19. Calcule o resto da divisão de:
a) $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 1$ por $h(x) = x - 1$;
b) $p(x) = x^4 + 2x^2 - x - 5$ por $h(x) = x + 3$.

20. Verifique se o polinômio $p(x) = x^2 - 3x + 2$ é divisível por $x + 3$.

21. Determine **b** e **c** de modo que o polinômio $p(x) = x^4 + x^2 + bx + c$ seja divisível por $h(x) = x - 2$, mas, quando dividido por $g(x) = x + 2$, deixe resto igual a 4.

22. Determine o polinômio p(x) do 3º grau que se anula para $x = 1$ e que, dividido por $x + 1$, $x - 2$ e $x + 2$, apresenta resto igual a 6.

Teorema do fator

Se **c** é uma raiz de um polinômio p(x), de grau $n > 0$, então $x - c$ é um fator de p(x).

Pelo teorema de D'Alembert, a divisão de p(x) por $x - c$ resulta um quociente q(x) e um resto p(c) tal que:

$$p(x) = (x - c)q(x) + p(c)$$

Se **c** é uma raiz de p(x), então $p(c) = 0$ e temos:

$$p(x) = (x - c)q(x)$$

Portanto, $x - c$ é um fator de p(x).

PARA REFLETIR
Demonstre a recíproca: se $x - c$ é um fator de p(x), então **c** é raiz de p(x).

Como conseqüência, podemos dizer que p(x) é divisível por $(x - a)$ e por $(x - b)$, com $a \neq b$, se, e somente se, p(x) for divisível por $(x - a)(x - b)$.

Exemplos:

1º) Dado $p(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$, determine p(x) para $x = 3$, $x = 2$ e $x = 0$. A seguir, escreva p(x) como produto de dois fatores.

- $p(3) = (3)^3 + (3)^2 - 10(3) + 8 =$
$= 27 + 9 - 30 + 8 = 14$
- $p(2) = (2)^3 + (2)^2 - 10(2) + 8 =$
$= 8 + 4 - 20 + 8 = 0$
- $p(0) = (0)^3 + (0)^2 - 10(0) + 8 = 8$

Como $p(2) = 0$, então $x - 2$ é um fator de p(x). Então, vamos aplicar o dispositivo prático de Briot-Ruffini:

2	1	1	−10	8
	1	3	−4	0

Logo, $q(x) = x^2 + 3x - 4$. Então,
$p(x) = (x - 2)(x^2 + 3x - 4)$.

2º) Vamos determinar os valores de **a** e **b** para que o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 20$ seja divisível por $(x + 1)(x - 4)$.

Para que p(x) seja divisível por $(x + 1)(x - 4)$, ele deve ser divisível por $(x + 1)$ e por $(x - 4)$.

Se p(x) é divisível por $x + 1$, temos:
$p(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 20 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -1 + a - b + 20 = 0 \Rightarrow a - b = -19$

Se p(x) é divisível por $x - 4$, vem:
$p(4) = 0 \Rightarrow (4)^3 + a(4)^2 + b(4) + 20 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 64 + 16a + 4b + 20 = 0 \Rightarrow 4a + b = -21$

Então, temos:

$$\begin{cases} a - b = -19 \\ 4a + b = -21 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = -8$ e $b = 11$.

Exercícios propostos

23. Mostre que $x + 4$ é fator do polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 18x + 8$ e calcule o quociente de p(x) por $x + 4$.

24. Dado $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$, determine p(x) para $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$. A seguir, escreva os fatores de p(x).

25. Determine o resto da divisão do polinômio $p(x) = 6x^3 - 2x^2 + x + 1$ por $q(x) = 3x - 6$.

26. (Fumec-MG) Determine **m** e **n** de modo que $p(x) = 2x^4 - x^3 + mx^2 - nx + 2$ seja divisível por $(x - 2)(x + 1)$.

