

O estudo dos gases tem uma importância muito grande na prova do ITA, principalmente por essa teoria ser a base do estudo da Termodinâmica. Daremos maior ênfase nesse material na parte básica que envolve os gases, começando com as definições das funções de estado e depois partindo para os principais resultados obtidos pelos cientistas ao longo da história.

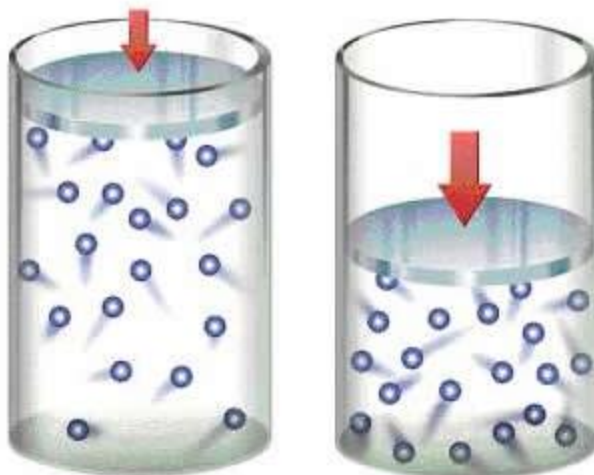
## 1. Os conceitos fundamentais

### a) Pressão

A pressão é definida como sendo a força aplicada a uma unidade de área. Logo, podemos expressar a pressão da seguinte forma:

$$P = \frac{F}{A}$$

Quando nos referimos aos gases, entende-se por pressão como sendo a força média que as partículas gasosas exercem no recipiente em que esse gás se encontra e dividindo essa força pela área da superfície. A letra utilizada para representar a pressão será o P.



### **b) Volume**

O volume de um gás é o espaço ocupado por suas moléculas. A letra utilizada para representar o volume será o V. Na prática, as partículas gasosas ocupam todo o espaço do recipiente em que ele se encontrar.

### **c) Temperatura**

A temperatura é a medida de agitação térmica de partículas. Logo, em um gás, ela é indica a agitação térmica média das partículas. A letra utilizada para representar a temperatura será o T

## **2. O gás ideal**

O gás ideal quando:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Volume das moléculas} = 0 \\ \text{Interação entre as moléculas é nula} \end{array} \right.$$

A molécula dos gases deve ser nula para que não haja choque entre as próprias moléculas dos gases, fazendo com que haja choque somente com as paredes do recipiente. A interação deve ser nula para que haja uma independência

Esse tipo de gás não existe, pois sempre há interação entre partículas gasosas e também há choques entre as próprias moléculas desse gás. Porém, existem gases que se aproximam desse comportamento. Eles são aqueles que estão a altas temperaturas e a baixas pressões.

Os gases ideais que serão utilizados nesse material, pois eles são mais simples de serem estudados e possuem propriedades como veremos no decorrer deste material.

## **3. Transformações gasosas**

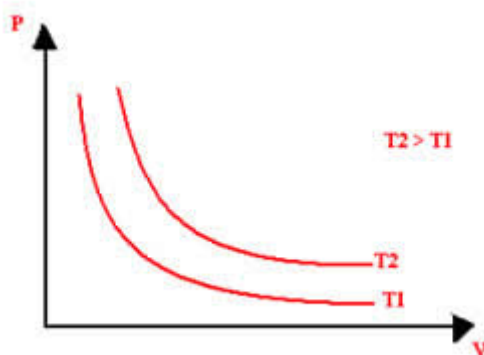
As transformações gasosas são os processos em que não há mudança da massa gasosa que se está examinando. Abaixo segue algumas das principais transformações.

### **a) Transformação Isotérmica**

Essa transformação, também conhecida como Lei de Boyle, é realizada como o próprio nome diz, fazendo com que a temperatura fique constante durante todo o processo. Neste processo, observa-se que:

$$PV = \text{cte}$$

Utilizando-se de um gráfico de pressão por volume, obtém-se uma curva chamada de isoterma, que é uma hipérbole equilátera, como mostra o gráfico abaixo:



*Gráfico de pressão por volume de uma isotérmica*

Através desse processo, também foi observado que quanto **MAIOR** o produto PV, **MAIOR** será a temperatura em que o gás se encontra nesse processo. Graficamente, é a curva que está "mais longe" da origem.

Logo abaixo, temos um exercício que envolve alguns artifícios matemáticos e que envolvem a descrição do parágrafo acima.

**Exercício 1:** Dada uma transformação que obedece a seguinte equação:

$$P = -V + 4 \text{ (unidades arbitrárias)}$$

Sendo que ela vai do volume de 3 (u.a.) até o volume de 0,5 (u.a.).

(Observe que precisa-se de que  $-V + 4 > 0$  para que a situação realmente exista. Isso acontece conforme discutiremos na resolução do problema.)

Diga em qual pressão e volume que o gás possui a maior temperatura.

**Resolução:** Segundo o exposto acima, sabemos que a temperatura é maior quando o produto PV for o maior possível. Logo, substituindo a equação do enunciado, temos que:

$$PV = (-V + 4)(V) = -V^2 + 4V$$

Observe que a podemos escrever tal equação da seguinte forma:

$$f(x) = -x^2 + 4x$$

sendo  $f(x) = PV$  e  $V = x$ . Logo, gráfico acima representa uma parábola de raízes 0 e 4. Assim, para  $x = 2$ , teremos o ponto de maior valor de  $f(x)$ , ou seja, maior valor de  $PV$ . Concluindo, o volume pedido é  $V = 2(\text{u. a.})$  e a pressão é  $P = -2 + 4 = 2(\text{u. a.})$ . ■

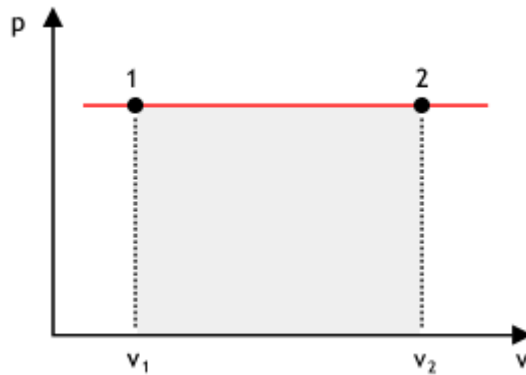
Observe que, pelo gráfico da parábola, ela só seria negativa para pontos fora do intervalo  $(0,4)$ . Logo a situação está consistente!

### b) Transformação isobárica

Essa transformação é realizada mantendo a **pressão constante**, como o próprio nome diz. Neste processo, observa-se que:

$$\frac{V}{T} = \text{cte}$$

Utilizando-se de um gráfico de pressão por volume, vemos que a curva obtida é uma reta paralela ao eixo das abscissas.



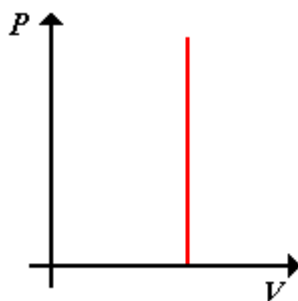
*Gráfico de pressão por volume de uma transformação isobárica*

### c) Transformação isocórica ou isovolumétrica

É uma transformação na qual se mantém **constante o volume**, como o próprio nome diz. Nesta transformação, observa-se que:

$$\frac{P}{T} = \text{cte}$$

Colocando esse processo num gráfico de pressão e volume, percebe-se que a curva obtida é uma reta paralela ao eixo das ordenadas.



*Gráfico de pressão por volume de uma transformação isovolumétrica*

### 3. Equação geral dos gases ideais

Neste tópico, iremos expor a equação geral dos gases em uma transformação gasosa (ou seja, em que não há mudança de massa da substância gasosa em análise). Para tal, usaremos as transformações vistas anteriormente. Imaginemos que de um estado com pressão  $P_i$ , volume  $V_i$  e de temperatura  $T_i$ , queiramos chegar até um estado de pressão  $P_f$ , volume  $V_f$  e temperatura  $T_f$ . Perceba que podemos chegar a esse estado fazendo uma transformação uma transformação isobárica até uma temperatura  $T_f$  seguida de uma isotérmica até uma pressão  $P_f$  e volume  $V_f$ .

Para a transformação isobárica:

$$\frac{V_i}{T_i} = \frac{V'}{T_f} \quad (\text{i})$$

Para a transformação isotérmica (o gás ainda está na pressão  $P_i$ ):

$$P_i V' = P_f V_f \quad (\text{ii})$$

Multiplicando a equação (i) pela equação (ii):

$$\frac{P_i V' V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f V'}{T_f} \Rightarrow \frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f}$$

Logo, para uma transformação gasosa, vale a seguinte relação:

$$\frac{PV}{T} = \text{cte}$$

#### 4. Equação de Clapeyron

Essa é uma das equações mais famosas dos gases. Ela generaliza a equação geral dos gases para qualquer processo de um sistema gasoso, inclusive os processos em que há mudança da massa gasosa. Antes de chegarmos a essa equação, vamos primeiro definir o que é mol.

Mol é a quantidade de matéria contida em 12g de carbono ( $C^{12}$ ).

Essa quantidade é o número  $6,02 \times 10^{23}$ , o conhecido número de Avogadro.

Para uma molécula de massa molar  $M$ , cuja amostra possui massa  $m$ , define-se o número de mol por:

$$n = \frac{m}{M}$$

Que é a quantidade de mols que possui a amostra. Agora já se pode partir para a equação de Clapeyron.

Os cientistas fizeram diversas medidas com vários gases e perceberam que a relação abaixo sempre é válida:

$$\frac{PV}{nT} = \text{cte}$$

Essa constante era a mesma, independente do gás que se estava analisando. Essa constante recebeu o nome de constante universal dos gases ideais, representada por  $R$ . Logo, a equação pode ser reescrita como:

$$PV = nRT$$

$$\text{onde } R = 0,082 \text{ atm.l.mol}^{-1}.K^{-1}$$

Observação: A temperatura que se usa na equação de Clapeyron é em **kelvin**! Para transformar uma temperatura em  $^{\circ}C$  para  $K$ , basta usar a seguinte relação:

$$T_k = T_c + 273$$

Exercício 2: Com uma mesma amostra gasosa, realiza-se duas transformações isocóricas, que seguem a seguinte regra:

i)  $P/T = 1$

ii)  $P/T = 2$

Qual delas é feita a um maior volume?

**Resolução:** Como é uma transformação, a massa de gás não varia, ou seja, o número de mols  $n$  não varia. Utilizando-se da equação de Clapeyron, obtemos que:

$$\frac{P}{T} = \frac{nR}{V}, \text{ ou seja, } \frac{P}{T} \propto \frac{1}{V}$$

Portanto, quanto maior for a  $V$  constante, menor será o volume em que um gás. Logo, na transformação i) , temos o maior volume. ■

## 5. Misturas Gasosas

As misturas gasosas, como próprio nome diz, é quando se analisa uma amostra gasosa que contém mais de um tipo de gás, por exemplo, o ar atmosférico. Nesta seção, discutiremos o conceito de pressão parcial e volume parcial. Antes de começarmos essa discussão, primeiramente vamos definir o que vem a ser fração molar.

Fração molar de um gás é definida como sendo o quociente entre a quantidade de mols do gás analisado pela quantidade total em mols da mistura total. Em símbolos:

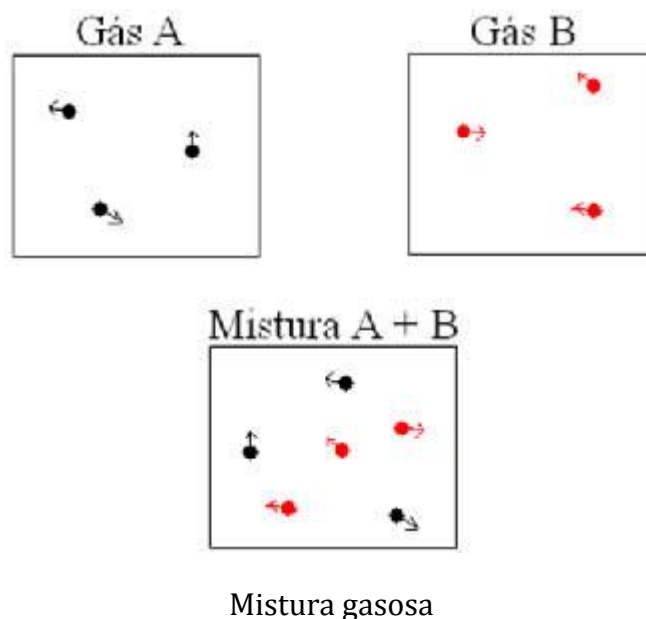
$$X_a = \frac{n_a}{n_{\text{total}}}$$

Repare também que a soma das frações parciais de todos os constituintes de uma mistura gasosa também é 1, ou seja:

$$\boxed{X_1 + X_2 + \dots + X_n = 1}$$

Onde os gases das misturas gasosas são representados pelos índices 1, 2, ..., n.