7 Equações polinomiais ou algébricas: definição e elementos*

Denomina-se *equação polinomial* ou *algébrica* toda equação que pode ser escrita na forma:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \ (\text{com } a_n \neq 0)$$

em que os a_i ($a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$) são elementos do conjunto dos números complexos, $n \in \mathbb{N}^*$ e **n** é o grau da equação.

Exemplos:

1º) $3x + 1 = 0$ é uma equação algébrica do 1º grau.

2º) $x^2 - 3x - 4 = 0$ é uma equação algébrica do 2º grau.

3º) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ é uma equação algébrica do 3º grau.

4º) $x^4 - 8x = 0$ é uma equação algébrica do 4º grau.

5º) $3x^2 - 2ix + 1 = 0$ é uma equação algébrica do 2º grau.

* Veja a leitura no final do capítulo.

Raiz de uma equação polinomial ou algébrica

Denomina-se *raiz* da equação algébrica

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

o valor α de **x** que satisfaz a igualdade, ou seja, o valor tal que:

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha + a_0 = 0$$

Por exemplo, $x^2 - 7x + 10 = 0$ admite $x = 5$ como raiz, pois $(5)^2 - 7(5) + 10 = 25 - 35 + 10 = 0$.

Conjunto solução de uma equação algébrica

Denomina-se *conjunto solução* de uma equação algébrica o conjunto das raízes da equação.

Por exemplo, o conjunto solução da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$ é dado por $S = \{2, 5\}$.

8 Teorema fundamental da Álgebra

O *teorema fundamental da Álgebra*, que admitiremos sem demonstração, diz que:

Toda equação algébrica $p(x) = 0$ de grau **n** $(n \geq 1)$ possui pelo menos uma raiz complexa (real ou não).

Observação: Em 1799 o matemático Gauss demonstrou o teorema fundamental da Álgebra.

9 Decomposição em fatores de primeiro grau

Usando o teorema fundamental da Álgebra, podemos demonstrar que:

Todo polinômio
$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (com $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$) pode ser decomposto num produto de **n** fatores de 1º grau.

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot ... \cdot (x - x_n)$$

Naturalmente:

$$p(x) = 0 \Rightarrow a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot ... \cdot (x - x_n) = 0$$

ou seja, toda equação polinomial de grau **n** tem exatamente **n** raízes complexas.

Exemplos:

1º) Uma das raízes da equação $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$ é 1. Vamos resolver essa equação.

Se 1 é raiz de $p(x) = 0$, temos:
$p(x) = (x - 1)q_1(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$ ou $q_1(x) = 0$
Observando que o grau de $q_1(x)$ é 2 e sabendo resolver uma equação do 2º grau, podemos dizer que $q_1(x) = 0$ fornece as outras raízes.
Determinando $q_1(x)$, temos:

1	2	−4	−2	4
	2	−2	−4	0

$q_1(x) = 2x^2 - 2x - 4$
Determinando as raízes de $q_1(x) = 0$, vem:
$2x^2 - 2x - 4 = 0$
$\Delta = 4 + 32 = 36$
$x = \dfrac{2 \pm 6}{4} \Rightarrow x' = 2$ e
$x'' = -1$

PARA REFLETIR
Lembre-se de que resolver a equação significa determinar seu conjunto solução, que neste caso é formado pelo número 1 e pelas demais raízes.

Logo, as outras raízes são 2 e −1 e o conjunto solução da equação é $S = \{-1, 1, 2\}$.