Vamos agora começar a discussão. Utilizaremos a figura abaixo para facilitar o entendimento.



### a) Pressão Parcial

A pressão parcial de um gás em uma mistura é a pressão que o gás exerceria se ele estivesse sozinho, nas mesmas condições da mistura gasosa. (vide figura acima)

Em outras palavras, seja uma mistura gasosa que se encontra em um volume  $V$  e temperatura  $T$ . A pressão parcial de um gás A da mistura é obtida deixando-se somente as partículas do gás a nesse volume  $V$  e nessa temperatura  $T$ . Vamos equacionar o problema. Para a mistura gasosa, que é formada por gases ideais, utilizamos a equação de Clapeyron:

$$P_{\text{total}} V = n_{\text{total}} RT$$

Para o gás A, vamos calcular a pressão parcial para esse gás, utilizando novamente a equação de Clapeyron:

$$P_a V = n_a RT$$

Dividindo-se as duas expressões, obtemos:

$$\frac{P_a}{P_{\text{total}}} = \frac{n_a}{n_{\text{total}}} = X_a$$

Assim, para obtermos uma pressão parcial de um gás, podemos tomar:

$$\boxed{P_a = P_{\text{total}} X_a}$$



Observe que se tivermos k tipos de gases na mistura e se somarmos suas pressões parciais, tem-se:

$$P_1 + P_2 + \dots + P_k = \sum_{i=1}^k P_i = P_{\text{total}} (X_1 + X_2 + \dots + X_k) = P_{\text{total}} \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)}{n_{\text{total}}}$$

Mas, como  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n_{\text{total}}$  (como visto em frações parciais), pois é a soma em mols de todas as partículas, temos:

$$P_1 + P_2 + \dots + P_k = \sum_{i=1}^k P_i = P_{\text{total}}$$

Ou seja, ao somarmos as pressões parciais dos gases, obtemos a pressão em que se encontra a mistura gasosa (representada aqui como  $P_{\text{total}}$ ). Esse resultado também é conhecido como Lei de Dalton para pressões parciais.

Para o leitor que não está acostumado com a notação

$$\sum_{i=1}^k P_i = P_1 + P_2 + \dots + P_k$$

Ela indica a soma das pressões cujos índices variam de 1 até k (a parte de baixo, onde se tem  $i = 1$ , é o índice no qual começa a soma e k indica o ultimo índice, como observa-se acima).

**Exercício 3a:** Calcule a pressão parcial do Nitrogênio no ar atmosférico.

**Resolução:** Sabe-se que o ar é formado por aproximadamente 78% do gás nitrogênio. Essa informação nos diz que em uma amostra do ar atmosférico, 78% de suas partículas são nitrogênio. Dessa informação, tiramos que a fração molar do nitrogênio é:

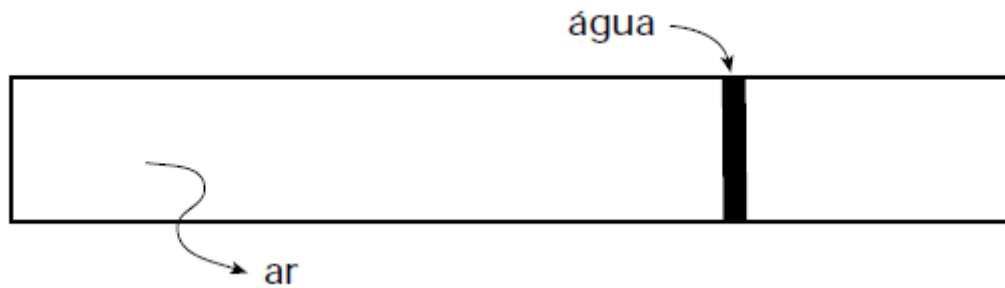
$$X_{N_2} = 0,78$$

Utilizando a fórmula obtida no problema, temos que (como  $P_{\text{total}} = 1\text{atm}$ ):

$$P_{N_2} = X_{N_2} P_{\text{total}} = 0,78 \text{ atm}$$

■

**Exercício 3b:** (ITA - 2002) Um tubo capilar fechado em uma extremidade contém uma quantidade de ar aprisionada por um pequeno volume de água. A  $7,0^\circ\text{C}$  e à pressão atmosférica (76,0 cm Hg) o comprimento do trecho com ar aprisionado é de 15,0 cm. Determine o comprimento do trecho com ar aprisionado a  $17,0^\circ\text{C}$ . Se necessário, empregue os seguintes valores de pressão de vapor da água: 0,75cm Hg a  $7,0^\circ\text{C}$  e 1,42 cm Hg a  $17,0^\circ\text{C}$ .



**Resolução:** Antes de ver a resolução, vamos dar uma breve explicação sobre pressão de vapor de um líquido. Essa pressão é a pressão na qual um líquido se encontra em equilíbrio com o seu vapor. Ela é influenciada pela temperatura e também se há ou não presença de soluto na solução. A análise qualitativa do efeito do soluto é analisada em Química. Continuemos a solução.

Para haver o equilíbrio, a pressão interna da mistura gasosa ar + água em vapor deve ser igual à pressão externa do ar atmosférico. Considere A como a área da base do tubo.

1) Para a situação inicial:

$$P_{int} = P_{externa} \Rightarrow P_{água} + P_{ar} = P_{externa} \Rightarrow P_{ar,i} = 76 - 0,75 = 75,25 \text{ cmHg}$$

Utilizando a equação de Clapeyron:

$$P_{ar,i}V = n_{ar}RT_i$$

O Volume inicial é 15S, assim:

$$\frac{n_{ar}R}{S} = \frac{T_i}{15P_{ar,i}} \quad (i)$$

2) Para a situação final, repetimos o mesmo procedimento:

$P_{ar,f} = P_{externa} - P_{água} = 76 - 1,42 = 74,58 \text{ cmHg}$   
e utilizando novamente Clapeyron, obtemos (com volume agora de xS):

$$\frac{n_{ar}R}{S} = \frac{T_f}{xP_{ar,f}} \quad (ii)$$

Observe que o número de mols de gás não varia dentro do tubo, logo podemos igualar (i) e (ii):

$$x = \frac{15P_{ar,i}T_f}{T_iP_{ar,f}} = 15 \times \frac{(75,25)(273 + 17)}{(74,58)(273 + 7)} \cong 15,67 \text{ cm}$$

■

## b) Volume Parcial

Assim como a pressão parcial, existe também o conceito de volume parcial. É definido de maneira análoga à pressão parcial.

Volume parcial é o volume que um gás A de uma mistura gasosa ocuparia caso ele estivesse sozinho, nas mesmas condições da mistura. (

Em outras palavras, é o volume ocupado por um gás A, tirando todas as outras partículas de outras gases diferentes de A, mantendo a pressão total e a temperatura da mistura. Para a mistura gasosa, podemos escrever:

$$PV_{\text{total}} = n_{\text{total}} RT$$

E para o volume parcial do gás A, escrevemos:

$$PV_a = n_a RT$$

Dividindo a última pela penúltima:

$$\frac{V_a}{V_{\text{total}}} = \frac{n_a}{n_{\text{total}}} = X_a$$

Portanto, o volume parcial do gás A pode ser calculado por:

$$\boxed{V_a = V_{\text{total}} X_a}$$

**Exercício 4:** Prove que a soma dos volumes parciais de todos os gases da mistura é igual ao volume total da mistura gasosa.

**Resolução:** Procedendo da mesma forma que a pressão parcial (para uma mistura de k gases diferentes):

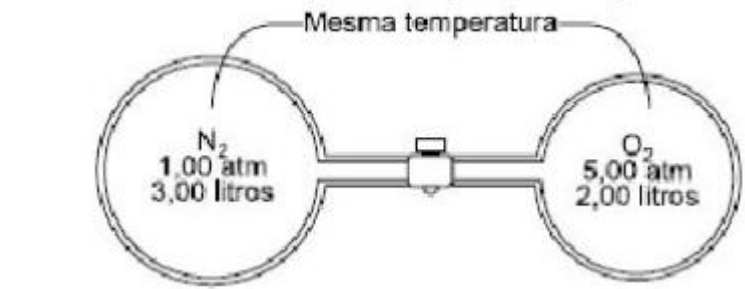
$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + \dots + V_k &= \sum_{i=1}^k V_i = V_{\text{total}} (X_1 + X_2 + \dots + X_k) \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^k V_i &= \frac{V_{\text{total}} (n_1 + n_2 + \dots + n_k)}{n_{\text{total}}} = V_{\text{total}} \end{aligned}$$

■

Em suma, podemos resumir os dois tópicos discutidos da seguinte forma:

$$X_a = \frac{P_a}{P_{\text{total}}} = \frac{V_a}{V_{\text{total}}} = \frac{n_a}{n_{\text{total}}}$$

**Exercício 5:** (ITA) Temos um recipiente com  $N_2$  puro e outro com  $O_2$  puro. Volumes e pressões iniciais estão assinalados no esquema seguinte.



Abrindo a torneira que separa os dois gases e mantendo a temperatura, a pressão interna se estabiliza no valor de:

- a) 6,00 atm      b) 3,00 atm      c) 2,60 atm      d) 2,50 atm  
e) 2,17 atm

**Resolução:** Esse é um tipo clássico de problemas, também chamados de problemas de balões. Vamos mostrar como resolvê-los a partir dos conceitos vistos nessa seção. Basicamente, aplica-se a equação de Clapeyron para cada balão e depois para a mistura toda, como veremos agora. Para a situação inicial, utilizamos a equação de Clapeyron em ambos os balões e temos:

$$\begin{cases} N_2: PV = nRT \Rightarrow n_{N_2} = \frac{3}{RT} \\ O_2: PV = nRT \Rightarrow n_{O_2} = \frac{10}{RT} \end{cases}$$

Para situação final, temos uma mistura de gases, com  $n = n_{N_2} + n_{O_2}$  mols num volume de  $V = 3 + 2 = 5$  L. Logo, aplicando a equação de Clapeyron a essa mistura, obtemos:

$$PV = nRT \Rightarrow P = \frac{\left(\frac{10}{RT} + \frac{3}{RT}\right)RT}{3 + 2} = \frac{13}{5} = 2,60 \text{ atm}$$

Logo, a alternativa correta é a letra c).■

Observação: Um erro comum ao se usar pressão parcial e volume parcial é escrever a equação de Clapeyron da seguinte forma:

$$P_a V_a = n_a RT \text{ (ERRADO!!)}$$

Isso é errado, pois a pressão parcial é definida no volume em que a mistura se encontra e não no volume parcial!! O mesmo vale para o volume parcial. Logo, só escrevemos:

$$P_a V_{\text{total}} = n_a RT \text{ e } P_{\text{total}} V_a = n_a RT$$

## 6. Densidade dos Gases

Nesta seção, iremos deduzir uma expressão para a densidade de um gás ideal. Sabemos, pela equação de Clapeyron, que:

$$PV = nRT$$

Mas, como  $n = \frac{m}{M}$ , obtemos:

$$PV = \frac{mRT}{M} \Rightarrow \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}$$

Porém, a relação de massa por volume é a densidade, portanto, a densidade de um gás é dada por:

$$\boxed{d = \frac{PM}{RT}}$$

Observe a tabela abaixo:

Essa fórmula condiz com o esperado, pois a densidade é proporcional à massa molar (M) da molécula gasosa, uma vez que são fixos a pressão e a temperatura, o que pode ser confirmado na tabela acima.

Só que, quando trabalhamos com densidades de gases, quase nunca estamos trabalhando com gases puros, e sim com misturas gasosas. Abaixo, mostraremos como é feito o cálculo para a densidade de uma mistura gasosa.

## 7. Cálculo da densidade para misturas gasosas:

Para facilitar os cálculos, suponhamos que a mistura gasosa possui os gases A e B. Considere ainda que a fração molar de A seja  $X_A$  (observe que a de B está automaticamente determinada, pois  $X_B + X_A = 1$ ).