2º) Vamos escrever um polinômio cujas raízes são apenas 1, −1 e 2 de tal modo que cada uma apareça uma única vez.
Como o polinômio tem três raízes diferentes, e cada uma aparece uma única vez, p(x) é do 3º grau:
$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$
Fazendo $a_n = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ e $x_3 = 2$, temos:
$p(x) = 1(x - 1)(x + 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
Logo, $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

3º) Vejamos qual é a forma fatorada do polinômio $3x^3 - 15x^2 - 3x + 15$, cujas raízes são 1, −1 e 5.
Pela decomposição, temos:
$p(x) = 3(x - 1)(x + 1)(x - 5)$

ATENÇÃO!
NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Exercícios propostos

27. Sabendo que 2 é raiz da equação $x^3 + 2x^2 - 5x + c = 0$, calcule o valor de **c** e o conjunto solução da equação.

28. Resolva as equações:
a) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$ sabendo que duas de suas raízes são −1 e 1;
b) $x^3 - 7x^2 + 36 = 0$ sabendo que −2 é uma de suas raízes.

29. Dada a equação $2x^3 - mx^2 - 2x + 4 = 0$, calcule o valor de **m** para que uma das raízes da equação seja 2. A seguir, calcule as outras raízes dessa equação.

30. Encontre os valores de **a**, **b** e **c** sabendo que 2, 4 e −3 são raízes da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

31. Determine o conjunto solução das equações:
a) $x^4 - 8x^3 - 25x^2 + 44x + 60 = 0$ sabendo que −1 e 2 são duas de suas raízes.
b) $x^3 - ix^2 + 4x - 4i = 0$ sabendo que i é uma de suas raízes.

Resolva em dupla os próximos exercícios.

32. (PUC-RS) Se os números -3, **a** e **b** são as raízes da equação $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$, calcule o valor de $a + b$.

33. (PUC-SP) Dado o polinômio

$$f = \begin{vmatrix} x & x & x \\ x+1 & -2 & x-1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

pedem-se:
a) as raízes de f;
b) o quociente e o resto da divisão de f por $x^2 - 1$.

Multiplicidade da raiz

PARA REFLETIR De cada fator do 1º grau, obtemos uma raiz.

Na decomposição de um polinômio p(x) de grau $n > 0$ em um produto de **n** fatores do 1º grau, podemos encontrar dois ou mais fatores idênticos.

Então em uma equação algébrica de grau **n**, obtemos **n** raízes, das quais algumas podem ser iguais, ou seja, toda equação algébrica de grau $n > 0$ tem, no máximo, **n** raízes distintas.

O número de vezes que uma mesma raiz aparece indica a multiplicidade da raiz.

Exemplos:

1º) No polinômio
$p(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3)$, há dois fatores idênticos a $x - 3$. Nesse caso, dizemos que 3 é *raiz dupla* ou de *multiplicidade 2*.

2º) No polinômio
$p(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) =$
$= (x + 1)^2(x - 2)$, há dois fatores idênticos a $(x + 1)$ e um fator $(x - 2)$. Nesse caso, dizemos que -1 é *raiz dupla* ou de *multiplicidade 2* e 2 é *raiz simples* ou de *multiplicidade 1*.

3º) No polinômio
$p(x) = x^5 - 7x^4 + 10x^3 + 18x^2 - 27x - 27 =$
$= (x - 3)^3(x + 1)^2 =$
$= (x - 3)(x - 3)(x - 3)(x + 1)(x + 1)$, há três fatores idênticos a $(x - 3)$ e dois fatores idênticos a $(x + 1)$. Nesse caso, dizemos que 3 é *raiz tripla* ou de *multiplicidade* 3 e -1 é *raiz dupla* ou de *multiplicidade 2*.

4º) Vejamos qual é a multiplicidade da raiz 2 do polinômio
$p(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$.

Vamos eliminar a raiz 2 do polinômio sucessivas vezes, até que isso não seja mais possível.

sim →	2	1	−5	6	4	−8
sim →	2	1	−3	0	4	0
sim →	2	1	−1	−2	0	
não →	2	1	1	0		
		1	3 ≠ 0			

Então:
$p(x) = (x - 2)^3(x + 1)$
Logo, 2 é raiz tripla ou de multiplicidade 3.