Para calcular a densidade dessa mistura, vamos usar a massa molar média, que é definida como sendo:

$$\bar{M} = \frac{m_{total}}{n_{total}}$$

A massa total é dada por:

$$m_{total} = m_A + m_B = n_A M_A + n_B M_B = n_A M_A + (n_{total} - n_A) M_B$$

Jogando na expressão acima, obtemos:

$$\bar{M} = \frac{n_A M_A + (n_{total} - n_A) M_B}{n_{total}} = \left( \frac{n_A}{n_{total}} \right) M_A + \left( 1 - \frac{n_A}{n_{total}} \right) M_B$$

Utilizando-se do fato que  $X_A = \frac{n_A}{n_{total}}$  obtemos:

$$\bar{M} = X_A M_A + (1 - X_A) M_B$$

Mas  $X_A + X_B = 1 \Rightarrow X_B = 1 - X_A$ . Portanto:

$$\boxed{\bar{M} = X_A M_A + X_B M_B}$$

Agora basta aplicar essa massa molar média na fórmula da densidade e obtemos a densidade da mistura gasosa.

**Observação:** Esse procedimento pode ser estendido para uma mistura de mais de 2 gases. Basta usar uma ideia semelhante à que foi desenvolvida acima. Deixaremos como exercício para o leitor obter a relação da massa média na lista de exercícios.

**Exercício 6:** (ITA-05) Uma cesta portanto uma pessoa deve ser suspensa por meio de balões, sendo cada qual inflado com 1 m<sup>3</sup> de hélio na temperatura local (27 °C). Cada balão vazio com seus apetrechos pesa 1,0 N. São dadas a massa atômica do oxigênio A<sub>O</sub> = 16, a do nitrogênio A<sub>N</sub> = 14, a do hélio A<sub>He</sub> = 4 e a constante dos gases R = 0,082 atm.l.mol<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>. Considerando que o conjunto pessoa e cesta pesa 1000 N e que a atmosfera é composta de 30% de O<sub>2</sub> e de 70% de N<sub>2</sub>, determine o número mínimo de balões necessários.  
Considere g = 10 m/s<sup>2</sup>

**Resolução:** Vamos interpretar o problema:

O sistema cesta + pessoa só começará a flutuar a partir do momento em que o empuxo do ar for igual ao peso do sistema. Suponha que precisamos de n balões. O problema é achar qual o valor de n. Primeiramente, vamos analisar a massa de hélio:

1) Massa de hélio:

A densidade do hélio é dada por:

$$d_{He} = \frac{PM}{RT} = \frac{(1 \text{ atm}) \left(4 \frac{g}{mol}\right)}{(0,082 \text{ atm.l.mol}^{-1}.K^{-1})(300 \text{ K})} = 0,163 \text{ g/l} = 0,163 \text{ kg/m}^3$$

Logo, a massa de hélio para cada balão é:

$$m_{Hélio} = d_{He} V_{balão} = 0,163 \times 1 = 0,163 \text{ kg}$$

Como  $P_{balão} = 1,0 \text{ N}$ , a massa de cada balão é  $m_{balão} = 0,1 \text{ kg}$

Assim, a massa para  $n$  balões é dada por:

$$m = 0,163n + 0,1n = 0,263n \text{ kg}$$

2) Densidade do ar: Vamos usar o que foi desenvolvido na teoria para calcular a densidade do ar.

$$\bar{M}_{ar} = X_{O_2} M_{O_2} + X_{N_2} M_{N_2} = 0,3(2 \times 16) + 0,7(2 \times 14) = 29,2 \text{ g/mol}$$

Portanto, a densidade do ar é dada por:

$$d_{ar} = \frac{P\bar{M}_{ar}}{RT} = \frac{(1 \text{ atm})(29,2 \text{ g/mol})}{(0,082 \text{ atm.l.mol}^{-1}.K^{-1})(300 \text{ K})} = 1,19 \text{ g/l} = 1,19 \text{ kg/m}^3$$

3) Agora, o balão irá voar quando o empuxo do ar for igual ao peso do sistema (deve-se somar a massa do balão de hélio!):

$$E_{ar} = P_{sistema} + mg \Rightarrow d_{ar} V_{balões} g = 1000 + (0,263n)g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{ar} n V_{balão} = 300 + 0,263n \Rightarrow 1,19 \times 1 \times n = 100 + 0,263n$$

$$\Rightarrow n(1,19 - 0,263) = 100 \Rightarrow n = 107,87$$

Como  $n$  é inteiro e o valor deu entre 107 e 108, precisamos de, no mínimo de 108 balões para levantar o sistema.

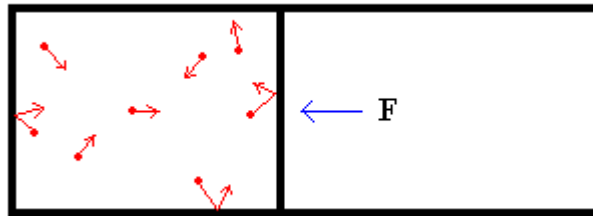
■

## 8. Noções de Teoria Cinética dos Gases

A teoria cinética dos gases é uma das teorias mais bem sucedidas, pois ela relaciona muitos aspectos microscópicos com propriedades observadas em uma escala macroscópica, tudo a partir de simples hipóteses. Vamos utilizar de alguns resultados importantes dessa teoria, principalmente àqueles relacionados à energia cinética das moléculas gasosas. Antes disso, vamos a algumas dessas hipóteses:

- As moléculas se movimentam em movimento desordenado;
- O volume das moléculas são desprezíveis;
- As colisões que ocorrem entre as moléculas e na parede do recipiente são elásticas e de duração desprezível;
- A mecânica de Newton pode ser usada para descrever essas colisões;

Vamos obter uma expressão para a energia cinética de moléculas gasosas. Para isso, considere um recipiente como o mostrado na figura abaixo:

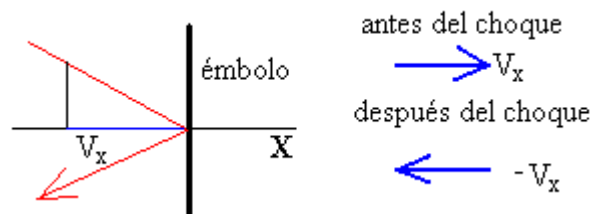


*Moléculas em movimento desordenado*

A força necessária para manter o êmbolo imóvel é dada por:

$$F = P_{\text{gás}} A$$

Sendo  $P_{\text{gás}}$  a pressão exercida pelo gás no êmbolo e  $A$  a área do êmbolo. Para acharmos tal força, considere uma colisão de uma partícula gasosa com o êmbolo. Observe a figura que representa o esquema dessa colisão:



*Colisão com o êmbolo e conservação do momento linear no eixo  $x$*

Como, por hipótese, as colisões são elásticas, então a partícula de massa  $m$  que vem com velocidade  $v_x$  no eixo  $x$  deverá retornar com velocidade  $-v_x$  no eixo  $x$ . Logo, podemos escrever a variação do momento linear (ou quantidade de movimento) como:



$$\Delta p = mv_x - m(-v_x) = 2mv_x$$

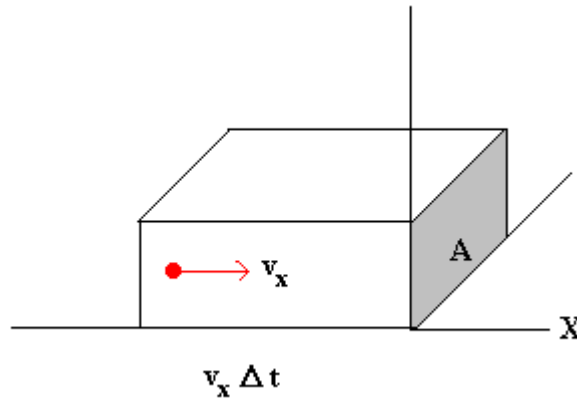
Mas, como a variação do momento é dada por:  $\Delta p = F\Delta t$ , temos que:

$$F_{\text{molécula}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{\Delta t}$$

Além disso, num pequeno intervalo de tempo, há  $N_x$  partículas que colidem com o êmbolo, logo a força total que age no êmbolo por parte do gás é:

$$F_{\text{gás}} = \frac{2mv_x N_x}{\Delta t}$$

Pode-se calcular o valor de  $N_x$ . Como as partículas estão em movimento desordenado é de se supor que metade das partículas dessa amostra se movem na direção positiva do eixo x com velocidade  $v_x$  e a outra metade se move em direção contrária com velocidade  $-v_x$  (tudo isso é estatístico). Logo, no mesmo intervalo de tempo considerado, as partículas que se chocam com o êmbolo irão descrever um sólido de altura  $v_x \Delta t$  e de área A, como mostrado na figura abaixo:



*Movimento das partículas que se chocam com o êmbolo*

Considere  $w$  como sendo o número de partículas por unidade de volume. Logo o  $N_x$  é:

$$N_x = \frac{wA(v_x \Delta t)}{2}$$

Ou seja, o  $N_x$  é a densidade volumétrica de partículas (representada por  $w$ ) multiplicada pelo volume ( $A(v_x \Delta t)$ ). O fator  $1/2$  é devido à metade das partículas se movimentarem no sentido oposto, as quais não se chocaram com o êmbolo. Substituindo o  $N_x$  na equação de força do gás:

$$F_{gás} = \frac{2mv_x N_x}{\Delta t} = \frac{2mv_x (wAv_x \Delta t)}{2\Delta t} = wAmv_x^2$$

Logo, a pressão do gás é dada por:

$$P_{gás} = \frac{F_{gás}}{A} = wmv_x^2$$

Vamos utilizar agora de um resultado estatístico. A velocidade das partículas é dada por:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Mas, na média, as partículas se movem com velocidades nas direções x, y, z com velocidades de mesma magnitude, ou seja:

$$v_x^2 = v_y^2 = v_z^2$$

Logo, a velocidade  $v_x$  é dada por:

$$v_x^2 = \frac{v^2}{3}$$

Portanto, a pressão do gás é:

$$P_{gás} = \frac{wmv^2}{3} = \frac{2}{3}w \left( \frac{mv^2}{2} \right) = \frac{2}{3}wE_c$$

O fator  $mv^2/2$  é a energia cinética, por isso o colocamos em evidência como acima e, ainda, tem-se que o número  $w$  é a quantidade de moléculas por volume, e vale:

$$w = \frac{N}{V} = \frac{nN_o}{V}$$

$$\Rightarrow P_{gás} = \frac{2}{3} \frac{nN_o}{V} E_c$$

Onde o  $N_o$  o número de Avogadro. Agora estamos próximos do resultado procurado. Utilizando a equação de Clapeyron:

$$PV = nRT$$

Substituindo a pressão do gás nela:

$$\left( \frac{\frac{2}{3} n N_o}{V} E_c \right) V = nRT \Rightarrow E_c = \frac{3}{2} \left( \frac{R}{N_o} \right) T$$

A relação  $\left( \frac{R}{N_o} \right) = k$  é conhecida como constante de Boltzmann e vale  $1,380 \times 10^{-23} J/K$ .

$$\Rightarrow E_{c, \text{mol écula}} = \frac{3}{2} kT$$

Essa energia é a energia cinética média por molécula. Para acharmos a total, precisamos de multiplicar por N, onde N é a quantidade de moléculas.

$$E_{c, \text{total}} = \frac{3}{2} N \left( \frac{R}{N_o} \right) T$$

Mas  $\frac{N}{N_o} = n$  (*número de mols*). Finalmente, obtemos:

$$\boxed{E_{c, \text{total}} = \frac{3}{2} nRT}$$

Observe que o resultado mostra que a energia média por molécula só depende da temperatura! Isso leva a definição cinética da temperatura, como sendo a medida de agitação térmica das moléculas. Em posse dessas equações de energia que obtivemos, podemos calcular a velocidade das moléculas gasosas, também chamada de velocidade quadrática média. Para isso, fazemos:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT \Rightarrow v^2 = \frac{3kT}{m} = \frac{3RT}{mN_o}$$

Mas,  $m$  é a massa de uma única molécula gasosa e  $N_0$  o número de Avogadro. Esse produto é a massa molecular da partícula. Portanto:

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

**Observação:** Para fins do vestibular, basta que o leitor saiba as três fórmulas em destaque nesta seção. Acredita-se que exibir como se chega a esse resultado importante para o melhor entendimento do assunto. Veja abaixo como se aplica esses resultados!

**Exercício 7:** (ITA- 2010) A temperatura para a qual a velocidade associada a energia cinética média de uma molécula de nitrogênio,  $N_2$ , é igual à velocidade de escape desta molécula da superfície da Terra é de, aproximadamente:

Esse problema é de simples aplicação da teoria vista acima. Basta igual  $v$  à velocidade de escape!

$$v = v_{escape} \Rightarrow \sqrt{\frac{3RT}{M_{N_2}}} = v_{escape} \Rightarrow T = \frac{M_{N_2} v_{escape}^2}{3R}$$

A velocidade é dada por:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM_{terra}}{R_{terra}}} = 11,2 \times 10^3 m/s$$

Assim:

$$T = \frac{(28 \times 10^{-3} kg/mol)(11,2 \times 10^3 m/s)^2}{3 \times (8,31 J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1})} \cong 1,4 \times 10^5 K$$

■

### **Lista de exercícios:**

1. (ITA - 2006) Sejam o recipiente (1) , contendo 1 mol de  $H_2$  (massa molecular  $M = 2$ ) e o recipiente (2) contendo 1 mol de  $He$  (massa atômica  $M = 4$ ) ocupando o mesmo volume, ambos mantidos a mesma pressão. Assinale a alternativa correta:

- a) A temperatura do gás no recipiente 1 é menor que a temperatura do gás no recipiente 2.
- b) A temperatura do gás no recipiente 1 é maior que a temperatura do gás no recipiente 2.
- c) A energia cinética média por molécula do recipiente 1 é maior que a do recipiente 2.

- d) O valor médio da velocidade das moléculas no recipiente 1 é menor que o valor médio da velocidade das moléculas no recipiente 2.
- e) O valor médio da velocidade das moléculas no recipiente 1 é maior que o valor médio da velocidade das moléculas no recipiente 2.

2. (ITA - 2004) A linha das neves eternas encontra-se a uma altura  $h_0$  acima do nível do mar, onde a temperatura do ar é  $0^\circ\text{C}$ . Considere que, ao elevar-se acima do nível do mar, o ar sofre uma expansão adiabática que obedece a relação  $\Delta p/p = (7/2)(\Delta T/T)$ , em que  $p$  é a pressão e  $T$ , a temperatura. Considerando o ar um gás ideal de massa molecular igual a  $30u$  (unidade de massa atômica) e a temperatura ao nível do mar igual a  $30^\circ\text{C}$ , assinale a opção que indica aproximadamente a altura  $h_0$  da linha das neves.

- a) 2,5km
- b) 3,0km
- c) 3,5km
- d) 4,0km
- e) 4,5km

3. (ITA - 2005) Estime a massa de ar contida numa sala de aula. Indique claramente quais as hipóteses utilizadas e os qualitativos estimados das variáveis empregadas.

4. (ITA - 1999) O pneu de um automóvel é calibrado com ar a uma pressão de  $3,10 \times 10^5 \text{ Pa}$  a  $20^\circ\text{C}$ , no verão. Considere que o volume não varia e que a pressão atmosférica se mantém constante e igual a  $1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$ . A pressão do pneu, quando a temperatura cai a  $0^\circ\text{C}$ , no inverno é:

- |                                    |                                    |                                    |
|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| a) $3,83 \times 10^5 \text{ Pa}$ . | b) $1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$ . | c) $4,41 \times 10^5 \text{ Pa}$ . |
| d) $2,89 \times 10^5 \text{ Pa}$ . | e) $1,95 \times 10^5 \text{ Pa}$ . |                                    |

Observação: entenda a pressão  $3,10 \times 10^5 \text{ Pa}$  como sendo a pressão efetiva, ou seja, que a pressão colocada no pneu é  $3,10 \times 10^5 \text{ Pa}$  acima da pressão atmosférica.

5. (ITA - 1999) Considere uma mistura de gases  $\text{H}_2$  e  $\text{N}_2$  em equilíbrio térmico. Sobre a energia cinética média e sobre a velocidade média das moléculas de cada gás, pode-se concluir que:

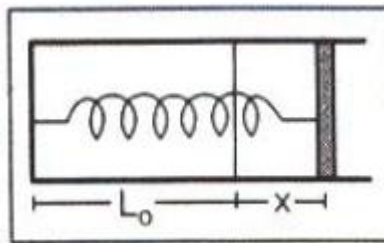
- a) as moléculas de  $\text{N}_2$  e  $\text{H}_2$  têm a mesma energia cinética média e a mesma velocidade média.
- b) ambas têm a mesma velocidade média, mas as moléculas de  $\text{N}_2$  têm maior energia cinética média.
- c) ambas têm a mesma velocidade média, mas as moléculas de  $\text{H}_2$  têm maior energia cinética média.
- d) ambas têm a mesma energia cinética média, mas as moléculas de  $\text{N}_2$  têm maior velocidade média.
- e) ambas têm a mesma energia cinética média, mas as moléculas de  $\text{H}_2$  têm maior velocidade média.

6. (ITA - 1998) Uma bolha de ar de volume  $20,0 \text{ mm}^3$ , aderente à parede de um tanque de água a  $70 \text{ cm}$  de profundidade, solta-se e começa a subir. Supondo que a tensão superficial da bolha é desprezível e que a pressão atmosférica é de  $1 \times 10^5 \text{ Pa}$ , logo que alcança a superfície seu volume é aproximadamente:

- a)  $19,2 \text{ mm}^3$ .  
 b)  $20,1 \text{ mm}^3$ .  
 c)  $20,4 \text{ mm}^3$ .  
 d)  $21,4 \text{ mm}^3$ .  
 e)  $34,1 \text{ mm}^3$ .