5º) Vamos resolver a equação
$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6 = 0$ sabendo que -1 é raiz dupla.
Se -1 é raiz dupla da equação, esta pode ser escrita na forma: $(x + 1)^2q(x) = 0$.
Para determinar q(x), devemos eliminar da equação a raiz -1 duas vezes sucessivas:

−1	1	−3	−3	7	6
−1	1	−4	1	6	0
	1	−5	6	0	

coeficientes de q(x)

$q(x) = x^2 - 5x + 6$
Caímos na equação $x^2 - 5x + 6 = 0$. Resolvendo-a, temos $x = 3$ ou $x = 2$.
Logo, $S = \{-1, 2, 3\}$.

6º) Dada a equação $x^3 + ax^2 - 8x + b = 0$, calcule os valores de **a** e **b** de forma que 2 seja raiz dupla da equação.
Eliminando a raiz 2 duas vezes sucessivas, temos:

2	1	a	−8	b
2	1	2 + a	2a − 4	4a − 8 + b
	1	4 + a	4a + 4	

Fazendo os restos iguais a zero, vem:

$$\begin{cases} 4a + 4 = 0 \ \text{(I)} \\ 4a - 8 + b = 0 \ \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (I), vem:
$4a + 4 = 0 \Rightarrow 4a = -4 \Rightarrow a = -1$
Substituindo $a = -1$ na equação (II), temos:
$-4 - 8 + b = 0 \Rightarrow b = 12$
Logo, $a = -1$ e $b = 12$.

Exercícios propostos

34. Na equação $(x - 3)^3(x + 4)^2(x - 1)^5 = 0$, quais são as multiplicidades de suas raízes?

35. Qual é a multiplicidade da raiz -1 na equação $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$?

36. Resolva a equação polinomial $x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 7x - 3 = 0$ sabendo que -1 é raiz tripla da equação.

37. (Fuvest-SP) O número 2 é raiz dupla da equação $ax^3 + bx + 16 = 0$. Calcule os valores de **a** e **b**.

38. O número 3 é raiz dupla da equação $x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0$. Determine as outras duas raízes da equação.

39. Sabendo que 1 é raiz dupla da equação $x^3 + ax^2 - 2x + b = 0$, determine o valor de $a + b$.

40. Determine uma equação polinomial do 3º grau com $S = \{3, 5\}$, em que 3 é raiz de multiplicidade 2.

10 Relações de Girard

As relações de Girard são fórmulas matemáticas que relacionam os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica. Vejamos algumas situações.

Na equação do 2º grau

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, $a \neq 0$ e $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ são as raízes.

Desenvolvendo o produto, temos:

$ax^2 + bx + c =$
$= a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$

PARA REFLETIR x_1 e x_2 podem ser distintas ou não.

Dividindo todos os termos por **a**, vem:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

Pela igualdade de polinômios, temos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Na equação do 3º grau

Consideremos a equação algébrica do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ e sejam $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ e $\mathbf{x_3}$ as suas raízes. A sua decomposição em fatores do 1º grau é:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Desenvolvendo o produto, temos:

$ax^3 + bx^2 + cx + d =$
$= a[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3]$

Dividindo todos os termos por **a**, vem:

$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} =$
$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$

Pela igualdade de polinômios, temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

Na equação de grau n

De forma análoga, considerando a equação algébrica de grau **n**:

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

de raízes $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$, $\mathbf{x_4}$, ..., $\mathbf{x_n}$, são válidas as seguintes relações entre as raízes e os coeficientes, conhecidas como relações de Girard:

1ª) A soma das raízes é:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

2ª) O produto de **n** raízes é:

$$x_1x_2x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

3ª) A soma dos produtos das raízes, quando tomadas:

a) duas a duas, é:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

b) três a três, é:

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

c) quatro a quatro, é:

$$x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + \ldots + x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-4}}{a_n}$$

Exemplos:

1º) Vamos escrever as relações de Girard para a equação algébrica $x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$ considerando x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação.