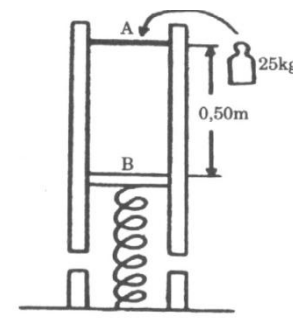
7. (ITA - 1997) Um mol de gás perfeito está contido em um cilindro de secção  $S$  fechado por um pistão móvel, ligado a uma mola de constante elástica  $k$ . Inicialmente, o gás está na pressão atmosférica  $P_0$  e temperatura  $T_0$ , e o comprimento do trecho do cilindro ocupado pelo gás é  $L_0$ , com a mola não estando deformada. O sistema gás-mola é aquecido e o pistão se desloca de uma distância  $x$ . Denotando a constante de gás por  $R$ , a nova temperatura do gás é:

- a)  $T_0 + \frac{x}{R}(P_0 S + kL_0)$   
 b)  $T_0 + \frac{L_0}{R}(P_0 S + kx)$   
 c)  $T_0 + \frac{x}{R}(P_0 S + kx)$   
 d)  $T_0 + \frac{kx}{R}(L_0 + x)$   
 e)  $T_0 + \frac{x}{R}(P_0 S + kL_0 + kx)$



8. (ITA - 1995) A figura mostra um tubo cilíndrico com secção transversal constante de área  $S = 1,0 \times 10^{-2} \text{ m}^2$  aberto nas duas extremidades para a atmosfera cuja pressão é  $P_a = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$ . Uma certa quantidade de gás ideal está aprisionada entre dois pistões A e B que se movem sem atrito. A massa do pistão A é desprezível e a do pistão B é  $M$ . O pistão B está apoiado numa mola de constante  $k = 2,5 \times 10^3 \text{ N/m}$  e a aceleração da gravidade é  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Inicialmente, a distância de equilíbrio entre os pistões é de  $0,50 \text{ m}$ . Uma massa de  $25 \text{ kg}$  é colocada vagarosamente sobre A, mantendo-se constante a temperatura. O deslocamento do pistão A para baixo, até a nova posição de equilíbrio, será:

- a)  $0,40 \text{ m}$   
 b)  $0,10 \text{ m}$   
 c)  $0,25 \text{ m}$   
 d)  $0,20 \text{ m}$   
 e)  $0,50 \text{ m}$



9. (ITA - 1994) Dois blocos de mesma massa, um com volume  $V_1$  e densidade  $\rho_1$  e outro com densidade  $\rho_2 < \rho_1$  são colocados cada qual num prato de uma balança de dois pratos. A que valor mínimo de massa deverá ser sensível esta balança para que se possa observar a diferença entre uma pesagem em atmosfera composta de um gás ideal de massa molecular  $\mu$  à temperatura  $T$  e pressão  $p$  e uma pesagem no vácuo?

- a)  $\left(\frac{p\mu V_1}{RT}\right) \left[\frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_2}\right]$       b)  $\left(\frac{p\mu V_1}{RT}\right) \left[\frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2}\right]$       c)  $\left(\frac{p\mu V_1}{RT}\right) \left[\frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1}\right]$   
d)  $\left(\frac{p\mu V_1}{RT}\right) \left[\frac{\rho_2}{(\rho_1 - \rho_2)}\right]$       e)  $\left(\frac{p\mu V_1}{RT}\right) \left[\frac{\rho_2}{(\rho_1 - \rho_2)}\right]$

10. (ITA - 1993) Dois balões de vidro de volumes iguais estão ligados por meio de um tubo de volume desprezível e ambos contêm hidrogênio a  $0^\circ\text{C}$ . Eles estão a uma pressão de  $1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$ . Qual será a pressão do gás se um dos bulbos for imerso em água a  $100^\circ\text{C}$  e o outro for mantido a  $-40^\circ\text{C}$ ?

- a) a pressão permanece a mesma  
b)  $1,06 \times 10^5 \text{ Pa}$   
c)  $2,32 \times 10^5 \text{ Pa}$   
d)  $1,25 \times 10^5 \text{ Pa}$   
e)  $1,20 \times 10^5 \text{ Pa}$

11. (ITA - 1988) Considere um gás perfeito monoatômico na temperatura de  $0^\circ\text{C}$ , sob uma pressão de 1 atm, ocupando um volume de 56 litros. A velocidade quadrática média das moléculas é  $1840 \text{ m.s}^{-1}$ . Então a massa do gás é: (Dado:  $R = 8,32 \text{ J.K}^{-1}$ )

- a) 55 g      b) 100 g      c) 5 g  
d) 150 g      e) 20 g

12. (ITA - 1988) Calcular a massa de gás hélio (peso molecular 4,0), contida num balão, sabendo-se que o gás ocupa um volume igual a  $5,0 \text{ cm}^3$  e está a uma temperatura de  $-23^\circ\text{C}$  e a uma pressão de 30 cmHg.

- a) 1,86 g      b) 46 g      c) 96 g  
d) 186 g      e) 385 g

13. (ITA - 1992) Uma certa quantidade de gás expande-se adiabaticamente e quase estaticamente desde uma pressão inicial de 2,0 atm e volume de 2,0 litros na temperatura de  $21^\circ\text{C}$  até atingir o dobro de seu volume. Sabendo-se que para este gás  $\gamma = C_p/C_v = 2,0$ , pode-se afirmar que a pressão final e a temperatura final são respectivamente:

- a) 0,5 atm e  $10,5^\circ\text{C}$ .      b) 0,5 atm e  $-126^\circ\text{C}$ .      c) 2,0 atm e  $10,5^\circ\text{C}$ .  
d) 2,0 atm e  $-126^\circ\text{C}$ .      e) n.d.a.

14. (ITA-92) Nas afirmações a seguir:

I- A energia interna de um gás ideal depende só da pressão.

II- Quando um gás passa de um estado 1 para outro estado 2, o calor trocado é o mesmo qualquer que seja o processo.

III- Quando um gás passa de um estado 1 para outro estado 2, a variação da energia interna é a mesma qualquer que seja o processo.

IV- Um gás submetido a um processo quase-estático não realiza trabalho.

V- O calor específico de uma substância não depende do processo como ela é aquecida.

VI- Quando um gás ideal recebe calor e não há variação de volume, a variação da energia interna é igual ao calor recebido.

VII- Numa expansão isotérmica de um gás ideal o trabalho realizado é sempre menor do que o calor absorvido.

As duas corretas são:

a) II e III.

b) III e IV.

c) III e V.

d) I e VII.

e) III e VI.

**Gabarito:**

1. C e E

2. B

3. Dissertativa

4. D

5. E

6. D

7. E

8. D

9. A

10. B

11. C

12. E

13. B

14. E