Pela equação, temos $a_n = 1$, $a_{n-1} = 7$, $a_{n-2} = -3$, $a_0 = 5$.

Assim, obtemos as seguintes relações:

- $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{7}{1} = -7$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_{n-2}}{a_n} = \frac{-3}{1} = -3$
- $x_1x_2x_3 = (-1)^n\frac{a_0}{a_n} = (-1)^3\frac{5}{1} = -5$

PARA REFLETIR Partindo de $-\left(\frac{b}{a}\right)$, alternamos os sinais de − e + para $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$, $\frac{e}{a}$, $\frac{f}{a}$, e assim por diante, de acordo com o grau da equação.

Fazendo dessa forma prática, temos:

- $x_1 + x_2 + x_3 = -\left(\frac{7}{1}\right) = -7$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = +\left(\frac{-3}{1}\right) = -3$
- $x_1x_2x_3 = -\left(\frac{5}{1}\right) = -5$

2º) Vamos resolver a equação $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$ sabendo que uma raiz é dupla.
Como uma raiz é dupla, vamos indicar as raízes por x_1, x_1 e x_2. Usando as relações de Girard, temos:

- $x_1 + x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow 2x_1 + x_2 = 5$ (I)
- $x_1x_1 + x_1x_2 + x_1x_2 = 7 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 = 7$ (II)
- $x_1x_1x_2 = 3 \Rightarrow x_1^2x_2 = 3$ (III)

Da relação (I), temos:
$2x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 5 - 2x_1$
Substituindo em (II), vem:

$$x_1^2 + 2x_1x_2 = 7 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1(5 - 2x_1) = 7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1^2 + 10x_1 - 4x_1^2 - 7 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -3x_1^2 + 10x_1 - 7 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x_1^2 - 10x_1 + 7 = 0$$
$$\Delta = 16$$
$$x_1 = \frac{10 \pm 4}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{7}{3} \text{ ou } x_1 = 1$$

Vamos verificar qual dos valores de x_1 é raiz da equação inicial:

$p\left(\frac{7}{3}\right) = -\frac{32}{27} \Rightarrow \frac{7}{3}$ não é raiz da equação
$p(1) = 0 \Rightarrow 1$ é a raiz dupla da equação
Assim, se $x_1 = 1$, vem:
$x_2 = 5 - 2(1) = 3$
Logo, $S = \{1, 3\}$.

3º) Vamos resolver a equação $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ sabendo que suas raízes estão em PA.
Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação, vamos representá-las por $x_1 = \alpha - r$, $x_2 = \alpha$ e $x_3 = \alpha + r$.
Pela relação de Girard, temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9 \Rightarrow \alpha - \cancel{r} + \alpha + \alpha + \cancel{r} = 9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3\alpha = 9 \Rightarrow \alpha = 3$$

Como $x_2 = \alpha = 3$ é uma das raízes, temos:
$p(x) = (x - 3)q(x) = 0$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 3 & 1 & -9 & 23 & -15 \\ \hline & 1 & -6 & 5 & 0 \end{array}$$

$q(x) = x^2 - 6x + 5 = 0$
Resolvendo a equação, obtemos $x = 5$ ou $x = 1$.
Logo, $S = \{1, 3, 5\}$.

Exercícios propostos

41. A equação $3x^3 + 2x^2 - x - 3 = 0$ admite raízes x_1, x_2 e x_3. Escreva as relações de Girard para essa equação.

42. As raízes da equação polinomial $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$ estão em PA. Calcule essas raízes.

43. Resolva a equação algébrica $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ sabendo que a soma de duas de suas raízes é igual a 5.

44. Qual é o valor de k na equação algébrica $x^3 - 3x^2 - 6x + k = 0$ para que as raízes da equação estejam em PA?

Resolva os próximos exercícios em equipe.

45. (ITA-SP) Os números **a**, **b** e **c** são raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$. Nessas condições, calcule o valor de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

46. (EEM-SP) Determine as raízes da equação $x^3 - 3x - 2 = 0$ sabendo que uma delas é dupla.

47. (UFMG) Os números **a**, **b** e **c** são as raízes da equação $x^3 + x - 1 = 0$. Nessas condições, calcule o valor de $\log\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

48. (EEM-SP) Dada a equação algébrica $3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = 0$ e sabendo que o produto de duas de suas raízes é igual a 1, calcule as raízes da equação.

49. (Mack-SP) As raízes da equação $x^3 - 6x^2 + kx + 64 = 0$ estão em PG. Nessas condições, calcule o coeficiente **k**.

11 Pesquisa de raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros

As equações polinomiais de grau maior do que 2 não têm um processo determinado de resolução por meio de fórmulas. Devemos procurar, então, uma ou mais raízes para com elas encontrar todas as raízes.

Neste item, vamos estudar uma propriedade que nos auxiliará na pesquisa das raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros.

Se o número racional $\frac{p}{q}$, com **p** e **q** primos entre si, é raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros:
$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$
então **p** é divisor de a_0 e **q** é divisor de a_n.

PARA REFLETIR Dizer que o número racional $\frac{p}{q}$ tem **p** e **q** inteiros e primos entre si equivale a dizer que $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível.

Exemplos:

1º) Vamos pesquisar as raízes racionais da equação $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$.
Na equação dada, temos $a_0 = 2$ e $a_n = 3$.
p é divisor de $2 \Rightarrow p \in \{-1, 1, -2, 2\}$
q é divisor de $3 \Rightarrow q \in \{-1, 1, -3, 3\}$

Pela propriedade, as prováveis raízes racionais são:

$$\frac{p}{q} \in \left\{-1, 1, -2, 2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$$

Fazendo a verificação, temos:

$p(-1) = 8 \Rightarrow -1$ não é raiz

$p(1) = 0 \Rightarrow 1$ é raiz

A partir da raiz descoberta, vem:

$$\begin{array}{c|ccc:c} 1 & 3 & 2 & -7 & 2 \\ \hline & 3 & 5 & -2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3x^2 + 5x - 2 = 0 \\ \Delta = 25 + 24 = 49 \end{array}$$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{6} \Rightarrow x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ ou}$$

$$x = \frac{-12}{6} = -2$$

Logo, $S = \left\{-2, \frac{1}{3}, 1\right\}$.

Observação: Como as outras duas raízes, além de 1, são números racionais, elas seriam descobertas se a pesquisa das raízes racionais prosseguisse:

$p(-2) = 0 \Rightarrow -2$ é raiz

$p(2) = 20 \Rightarrow 2$ não é raiz

$p\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{40}{9} \Rightarrow -\frac{1}{3}$ não é raiz

$p\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}$ é raiz

$p\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{20}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3}$ não é raiz

$p\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{9} \Rightarrow \frac{2}{3}$ não é raiz

PARA REFLETIR

Fique atento:

- nem todo número $\frac{p}{q}$ obtido é raiz da equação;
- essa pesquisa de raízes racionais só pode ser feita em equações de coeficientes inteiros.

2º) Vamos resolver a equação $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$.

Pela equação dada, temos $a_0 = 6$ e $a_n = 1$.

p é divisor de $6 \Rightarrow p \in \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$

q é divisor de $1 \Rightarrow q \in \{-1, 1\}$

Pela propriedade, as possíveis raízes racionais são:

$$\frac{p}{q} \in \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$$

Fazendo a pesquisa, temos:

$p(-1) = 0 \Rightarrow -1$ é raiz

$p(1) = 0 \Rightarrow 1$ é raiz

Observando que -1 e 1 são raízes da equação, vamos obter as outras duas raízes:

$$\begin{array}{c|cccc:c} -1 & 1 & 1 & -7 & -1 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 0 & -7 & 6 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 & \end{array}$$

Daí, temos:

$p(x) = (x + 1)(x - 1)q(x) = 0$ e $q(x) = x^2 + x - 6$

Fazendo $x^2 + x - 6 = 0$ e resolvendo a equação, obtemos $x = 2$ ou $x = -3$.

Logo, $S = \{-3, -1, 1, 2\}$.

PARA REFLETIR

- Se a soma dos coeficientes do polinômio for nula, então 1 é raiz do polinômio.
- Se o termo independente for nulo, então 0 é raiz.

Exercícios propostos

50. Pesquise as raízes racionais das equações algébricas:

a) $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

b) $4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$

c) $4x^3 - 5x + 1 = 0$

d) $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$

51. (PUC-SP) Quais são as raízes da equação $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$?

52. (FEI-SP) Resolva a equação cúbica $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$.

53. (ITA-SP) Quais são as raízes inteiras da equação $x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0$?

12 Raízes complexas não reais em uma equação algébrica de coeficientes reais

Consideremos a equação algébrica $x^2 - 2x + 2 = 0$, que tem todos os coeficientes reais e pode ser resolvida pela fórmula de Báskara:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} \Rightarrow x = 1 + i \text{ ou } x = 1 - i$$

$S = \{1 + i, 1 - i\}$

Observemos que a raiz $1 + i$ é um número complexo não real e a outra raiz, $1 - i$, é o seu conjugado. Podemos demonstrar que:

> Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raiz o número complexo $a + bi$, com $b \neq 0$, então o complexo conjugado $a - bi$ também é raiz da equação.

Exemplo:

Vamos resolver a equação $x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 42x + 20 = 0$ sabendo que $3 + i$ é uma raiz dela.

Se $3 + i$ é raiz da equação, então seu conjugado $3 - i$ é também raiz da equação.

Logo:

$p(x) = [x - (3 + i)][x - (3 - i)]q(x) =$

$= [(x - 3) - i][(x - 3) + i]q(x) = [(x - 3)^2 - i^2]q(x) =$

$= (x^2 - 6x + 10)q(x)$

Vamos calcular q(x), dividindo p(x) por $x^2 - 6x + 10$:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -9x^3 & +30x^2 & -42x & +20 & x^2 - 6x + 10 \\
\hline
-x^4 & +6x^3 & -10x^2 & & & x^2 - 3x + 2 \\
\hline
 & -3x^3 & +20x^2 & -42x & +20 & \\
 & +3x^3 & -18x^2 & +30x & & \\
\hline
 & & 2x^2 & -12x & +20 & \\
 & & -2x^2 & +12x & -20 & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Então, $q(x) = x^2 - 3x + 2$.

Fazendo $x^2 - 3x + 2 = 0$ e resolvendo a equação, obtemos $x = 2$ ou $x = 1$.

Logo, $S = \{3 + i, 3 - i, 2, 1\}$.

ATENÇÃO!
NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Exercícios propostos

54. Determine as raízes das equações sabendo que **i** é uma das raízes:

a) $x^4 - x^3 - 11x^2 - x - 12 = 0$

b) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0$

55. Qual deve ser o valor de **a** para que 2i seja uma das raízes da equação $x^4 - 3x^3 + 6x^2 + ax + 8 = 0$?

56. Os números 1 e 2 + i são raízes da equação algébrica $x^3 + ax^2 + bx - c = 0$, em que **a**, **b** e **c** são coeficientes reais. Calcule o valor do coeficiente **c**.

57. O número 2 + i é uma das raízes da equação $3x^3 - 14x^2 + mx - 10 = 0$. Nessas condições, calcule o valor de **m** e a raiz real da equação.

Desafio em equipe

(ITA-SP) Se P(x) é um polinômio do 5º grau que satisfaz as condições $1 = P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5)$ e $P(6) = 0$, então temos:

a) $P(0) = 4$.
b) $P(0) = 3$.
c) $P(0) = 9$.
d) $P(0) = 2$.
e) nda.